КВАНТ
ЖУРНАЛ

1973

1 - 12

НОМЕР
1

Основан в 1970 году

Квант

1973

1

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В НОМЕРЕ:

2 *С. Г. Гиндикин.* Золотая теорема
10 *Б. М. Смирнов.* Тепловой баланс Земли
14 *А. Т. Колотов.* Об одном разбиении прямоугольника

Лаборатория «Кванта»

17 *Х. Рачлис.* Загадка водяной капли

Математический кружок

18 *Л. М. Лоповок.* Вписанный шестиугольник

Задачник «Кванта»

25 Задачи М181—М185; Ф193—Ф197
26 Решения задач М141—М145; Ф159—Ф163

Практикум абитуриента

35 *А. А. Рывкин.* Формализация условий задач
40 Московский инженерно-физический институт
43 *И. А. Зайцев.* Уравнение газового состояния. Работа и теплоемкость газа

Информация

48 Всесоюзная ЗФМШ при МГУ
50 *Ж. М. Раббот.* Новый прием в ВЗМШ
51 *Т. А. Чугунова.* Заочная физико-техническая школа
54 *И. А. Дьяконов, А. Г. Мордкович, И. И. Наслузов.* Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы.

56 **Ответы, указания, решения**

«Квант» для младших школьников

64 *А. Ю. Сойфер.* Наш зоопарк
Задачи *(3-я стр. обложки)*
Смесь *(стр. 13, 23, 33, 50, 63)*

На первой странице обложки приведена конфигурация из прямых и окружностей, о которой рассказывается в заметке В. Н. Березина «Окружность Микеля» (см. стр. 23).

На второй странице обложки — Обсерватория Болонского университета. Здесь проводил свои первые наблюдения звездного неба Николай Коперник.

В февральском номере нашего журнала мы поместим материалы, посвященные 500-летию со дня рождения великого польского ученого.

Главный редактор
академик
И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик
А. Н. Колмогоров
Редакционная коллегия:
Л. А. Арцимович,
М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
И. Н. Бронштейн,
Н. Б. Васильев,
И. Ф. Гинзбург,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
А. И. Климанов
(*главный художник*),
С. М. Козел,
В. А. Лешковцев
(*зам. главного редактора*),
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
М. Д. Миллионщиков,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
М. Л. Смолянский
(*зам. главного редактора*),
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.
Редакция:
В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
Т. М. Макарова
(*художественный редактор*),
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
Л. В. Чернова
(*зав. редакцией*).

Оргкомитет
Московской
математической
олимпиады
Московское математическое общество

Корректор *Н. Б. Румянцева*
117071, Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11.

Сдано в набор 15/X—72 г.
Подписано в печать 24/XI—72 г.
Бумага 70×100/16 Физ. печ. л. 4,
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,86
Тираж первого
завода 300 000 экз
Т-16898. Цена 30 коп.
Зак. 2044
Чеховский полиграфический комбинат «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области
Рукописи не возвращаются

Золотая теорема

С. Г. Гиндикин

> *«Свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдения и открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгими доказательствами. Имеется даже много свойств чисел, с которыми мы хорошо знакомы, но которые мы все еще не в состоянии доказать».*
>
> *Л. Эйлер*

Мы совершим экскурс к истокам современной теории чисел — отрасли математики, изучающей натуральные числа. В то время математики подмечали удивительно простые и красивые закономерности в мире натуральных чисел. Но часто интригующая простота формулировок оборачивалась неприступностью решения. Лобовые атаки не давали успеха, приходилось придумывать обходные пути, создавать совершенно новый аппарат.

Мы расскажем здесь об одной такой задаче*), формулировка которой понятна школьнику, знающему, что такое простое число. Но решить эту задачу далеко не просто, и первый шаг на пути ее решения совсем не сразу удалось сделать великому Эйлеру. Гипотезу, сформулированную Эйлером (но не доказанную им), пытались доказать Лангранж и Лежандр; удалось это сделать девятнадцатилетнему Гауссу. Это была его вторая работа **).

Гаусс назвал доказанную им теорему «золотой теоремой». В ней идет речь о том, какими могут быть остатки от деления квадратов целых чисел на простые числа. Мы не будем сейчас приводить полной формулировки утверждения, доказанного Гауссом, отложив это до стр. 5. Сейчас же мы поясним постановку задачи, введем некоторые термины и подробно рассмотрим частный случай «золотой теоремы», доказанный Эйлером.

Хорошо известны различные условия, необходимые для того, чтобы целое число было квадратом. Например, такое число может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Другое часто используемое свойство состоит в том, что квадрат целого числа или делится на 3 или при делении на 3 дает остаток 1 (докажите). Первое свойство можно сформулировать в тех же терминах, что и второе, заметив, что последняя цифра — это остаток от деления на 10.

Всюду ниже мы будем предполагать, что p — простое число, причем $p \neq 2$. Делить целые числа можно «с недостатком» или «с избытком». Иными словами, остатки можно считать положительными или отрицательными. Условимся выбирать остаток наименьшим по абсолютной величине.

Нетрудно доказать, что если p нечетно, то всякое целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = pq + r, \quad |r| \leqslant \frac{p-1}{2}, \tag{1}$$

где q и r — целые.

---

*) О других задачах теории чисел можно прочитать в журнале «Квант»: Башмаков М. И. *Нравится ли вам возиться с целыми числами?*, 3, 15, 1971; Башмаков М. И. *О постулате Бертрана*, 5, 4, 1971; Депман И. Я. *Совершенные числа*, 8, 1, 1971; Гиндикин С. Г. *Дебют Гаусса*, 1, 2, 1972; Гиндикин С. Г. *Малая теорема Ферма*, 10, 2, 1972.

**) О первой рассказывалось в статье «Дебют Гаусса» («Квант» № 1, 1972 г.).

Таблица 1

p	$k=\frac{p-1}{2}$	Вычеты (остатки) по модулю p																
3	1								—1	0	1							
5	2							—2	—1	0	1	2						
7	3						—3	—2	—1	0	1	2	3					
11	5				—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5			
13	6			—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6		
17	8	—8	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Будем называть r остатком от деления n на p, или вычетом числа n по модулю p. Это обозначается так: $n \equiv r \pmod p$ *).

Выпишем в таблице 1 вычеты для нескольких первых простых чисел $p>2$. Нас интересует, какие вычеты (остатки) могут иметь квадраты целых чисел. Эти остатки мы будем называть квадратичными вычетами, а остальные — квадратичными невычетами.

Числа n^2 и r^2, где r — остаток числа n по модулю p, имеют один и тот же остаток при делении на p **). Поэтому, если мы хотим найти квадратичные вычеты, то достаточно возводить в квадрат лишь вычеты, то есть целые числа r, $|r| \leqslant k$, $k=\frac{p-1}{2}$. При этом, разумеется, достаточно рассматривать $r \geqslant 0$.

Проведем вычисления для простых чисел из предыдущей таблицы. Составим новую таблицу, в которой красные числа отвечают квадратичным вычетам (таблица 2). Попытаемся подметить некоторые закономерности и оценить степень их общности. Во-первых, *в каждой строке есть в точности $k+1$ красное число.* Покажем, что так обстоит дело для всех простых $p>2$. Из сказанного выше следует, что для каждого нечетного p (даже не простого) квадратичных вычетов не больше $k+1$. Мы покажем, что их точно $k+1$, если убедимся, что все числа r^2 $(0 \leqslant r \leqslant k)$ дают при делении на p различные остатки. Если $r_1 > r_2$ и r_1^2, r_2^2 дают одинаковые остатки, то $r_1^2 - r_2^2$ делится на p. Поскольку p — простое число, то $r_1 + r_2$ или $r_1 - r_2$ должно делиться на p, чего не может быть, так как $0 < r_1 \pm r_2 < 2k < p$. Здесь мы впервые воспользовались простотой p (покажите, что для со-

Таблица 2

p	k	Квадратичные вычеты и невычеты по модулю p																
3	1								—1	**0**	**1**							
5	2							—2	**—1**	**0**	**1**	2						
7	3						**—3**	—2	—1	**0**	**1**	**2**	3					
11	5				—5	—4	—3	**—2**	—1	**0**	**1**	2	**3**	**4**	**5**			
13	6			—6	—5	**—4**	**—3**	—2	**—1**	**0**	**1**	2	**3**	**4**	5	6		
17	8	**—8**	—7	—6	—5	**—4**	—3	**—2**	**—1**	**0**	**1**	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**

---

*) То, что мы называем вычетом (остатком), обычно называют абсолютно наименьшим вычетом (остатком). Мы сократили название, так как других вычетов нам не встретится. Обозначение $n \equiv r \pmod p$ также используется обычно в более общей ситуации: оно означает, что $n-r$ делится на p. См. также статью «Малая теорема Ферма» («Квант» № 10, 1972 г.); в дальнейшем, ссылаясь на эту статью, мы будем писать кратко: «МТФ».

**) Подробнее об арифметике остатков см. в МТФ.

ставных p наше утверждение не верно).

Далее, очевидно, что 0 *и* 1 *являются красными во всех строчках*. Что касается остальных столбцов, то сразу не видна закономерность, согласно которой в них появляются красные числа. Начнем с $a = -1$. Оно является красным при $p = 5, 13, 17, \ldots$ и черным при $p = 3, 7, 11, \ldots$ Вы, может быть, заметили, что простые числа первой группы при делении на 4 дают остаток 1, а второй — остаток — 1 (заметьте, что простые числа $p \neq 2$ других остатков вообще давать не могут). Итак, можно предположить, что —1 *является квадратичным вычетом для простых чисел вида* $p = 4l + 1$ *и квадратичным невычетом для* $p = 4l - 1$. Эту закономерность первым заметил Ферма (1601—1665), однако оставил ее без доказательства. Попытайтесь найти доказательство самостоятельно! Вы убедитесь, что главная трудность в том, что не видно, как воспользоваться простотой p, а без этого предположения утверждение становится неверным.

Первое доказательство после нескольких неудачных попыток нашел в 1847 году Эйлер (1707—1783). В 1855 году Эйлер нашел другое, очень изящное доказательство, использующее малую теорему Ферма: *Если p — простое число, то для всякого целого a, $0 < |a| < p$:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \qquad (2)$$

Известно много различных доказательств этой теоремы. Одно из них приведено в МТФ. Здесь мы приводим другое доказательство, близкое по идее к другим рассмотрениям этой статьи.

Доказательство. При $p = 2$ утверждение очевидно, и можно считать p нечетным. Рассмотрим p чисел $0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots, \pm ka$; $k = \frac{p-1}{2}$. Все эти числа при делении на p дают разные остатки, так как в противном случае $r_1a - r_2a$, $r_1 > r_2$, $|r| \leqslant k$, $|r_2| \leqslant k$, делится на p, но a не делится на p и $r_1 - r_2$ не делится на p, так как $0 < r_1 - r_2 < p$. Перемножим те из рассматриваемых чисел, которые отличны от нуля; получим $(-1)^k (k!)^2 a^{p-1}$. Поскольку среди остатков сомножителей содержатся все ненулевые вычеты и учитывая правило вычисления остатка произведения, получаем, что произведение имеет тот же вычет, что и $(-1)^k (k!)^2$, то есть $(k!)^3 (a^{p-1} - 1)$ делится на p. Так как $k!$ не делится на p $(0 < k < p)$, то на p делится $a^{p-1} - 1$, и доказательство окончено.

Следствие (критерий Эйлера квадратичности вычета). *Вычет $b \neq 0$ является квадратичным тогда и только тогда, когда*

$$b^k \equiv 1 \pmod{p}, \quad k = \frac{p-1}{2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Необходимость условия (3) устанавливается легко. Если $a^2 \equiv b \pmod{p}$, $0 < a < p$, то $a^{2k} = a^{p-1}$ и b^k должны иметь одинаковые вычеты, равные, в силу (2), 1. Достаточность показывается сложнее. Мы выведем ее из следующей леммы, доказанной в МТФ.

Лемма 1. *Если $P(x)$ — многочлен степени l, p — простое число, и имеется более l различных вычетов r по модулю p, для которых*

$$P(r) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad (4)$$

то (4) имеет место для всех вычетов.

Применим лемму к многочлену $P(x) = x^k - 1$. Тогда соотношению (4) удовлетворяет k ненулевых квадратичных вычетов. Однако имеется вычет ($r = 0$), не удовлетворяющий (4); значит, по лемме, все квадратичные невычеты должны не удовлетворять (4) и, следовательно, условие (3) достаточно.

Замечание. Для квадратичного невычета b имеем: $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$. Действительно, если $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv r \pmod{p}$, то $r^2 \equiv 1 \pmod{p}$, откуда $r = -1$. (Сравнению $r^2 \equiv 1 \pmod{p}$ удовлетворяют только два вычета: $r \equiv 1 \pmod{p}$, $r \equiv -1 \pmod{p}$).

Критерий Эйлера позволяет мгновенно решить вопрос о том, для каких p вычет —1 является квадратичным. Подставляя в (3) $b = -1$, получаем, что при $p = 4l + 1$ (3) выполняется (k — четно), а при $p = 4l - 1$ (3)

не выполняется (k — нечетно). Сформулированная выше гипотеза стала теоремой.

Задача 1. *Доказать, что если $p \neq 2$ есть простой делитель числа n^2+1, то $p = 4l+1$.*

Итак, мы доказали, что -1 — квадратичный вычет для $p = 4l+1$ и квадратичный невычет для $p = 4l-1$.

Обсудим некоторые особенности приведенного доказательства. Это утверждение состоит из двух частей: отрицательное утверждение для $p = 4l-1$ и положительное для $p = 4l+1$. В первом случае естественно пытаться найти некоторое свойство, которому квадратичные вычеты удовлетворяют, а -1 не удовлетворяет, что и сделал Эйлер. Найденное свойство оказалось характеристическим, то есть одновременно удалось доказать и вторую часть гипотезы. Если вы пробовали доказать эту часть утверждения самостоятельно, что вы, вероятно, пытались явно построить по $p = 4l+1$ число n^2, дающее при делении на p остаток -1. Доказательство Эйлера не эффективно в том смысле, что оно не дает явной конструкции для числа n по p, а лишь утверждает его существование. Иными словами гарантируется, что если мы будем перебирать числа $1, 2, \ldots, 2l$, возводить их в квадраты, брать остатки от деления квадратов на p, то рано или поздно мы получим -1. Остается открытым вопрос, нельзя ли указать более явную конструкцию n по p, не использующую процедуры перебора. Положительный ответ дал Лагранж (1736—1813) в 1773 году, используя следующую теорему.

Теорема Вильсона*). *Если $p = 2k+1$ есть простое число, то*

$$(-1)^k (k!)^2 \equiv -1 \pmod{p}. \qquad (5)$$

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся леммой 1. Положим $P(x) = (x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-k^2)$, $Q(x) = x^{2k}-1$. Тогда $R(x) = P(x) - Q(x)$ — многочлен степени не выше $2k-1$, который при $x = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$ делится на p (этим свойством обладают P и Q). По лемме $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех x. Собственно, новым фактом является лишь то, что $R(0) \equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $R(0) = (-1)^k (k!)^2 + 1$, получаем (5).

Следствие Лагранжа. *При $p = 4l+1$ имеем:* $[(2l)!]^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Задача 2. *Доказать, что если* (5) *верно, то p — простое число.*

Эта задача дает повод отметить, что в конструкции Лагранжа простота p существенна.

Выяснив, когда $a = -1$ является квадратичным вычетом, Эйлер, используя огромный числовой материал (его таблица намного превышала вторую из приведенных выше таблиц), пытается найти аналогичные условия для других a. Он подмечает, что при $a = 2$ все зависит от остатка при делении p на 8; 2 оказывается квадратичным вычетом для простых $p = 8l \pm 1$ и невычетом при $p = 8l \pm 3$ (простое число при делении на 8 может давать остатки ± 1, ± 3). Далее, 3 является квадратичным вычетом при $p = 12l \pm 1$ и квадратичным невычетом при $p = 12l \pm 5$. Эйлер высказывает гипотезу, что и в общем случае все определяется остатком от деления p на $4a$.

Гипотеза Эйлера*). *Число a одновременно является или квадратичным вычетом или квадратичным невычетом для всех простых чисел, входящих в арифметическую прогрессию $4aq + r$, $q = 0, 1, 2, \ldots$; $0 < r < 4a$.*

Ясно, что если $4a$ и r имеют общий делитель $s > 1$, то в арифметической прогрессии не будет ни одного простого числа. Если же первый член и разность прогрессии взаимно просты, то, как утверждает теорема Дирихле (1805—1859), в этой прогрессии имеется бесконечное число простых чисел (обобщение теоремы о бесконечности числа простых чисел в натуральном ряду).

Возвратимся к гипотезе Эйлера. Оказалось, что критерий Эйлера, который сослужил нам добрую службу при $a = -1$, отказывает уже при $a = 2$. Эйлеру не удалось разобраться в этом случае. Ему удалось доказать свою гипотезу, не считая $a = -1$, лишь при $a = 3$. Затем Лагранж, которого мы уже упоминали, доказал гипотезу при $a = 2, 5, 7$; Лежандр (1752—1833) в 1785 году предложил доказательство гипотезы для общего случая, которое, однако, содержало существенные пробелы.

---

*) Вильсон (1741—1793) — юрист, изучавший математику в Кембридже.

*) Гаусс, доказавший эту гипотезу, назвал ее «золотой теоремой».

Перейдем теперь ко второй части нашего рассказа, из которой наиболее настойчивые читатели узнают доказательство гипотезы Эйлера.

30 марта 1796 года девятнадцатилетний Гаусс доказал возможность построения правильного семнадцатиугольника циркулем и линейкой. С этого дня начинается дневник Гаусса — летопись его удивительных открытий. Вторая запись в дневнике появилась уже 8 апреля. В ней сообщалось, что найдено строгое доказательство «золотой» теоремы — так назвал Гаусс гипотезу Эйлера. Он переоткрыл ее, еще учась в брауншвейгской гимназии, когда ему не были доступны произведения Эйлера, Лагранжа, Лежандра, с которыми он познакомился лишь после переезда в Геттинген в 1795 году. Вначале он, как и его предшественники, замечает утверждение для $a=-1$, затем, уже угадав результат для общего случая, последовательно разбирает случай за случаем, продвинувшись дальше других: им рассмотрены $a=\pm 2$, ± 3, ± 5, ± 7. Наконец, 8 апреля 1796 года он находит общее доказательство, которое Кронекер (1823—1891) очень метко назвал «пробой сил гауссова гения». Доказательство проводится двойной индукцией по a и p; Гауссу приходится придумывать существенно различные соображения для рассмотрения восьми (!) различных случаев. Нужно было иметь не только поразительную изобретательность, но и удивительное мужество, чтобы не остановиться на этом пути. Позднее Гаусс нашел еще шесть доказательств «золотой» теоремы (ныне их известно около пятидесяти). Как это часто бывает, после того как теорема доказана, удается найти доказательства много более простые, чем первоначальное. Мы приведем здесь доказательство, мало отличающееся от третьего доказательства Гаусса. В его основе лежит ключевая лемма, доказанная Гауссом не ранее 1808 года.

Лемма 2. Пусть $p=2k+1$ — *простое число, a — целое число, $0<|a|\leqslant 2k$; $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — вычеты чисел $a, 2a, \ldots, ka$; ν — число отрицательных среди них. Тогда*

$$a^k \equiv (-1)^\nu \pmod p. \qquad (6)$$

Применяя критерий Эйлера, получаем такое следствие:

Критерий Гаусса квадратичности вычета. *Вычет является квадратичным тогда и только тогда, когда фигурирующее в лемме 2 число ν четно.*

Доказательство леммы 2. Заметим, что все вычеты $r_1, \ldots, r_k$ различны по абсолютной величине. Это следует из того, что сумма и разность любых двух из них не делится на p: $r_i \pm r_j = (i \pm j)a$, $i \neq j$; $|i \pm j| < p$, $|a| < p$. Таким образом, набор модулей $|r_1|, \ldots, |r_k|$ — это числа $1, 2, \ldots, k$ в некотором порядке. В результате произведение $a \cdot 2a \ldots ka = a^k k!$ при делении на p дает тот же остаток, что $r_1 \ldots r_k = (-1)^\nu k!$. Учитывая, что $k!$ не делится на простое число p, получаем (6).

Доказательство гипотезы Эйлера. Заметим, что в приводимом ниже рассуждении уже не используется простота p — она в полной мере использована в лемме Гаусса. Отметим на числовой оси точки (рис. 1, *а*, *б*) $m\frac{p}{2}$, если $a>0$, и $-m\frac{p}{2}$, если $a<0$; $m=0, 1, 2, \ldots, |a|$ — синие точки (m — *их номера*). *Занумеруем интервалы* с концами в этих точках по номерам левых концов (на рисунках номера интервалов — красные). Отметим теперь $a, 2a, \ldots, ka$ — зеленые точки; так как a — целое, не делящееся на p, то синие точки не могут совпасть

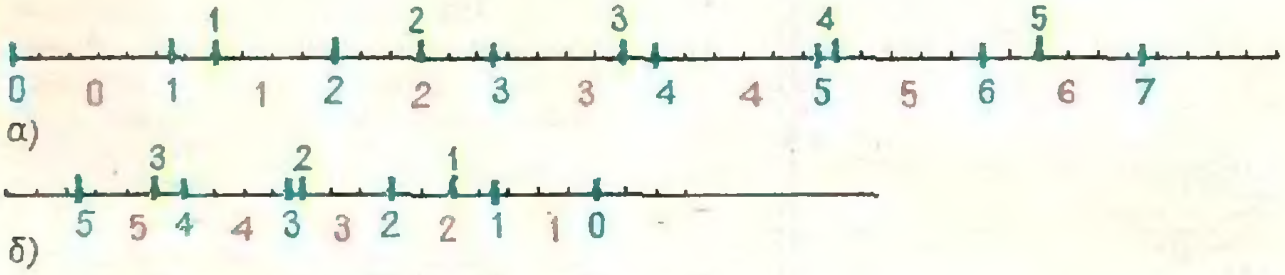


Рис. 1, а. На рисунке $p=11$ $(k=5)$, $a=7$, $\nu=3$.
Рис. 1, б. На рисунке $p=7$ $(k=3)$, $a=-5$, $\nu=2$.

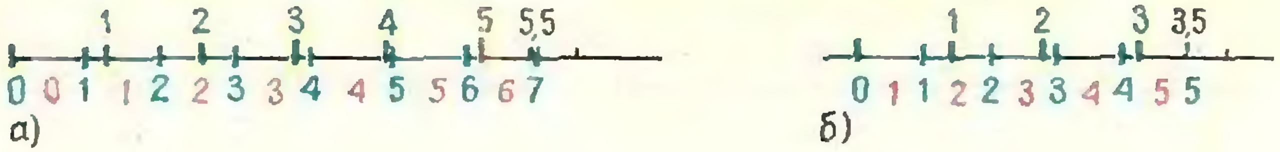


Рис. 2.

с зелеными, причем все зеленые точки попадут в какие-то из построенных интервалов $\left(|a|\frac{p}{2} > |a|k\right)$. Легко заметить, что фигурирующее в лемме число ν — это число зеленых точек, попавших в интервалы с нечетными номерами (докажите!).

Подвергнем теперь нашу картинку преобразованию подобия с коэффициентом $\frac{1}{a}$ (рис. 1 перейдет в рис. 2). При этом синие точки перейдут в точки, делящие отрезок $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ на $|a|$ равных частей, а зеленые точки — в целочисленные точки $1, 2, \ldots, k$.

Нумерация интервалов теперь будет зависеть от знака a: при $a > 0$ они нумеруются номерами левых концов, при $a < 0$ — номерами правых концов; ν — число целочисленных точек в интервалах с нечетными номерами. Если мы увеличим p на $4al$, то в каждый интервал добавится точно $2l$ целых точек. Это следует из того, что при сдвиге интервала на целое число количество целых точек в нем не меняется, а на любом отрезке целочисленной длины n или интервале длины n с нецелочисленными концами имеется ровно n целых точек (докажите!). Итак, при изменении p на $p + 4al$ величина ν изменится на четное число, а $(-1)^\nu$ не изменится. Значит, для всех p в арифметической прогрессии $p = 4aq + r$ значение $(-1)^\nu$ — одно и то же, и гипотеза Эйлера доказана.

Одновременно указан некоторый способ выяснить, является ли a квадратичным вычетом для p. Нужно взять остаток r от деления p на $4a$ (для удобства положительный); разделить $\left(0, \frac{r}{2}\right)$ на $|a|$ частей, занумеровав их номерами левых (правых) концов, если a — положительное (отрицательное); сосчитать число ν целых точек, попавших в интервалы с нечетными номерами; a — квадратичный вычет в том и только том случае, когда ν четно.

Проделаем эти вычисления для $a = 2$, чтобы подтвердить наблюдения Эйлера, о которых говорилось на стр. 5. Пусть $a = 2$; тогда достаточно рассмотреть $r = 1, 3, 5, 7$, поскольку в остальных случаях арифметическая прогрессия не будет содержать простых чисел. Как видно из рис. 3, число 2 является квадратичным вычетом для

$$p = 8q + 1,\ p = 8q + 7,$$

то есть $p = 8q \pm 1$.

Упражнение. Покажите, что -2 есть квадратичный вычет для $p = 8q + 1$, $p = 8q + 3$.

Аналогично рассматривается случай $a = \pm 3$. Приведем итоги вычислений (таблица для ν):

a \ r	1	5	7	11
3	0	1	1	2
−3	0	1	2	3

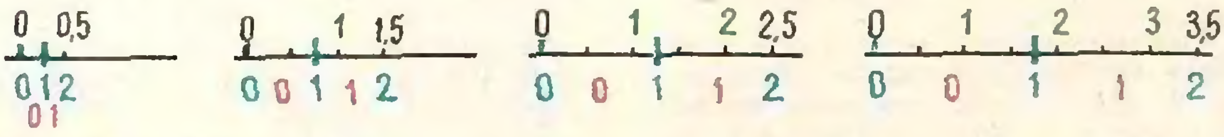


Рис. 3. $r = 1$, $a = 2$, $\nu = 0$; $r = 3$, $a = 2$, $\nu = 1$; $r = 5$, $a = 2$, $\nu = 1$; $r = 7$, $a = 2$, $\nu = 2$.

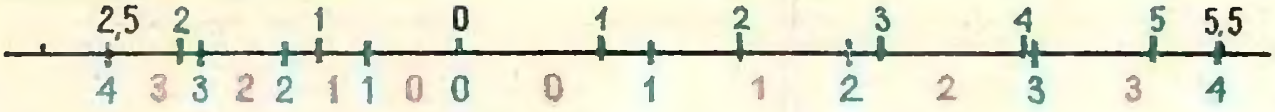


Рис. 4. $p = 11$, $q = 5$, $a = \frac{p+q}{4} = 4$, $\nu(p) = 2$, $\nu(q) = 2$.

Таким образом, 3 — квадратичный вычет при $p = 12l \pm 1$ (невычет при $p = 12l \pm 5$), а (-3) — квадратичный вычет для $p = 12l + 1$, $12l - 5$.

Для случая $a = 2$, 3 вы, конечно, заметили еще одну закономерность: простые числа, имеющие при делении на $4a$ остатки, равные по абсолютной величине, либо одновременно являются квадратичными вычетами, либо квадратичными невычетами. Это обстоятельство, разумеется, не осталось незамеченным для Эйлера, и он сформулировал гипотезу в более сильной форме, чем мы ее привели.

Сформулируем теперь

Дополнение к гипотезе Эйлера. *Пусть p и q — простые числа и $p + q = 4a$. Тогда a одновременно является или квадратичным вычетом по модулю p и q или квадратичным невычетом.*

Доказательство. Выполним построения, указанные при доказательстве гипотезы Эйлера для интервалов $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, $\left(0, \frac{q}{2}\right)$, $a = \frac{p+q}{4}$. Для удобства расположим интервалы так, чтобы они имели точку 0 общей, находясь по разные стороны от нее, при этом интервал $\left(0, \frac{q}{2}\right)$ мы перевернем (рис. 4). Пусть $\nu(p)$, $\nu(q)$ — число целых точек в интервалах с нечетными номерами для p и q соответственно. Нам достаточно доказать, что $\nu(p) + \nu(q)$ — четно. Пусть $\nu_j(p)$, $\nu_j(q)$ — число целых точек в соответствующих интервалах с номерами j. Легко видеть, что $\nu_j(p) + \nu_j(q) = 2$ при $j > 0$, откуда и будет следовать нужный результат.

Действительно, на интервале между j-ми синими левой и правой точками $(j > 0)$ лежит $2j$ целых точек, поскольку, как мы уже отмечали, на интервале длины $2j$ с нецелочисленными концами лежит $2j$ целых точек.

В 1798 году Лежандр указал очень удобное утверждение, эквивалентное гипотезе,— квадратичный закон взаимности. Введем обозначение — так называемый символ Лежандра:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1, & \text{если } a \neq 0 \text{ — квадратичный вычет по модулю } p, \\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет.} \end{cases}$$

В силу критерия Эйлера (и замечания к нему, стр. 4),

$$\left(\frac{a}{p}\right) - a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}. \qquad (7)$$

Отсюда сразу следует мультипликативное свойство символа Лежандра:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \qquad (8)$$

Отметим также, что символ Лежандра можно доопределить для всех a, не делящихся на p, с сохранением (7), (8), полагая

$$\left(\frac{a+p}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right). \qquad (9)$$

Квадратичный закон взаимности. *Если p, q — нечетные простые числа, то*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}. \qquad (10)$$

Другими словами, $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ *имеют противоположные знаки, если $p = 4l + 3$, $q = 4m + 3$, и совпадают в остальных случаях.*

Название закона связано с тем, что в нем устанавливается «взаимность» между вопросами о том, когда p — квадратичный вычет по модулю q и когда q — квадратичный вычет по модулю p.

Доказательство. Всегда или $p-q=4a$ или $p+q=4a$.

I случай. Пусть $p-q=4a$, то есть p и q имеют одинаковые остатки при делении на 4. Тогда $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q+4a}{q}\right)=\left(\frac{4a}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$ (мы воспользовались (9), (8), и тем, что $\left(\frac{4}{q}\right)=1$ при всех q). Далее, $\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{p-4a}{p}=\left(\frac{-4a}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)$. В силу уже доказанной гипотезы Эйлера $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$, то есть $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$, и $\frac{p}{q}=-\left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$. Остается вспомнить, что $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ при $p=4l+1$, $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ при $p=4l+3$.

II случай. Пусть $p+q=4a$, то есть p и q имеют разные остатки при делении на 4. Имеем $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{4a-q}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$. Аналогично $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$. В силу дополнения к гипотезе Эйлера $\left(\frac{a}{q}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$, то есть $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$. Доказательство окончено.

Нетрудно заметить, что проведенные рассуждения можно обратить и вывести из квадратичного закона взаимности гипотезу Эйлера и дополнение к ней (проделайте это!). Отметим еще, что формулы (8)—(10) дают способ вычисления $\left(\frac{p}{q}\right)$ существенно более простой, чем описанный выше комбинаторный способ. Проиллюстрируем это на примере: $\left(\frac{59}{269}\right)=\left(\frac{269}{59}\right)=\left(\frac{59\cdot 4+33}{59}\right)=\left(\frac{3}{59}\right)\cdot\left(\frac{11}{59}\right)=-1,$ так как

$$\left(\frac{3}{59}\right)=-\left(\frac{59}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)=1;$$

$$\left(\frac{11}{59}\right)=-\left(\frac{59}{11}\right)=-\left(\frac{4}{11}\right)=-1.$$

Легко показать, что вычисление символа Лежандра всегда можно свести к случаю, когда p или q равно 2.

Упражнение. Сосчитайте $\left(\frac{37}{557}\right)$, $\left(\frac{43}{991}\right)$.

В заключение отметим, что задача о квадратичных вычетах послужила отправной точкой большой и плодотворной математической деятельности. Многочисленные попытки Гаусса получить новые доказательства квадратичного закона взаимности далеко не в первую очередь диктовались желанием упростить доказательства. Гаусса не оставляла мысль, что им по-настоящему не вскрыты глубокие закономерности, следствием которых является закон взаимности. В полной мере это удалось сделать лишь позднее, в рамках теории алгебраических чисел. Гаусс потратил много сил на обобщение квадратичного закона на кубический и биквадратный случай, получив замечательные результаты. Эти исследования были продолжены, и изучение различных законов взаимности остается одним из центральных вопросов теории чисел по сей день.

Тепловой баланс Земли

Б. М. Смирнов

Почти вся энергия неядерного происхождения, с которой мы имеем дело на Земле, является результатом превращения энергии солнечного излучения. Это и химическая энергия горючих ископаемых, и энергия воды, энергия ветра, и многое другое.

Основным источником солнечного излучения являются термоядерные реакции, происходящие в недрах Солнца.

Основную цепь этих реакций можно определить следующей схемой:

$$2p \to d + e^+ + \nu + 0{,}42\ \text{Мэв},$$
$$d + p \to \text{He}^3 + \gamma + 5{,}49\ \text{Мэв},$$
$$2\text{He}^3 \to \text{He}^4 + 2p + 12{,}85\ \text{Мэв}.$$

Здесь p — протон, d — дейтрон, то есть ядро, состоящее из протона и нейтрона, He^3, He^4 — ядра гелия, содержащие три и четыре нуклона соответственно (нуклон — протон или нейтрон), e^+ — позитрон, ν — нейтрино, γ — фотон. Энергия частиц, записанная в правой части уравнений, переходит в тепловую, передается на поверхность Солнца, а затем излучается. Исключение составляет только нейтрино, которое сразу выходит за пределы Солнца, унося энергию, равную 0,26 *Мэв*. Позитрон вступает в реакцию аннигиляции с электроном. Это приводит к образованию двух фотонов и выделению дополнительной энергии 1,02 *Мэв*:

$$e^+ + e \to 2\gamma + 1{,}02\ \text{Мэв}.$$

Суммируя описанные реакции, получим:

$$4p + 2e \to \text{He}^4 + 2\gamma + 26{,}2\ \text{Мэв}.$$

Энергия каждого электрона 0,51 *Мэв*. Каждый израсходованный протон позволяет получить энергию 6,3 *Мэв*.

Освободившаяся в результате этих термоядерных реакций энергия испускается с поверхности Солнца в виде излучения. Поверхностный слой, из которого излучается бóльшая часть энергии (этот слой Солнца называется фотосферой), имеет толщину порядка 1000 *км* (радиус Солнца 700 000 *км*). Температура фотосферы приблизительно 5800° К. Поверхность Солнца с хорошей точностью можно считать абсолютно черным телом с температурой 5800° К*). Энергия $j_\odot$, излучаемая с единицы поверхности Солнца в единицу времени, согласно закону Стефана — Больцмана, равна

$$j_\odot = \sigma T^4 = 6{,}4\,\frac{\text{квт}}{\text{см}^2}.$$

Этот поток энергии весьма велик по нашим земным масштабам.

Поскольку мощность излучения Солнца так велика, естественно возникает вопрос, как долго Солнце способно отдавать столько энергии.

Протоны составляют $\eta = \frac{5}{6}$ общего количества частиц внутри Солнца, ядра гелия — $\frac{1}{6}$. Количество более тяжелых частиц незначительно.

Поэтому число протонов внутри Солнца равно

$$\frac{M_\odot \eta}{\eta m_{\text{H}} + (1-\eta)\, m_{\text{He}}} = 6{,}6\cdot 10^{56}.$$

Здесь $m_{\text{H}} = 1{,}67\cdot10^{-24}$ *г* — масса атома водорода, $m_{\text{He}} = 6{,}64\cdot10^{-24}$ *г* — масса атома гелия, $M_\odot = 2\cdot10^{33}$ *г* — масса Солнца.

---

*) Абсолютно черным называется тело, поверхность которого поглощает всё падающее на него излучение. Нагретое черное тело излучает электромагнитные волны, причем длины волн, соответствующие максимуму энергии этого излучения, тем меньше, чем выше температура тела.

Полный поток излучения с поверхности абсолютно черного тела на всех длинах волн определяется законом Стефана — Больцмана: $j = \sigma T^4$, где j — поток излучаемой энергии, T — абсолютная температура поверхности, $\sigma = 5{,}69\cdot10^{-12}$ *вт/см² град⁴* — постоянная Стефана — Больцмана.

Будем считать, что энергия внутри Солнца выделяется только в результате описанных ядерных реакций, связанных с превращением водорода в гелий. (На самом деле возможно дальнейшее превращение гелия в более тяжелые элементы с выделением энергии.) Тогда, поскольку переработка одного протона приводит к выделению энергии 6,3 *Мэв*, полный запас энергии Солнца составляет $6{,}3 \times 6{,}6 \cdot 10^{56}$ *Мэв* $= 6{,}7 \cdot 10^{44}$ *дж*. Каждую секунду с поверхности Солнца излучается энергия $j_{\odot} \cdot 4\pi R_{\odot}^2 = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ *вт*, где $j_{\odot} = 6{,}4 \, \frac{квт}{см^2}$ — мощность излучения с единицы солнечной поверхности, $R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10}$ *см* — радиус Солнца. Отсюда следует, что при неизменной величине энергии, излучаемой Солнцем в единицу времени, ядерных запасов солнечной энергии хватит на 55 миллиардов лет. В этом отношении у человечества нет причин для беспокойства.

На поверхности Солнца вся мощность излучения приходится на площадь $4\pi R_{\odot}^2$, а на расстоянии l от Солнца — на площадь $4\pi l^2$. Следовательно, поток энергии солнечного излучения на расстоянии l от Солнца равен $j_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{l^2}$, где $j_{\odot}$ — поток энергии на поверхности Солнца, $R_{\odot}$ — радиус Солнца. Отсюда находим мощность лучистой энергии, падающей на поверхность Земли:

$$\pi R_{\oplus}^2 \cdot j_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} = 1{,}75 \cdot 10^{17} \text{ вт},$$

где $R_{\oplus} = 6{,}4 \cdot 10^8$ *см* — радиус Земли, $d_{\odot} = 1{,}5 \cdot 10^{12}$ *см* — среднее расстояние от Земли до Солнца.

На поверхность Земли попадает малая часть мощности солнечного излучения (менее чем миллиардная часть), но в наших земных масштабах эта мощность велика. Для наглядности приведем такой пример. Основная часть энергии, потребляемой человеком, выделяется при сжигании горючих ископаемых (нефти, газа, угля). Если сжечь все земные запасы горючих ископаемых, можно получить примерно $2 \cdot 10^{23}$ *дж*. От Солнца Земля получает такую энергию менее чем за 14 суток. Из этого же примера можно понять, какая малая часть солнечной энергии, посылаемой на поверхность Земли в течение длительного времени, была переработана в энергию горючих ископаемых.

Что происходит с энергией солнечного излучения, попадающей на поверхность Земли? Часть ее отражается от поверхности, другая часть поглощается поверхностью и атмосферой Земли и преобразуется в другие виды энергии.

Как преобразуется поглощенная энергия? Масса Земли $M_{\oplus} = 6 \cdot 10^{27}$ *г*, средняя удельная теплоемкость Земли $0{,}5 \, \frac{дж}{г \cdot град}$. Значит, для нагревания Земли на один градус необходима энергия $3 \cdot 10^{27}$ *дж*. Такая энергия поглощается поверхностью и атмосферой Земли примерно за 1000 лет. Таким образом, поглощенная Землей за время ее существования (4,5 млрд. лет) солнечная энергия не накапливается, а рассеивается в окружающее пространство.

Выясним, каким способом солнечная энергия, поглощенная Землей, возвращается в пространство. Существуют два способа рассеяния энергии Землей. Один из них связан с уходом атомов и молекул за пределы атмосферы, другой — с излучением поверхности Земли. В первом случае для выхода молекулы за пределы поля притяжения Земли необходимо, чтобы ее скорость в направлении, перпендикулярном к поверхности Земли, превышала вторую космическую скорость $\sqrt{2gR_{\oplus}} \approx 11 \, \frac{км}{с}$. Для молекулы азота, например, это соответствует энергии $\frac{mv^2}{2} = mg\,R_{\oplus} = 2{,}9 \times 10^{-13}$ *эрг* (m — масса молекулы). При комнатной температуре средняя кинетическая энергия молекул 2×10^{-14} *эрг*. В атмосфере Земли быстрых молекул мало. Кроме того, если они и появляются у поверхности Земли, то, сталкиваясь с другими молекулами, отдают избыток энергии и не могут выйти за пределы земной атмосферы. Поэтому механизм рассеяния энергии, связанный с уходом атомов и молекул за пределы земной атмосферы, оказывается неэффективным.

Второй способ возвращать в пространство солнечную энергию — излучение. Температура поверхности Земли (≈300 °К) значительно меньше температуры солнечной поверхности (6000 °К). Максимуму энергии солнечного излучения соответствуют длины волн в видимой части спектра, а длины волн излучения Земли лежат в далекой инфракрасной области. Выясним, какую температуру имела бы Земля, если бы она излучала энергию мощностью 10^{17} *вт* как абсолютно черное тело. Из закона Стефана — Больцмана получим, что мощность испускаемого Землей излучения в таком случае равна $\sigma T_{\oplus}^4 4\pi R_{\odot}^2$. При этом температура Земли должна быть равна 240 °К.

Отличие полученной величины от реальной температуры поверхности Земли не так уж велико, особенно если учесть, что мы лишь очень приближенно можем считать, что Земля излучает как абсолютно черное тело.

Использованная модель позволяет представить общую качественную картину процессов, происходящих в атмосфере Земли при преобразовании солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли. Ясно, что энергия Солнца неравномерно распределяется по поверхности Земли. В связи с этим в атмосфере Земли появляются потоки энергии от более нагретых к более холодным областям: возникают ветры. В движении ветров сосредоточено примерно 2% мощности лучистой энергии, поглощаемой Землей.

Бо́льшая часть лучистой энергии (примерно $4 \cdot 10^{16}$ *вт*) идет на испарение воды. Пары воды увлекаются направленными атмосферными потоками, так что количества испаренной воды и выпавшей в виде осадков в каждой точке Земли не совпадают. Это компенсируется потоками воды на поверхности Земли — реками, которые несут в себе немалую мощность — примерно $3 \cdot 10^{15}$ *вт*.

Вода играет важную роль не только в поглощении солнечной энергии, *но и в поглощении излучения Земли*. Молекулы воды эффективно поглощают фотоны, излучаемые поверхностью Земли. В результате задерживается тепловое излучение. Этим объясняются два типа климатов — морской и континентальный. В случае морского климата наличие влаги в атмосфере задерживает уход излучения с поверхности Земли, и ночью, когда в данную область поверхности Земли не попадает солнечное излучение, поверхность не успевает силь-

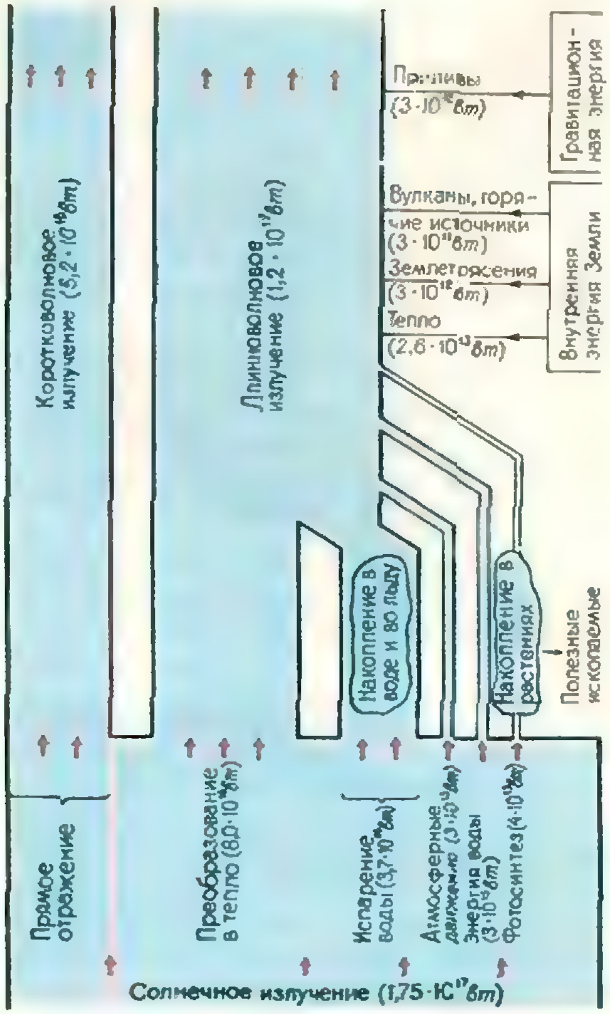

Коротковолновое излучение (5,2·10¹⁶ вт)
Длинноволновое излучение (1,2·10¹⁷ вт)
Приливы (3·10¹² вт)
Гравитационная энергия
Вулканы, горячие источники (3·10¹¹ вт)
Землетрясения (3·10¹² вт)
Тепло (2,6·10¹³ вт)
Внутренняя энергия Земли
Накопление в воде и во льду
Накопление в растениях
Полезные ископаемые
Прямое отражение
Преобразование в тепло (8,0·10¹⁶ вт)
Испарение воды (3,7·10¹⁶ вт)
Атмосферные движения (3·10¹⁵ вт)
Энергия воды (3·10¹⁵ вт)
Фотосинтез (4·10¹³ вт)
Солнечное излучение (1,75·10¹⁷ вт)

Диаграмма преобразования энергии, попадающей на *поверхность Земли*.

но остыть. Поэтому при морском климате дневная и ночная температуры различаются не сильно. В случае континентального климата, когда в атмосфере мало влаги, солнечная лучистая энергия гораздо быстрее перерабатывается в энергию излучения Земли. Поэтому земная поверхность сильнее остывает за ночь и разница между дневной и ночной температурами больше, чем в условиях морского климата.

Оценим характерное время переработки солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли. Допустим, начиная с некоторого момента времени лучистая энергия Солнца перестала попадать на поверхность Земли. При этом Земля по-прежнему будет испускать длинноволновое излучение, но поскольку приток энергии на ее поверхность прекратился, то поверхность Земли будет остывать. Характерным временем переработки солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли мы назовем такое время, за которое интенсивность излучения Земли изменилась в несколько раз.

Мы хотели поставить мысленный эксперимент, но такой эксперимент реально существует. Именно, поток солнечного излучения в рассматриваемую точку Земли прекращается ночью на время τ, и за это время температура падает на величину ΔT — разность дневной и ночной температур. Это соответствует изменению потока излучения с поверхности Земли

$$\Delta j = \sigma T^4 - \sigma\,(T-\Delta T)^4 \approx 4\sigma T^3 \Delta T.$$

Характерное время переработки солнечной лучистой энергии по порядку величины равно

$$\tau\,\frac{j}{\Delta j}\sim\tau\,\frac{T}{4\Delta T},$$

где $j=\sigma T^4$ — поток излучения с поверхности Земли. Считая, что величина ΔT порядка нескольких градусов, τ — порядка нескольких часов и принимая $T\approx 300°$ K, находим, что характерное время переработки солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли порядка 100 *ч*.

Это время переработки лучистой энергии в практической жизни мы нередко пытаемся увеличить. Например, при постройке парника его покрывают стеклом или пленкой, которые пропускают солнечное излучение, но отражают переработанное длинноволновое излучение. Поэтому выход энергии из парника задерживается и температура внутри парника выше, чем снаружи. Подобным образом предохраняют плодовые деревья при резком наступлении заморозков. Для этого разводят костры, а дым не пропускает длинноволновое излучение. В результате поверхность Земли остывает гораздо медленнее.

Разные задачи

1. Какую цифру надо приписать к 97 справа и слева, чтобы полученное число делилось на 27?

Г. М. Возняк

2. а) Решить уравнение

$$x^2 - y^2 = 1972$$

в целых положительных числах.

б) Доказать, что уравнение

$$x^2 - y^2 = 1973$$

имеет ровно одно решение в целых положительных числах и найти это решение.

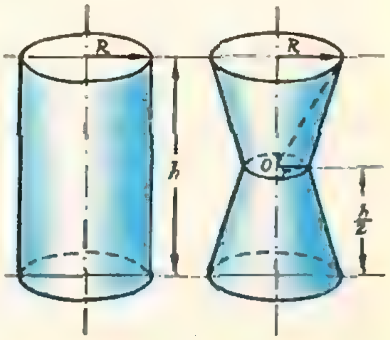
А. В. Зубик

3. В произвольном треугольнике ABC на стороне AC взята произвольная точка K, а на сторонах AB и BC — точки L и N соответственно, причем $\measuredangle ALK = \measuredangle KNC$. Доказать, что $AB\cdot LK\cdot KC = BC\cdot NK\cdot KA$.

А. Козлитин

4. На рисунке изображены два геометрических тела. Может ли боковая поверхность первого тела быть больше боковой поверхности второго тела?

А. В. Иванов



Об одном разбиении прямоугольника

А. Т. Колотов

В этой заметке решается задача М144. *Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, α, β, чтобы прямоугольник $a\times b$ можно было разрезать на несколько прямоугольников $\alpha\times\beta$.*

Например, можно ли прямоугольник 50×60 разрезать на прямоугольники размерами:
а) 20×15; *б)* 5×8; *в)* $6{,}25\times 15$; *г)* $(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})$.

Решение обобщает решение задачи 1 из статьи Сойфера «Клетчатые доски и полимино» («Квант» № 11, 1972).

Полное решение задачи М144 дает следующая

Теорема. *Для того чтобы прямоугольник $a\times b$ можно было разбить на прямоугольники $\alpha\times\beta$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

1) *каждое из чисел α и β должно быть в целое число раз меньше хотя бы одного из чисел a, b.*

3) *Каждое из чисел a и b должно допускать представление в виде $m\alpha+n\beta$, где m и n — неотрицательные целые числа.*

Доказательство. Обозначим большой прямоугольник через R, а маленький через ρ.

Достаточность. Если $a=n\alpha$, $b=m\beta$ (m и n — натуральные числа), то, разбив одну из сторон прямоугольника R на m, а смежную с ней сторону на n равных частей, и затем проведя через точки деления прямые, параллельные сторонам R, мы тем самым разобьем его на прямоугольники, равные ρ (рис. 1).

Если же $a=n\alpha=m\beta$, то в силу второго условия b допускает представление $b=k\alpha+l\beta$, где k и l можно считать положительными целыми числами. Тогда, разбив прямоугольник R на два прямоугольника P и Q размерами $a\times k\alpha$ и $a\times l\beta$ соответственно, мы сведем этот случай к уже рассмотренному (рис. 2).

Необходимость. Необходимость второго условия очевидна. Докажем необходимость первого условия. Возможны два случая:

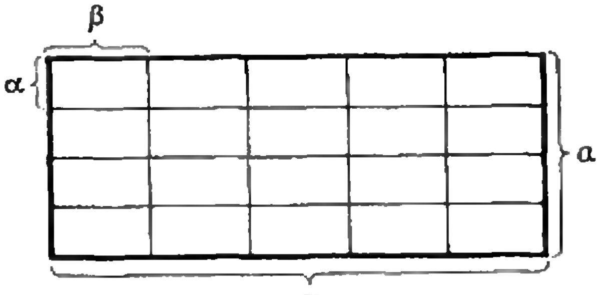


Рис. 1.

1. Числа α и β соизмеримы. Тогда без ограничения общности можно считать числа α, β, a и b целыми, так как этого всегда можно добиться выбором подходящей единицы масштаба. Предположим теперь, что наше утверждение не верно, и для определенности пусть ни a, ни b не делятся нацело на α. Разбив прямоугольник R на единичные квадраты, осуществим следующим образом правильную раскраску получаемой сетки в α различных цветов (раскраска называется правильной, если любые рядом стоящие α квадратов по вер-

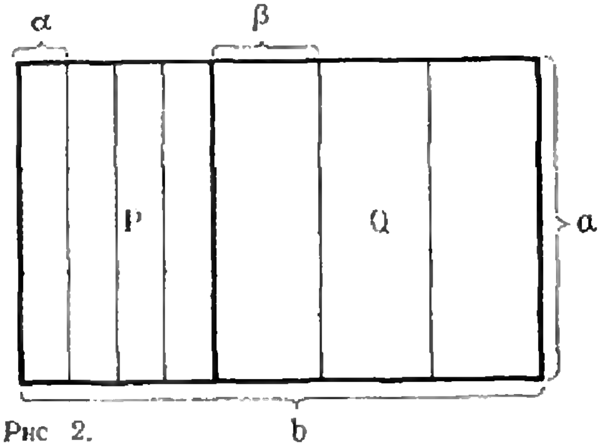


Рис 2.

тикали или горизонтали представляют все α цветов). Именно, окрасим в один и тот же цвет клетки, расположенные на диагоналях, идущих сверху вниз и слева направо, причем цвета будем выбирать так, чтобы любые две такие диагонали, между которыми расположены α—1 других, были окрашены одинаково. Легко видеть, что если нам удастся осуществить требуемое разбиение прямоугольника R, то каждый из данных α цветов будет представлен одним и тем же числом единичных квадратов в любом из полученных прямоугольников, а стало быть, число квадратов во всем прямоугольнике R, окрашенных в данный цвет, не зависит от выбора этого цвета. (На рисунке 3 представлена правильная 4-цветная раскраска).

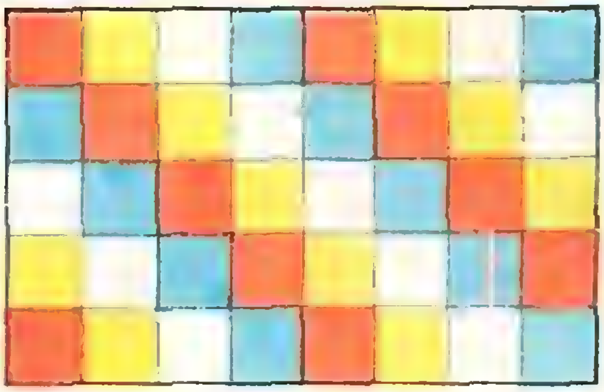


Рис. 3.

Пусть r_a и r_b — остатки, полученные при делении a и b на α. Разобьем прямоугольник R на три прямоугольника A, B и C размерами $r_a \times r_b$, $(a-r_a)\times r_b$ и $a\times(b-r_b)$ соответственно так, чтобы A занимал верхний левый угол исходного прямоугольника R, B примыкал снизу к A, а C был расположен справа от A и B (рис. 4).

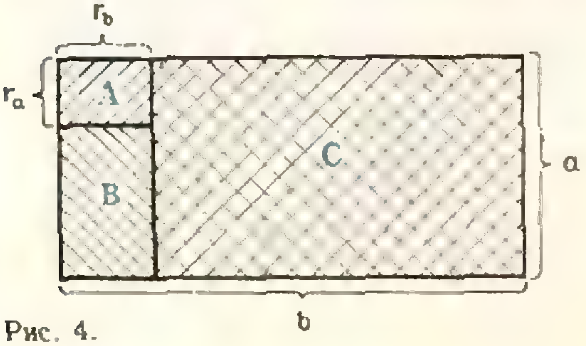


Рис. 4.

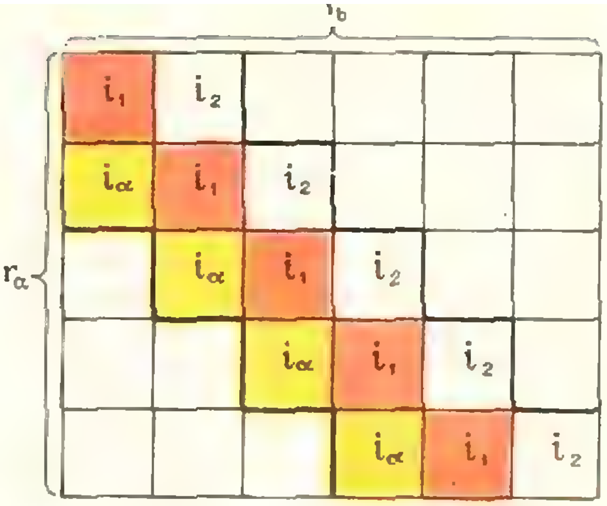


Рис. 5.

В прямоугольнике B каждый цвет представлен одинаковым числом квадратов, так как $a-r_a$ делится нацело на α. Это же утверждение справедливо и для прямоугольника C. Поэтому в силу предыдущего замечания оно должно выполняться и в A.

Рассмотрим прямоугольник A более внимательно. Нас интересуют три диагонали, расположенные в нем, одна из которых идет из левого верхнего угла A и окрашена в i_1-й цвет, а две другие примыкают к ней с обеих сторон и окрашены в i_2-й и i_α-й цвета. Очевидно, что каждый из названных цветов может встретиться в прямоугольнике A только на указанных диагоналях. Но тогда, если $r_a \leqslant r_b$, то число клеток i_α-го цвета на единицу меньше, чем число клеток i_1-го цвета (рис. 5), если же $r_a > r_b$, то число клеток i_2-го цвета на единицу меньше, чем число клеток i_1-го цвета (рис. 6). В обоих случаях мы приходим к противоречию.

2. Пусть α и β несоизмеримы, и для определенности $\alpha < \beta$.

Если любые два прямоугольника разбиения ориентированы одинаково по отношению к сторонам R (иными словами, большие стороны этих прямоугольников параллельны одной и той же стороне исходного прямоугольника), то утверждение теоремы очевидно.

Покажем, что случай с различной ориентацией прямоугольников ρ невозможен. Предположив противное, можно считать без ограничения общности, что уже к основанию прямоугольника R примыкают прямоугольники ρ различной ориентации. Разобьем слой прямоугольников ρ, примыкающих к основанию R, на фрагменты из одинаково ориентированных прямоугольников так, чтобы прямоугольники двух соседних фрагментов имели различную ориентацию.

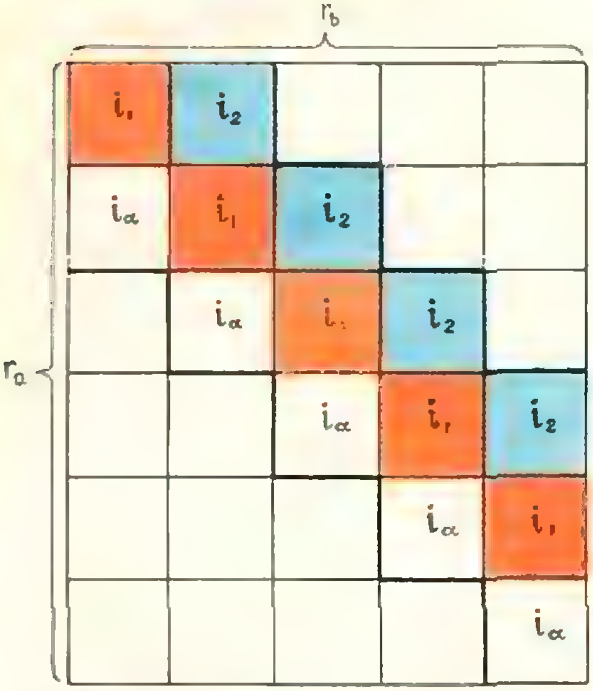


Рис. 6.

Так как любые два рядом стоящих фрагмента имеют разную высоту, то прямоугольники любого «низкого» фрагмента лежат на дне «колодца» (рис. 7), стенки которого образованы боковыми сторонами соседних фрагментов (одной из стенок, впрочем, может служить и боковая сторона прямоугольника R).

Ввиду несоизмеримости α и β каждый такой колодец должен быть заполнен прямоугольниками той же ориентации, что и прямоугольники фрагмента, находящегося на его дне. Как только это заполнение произойдет, так тотчас же каждый из «высоких» фрагментов окажется сам на дне «колодца», стенки которого будут образованы боковыми сторонами соседних комплексов, состоящих из прямоугольников иной ориентации, заполнивших предыдущие «колодцы». После заполнения вновь образованных колодцев у нас немедленно возникнут новые (рис. 8) и так далее.

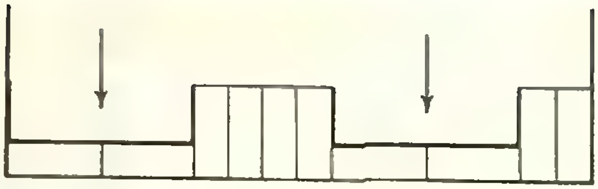


Рис. 7.

Поэтому на каждом шаге область заполнения прямоугольниками будет ограничена сверху ломаной, имеющей хотя бы одно углубление, а, стало быть, в этом случае заполнение всего R прямоугольниками ρ невозможно.

Тем самым теорема полностью доказана.

Теперь посмотрим, на какие из прямоугольников, перечисленных в условии, можно разбить прямоугольник 50×60.

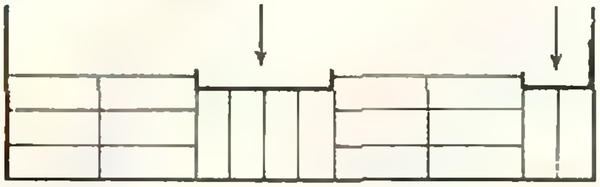


Рис. 8.

а) На прямоугольники 20×15 разбить можно (по теореме).

б) На прямоугольники 5×8 разбить нельзя, поскольку на 8 не делится ни 50, ни 60.

в) Разбиение на прямоугольники 6,25×15 очевидно (оба числа 50/6,25 и 60/15 — целые).

г) На прямоугольники $(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})$ разбить нельзя (не выполнено условие (1) теоремы).

Попробуйте сами привести пример такого случая, когда в теореме условие (1) выполнено, а условие (2) — нет.

Загадка водяной капли

Х. Рачлис.

Раздел «Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести какой-либо поучительный эксперимент, не требующий специального оборудования, так сказать с подручными средствами, которые имеются практически в любом доме. Эти простые по исполнению эксперименты помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают сообразительность и наблюдательность. Многие законы и явления природы в основе своей не так-то уж сложны, и их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям.

Мы надеемся, что раздел «Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям получше разобраться в своих способностях, развить в себе навыки будущих серьезных исследователей природы.

В одиннадцатом номере прошлого года мы познакомили наших читателей с недавно вышедшей книгой Х. Рачлиса «Физика в ванне». Теперь мы приводим небольшую задачу из этой книги. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

В вашем распоряжении: ванна, наполненная водой; маленький пузырек с широким горлышком; несколько копеечных монет (вес каждой монеты 1 грамм); пипетка; цветной мелок или мягкий карандаш.

Требуется с помощью этих — и только этих — предметов найти вес одной капли воды.

Прежде всего подумаем, как это можно сделать... Ну как, сообразили? Тогда сравните ваши соображения с теми, которые излагаются ниже.

Погрузим пузырек в воду — так, чтобы горлышко оставалось над водой — и начнем наполнять его монетами, штука за штукой, до тех пор, пока пузырек не будет плавать стоя.

Теперь добавим еще одну монетку. В случае необходимости чуть встряхнем монеты, чтобы пузырек все время плавал вертикально. На наружной его стороне отметим карандашом или мелом уровень воды. Вытащим из пузырька одну монету. Пузырек всплывает чуть выше. Теперь с помощью пипетки начнем добавлять по каплям воду, пока пузырек не погрузится до прежнего уровня. Сосчитаем количество добавленных капель.

По закону Архимеда, выталкивающая сила зависит только от количества вытесненной воды. Если пузырек оба раза погружается до одинакового уровня, значит, количество вытесненной воды и выталкивающая сила оба раза одни и те же. Следовательно, и вес, уравновешенный выталкивающей силой, оба раза одинаков.

Чтобы решить нашу задачу, вспомним, что каждая из монет весит ровно один грамм. Допустим, нам понадобилось 10 капель воды, чтобы восстановить первоначальный уровень, на котором плавал пузырек. Теперь нам известно, что 10 капель воды весят столько же, сколько одна копеечная монета, то есть один грамм. Значит одна капля весит $^1/_{10}$ грамма.

Вписанный шестиугольник

Л. М. Лоповок

В разделе «Математический кружок» мы публикуем заметки, в которых речь идет о задачах, близких к школьной программе по математике. Обычно эти заметки построены как занятия математического кружка: читателю предлагается несколько тесно связанных друг с другом задач. Некоторые из них решены в тексте, а другие — и легкие, и более трудные — оставлены для самостоятельного решения.

Как правило, наш «Математический кружок» доступен школьникам 8—9, а часто и 7 класса.

В подавляющем большинстве школьных задач, связанных с шестиугольниками, речь идет о правильных шестиугольниках. Между тем вписанный в окружность произвольный выпуклый шестиугольник заслуживает особого внимания, так как обладает рядом интересных свойств.

Более 330 лет назад знаменитый французский математик Блэз Паскаль (тогда 16-летний юноша) изучал некоторые свойства шестиугольника, вписанного в коническое сечение (то есть в окружность, эллипс, гиперболу или параболу). При этом он открыл теорему, носящую ныне его имя: если шестиугольник вписан в коническое сечение, то точки пересечения его противоположных сторон (или их продолжений) лежат на одной прямой. Свои исследования Паскаль выполнил средствами так называемой проективной геометрии. Мы рассмотрим свойства выпуклого шестиугольника, вписанного в окружность. Такое упрощение задачи позволит нам не выходить за рамки элементарной геометрии.

Углы

Суммы взятых через один углов вписанного выпуклого шестиугольника равны между собой.

Пусть (рис. 1) выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ вписан в окружность. Обозначим ее дуги A_1A_2, A_2A_3, … , A_6A_1 соответственно через $2x_1$, $2x_2$, … , $2x_6$. Тогда по свойству вписанных углов $\angle A_1=x_2+x_3+x_4+x_5$, $\angle A_3=x_1+x_4+x_5+x_6$, $\angle A_5=x_1+x_2+x_3+x_6$.

Поэтому $\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5+2x_6=360°$.

Поскольку сумма внутренних углов выпуклого шестиугольника равна 720°, то и $\angle A_2+\angle A_4+\angle A_6=360°$.

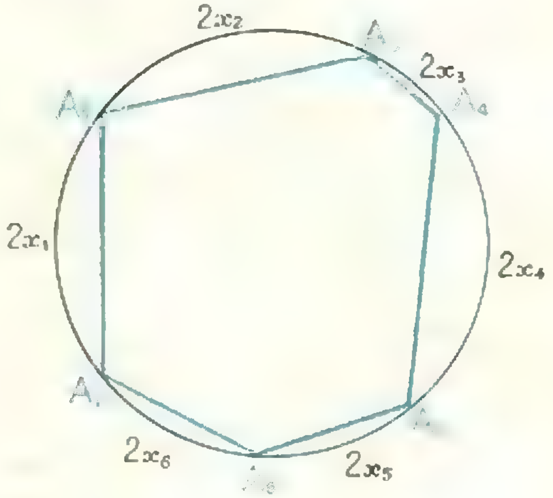


Рис. 1.

Среди внутренних углов выпуклого вписанного шестиугольника прямых и острых углов найдется не более двух.

Действительно, если допустить, что найдутся три таких угла, то одна из сумм углов, взятых через один (например, $\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5$), по принципу Дирихле содержит два слагаемых, сумма которых не превышает 180°. Поскольку третий угол менее 180°, вся сумма не может равняться 360°. Если же прямых или острых углов не более двух, то в каждой из названных сумм таких углов не более одного.

Теорема, обратная доказанной теореме о равенстве сумм углов, неверна. В этом легко убедиться, проведя, например, прямую, параллельную A_1A_2 и пересекающую стороны A_6A_1 и A_2A_3. Эта прямая отсечет трапецию и останется шестиугольник с такими же углами, как и исходный, но две его вершины не лежат на окружности, проходящей через вершины A_3, A_4, A_5 и A_6, поэтому вписать его в окружность нельзя.

Стороны и диагонали

Если три большие диагонали вписанного выпуклого шестиугольника пересекаются в одной точке, то произведения взятых через одну сторон равны между собой.

Пусть (рис. 2) диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в точке M. Рассмотрим треугольники A_1A_2M и A_4A_5M. У них углы при точке M равны как вертикальные, а $\angle 1=\angle 4$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, эти треугольники подобны и

$$\frac{A_1A_2}{A_4A_5}=\frac{A_2M}{A_4M}.$$

Аналогично устанавливается, что $\Delta A_3A_4M \backsim \Delta A_6A_1M$ и $\Delta A_5A_6M \backsim \backsim \Delta A_2A_3M$,

то есть

$$\frac{A_3A_4}{A_6A_1}=\frac{A_4M}{A_6M}, \quad \frac{A_5A_6}{A_2A_3}=\frac{A_6M}{A_2M}.$$

Перемножив полученные равенства, получим

$$\frac{A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6}{A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1}=\frac{A_2M\cdot A_4M\cdot A_6M}{A_4M\cdot A_6M\cdot A_2M},$$

откуда

$$A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6=A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1,$$

что и требовалось доказать.

Справедлива и обратная теорема: *если произведения взятых через одну сторон вписанного выпуклого шестиугольника равны между собой, то большие диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.*

Докажем ее от противного.

Обозначим вершины вписанного выпуклого шестиугольника буквами $A_1, A_2, \dots, A_6$, причем так, чтобы $\smile A_1A_6A_5$ была меньше 180°

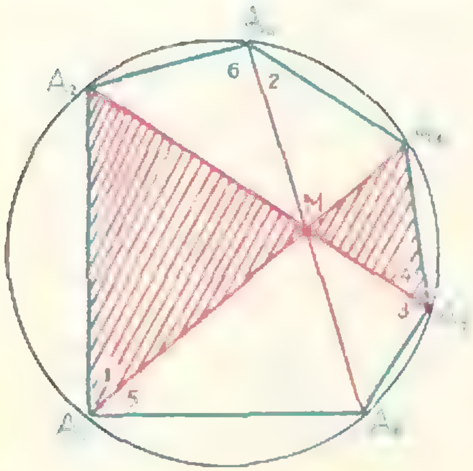


Рис. 2.

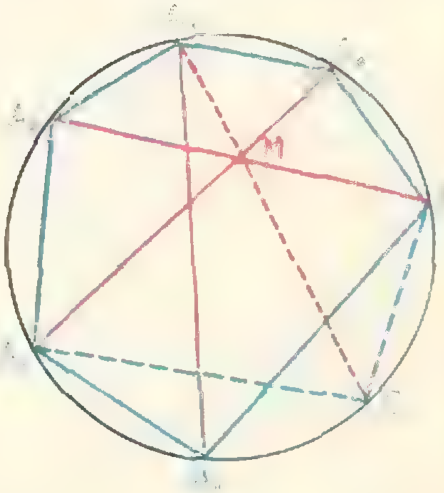


Рис. 3.

(очевидно, это всегда можно сделать).

Пусть $A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6= A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1$; диагонали A_1A_4 и A_2A_5 пересекаются в точке M, а диагональ A_3A_6 не проходит через эту точку (рис. 3). Рассмотрим шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5B$, вписанный в ту же окружность, причем точка B лежит на пересечении окружности и прямой A_3M; у этого шестиугольника все большие диагонали проходят через точку M.

Тогда по доказанной теореме

$$A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5B = A_2A_3\times A_4A_5\cdot BA_1.$$

Сравнив это равенство с условием, видим, что

$$\frac{A_5A_6}{A_5B}=\frac{A_6A_1}{BA_1}.$$

Но если точка B (лежащая между A_5 и A_1) лежит между A_5 и A_6, то из условия $\smile A_1A_5<180°$ получаем:

$$A_5B<A_5A_6,\quad BA_1>A_6A_1,$$

откуда

$$\frac{A_5A_6}{A_5B}>1>\frac{A_6A_1}{BA_1}$$

— строгое неравенство вместо равенства. Аналогично рассматривается случай, когда точка B лежит между A_1 и A_6. Следовательно, допущение, что третья большая диагональ исходного шестиугольника не проходит через точку M, ошибочно.

Таким образом, равенство произведений сторон вписанного выпуклого шестиугольника, взятых через одну, является необходимым и достаточным условием пересечения больших диагоналей шестиугольника в одной точке.

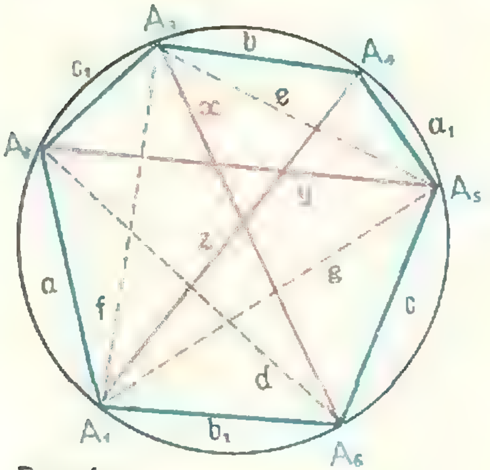


Рис. 4.

Метрические соотношения между сторонами и большими диагоналями вписанного выпуклого шестиугольника

Произведение больших диагоналей вписанного выпуклого шестиугольника равно сумме произведений его сторон, взятых через одну, и произведений его противоположных сторон на разделяющую их большую диагональ (на рисунке 4 $xyz=abc+a_1b_1c_1+aa_1x+bb_1y+cc_1z$).

Как известно, произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон четырехугольника (теорема Птолемея).

Обозначения всех элементов шестиугольника приведены на рисунке 4. По теореме Птолемея из четырехугольника $A_2A_3A_5A_6$ находим

$$xy=cc_1+de$$

и

$$xyz=cc_1z+dez.$$

Но e и z — диагонали вписанного четырехугольника $A_1A_3A_4A_5$. Поэтому $ez=fa_1+gb$. Таким образом,

$$xyz=cc_1z+dfa_1+dgb.$$

Из вписанного четырехугольника $A_1A_2A_3A_6$ находим $df=ax+b_1c_1$, а из четырехугольника $A_1A_2A_5A_6$: $dg=ac+b_1y$. Подставив эти значения, получим требуемое равенство.

Вычисление диагоналей вписанного выпуклого шестиугольника по его сторонам является весьма сложной задачей. Только в случае, когда вписанный шестиугольник является полуправильным ($a=b=c$, $a_1=b_1=c_1$), решение просто. Поскольку все углы такого шестиугольника равны 120°, малая диагональ определяется как третья сторона треугольника, у которого две стороны равны a

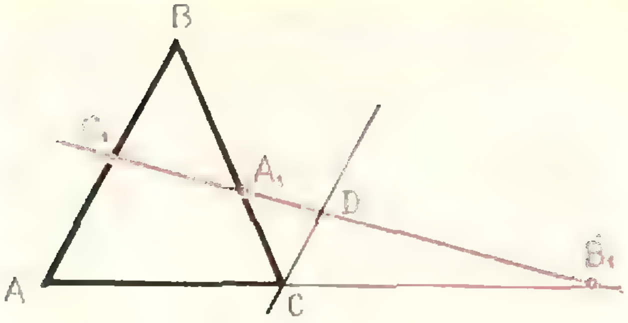


Рис. 5.

и a_1, а угол между ними 120°. Следовательно, $\alpha = \sqrt{a^2 + aa_1 + a_1^2}$. Большая диагональ является основанием трапеции, у которой боковые стороны равны и образуют с основанием углы по 60°. У такой трапеции большее основание равно сумме второго основания и боковой стороны, то есть

$$x = a + a_1.$$

Некоторые точки

Нам потребуется одно свойство треугольника — теорема Менелая.

Пусть прямая, не проходящая через вершину треугольника ABC, пересекает его стороны AB, BC, CA или их продолжения соответственно в точках C_1, A_1 и B_1 (пример такой конфигурации дан на рисунке 5); *тогда*

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$

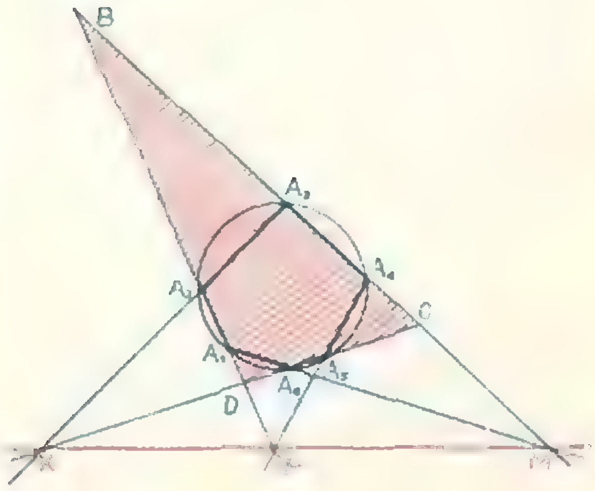


Рис. 6.

Проведем через вершину C прямую, параллельную AB. Тогда из подобия треугольников AC_1B_1 и CDB_1, а также C_1BA_1 и A_1DC получим пропорции:

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{AB_1}{CB_1}, \quad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BC_1}{CD}.$$

Перемножив обе пропорции и перенеся все члены налево, получим требуемое равенство.

Справедлива обратная теорема: *если на сторонах треугольника ABC или на их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\frac{AC_1}{B_1C_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$, то эти точки лежат на одной прямой.*

Если допустить, что прямая A_1C_1 пересекает прямую AC не в точке B_1, а в другой точке M, то по доказанной теореме $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$. Сравнив это равенство с данным, замечаем, что $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CM}{AM}$. Отсюда легко установить, что точки B_1 и M совпадают.

Введя направления отрезков на сторонах треугольника ABC, можно записать равенство в теореме Менелая еще так:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1.$$

Легко также доказать справедливость теоремы Менелая в случае, когда прямая пересекает только продолжения сторон треугольника, — сделайте это самостоятельно.

Пусть выпуклый шестиугольник вписан в окружность и продолжения его противоположных сторон соответственно пересекаются в точках K, L и M (рис. 6). *Тогда точки* K, L *и* M *лежат на одной прямой.*

Продолжения сторон A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в точках B, C и D. Рассмотрим пересечение треугольника BCD прямыми KA_2A_3, LA_5A_4, MA_6A_1 (прямые записаны не двумя точками, как обычно, а тремя, чтобы показать и точку, в которой прямая пересекает продолже-

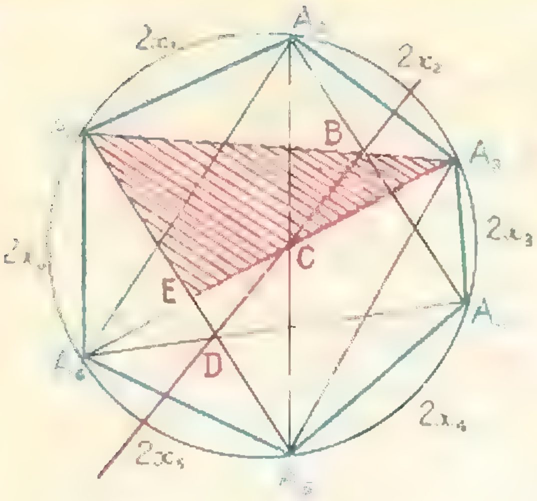


Рис. 7.

ние соответствующей стороны треугольника BCD). По теореме Менелая для этих прямых имеем:

$$\frac{BA_2}{A_2D}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CA_3}{A_3B}=-1;$$

$$\frac{BL}{LD}\cdot\frac{DA_5}{A_5C}\cdot\frac{CA_4}{A_4B}=-1;$$

$$\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BA_1}{A_1D}\cdot\frac{DA_6}{A_6C}=-1.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{BL\cdot DK\cdot CM}{LD\cdot KC\cdot MB}\times$$
$$\times\frac{BA_2\cdot CA_3\cdot DA_5\cdot CA_4\cdot BA_1\cdot DA_6}{A_2D\cdot A_3B\cdot A_5C\cdot A_4B\cdot A_1D\cdot A_6C}=-1. \quad (*)$$

По свойству секущих, проведенных к окружности из одной точки, $BA_1\cdot BA_2=BA_3\cdot BA_4$; $CA_3\cdot CA_4=CA_5\cdot CA_6$; $DA_5\cdot DA_6=DA_1\cdot DA_2$. Поэтому вторая дробь в (*) равна 1. Таким образом,

$$\frac{BL}{LD}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CM}{MB}=-1.$$

А это, как мы знаем, доказывает, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

Точки пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4, A_2A_5 и A_3A_6, A_1A_5 и A_4A_6 (рис. 7) *также лежат на одной прямой.*

Для доказательства используем теорему синусов (стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов) и теорему, обратную теореме Менелая для треугольника A_1A_3E и точек B, C, D:

$$\frac{A_1B}{BA_3}=\frac{A_1B}{A_2B}\cdot\frac{A_2B}{BA_3}=$$
$$=\frac{\sin(x_4+x_5+x_6)}{\sin x_2}\cdot\frac{\sin x_1}{\sin x_3};$$

$$\frac{A_3C}{CE}=\frac{A_3C}{CA_5}\cdot\frac{CA_5}{CE}=$$
$$=\frac{\sin x_2}{\sin x_5}\cdot\frac{\sin(x_3+x_4+x_6)}{\sin x_1};$$

$$\frac{ED}{DA_1}=-\frac{ED}{A_1D}=$$
$$=-\frac{ED}{DA_6}\cdot\frac{DA_6}{A_1D}=-\frac{\sin x_3}{\sin(x_1+x_2+x_5)}\times$$
$$\times\frac{\sin x_5}{\sin(x_1+x_2+x_3)}.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{A_1B}{BA_3}\cdot\frac{A_3C}{CE}\cdot\frac{ED}{DA_1}=$$
$$=-\frac{\sin(x_3+x_4+x_6)\cdot\sin(x_4+x_5+x_6)}{\sin(x_1+x_2+x_3)\cdot\sin(x_1+x_2+x_5)}.$$

Поскольку $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=180^\circ$, то

$$\sin(x_1+x_2+x_3)=\sin(x_4+x_5+x_6)$$

и

$$\sin(x_1+x_2+x_5)=\sin(x_3+x_4+x_6).$$

Следовательно,

$$\frac{A_1B}{BA_3}\cdot\frac{A_3C}{CE}\cdot\frac{ED}{DA_1}=-1.$$

А это и доказывает, что точки B, C и D лежат на одной прямой.

Аналогично можно показать, что на одной прямой лежат точки пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_6, A_3A_5 и A_4A_6, A_1A_4 и A_2A_5, а также точки пересечения диагоналей A_1A_5

и A_2A_6, A_2A_4 и A_3A_5, A_1A_4 и A_3A_6 (достаточно сделать круговую перестановку обозначений вершин).

Теперь мы можем решить такую задачу: «*Даны 5 точек окружности. Пользуясь только линейкой, построить еще одну точку этой окружности*».

Пусть даны точки A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5. Найдя точку B как пересечение A_1A_3 с A_2A_4, выберем произвольно точку C на A_2A_5. Тогда точка D определится как пересечение BC с A_1A_5, а точка A_6 окажется пересечением A_4D с A_3C.

Ясно, что таким путем можно построить сколько угодно точек окружности.

В заключение приведем несколько задач о вписанном шестиугольнике.

Упражнения

1. Вписать в данную окружность шестиугольник по серединам сторон, взятых через одну.

2. Пять последовательных углов вписанного выпуклого шестиугольника относятся как 6 : 5 : 8 : 9 : 10. Найти величину шестого угла.

3. Шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ вписан в окружность, причем $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = a$ и $A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_1 = b$. Доказать, что диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 ограничивают равносторонний треугольник, и найти его площадь.

4. Большие диагонали вписанного выпуклого шестиугольника A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в одной точке; $A_1A_2 = 6$ *см*, $A_3A_4 = 16$ *см* и $A_5A_6 = 18$ *см*, а три остальные стороны равны между собою. Найти периметр шестиугольника.

5. В окружность радиуса 25 *см* вписан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, три диагонали которого проходят через центр окружности. Зная, что $A_1A_2 = 14$ *см*, $A_3A_4 = 30$ *см*, определить периметр шестиугольника.

Литература

1. С. И. Зетель. Новая геометрия треугольника, Учпедгиз, 1962.

2. Ж. Адамар. Элементарная геометрия, т. I, Учпедгиз, 1948.

3. Н. Ф. Четверухин. Проективная геометрия, «Просвещение», 1969.

Окружность Микеля

Что это за клубок цветных линий на обложке? Можно ли усмотреть какой-либо порядок в их размещении?

Да, можно. Красным цветом нарисованы окружности, описанные около треугольников, не имеющих красной стороны. Синие окружности описаны около треугольников, не имеющих синей стороны, и так далее. Каждая из четверок окружностей независимо от углов между отрезками прямых (лишь бы среди прямых не было параллельных и в одной точке пересекалось не более двух прямых) пересекается в точке, общей для этих окружностей (точка Уоллеса, открыта в 1799 году). Все пять точек Уоллеса лежат на окружности Микеля (открыта в 1844 году). Окружность Микеля на рисунке первой страницы обложки играет центральную роль. Она выделена белым цветом.

Но это еще не все. В 1871 году английский математик Уильям Клиффорд доказал следующее. Проведем шестую прямую, не параллельную ни одной из пяти данных прямых и не проходящую через точки пересечения уже построенных прямых. Построим шесть окружностей Микеля (для каждой из пятерок прямых) — они пересекутся в одной точке!...

Вернемся к конфигурации из четырех прямых. Пусть около каждого из четырех треугольников описана окружность. Немецкий математик Якоб Штейнер установил в прошлом столетии, что центры этих окружностей и точка Уоллеса лежат на одной окружности.

Интересно, что доказательства этих фактов опираются лишь на элементарные свойства вписанных и центральных углов. Попробуйте самостоятельно провести все доказательства.

В. Н. Березин

Задачник «Кванта»

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. В нем наряду с относительно легкими задачами встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам — математикам и физикам. Самые трудные задачи отмечены звездочкой. Не отчаивайтесь, если не сумеете быстро справиться с задачей; попробуйте вернуться к ней еще раз — через день, через неделю, через месяц. Но вот решение найдено. Если задача вас заинтересовала, то не откладывайте ее сразу же — подумайте, как можно наиболее рационально и коротко записать решение, обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат, какие близкие задачи она позволяет решить.

Во второй части раздела мы помещаем решения задач (примерно через полгода после публикации их условий) с учетом присланных читателями писем. С решениями мы советуем знакомиться и тем, кто не выписывал в прошлом году «Квант» или не решал задач.

В «Кванте» №№ 2, 4, 6, 8, 10, 12 мы приведем фамилии читателей, приславших нам правильные решения задач этого раздела. Школьники, которые в течение года регулярно будут присылать интересные и полные решения, получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных олимпиад. Кроме того, для победителей нашего постоянного конкурса по решению задач редакция установила несколько специальных премий.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Придумать новую оригинальную задачу обычно труднее, чем решить. Труднее, но, пожалуй, даже интереснее. Если это вам удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Наиболее красивые и интересные задачи мы опубликуем в «Задачнике Кванта» или в других разделах журнала.

Наш адрес: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант». На конверте после адреса журнала напишите, решения каких задач вы посылаете (например: «Задачник «Кванта», М181, М184»; или «Ф201» или «новая задача»). Решения задач по каждому из предметов (если вы посылаете и математику, и физику), а также новые задачи присылайте в отдельных конвертах. В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь). Письма от читателей мы сможем рассматривать и учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке. Решения нужно присылать не позднее чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера. В частности, срок присылки ответов на задачи из этого номера — не позднее 1 марта 1973 года.

Задачи

M181—M185; Ф193—Ф197.

M181. Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 *см*? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать ее нельзя.)

M182. Докажите, что если а) $a>0$, $b>0$ и $c>0$, то

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

б) $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $d>0$, то

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}.$$

в) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — положительные числа ($n\geqslant2$), то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

M183. Найдите высоту трапеции, у которой основания равны a и b ($a<b$), угол между диагоналями равен 90°, а угол между продолжениями боковых сторон — 45°.

M184*. Докажите тождество

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Г. Е. Есипенко

M185*. На кафтане площадью 1 помещается 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $^1/_2$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $^1/_5$.

Е. Б. Дынкин

Ф193. Имеются две системы линз с одинаковыми фокусными расстояниями. Оптические оси линз совпадают (рис. 1). Первая система линз состоит из собирающих линз, во второй собирающие линзы чередуются с рассеивающими. Найти траектории лучей в каждой из систем, если расстояние между линзами много меньше фокусного.

Ф194. Между обкладками плоского конденсатора помещен заряд. Как он будет двигаться, если на конденсатор подать синусоидальное напряжение с начальной фазой $\varphi_0=0$?

Ф195. Между двумя кубиками массы m_1 и m_2 находится сжатая пружина жесткости k. Кубики связаны ниткой, расстояние между ними l (рис. 2). На какую высоту поднимется центр масс системы, если нить пережечь? Пружину считать невесомой. Ее длина в нормальном состоянии равна l_0.

Ф196. В камере ускорителя по окружности радиуса R движется очень тонкий пучок протонов. Величина тока в начальный момент I, полное число частиц в камере n. Магнитный поток через неизменяющуюся орбиту пучка изменяется со скоростью φ. Какой станет величина тока после того, как частицы сделают один оборот? Скорость частиц остается много меньшей скорости света.

Ф197. На тело массы m, лежащее на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения k, в момент времени $t=0$ начала действовать под углом α к горизонту сила, пропорциональная времени. Определить скорость v движения тела через τ секунд.

А. В. Устинова

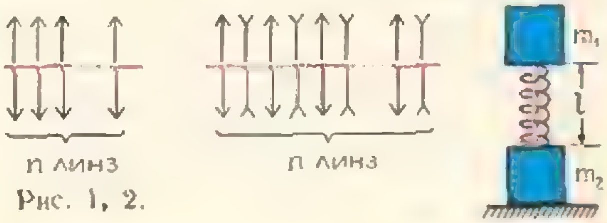


Рис. 1, 2.

Решения задач

М141—М145; Ф159—Ф163.

М141. *Выберем на высоте BH треугольника ABC произвольную точку P (рис. 1). Пусть K — точка пересечения прямых AP и BC, L — точка пересечения прямых CP и AB. Докажите, что отрезки KH и LH составляют равные углы с высотой BH.*

Это утверждение нетрудно доказать с помощью метода координат. За оси координат удобно принять основание AC и высоту HB треугольника (H — начало координат). Обозначим координаты точек так, как показано на рисунке 2 (на этом рисунке $a < 0$, $c > 0$). Мы будем использовать следующую лемму:

Уравнение прямой, пересекающей ось Hx в точке $(x_0, 0)$, а ось Hy — в $(0, y_0)$, имеет вид

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \qquad (1)$$

Поскольку через две точки можно провести только одну прямую, для доказательства леммы достаточно проверить, что прямая (1) проходит через каждую из этих точек.

Из леммы следует, что координаты (x_K, y_K) точки K — точки пересечения прямых AP и BC — получаются как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{b} = 1, \\[2mm] \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{p} = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Аналогично, координаты (x_M, y_M) — решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\[2mm] \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{p} = 1. \end{cases}$$

Нас интересуют угловые коэффициенты прямых HK и HM — тангенсы угла наклона этих прямых к оси Hx. Вычитая почленно одно уравнение системы (2) из другого, найдем:

$$x_K\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + y_K\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{p}\right) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \angle KHx = \frac{y_K}{x_K} = \frac{(a-c)\,bp}{ac\,(b-p)}. \qquad (3)$$

Аналогично

$$\operatorname{tg} \angle MHx = \frac{y_M}{x_M} = \frac{(c-a)\,bp}{ac\,(b-p)}. \qquad (4)$$

Мы видим, что эти угловые коэффициенты равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Отсюда следует, что прямые KH и MH составляют равные углы с прямой BH (и симметричны друг другу относительно этой прямой).

Конечно, те же формулы (3) и (4) можно получить, не вводя систему координат, а рассмотрев много пар подобных треугольников. Так и поступило большинство читателей, решивших эту задачу. Многие также прислали решение, использующее теорему синусов. Одно из преимуществ аналитического решения (с помощью системы координат) кроме краткости записи заключается в том, что не нужно заботиться о расположении точек: решение годится и для того случая, когда один из углов A или C тупой: оно не проходит только в «вырожденном» случае, когда один из этих углов прямой, то есть a или c равно 0; в этом случае обе точки K и M лежат на прямой BH, так что утверждение задачи очевидно.

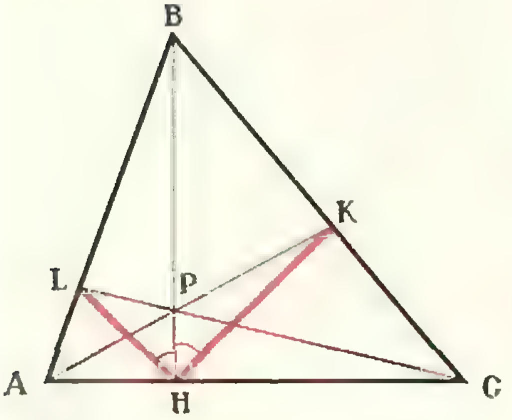


Рис. 1.

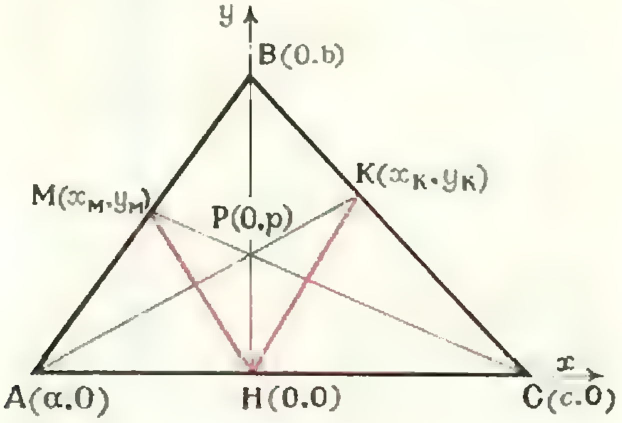


Рис. 2.

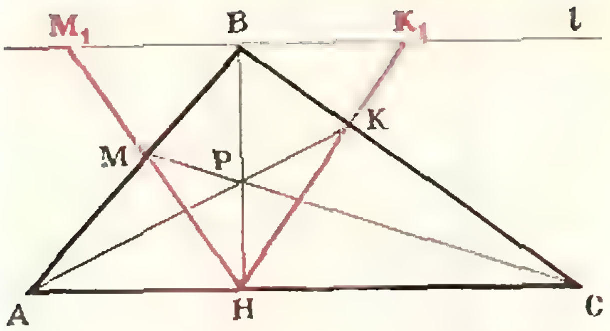


Рис. 3.

Некоторые читатели прислали геометрические решения, использующие «теорему Чевы». Вот одно из таких решений.

Пусть K_1 и M_1 — точки пересечения HK и HM с прямой l, параллельной AC и проходящей через B (рис. 3). Тогда для решения задачи достаточно доказать, что $BK_1 = BM_1$ (отсюда будет следовать равенство $\Delta BK_1H = \Delta BM_1H$). Но из подобия ΔBKK_1 и ΔCKH следует, что

$$BK_1 = \frac{CH\cdot BK}{CK}$$

и аналогично

$$BM_1 = \frac{AH\cdot BM}{AM},$$

так что нужное равенство вытекает из следующего утверждения.

Теорема (Чевы). *Если P — любая точка в плоскости треугольника ABC, K, H и M — точки пересечения прямых AP и BC, BP и AC, CP и AB соответственно (рис. 4), то*

$$AH\cdot BM\cdot CK = CH\cdot AM\cdot BK.$$

Доказательство теоремы. Будем обозначать через $S(ABC)$ площадь треугольника ABC. Тогда

$$\frac{AH}{CH}\cdot\frac{BM}{AM}\cdot\frac{CK}{BK} = \frac{S(APH)}{S(CPH)}\cdot\frac{S(BPM)}{S(APM)}\cdot\frac{S(CPK)}{S(BPK)} = \frac{S(APH)}{S(BPK)}\cdot\frac{S(BPM)}{S(CPH)}\cdot\frac{S(CPK)}{S(APM)} = \frac{PA\cdot PH}{PB\cdot PK}\cdot\frac{PB\cdot PM}{PC\cdot PH}\cdot\frac{PC\cdot PK}{PA\cdot PM} = 1$$

(об использованных здесь свойствах площадей треугольников подробно рассказывалось в статье П. Р. Кантора и Ж. М. Рабботa «Площади многоугольников» в «Кванте» № 2, 1972).

Предоставляем читателям самостоятельно сформулировать и доказать утверждение, обратное к утверждению задачи № 141.

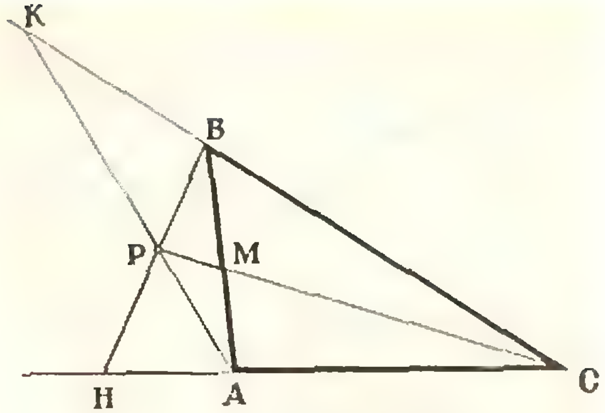


Рис. 4.

М142. *а) Докажите, что нельзя занумеровать ребра куба числами 1, 2, ..., 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трех выходящих из нее ребер была одной и той же. б) Можно ли вычеркнуть одно из чисел 1, 2, ..., 12, 13 и оставшимися занумеровать ребра куба так, чтобы выполнялось то же условие?*

а) Предположим, что можно расставить числа 1, 2, ..., 12 на ребрах куба так, что сумма трех чисел при каждой вершине равна s. Сложим все восемь таких сумм, соответствующих разным вершинам куба. В полученную сумму 24 чисел каждое из чисел 1, 2, ..., 12 войдет два раза, потому что каждое ребро куба примыкает к двум вершинам. Таким образом,

$$2\,(1 + 2 + \ldots + 12) = 8s,$$

откуда $s = \frac{12\cdot 13}{8} = \frac{39}{2}$; s получается не целым! Возникшее противоречие показывает, что нужным образом занумеровать ребра числами 1, 2, ..., 12 нельзя.

б) Ответ: Можно.

Из решения пункта а) видно, что вычеркивать имеет смысл только такое число c, для которого

$$s = \frac{1 + 2 + \ldots + 13 - c}{4} = \frac{91 - c}{4}$$

— целое, то есть $c = 3$, $c = 7$ или $c = 11$. При этом соответственно $s = 22$, $s = 21$ или $s = 20$.

Очень многие читатели, убедившись, что при этих c число s получается целым, заключают отсюда, что нужная расстановка существует. Но этой проверки, разумеется, недостаточно.

Для обоснования ответа необходимо предъявить пример. Большинство читателей прислали пример нужной расстановки для $c = 7$ (рис. 5). В этом примере каждая пара симметричных относительно 7 чисел (k, $14 - k$) располагается на ребрах, симметричных относительно центра куба.

Уже то, что из разных мест нам присылали почти исключительно один и тот же

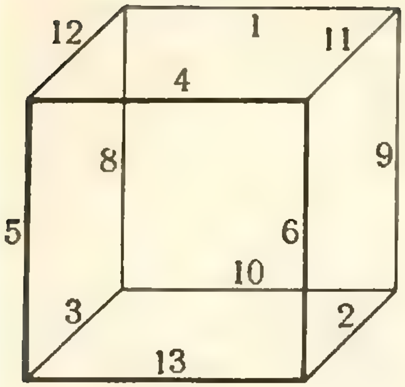


Рис. 5.

пример, наводит на мысль, что нужных расстановок существует вообще не так уж много. Любителям решать логические задачи, которых не пугает необходимость перебрать довольно много вариантов, мы предлагаем подумать над такими вопросами: сколько существует различных расстановок чисел 1, . . ., 6, 8, . . ., 13 на ребрах куба удовлетворяющих условию задачи (две расстановки считаются различными, если они не получаются друг из друга поворотом или симметрией куба)? Существуют ли расстановки цифр 1, . . ., 13 при $c = 3$ или $c = 11$? Ответы на эти вопросы вы сможете найти в конце журнала. Там же высказаны некоторые соображения, которые помогают построить нужные примеры и сократить перебор.

М143. *Найдите наименьшее натуральное число n, для которого выполняется следующее условие:*
если n делится на $p-1$ и p — простое, то n делится на p.

Пусть n удовлетворяет этому условию. Поскольку n делится на $1 = 2-1$, оно должно делиться на 2, но тогда оно делится на $3 = 2+1$, на $7 = 2 \cdot 3 + 1$ и на $43 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$. Поэтому n должно делиться на $1806 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$.

Следовательно, минимальное n (если оно существует) не меньше 1806. С другой стороны, для 1806 условие задачи выполнено. Вот все делители числа 1806:

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14,\ 21,\ 42,\ 43,\ 86,\ 129,\ 301,\ 1806. \quad (5)$$

Увеличив теперь каждый из них на единицу, получим:

$$2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 15,\ 22,\ 43,\ 44,\ 87,\ 130,\ 302,\ 1807. \quad (6)$$

Остается отобрать все простые числа из набора (6) и убедиться что они входят в набор (5) (1807 — не простое, оно делится на 13).

Ответ: $n = 1806$.

М144. Решение этой задачи содержится в заметке А. Т. Колотова «Об одном разбиении прямоугольника» (см. стр. 14 этого номера).

М145. *A обещает платить B в среднем $\sqrt{2}$ руб в день. Они условились что в n-й день A будет получать целое число a_n рублей (a_n равно 1 или 2) с таким расчетом, чтобы сумма, полученная за первые n дней ($a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), была как можно ближе к числу $n\sqrt{2}$. Например, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$.*
Докажите, что последовательность a_1, a_2, a_3, … — непериодическая.

Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, что, начиная с некоторого дня с номером $N+1$, эта последовательность — периодическая и T — период, то есть $a_{N+T+1} = a_{N+1}$, $a_{N+T+2} = a_{N+2}$ и т. д. Тогда за каждые T дней, следующих после дня N, B будет получать одно и то же целое число

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+T} = c \quad (7)$$

рублей. Поэтому в среднем (за большой промежуток времени) он получит по $\frac{c}{T}$ рублей в день. Но из правила построения последовательности a_n в среднем он должен получать $\sqrt{2}$ рублей в день. Приходим к противоречию: равенство

$$\frac{c}{T} = \sqrt{2} \quad (8)$$

невозможно, поскольку число $\sqrt{2}$ иррационально, а c и T — натуральные.

Подобную идею высказали многие из приславших нам решение этой задачи. Но не все довели ее до строгого доказательства. Это доказательство может выглядеть, например, так.

Обозначим $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ через s_n. Поскольку $n\sqrt{2}$ иррационально и s_n — ближайшее целое число к $n\sqrt{2}$ (рис. 6), то

$$|s_n - n\sqrt{2}| < 1/2. \quad (9)$$

Предполагая, что при $n > N$ последовательность a_n — периодическая, и используя обозначение (7), для любого натурального m имеем

$$s_{N+mT} = s_N + mc. \quad (10)$$

Применяя (9) к $n = N + mT$, с учетом (10) получим

$$|s_N + mc - N\sqrt{2} - mT\sqrt{2}| < 1/2,$$

откуда, используя неравенство $|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$ и деля на mT, получаем

$$\left|\frac{c}{T} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2mT} + \frac{|s_N - N\sqrt{2}|}{mT} < \frac{1}{mT}.$$

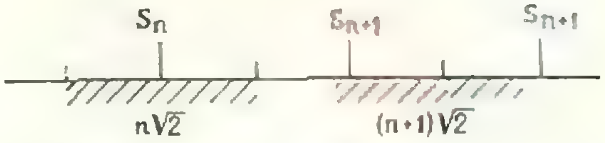


Рис. 6.

Это неравенство должно выполняться при любом m. Отсюда следует, что левая часть неравенства должна равняться 0 *), то есть мы приходим к равенству (8), которое, как уже говорилось, неверно ни при каких натуральных c и T.

Н. Б. Васильев

Ф159. *Разность между давлениями внутри и снаружи резинового шарика возросла на $\alpha_1\%$, а при этом радиус шарика увеличился на $q_1\%$. На сколько процентов возрастет радиус шарика, если разность между давлениями внутри и снаружи шарика возрастет на $\alpha_2\%$?*

Редакция не получила ни одного доведенного до конца решения этой задачи. Почти все читатели, приславшие нам свои ответы, рассуждали следующим образом.

Для того чтобы решить задачу, нужно найти формулу, связывающую разность давлений внутри и снаружи шарика с его радиусом. Мы знаем, что в случае мыльного пузыря разность давлений пропорциональна величине σ/R:

$$\Delta P \sim \frac{\sigma}{R},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора. σ — это сила, которая действует на единицу длины границы мыльной пленки.

Обратная пропорциональная зависимость разности давлений от радиуса пузыря связана не с природой поверхности, а с тем, что она имеет сферическую форму. Поэтому точно такая же формула должна быть правильной и для резинового шарика.

Однако, в случае резинового шарика σ, то есть сила упругости, действующая на единицу длины границы резиновой пленки, не будет постоянной величиной, не зависящей, как в случае мыльного пузыря, от его радиуса.

Найти зависимость $\sigma(R)$ трудно. Мы же приведем решение задачи, которое не зависит от вида функции $\sigma(R)$. Будем предполагать, что изменение радиуса шарика мало по сравнению с самим радиусом и изменение разности давлений внутри и снаружи шарика тоже мало по сравнению с самой этой разностью. Это значит, что $q_1 \ll 100$, $q_2 \ll 100$, $\alpha_1 \ll 100$ и $\alpha_2 \ll 100$ ($q_2\%$ — изменение радиуса шарика во втором случае). Изменение радиуса шарика зависит от изменения разности давлений. Это означает, что q является функцией $\alpha : q = q(\alpha)$. Что можно сказать о графике функции $q(\alpha)$? При $q = 0$ $\alpha = 0$; следовательно, кривая $q(\alpha)$ проходит через начало координат. Физически ясно, что эта кривая при малых α не имеет вертикальных скачков. При достаточно малых α действительный график зависимости $q(\alpha)$ с хорошим приближением можно заменить прямой — касательной к графику в начале координат. То есть зависимость $q(\alpha)$ можно считать линейной:

$$q = k\alpha,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Теперь решить задачу совсем просто. Согласно условию

$$q_1 = k\alpha_1, \qquad (1)$$
$$q_2 = k\alpha_2 \qquad (2)$$

(мы считаем, что увеличение разности давлений отсчитывается от одного начального значения*)). Разделив равенство (2) на (1) почленно, получим:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

откуда

$$q_2 = q_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Ф160. *Диск радиуса R раскручивают вокруг вертикальной оси с помощью веревки длины l, которую тянут с постоянной силой F (рис. 7). После этого диск соскакивает с оси и попадает на горизонтальную плоскость. Сколько оборотов сделает диск на плоскости до полной остановки, если его масса равна M, а коэффициент трения диска о плоскость равен k?*

Диск остановится, когда вся его кинетическая энергия перейдет в тепловую энергию благодаря трению о плоскость. Это означает, что условие остановки диска — равенство кинетической энергии диска работе силы трения.

Кинетическую энергию диска в момент его соприкосновения с плоскостью найти нетрудно — она равна работе силы F:

$$W_к = Fl. \qquad (1)$$

Найдем работу силы трения. Перемещение различных точек диска различно.

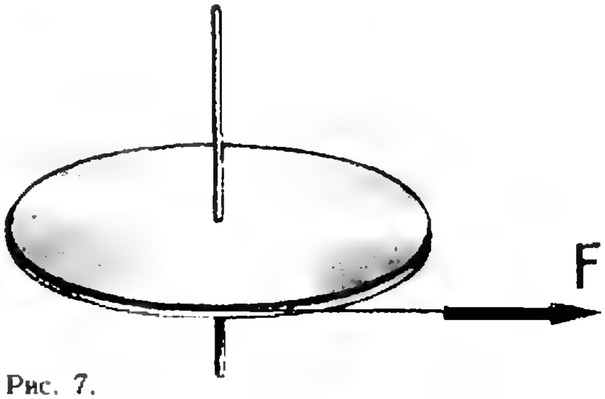


Рис. 7.

---

*) Здесь используется такое очевидное свойство действительных чисел: если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то существует натуральное m такое, что $m\alpha > \beta$.

(«Аксиома Архимеда»)

*) Возможно, что при некоторой «критической» разности давлений шарик «лопнет». Мы считаем, что увеличение разности давлений на α_1 % и α_2 % начинается с некоторого начального значения, далекого от критического.

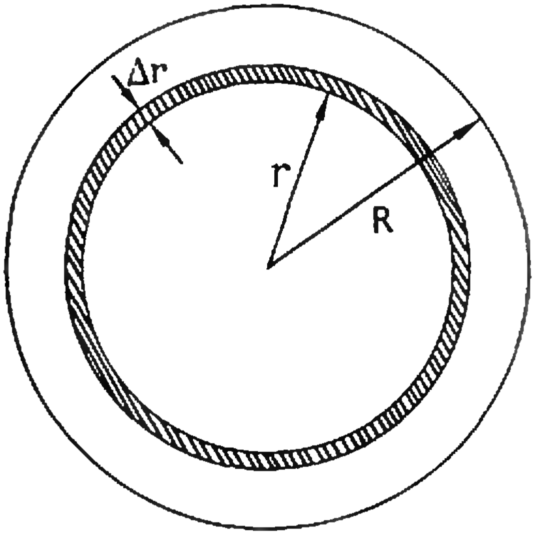


Рис. 8.

Поэтому поступим следующим образом. Разобьем диск на тонкие полые цилиндры. Рассмотрим один из таких цилиндров, находящийся от центра диска на расстоянии r (рис. 8). Толщина его $\Delta r \ll r$, поэтому можно считать, что при повороте диска на угол φ каждая точка выделенного цилиндра переместится на φr. Это означает, что сила трения $F_{тр}$ совершила работу

$$\Delta A = F_{тр}\,\varphi r = k\,\Delta m\,g\varphi r, \qquad (2)$$

где Δm — масса выделенного цилиндра, которую можно выразить через массу диска M. Очевидно, отношение массы цилиндра к массе диска равно отношению их площадей

$$\frac{\Delta m}{M} = \frac{\pi (r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2}.$$

Отсюда

$$\Delta m = M\,\frac{2r\,\Delta r + (\Delta r)^2}{R^2}.$$

Так как $\Delta r \ll r$, то $(\Delta r)^2 \ll 2r\,\Delta r$ и

$$\Delta m = 2M\,\frac{r\,\Delta r}{R^2}.$$

Подставив это выражение для Δm в формулу (2), получим

$$\Delta A = \frac{2\varphi Mgkr^2\,\Delta r}{R^2}.$$

Работа силы трения при повороте всего диска равна сумме таких выражений, относящихся к разным цилиндрам:

$$A = \sum \frac{2\varphi Mgkr^2\,\Delta r}{R^2} = \frac{2\varphi Mgk\Sigma r^2\,\Delta r}{R^2}. \qquad (3)$$

Сумму $\Sigma r^2\,\Delta r$ можно посчитать так. Рассмотрим график функции $y = r^2$ (рис. 9). Произведение $r^2\Delta r$ — это площадь выделенного на рисунке прямоугольника, а сумма $\Sigma r^2\,\Delta r$ равна площади ступенчатой фигуры, состоящей из подобных прямоугольников. При $\Delta r \to 0$ ломаная линия стремится к параболе $y = r^2$. Поэтому выражение $\Sigma r^2\,\Delta r$ численно равно площади фигуры под графиком параболы. Для отыскания этой площади можно использовать метод, изложенный в статье А. Д. Бендукидзе «Архимед и квадратура параболы» («Квант» № 7, 1971), и прийти к выражению *)

$$\Sigma r^2\,\Delta r = \frac{1}{3}\,R^3.$$

Подставим это выражение в формулу (3)

$$A = \frac{2\varphi MgkR^3}{3R^2} = \frac{2}{3}\,\varphi MgkR.$$

Приравняем теперь эту величину кинетической энергии диска:

$$\frac{2}{3}\,\varphi MgkR = Fl.$$

Отсюда найдем угол поворота диска

$$\varphi = \frac{3}{2}\,\frac{Fl}{MgkR}.$$

Число оборотов диска равно

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3}{4}\,\frac{Fl}{\pi MgkR}.$$

Ф161. *Вольтамперные характеристики элементов С и Б показаны на рисунках 10, а и б (это идеализированные вольтамперные характеристики стабилитрона и бареттера). Какой ток идет через элемент С в цепях, показанных на рисунке 11? Каково падение напряжения на элементе Б в схемах, показанных на рисунке 12?*

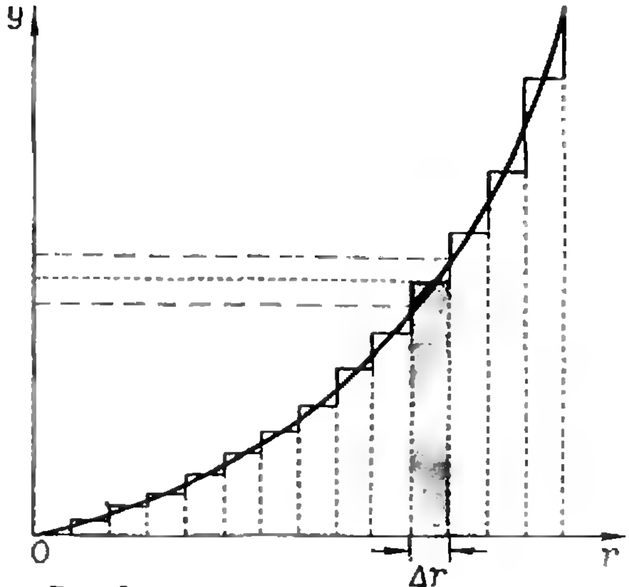


Рис. 9.

---

*) Те, кто прочитал статью Ю. И. Ионина «Интеграл» («Квант» № 9, 1972), может посчитать эту сумму, воспользовавшись методами интегрального исчисления.

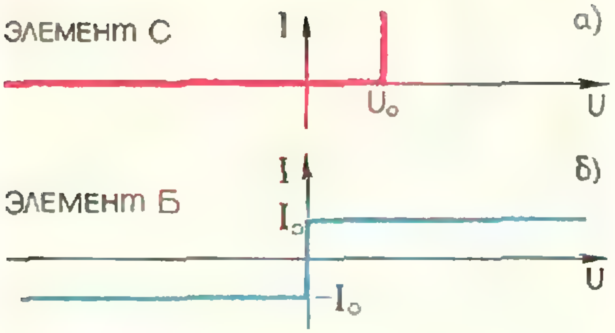


Рис. 10.

Будем для простоты считать, что сопротивления источников равны нулю. Рассмотрим сначала схемы, показанные на рисунках 11, *а* и 12, *а*.

1) Через элемент С (рис. 11, *а*) ток не идет, пока падение напряжения на нем не станет равным U_0. Таким образом, при $E \leqslant U_0$ $I_C = 0$. При $E > U_0$ падение напряжения на элементе С равно U_0, а падение напряжения на сопротивлении R равно $E - U_0$. При этом по цепи идет ток

$$I_C = \frac{E - U_0}{R}.$$

График зависимости I_C от E показан на рисунке 13.

2) Если э. д. с. источника (рис. 12, *а*) такова, что через элемент Б идет ток, меньший I_0, то падение напряжения на нем равно нулю. При этом падение напряжения на сопротивлении R равно E и, следовательно,

$$I = \frac{E}{R}.$$

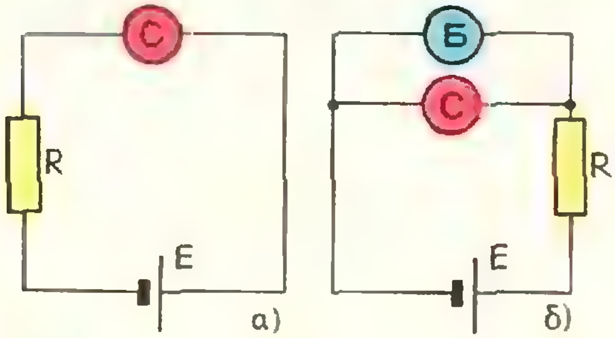


Рис. 11.

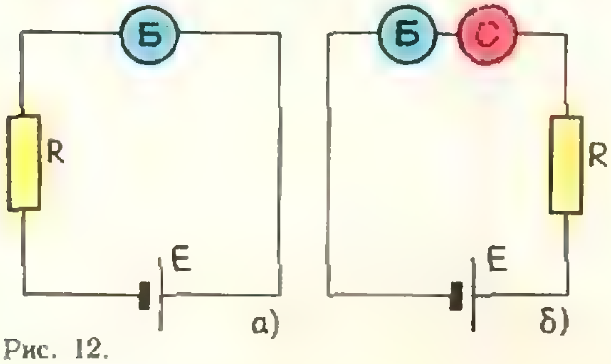


Рис. 12.

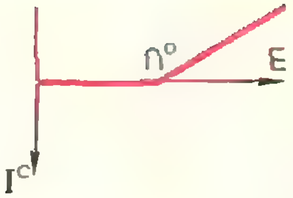


Рис. 13.

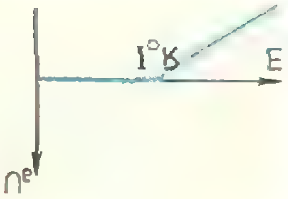


Рис. 14.

Это равенство выполняется, пока $I \leqslant I_0$, то есть при $\frac{E}{R} \leqslant I_0$ или $E \leqslant I_0 R$.

При $E > I_0R$ по цепи идет ток I_0, падение напряжения на сопротивлении R равно I_0R, а на элементе Б оно равно $E - I_0R$.

График зависимости падения напряжения на элементе Б от E показан на рисунке 14.

Теперь рассмотрим схемы, показанные на рисунках 11, *б* и 12, *б*.

3) Если э. д. с. источника в схеме, показанной на рисунке 11, *б*, меньше, чем I_0R, то ток через элемент С равен нулю, а через элемент Б идет ток

$$I = \frac{E}{R}.$$

Это верно, если $I \leqslant I_0$, то есть при $\frac{E}{R} \leqslant I_0$ или $E \leqslant I_0R$.

При увеличении э. д. с. источника ток через элемент Б может увеличиваться только до величины I_0. Если $E > I_0R$, но падение напряжения на элементах С и Б меньше U_0, ток идет только через элемент Б. Этот ток равен I_0. Поэтому падение напряжения на сопротивлении R равно I_0R, а падение напряжения на элементах С и Б равно $E - I_0R$. Это выполняется до тех пор, пока

$$E - I_0R \leqslant U_0,$$

то есть при

$$E \leqslant U_0 + IR.$$

При большей э. д. с. источника падение напряжения на элементах С и Б равно U_0, по сопротивлению R идет ток $I_R = \frac{E - U_0}{R}$, через элемент Б идет ток $I_Б = I_0$, а через элемент С — $I_C = I_R - I_Б = \frac{E - U_0}{R} - I_0$.

Графики зависимости тока через сопротивление R, падения напряжения на элементах С и Б и тока I_C от E показаны на рисунке 15.

4) Ясно, что при $E \leqslant U_0$ падение напряжения на элементе С в схеме, показанной на рисунке 12б, меньше U_0, и ток по цепи не идет. При этом падение напряжения на элементе Б равно нулю. Когда E станет больше U_0, по цепи будет идти ток $I = \frac{E - U_0}{R}$. Но этот ток не может быть больше I_0. Пока

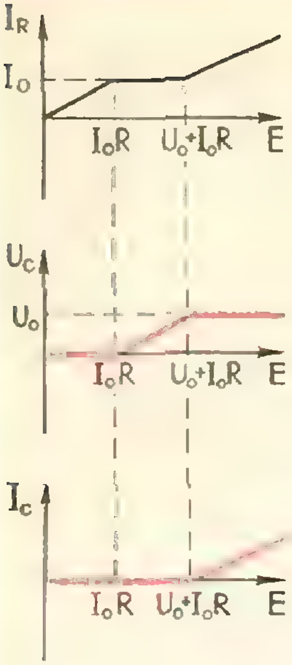


Рис. 15.

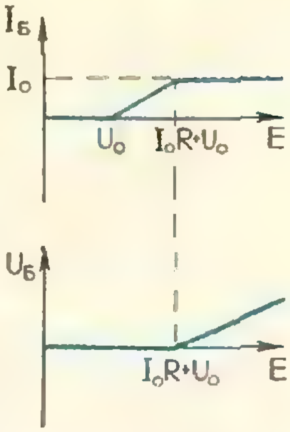


Рис. 16.

$I < I_0$, то есть $\frac{E-U_0}{R} < I_0$ или $E < U_0 + I_0R$, падение напряжения на элементе Б равно нулю. При $E \geqslant U_0 + I_0R$ $I = I_0$, а падение напряжения на элементе Б равно $U_Б = E - I_0R - U_0$.

Графики зависимости тока, идущего по цепи, и напряжения $U_Б$ от E показаны на рисунке 16.

Ф162. *Противостоянием Марса называется момент, когда Марс, Солнце и Земля находятся на одной прямой. Великое противостояние — это момент, когда расстояние Земля—Марс минимально. Считая, что орбита Земли — окружность, а орбита Марса — эллипс, найти, через сколько лет повторяются великие противостояния.*

Полный оборот вокруг Солнца Марс делает за 687 дней.

Если великие противостояния повторяются через k лет, то Земля за это время сделает k полных оборотов, а Марс — $n = \frac{365}{687}k$ полных оборотов. Это число должно быть целым. Таким образом, нам нужно найти такое минимальное целое k, при котором выражение $\frac{365}{687}k$ равно целому числу.

Так как $\frac{365}{687} \approx \frac{365}{685} = \frac{73}{137} \approx \frac{72}{135} = \frac{8}{15}$, то минимальное целое k, при котором n тоже целое, равно 15. При этом $n = 8$.

Таким образом, великие противостояния повторяются через 15 лет. Марс за это время делает 8 оборотов.

В действительности, как известно, великие противостояния повторяются через 15 или 17 лет.

Ф163. *Согласно одной из первых моделей атома водорода (модель Томсона) он представляет собой равномерно заряженный положительным электричеством шар, в центре которого находится электрон. В целом атом нейтрален. Найти радиус такого атома, если известно, что минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону для удаления его из атома на большое расстояние, равна W. Величина заряда электрона e.*

Величина W равна работе, которую необходимо затратить для того, чтобы удалить из атома электрон.

Легко найти работу, которую необходимо затратить для того, чтобы удалить электрон с поверхности атома «на бесконечность» (бесконечно далеко от него). Эта работа равна потенциальной энергии электрона у поверхности положительно заряженного шара, то есть потенциалу электрического поля на поверхности шара $\varphi = \frac{e}{R}$ (e — заряд шара и R — его радиус), умноженному на величину заряда электрона

$$A_1 = \frac{e}{R}\cdot e = \frac{e^2}{R}.$$

Для того, чтобы найти работу, которую необходимо затратить для перемещения электрона из центра атома на его поверхность, разобьем шар на тонкие шаровые слои толщиной Δr такие, чтобы на протяжении каждого из таких слоев силу, действующую на заряд, можно было считать постоянной. Для этого нужно, чтобы $\Delta r \ll R$. Напряженность поля, создаваемого зарядами каждого из слоев, внутри этого слоя, как известно, равна нулю, а вне слоя — такая же, какой она была бы, если бы весь заряд слоя был сосредоточен в центре шара. Это означает, что напряженность электрического поля внутри атома на расстоянии r от его центра равна

$$E = \frac{q}{r^2},$$

а сила, действующая в этом поле на электрон, равна

$$F = \frac{qe}{r^2},$$

где q — заряд, который находится внутри сферы радиуса r.

Так как заряд шара e и он распределен по шару равномерно, то в единице объема шара сосредоточен заряд

$$\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Значит, внутри шара с радиусом r будет находиться заряд

$$q = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = e\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Поэтому

$$F = \frac{e^2}{R^3} r.$$

Для того, чтобы вычислить работу, которая затрачивается на перенесение электрона в атоме, возьмем среднюю силу и умножим ее на перемещение электрона R. Так как сила, действующая на электрон, пропорциональна расстоянию электрона от центра атома, то средняя сила равна половине силы, действующей на электрон на поверхности атома (она равна $\frac{e^2}{R^3} R = \frac{e^2}{R^2}$):

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R^2}.$$

Поэтому

$$A_2 = F_{\text{ср}} R = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R^2} R = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R}.$$

Полная работа, которая необходима для удаления электрона из центра атома на большое расстояние, равна

$$A = A_1 + A_2 = \frac{e^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{R} = \frac{3}{2} \frac{e^2}{R}.$$

Эта работа по условию равна W:

$$\frac{3}{2} \frac{e^2}{R} = W.$$

Отсюда

$$R = \frac{3}{2} \frac{e^2}{W}.$$

Подставим сюда численные значения величин. Известно, что энергия ионизации атома водорода — энергия, необходимая для отрыва электрона от атома, — равна 13,6 *эв* или $21{,}7 \cdot 10^{-12}$ *эрг*, и $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ. Поэтому радиус атома в модели Томсона равен

$$R = \frac{3 \cdot 23 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 21{,}7 \cdot 10^{-12}} \text{ см} = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

И. Ш. Слободецкий

Автоморфные числа

Вы слышали что-нибудь об автоморфных числах? Это числа, которые вновь появляются на конце своих квадратов. Некоторые из таких чисел хорошо вам знакомы: 5 (5×5=25), 6 (6×6=36), 25 (25×25=625). Однозначных автоморфных чисел всего два: 5 и 6. Двузначных — тоже два: 25 и 76. Трехзначные автоморфные числа — 625 и 376. Оказывается, автоморфные числа более высокого порядка получаются из автоморфных чисел предыдущего порядка, если к ним дописать спереди одну цифру (которая, правда, может быть нулем, поэтому четырехзначное автоморфное число только одно: 9376, а 90625 — единственное пятизначное автоморфное число).

Автоморфные числа могут быть сколь угодно большими. Вот, например, 100-значное автоморфное число: 395300 731910816980293850989006216 650958086381100055742342323 089610900410661997739225625 9918212890625.

Это число было обнаружено в 1964 году. Его пару вы можете написать сами. Оказывается, существует довольно простая зависимость между автоморфными числами одного порядка, и, зная одно из них, можно легко обнаружить второе. Попробуйте найти эту зависимость и написать второе 100-значное автоморфное число (в этом вам поможет решение задачи М69, «Квант» № 10, 1971). Интересно, что автоморфные числа существуют не в любой системе счисления: основание системы не должно быть простым числом или его степенью. Первой подходящей системой будет шестиричная, попробуйте найти в ней пару двузначных автоморфных чисел.

В. И. Бахмин

В 1972 году на страницах «Кванта» будет продолжена публикация материалов под рубрикой «Практикум абитуриента». Поступающие в редакцию письма показывают, что этот раздел вызывает живой интерес у многих читателей журнала. Мы благодарны всем, кто высказал нам свои замечания и предложения.

Конечно, нет никакой возможности осветить все вопросы, входящие в программу вступительных экзаменов по математике и физике. Да в этом и нет необходимости — эти вопросы изучаются в школе и подробно рассмотрены в школьных учебниках. Поэтому редакция наметила лишь такие темы, которые в том или ином виде наиболее часто используются при решении конкурсных задач и вызывают затруднения у поступающих.

Рассмотрение теоретических вопросов в статьях сопровождается разбором конкретных примеров, взятых, как правило, из вариантов вступительных экзаменационных работ. В конце каждой статьи будут помещены задачи для самостоятельного решения, помогающие читателям проверить, насколько хорошо они усвоили прочитанное. Эти задачи в основном также берутся из вариантов вступительных экзаменов последних лет.

Учитывая многочисленные пожелания читателей, в порядке информации мы будем продолжать помещать варианты задач, предлагавшихся на письменных и устных экзаменах по математике и физике в различных вузах страны в 1972 году, а также краткие сведения об этих институтах представляющие интерес для наших читателей. Знакомство с этими материалами позволит будущим абитуриентам конкретно представить себе, что такое письменный и устный приемный экзамен, заранее попробовать свои силы в решении набора задач за ограниченное время (обычно 4 часа). Например, можно рекомендовать будущим абитуриентам устраивать себе самостоятельно «экзамен», решая за 4 часа весь вариант и записывая его, а затем самостоятельно (или с помощью товарища) проверять его. Такая тренировка, максимально приближенная к условиям экзамена, оказывается особенно результативной. Отметим только, что приступать к ней надо, достаточно хорошо изучив теоретические разделы.

Как показывает редакционная почта, большой популярностью у молодежи пользуются передачи по физике и математике из цикла «Для поступающих в вузы», которые проводятся по третьей (учебной) программе Центрального телевидения. Учитывая просьбы читателей, «Квант» будет систематически помещать информацию и материалы этих телевизионных подготовительных курсов.

Формализация условий задачи

А. А. Рывкин

Когда люди, чья жизнь складывается в стороне от математики, вспоминают школу, им невольно приходят на ум поезда, отправляющиеся из пункта A в пункт B, и бассейны, в которые через одну трубу вода наливается, а через другую выливается. Хотя у подобных задач мало общего с той «настоящей» — аксиоматической математикой, эталоном которой на протяжении многих столетий остается элементарная геометрия, умение их решать — один из непременных критериев оценки математической подготовки большинства абитуриентов.

По-видимому, жизненная сила подобных текстовых задач заключена в той роли, которую играет в них логика, присущая любому строгому прикладному исследованию.

Сегодня математика все более широко и все более успешно используется для решения таких конкретных задач (как чисто практических, так и возникших в других науках), которые требуют индивидуального нешаблонного подхода при их формализации.

Сталкиваясь с подобной задачей, математик вначале стремится сформулировать ее словами, то есть построить словесную модель, отражающую все существенные стороны явления и оставляющую в стороне второстепенные. Затем эту словесную модель предстоит формализовать, или построить математическую модель изучаемого объекта. Формальная модель должна быть, с одной стороны, достаточно простой, чтобы допускать дальнейший математический анализ, а с другой стороны, она должна быть эффективной — отвечать той цели, ради которой ее сконструировали. Построенная таким образом модель подвергается изучению с помощью чисто математических средств. Чаще всего она оказывается системой уравнений, и цель достигается в результате ее решения. В других случаях эта система состоит из уравнений и ограничений. Нередко в условии задачи содержится некоторый критерий качества, позволяющий из множества возможных решений системы отобрать «наилучшие». Случается, что на последней стадии решения системы выясняется несоответствие модели цели исследования. Тогда приходится вернуться к самому первому этапу и начать все сначала.

Текстовая задача, с которой абитуриенты встречаются на экзамене, представляет собой словесную модель некоторой практической задачи. Пусть эта задача не всегда достаточно реальна по своему содержанию, пусть заранее известно, что она имеет более или менее простое решение. Логика формализации и остальные этапы прикладного математического исследования содержатся в ней обязательно.

Сейчас стали появляться текстовые задачи, подводящие абитуриентов к тем проблемам, с которыми им придется столкнуться после поступления в вуз. Например, в 1968 году поступающим на отделение экономической кибернетики экономического факультета МГУ была предложена такая задача.

Задача 1. *Завод должен переслать заказчику* 1100 *деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает* 70 *деталей, один ящик второго типа —* 40 *деталей, а один ящик третьего типа —* 25 *деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого, второго и третьего типа равна соответственно* 20, 10 *и* 7 *рублям. Какие ящики должен использовать* *завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.*

Читатели, привыкшие решать текстовые задачи, легко запишут соответствующие формальные соотношения. Если обозначить через x_1, x_2 и x_3 количества используемых ящиков вместимостью по 70, 40 и 25 деталей соответственно, то

$$70\,x_1+40\,x_2+25\,x_3=1100,$$

так как по условию недогрузка ящиков не допускается. Величины x_1, x_2 и x_3 нужно выбрать такими, чтобы стоимость пересылки

$$20\times 70\;x_1+10\times 40\;x_2+7\times 25\;x_3$$

была наименьшей.

К сожалению, формальная запись условий задачи мало чем помогает нам в отыскании ее решения. Гораздо полезнее представить себя на месте работника экспедиции, которому поручили осуществить эту пересылку. Первое, на что он обратит внимание, будет стоимость пересылки одной детали для каждого из трех вариантов.

Сравнивая числа $\frac{20}{70}$, $\frac{10}{40}$ и $\frac{7}{25}$ или после приведения к общему знаменателю $\frac{200}{700}$, $\frac{175}{700}$ и $\frac{196}{700}$, он заметит, что самой дешевой оказывается пересылка в комплектах по 40 деталей, а самой дорогой — в комплектах по 70 деталей. Так как 1100 не делится нацело на 40, то придется воспользоваться не только самыми выгодными комплектами. Чтобы потерять как можно меньше, он будет постепенно отказываться от самых выгодых условий, то есть рассматривать случаи, когда в ящики по 40 деталей уложено максимально возможное количество деталей: 1080, 1040, 1000, 960 и т. д. В первом случае неупакованными останутся 20 деталей, а во втором — 60 деталей. Ими нельзя загрузить ящики по 25 деталей в каждом и тем более по 70 деталей. Третий случай вполне допустим: он предполагает, что для упаковки будут использованы 25 ящиков по 40 деталей ($25\times 40=1000$) и 4 ящика по 25 деталей. Любой другой вариант приведет к бо́льшим расходам, поскольку количество самых выгодных комплектов уменьшится за счет увеличения количества менее выгодных комплектов (по 25 деталей в ящике) или за счет появления самых невыгодных комплектов (по 70 деталей), которые в найденном нами варианте не используются вовсе.

Мы видим, что при решении этой задачи здравый смысл оказался гораздо полезнее формальной математики. А вот для задачи из другого варианта того же года одного здравого смысла было бы, пожалуй, недостаточно.

Задача 2. *Четыре группы туристов отправились в воскресный поход по четырем маршрутам разной протяженности. Сумма расстояний, пройденных первой и четвертой группами вместе, на 6 км больше суммы расстояний, пройденных второй и третьей группами. Вторая группа прошла на 2 км меньше первой. Число туристов третьей группы равно расстоянию (в километрах), пройденному первой группой, а число туристов второй группы равно расстоянию, пройденному четвертой группой. Сумма квадратов расстояний, пройденных каждой группой, равна 494 км². Сколько километров прошла каждая группа?*

Как и в предыдущей задаче, начнем с формализации условия. Если группа с номером i прошла x_i *км*, то

$$\begin{cases} x_1+x_4=x_2+x_3+6,\\ x_1=x_2+2,\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=494. \end{cases}$$

Мы получили систему уравнений с четырьмя неизвестными. Правда, остались неиспользованными условия, в силу которых x_1 равно числу туристов третьей группы, а x_4 — числу туристов второй группы. В первый момент эти данные задачи вызывают недоумение, а в памяти всплывает детская задача-шутка, ни к селу ни к городу оканчивающаяся вопросом «сколько лет капитану?», заведомо не имеющим ничего общего с условием. «Разве что-нибудь изменится, — готовы уже спросить вы, если дописать к системе еще два уравнения

$$\begin{cases} x_1 = n_3, \\ x_4 = n_2 \end{cases}$$

(индекс у числа n соответствует номеру группы)? Мы добавили два уравнения и ввели два новых неизвестных, так что получить недостающее уравнение так и не удалось». Однако сам вид двух последних уравнений заставит вас уже в следующее мгновение заметить, что n_2 и n_3 — числа натуральные, а следовательно, $x_2 = x_1 - 2 = n_3 - 2$ и $x_3 = x_1 + x_4 - x_2 - 6 = n_3 + n_2 - n_3 + 2 - 6 = n_2 - 4$ — непременно целые числа.

Поиски недостающего уравнения не увенчались успехом, но доставили нам дополнительную информацию о неизвестных. Теперь остается решить полученную систему уравнений в неотрицательных целых числах. Подставим второе уравнение $x_1 = x_2 + 2$ в первое. Получим $x_4 = x_3 + 4$. Заменим теперь в третьем уравнении x_1 и x_4 их выражениями через x_2 и x_3:

$$(x_2+2)^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_3+4)^2 = 494,$$

то есть

$$x_2^2 + 2x_2 + x_3^2 + 4x_3 = 237.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$(x_2+1)^2 + (x_3+2)^2 = 242.$$

Поскольку сумма квадратов двух неотрицательных чисел равна 242 лишь в том случае, когда оба эти числа равны 11 (в этом легко убедиться непосредственной проверкой), то $x_2 = 10$, $x_3 = 9$, а следовательно, $x_1 = 12$, $x_4 = 13$.

Итак, первая группа прошла 12 *км*, вторая 10 *км*, третья 9 *км*, а четвертая 13 *км*.

Чаще всего при решении задач на составление уравнений трудности связаны с выбором удачной формализации. Нужно так ввести неизвестные и так составить уравнения, чтобы сформулированные в условии логические связи нашли достаточно простое отражение в уравнениях. Не следует при этом ориентироваться на получение простейшей формы записи условия. Если упрощение уравнений достигнуто усложнением логики, использованной при их составлении, то такое решение можно будет признать более изящным, но не всегда более простым. Возникающие здесь альтернативы мы проиллюстрируем на примерах двух задач, относящихся к типу задач на концентрацию.

Задача 3. (Геофак МГУ, 1967). *В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получится 5%-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10%-ный раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.*

Необходимо начать с определения ядра задачи, то есть существенных связей, объединяющих ее элементы. В задаче говорится о резервуаре, который в первом случае наполняют до краев, а во втором — сначала наполовину, а затем доливают доверху. Казалось бы, нет ничего естественнее, как попытаться именно на этой основе составить уравнения.

Так как объем в литрах нигде в задаче не упоминается, то следует принять емкость резервуара за единицу. Пусть далее x_1 и x_2 — пропускные способности первой и второй труб, измеренные в долях объема всего резервуара. Через q обозначим концентрацию кислоты (в долях единицы), поступающей по одной из труб.

Как же теперь составить уравнение, отражающее условие задачи, в силу которого после одновременного наполнения резервуара первой и второй трубами в нем получится 5%-ный раствор кислоты? Чтобы зафиксировать тот факт, что резервуар был наполнен, нам нужно знать время, которое эти две трубы работали. Оно равно $\frac{1}{x_1+x_2}$. Стопроцентной концентрированной кислоты за это время поступило $\frac{qx_1}{x_1+x_2}$, что и составило 5% от объема, равного единице:

$$\frac{qx_1}{x_1+x_2}=0{,}05.$$

Во втором случае резервуар был наполнен сначала наполовину. Количество концентрированной кислоты при этом оказалось равным $\frac{qx_1}{2(x_1+x_2)}$.

Затем его наполняла только вторая труба, по которой поступала кислота концентрации q. Следовательно, всего в резервуаре оказалось $\frac{qx_1}{2(x_1+x_2)}+\frac{q}{2}$ концентрированной кислоты. Таким образом, получаем второе уравнение:

$$\frac{qx_1}{2(x_1+x_2)}+\frac{q}{2}=0{,}1.$$

Решая полученную систему, находим, что труба, по которой поступает вода, имеет вдвое большую пропускную способность по сравнению с трубой, по которой поступает кислота.

Хотя задача решена довольно быстро, процесс составления уравнений потребовал более трудных логических выкладок, чем это было необходимо.

Следовало сразу же обратить внимание на то обстоятельство, что сам резервуар не играет в условии задачи никакой роли, а потому «ядро» задачи мы выбрали неверно. И в первом, и во втором случаях в условии говорится о потоках жидкости, а не о ее запасах. Если в резервуар по двум трубам одновременно начинает поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации, то 5%-ный раствор кислоты получится не только после его наполнения. В каждый момент времени в результате перемешивания двух поступающих в резервуар жидкостей получается раствор 5%-ной концентрации. Примем теперь пропускную способность трубы, по которой поступает кислота, за единицу, а пропускную способность другой трубы обозначим через p (p мы и должны определить по условию задачи). Пусть, как и прежде, концентрация поступающей по первой трубе кислоты равна q. Процесс смешивания можно описать простым уравнением

$$\frac{q}{p+1}=0{,}05$$

(в единицу времени в бассейн поступает количество жидкости, равное $p+1$, а концентрированной кислоты в этой жидкости будет q).

Вторую часть задачи переформулируем теперь следующим образом: в результате смешения двух одинаковых объемов кислоты, один из которых имел концентрацию 0,05, а другой q, получился раствор концентрации 0,1:

$$\frac{0{,}05+q}{2}=0{,}1.$$

Решение полученных уравнений не представляет никакого труда.

В этой задаче выбор менее рационального пути для ее формализации практически не усложнил процесса решения полученной в результате системы уравнений. Однако в тех же задачах на концентрацию могут возникнуть серьезные затруднения только из-за того, что выбран неудачный путь составления уравнений. В качестве примера обратимся к задаче, которая неоднократно предлагалась на экзаменах (мехмат, 1962, экономическая кибернетика, 1965).

Задача 4. *Из полного бака, содержащего 729 л чистой кислоты, отлили a л и долили бак водой. После полного перемешивания (до получения однородного раствора) из бака опять отлили a л раствора, снова долили бак водой и тщательно перемешали. После того как такая операция была проведена шесть раз, жидкость в баке* *содержала 64 л чистой кислоты. Определить величину а.*

В условии акцент сделан на том, что после шестикратного повторения операции в баке осталось 64 *л* чистой кислоты. Обычно это условие и служит базой для составления уравнения.

Однако задачу можно решить проще, если в качестве основы для составления уравнения выбрать концентрацию растворов, а не объемы. Подобные задачи и называют задачами на концентрацию, поскольку именно обращение к концентрациям позволяет получить наиболее удачную формальную запись условия. Обозначим через q_1, q_2,... концентрацию кислоты в баке после первой, второй,... операции. Очевидно, что

$$q_1 = \frac{729 - a}{729}, \quad q_2 = q_1 \frac{729 - a}{729}, \ldots,$$

$$q_6 = q_5 \frac{729 - a}{729}.$$

В самом деле, если перед $(i+1)$-й операцией концентрация кислоты была q_i, то из бака вылили $q_i\, a$ литров чистой кислоты, после чего в нем осталось $q_i\,(729 - a)$ литров чистой кислоты. Таким образом,

$$q_{i+1} = q_i \frac{729 - a}{729}.$$

Итак, концентрации q_i образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{729 - a}{729}$. Так как концентрация q_6 по условию равна $\frac{64}{729}$, то получаем уравнение

$$\left(\frac{729 - a}{729}\right)^6 = \frac{64}{729},$$

то есть $\frac{729 - a}{729} = \frac{2}{3}$,

откуда $a = 243$.

Теперь перейдите к упражнениям. Не торопитесь заглянуть в решение даже в том случае, если задача не кажется вам трудной и вы хотите только проверить правильность хода ваших мыслей. Доведите задачу до ответа, причем сделайте это внимательно и аккуратно, и лишь после этого прочтите решение. Сопоставьте ваш подход с тем, который предлагается в конце номера.

Упражнения

1. (Экономический факультет МГУ, 1968). Предполагается использовать 2000 руб. на путевки в дома отдыха. Путевки имеются на 15, 27 и 45 дней; стоимость их соответственно 21, 40 и 60 руб. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим?

2. (Химфак МГУ, 1969). В первый сосуд емкостью 6 *л* налито 4 *л* 70%-ного раствора серной кислоты; во второй сосуд такой же емкости налито 3 *л* 90%-ного раствора серной кислоты (имеется в виду объемное процентное содержание). Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился r%-ный раствор серной кислоты? Найти все значения r, при которых задача имеет решение.

3. (Химфак МГУ, 1970). Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 *л* жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 *л* каждого раствора и 20 *л* воды, то получится 40 *л* 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации (в %) получится кислота, если в течение часа подавать в пустой первоначально бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый? (Считается, что при смешивании воды и кислоты объем не меняется).

4. (Филфак МГУ, 1970). Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за 40 минут, вторая, третья и четвертая — за 10 минут, вторая, третья и пятая — за 20 минут, наконец, четвертая и пятая — за 30 минут. За сколько времени наполнят резервуар все пять труб при одновременной работе?

5. Сосуд, содержащий p%-ный раствор кислоты, долили доверху q%-ным раствором кислоты и после перемешивания отлили то же количество. Проделав эту операцию k раз, получили r%-ный раствор. Какую часть объема сосуда занимал первоначальный раствор?

Московский инженерно-физический институт

Московский инженерно-физический институт был организован в 1942 году и в настоящее время является одним из ведущих вузов страны. Сейчас в МИФИ имеются факультеты экспериментальной и теоретической физики, физико-энергетический, автоматики и электроники, кибернетики, специальный факультет физики и факультет повышения квалификации преподавателей вузов страны по физике.

Факультеты экспериментальной и теоретической физики и физико-энергетический осуществляют подготовку инженеров-физиков и инженеров-математиков для работы в области теоретической и экспериментальной физики, конструирования и эксплуатации современных физических установок, аппаратов и приборов.

Факультет автоматики и электроники выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области создания и эксплуатации электронных устройств современных физических установок, разработки и создания систем автоматического управления технологическими и физическими процессами современного производства.

Факультет кибернетики готовит инженеров по конструированию и эксплуатации современных быстродействующих электронных вычислительных машин, по автоматизированным системам управления и по прикладной математике. Окончившим этот факультет присваивается квалификация инженера-электрика или инженера-математика.

Специальный факультет физики готовит специалистов по новейшим направлениям современной физики. Выпускникам факультета присваивается квалификация инженера-физика. Обучение производится по индивидуальным планам. Набор осуществляется на 3 курс из числа студентов-отличников университетов и других вузов выездными комиссиями в сентябре-октябре месяце. Начало занятий в феврале.

Широкий профиль выпускаемых специалистов обеспечивается единой для всех факультетов инженерной и физико-математической подготовкой в течение первых 2,5 лет обучения.

Естественно, что глубокое физико-математическое образование в институте, а также широкий профиль выпускаемых специалистов требуют особой тщательности при отборе абитуриентов на вступительных экзаменах. Это вовсе не означает, что задачи, примеры и вопросы, которые предлагаются на вступительных экзаменах, являются чрезмерно сложными или выходят за рамки школьной программы. Напротив, как будет видно из приведенного ниже материала, успешное решение задач и примеров на вступительных экзаменах доступно любому абитуриенту, твердо усвоившему школьную программу, а не только выпускникам физико-математических школ или школьникам, прошедшим специальную подготовку на подготовительных курсах, в математических кружках и т. д.

Вступительный экзамен по математике в МИФИ состоит из письменной работы, на выполнение которой отводится четыре астрономических часа, и устного экзамена.

Письменная работа содержит четыре задачи:

1) задача на составление и решение уравнения, системы уравнений или неравенств;

2) стереометрическая или планиметрическая задача с применением тригонометрии;

3) алгебраическое уравнение, система уравнений или неравенство;

4) тригонометрическое уравнение или неравенство.

Спецификой вступительных экзаменов 1972 года является тот факт, что тригонометрические неравенства (в соответствии с программой) не вошли как в письменную работу, так и в устный экзамен.

По физике проводится только устный экзамен. Чтобы дать представление о характере письменной работы и устного экзамена, мы приводим варианты 1972 года. Анализ решений и характерные ошибки поступающих разобраны в разделе «Ответы, указания, решения».

Математика

Вариант 1

1. Найти все целые двузначные числа, удовлетворяющие следующим условиям: сумма цифр числа не менее семи; сумма квадратов цифр не более тридцати; число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, не менее чем вдвое меньше первоначального.

2. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KN и LP, пересекающиеся в точке Q. Отрезок PN имеет длину 1 *см*, а вершина M лежит на окружности, проходящей через точки N, P, Q. Найти стороны и углы треугольника PNQ.

3. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x).$$

Вариант 2

1. В каких пределах изменяется скорость точки, движущейся равномерно по прямой, если известно, что при увеличении скорости на 3 *м/сек* эта точка при прохождении расстояния в 630 *м* выигрывает время не меньшее, чем 1 *сек*, и не большее, чем 280 *сек*?

2. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α между боковой гранью и плоскостью основания.

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x}}\cdot\log_3 x = -1.$$

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 2a} - \sqrt{\operatorname{tg} x - 2b} = 2.$$

Вариант 3.

1. В сосуд емкости 6 литров налито 4 литра 70% раствора серной кислоты; во второй сосуд той же емкости налито 3 литра 90% раствора серной кислоты (имеется в виду процентное содержание по объему). Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился p-процентный раствор серной кислоты?

2. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и острым углом α, прилежащим к этому катету. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

3. Решить уравнение

$$|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1.$$

4. Решить уравнение

$$a\sin 2x + b\cos 2x + \sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sin 6x = 0.$$

Физика

Билет № 1

1. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Принцип устройства гидравлического пресса. Плотность и удельный вес. Давление жидкости на дно и на стенки сосуда. Закон сообщающихся сосудов.

2. Электромагнитная индукция. Возникновение электродвижущей силы индукции. Закон Ленца.

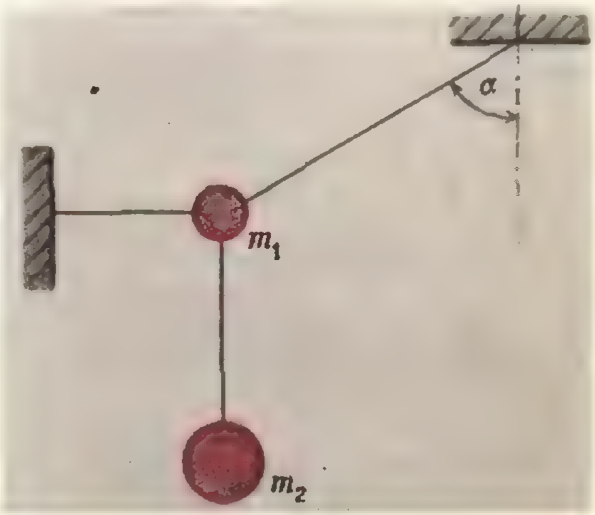


Рис. 1.

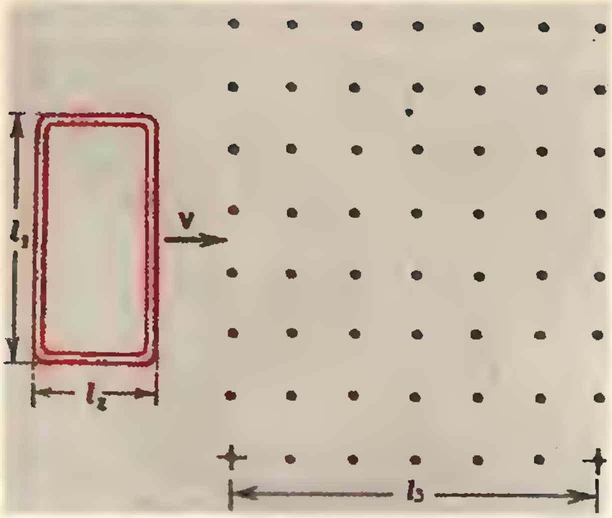


Рис. 2.

3. К грузику массы $m_1=10$ *г*, подвешенному с помощью двух нитей, из которых одна горизонтальна, а другая образует с вертикалью угол $\alpha=60°$, привязан на нити другой грузик массы $m_2=20$ *г* (рис. 1). Определить ускорение a_2 грузика массы m_2 сразу же после пережигания горизонтальной нити. Нити считать нерастяжимыми.

Билет № 2

1. Собирающие и рассеивающие линзы; формула линзы. Построение изображения в линзах.

2. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал точечного заряда (без вывода).

3. Внутри трубы, наполненной воздухом и закрытой с обоих торцов, может скользить без трения поршень массой $m=4$ *кг*, плотно прилегающий к стенкам трубы. Площадь поршня $S=200$ *см*^{2}.

Определить отношение объемов воздуха в трубе по обе стороны от поршня при ее соскальзывании по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha=60°$. Коэффициент трения между трубой и наклонной плоскостью $k=0{,}25$.

Известно, что в горизонтально лежащей трубе поршень занимает среднее положение, при этом давление воздуха в трубе $p=1{,}25\cdot10^3$ *н/м*^{2}. Температура воздуха в трубе постоянна.

Билет № 3

1. Трансформатор. Передача и распределение электроэнергии.

2. Количество теплоты. Формула подсчета количества теплоты, необходимой для нагревания тела. Определение удельной теплоемкости тела опытным путем.

3. Заряженный шарик массой $m=1$ *г* висит на нерастяжимой изолирующей нити. Определить работу, которую необходимо совершить, приближая к нему издалека и очень медленно другой заряженный шарик, помещая его в точку, где вначале находился шарик на нити, который отклоняется при этом, поднимаясь на высоту $h=1$ *см*.

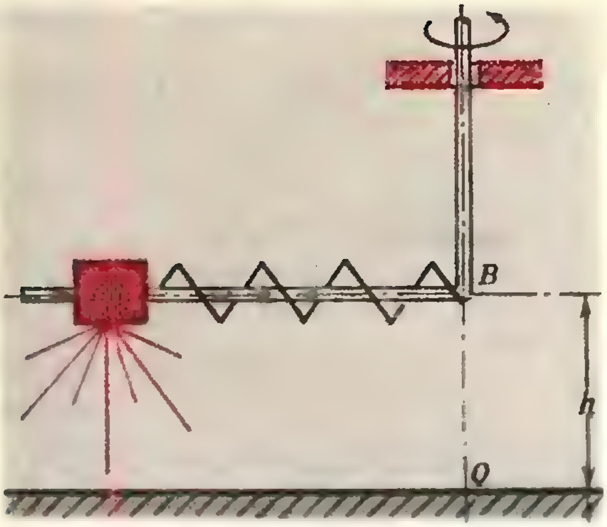


Рис. 3.

Билет № 4

1. Первый закон Ньютона (закон инерции). Второй закон Ньютона. Сила, масса и вес тела. Единицы массы и силы.

2. Электрическое поле заряда. Напряженность поля и ее вычисление для поля точечного заряда. Силовые линии электрического поля. Графическое изображение поля. Однородное поле.

3. Прямоугольная рамка из проводника с сопротивлением $R=1$ *ом*, двигаясь поступательно с постоянной скоростью v, пересекает область однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}5$ *тл*. Вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости рамки. Стороны рамки $l_1=10$ *см*, $l_2=5$ *см*. Протяженность поля $l_3>l_2$ (рис. 2). Определить скорость v, при которой в рамке выделится теплота $Q=10^{-3}$ *дж*.

Билет № 5

1. Электроемкость. Единицы электроемкости. Электроемкость проводящей сферы. Конденсаторы.

2. Механическая работа. Формула работы. Мощность. Энергия.

3. На высоте $h=10$ *см* над горизонтальной поверхностью с постоянной угловой скоростью вращается гладкий стержень вокруг вертикальной оси OB, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец B.

Муфта, надетая на стержень, соединена с ним невесомой пружинкой в точке B (рис. 3). Длина нерастянутой пружинки $l_0=20$ *см*, ее коэффициент упругости $k=2\cdot10^3$ *дн/см*. На муфте находится невесомый точечный источник света силы $I=\sqrt{10}$ *св*, создающий освещенность $E=10$ *лк* в точке O горизонтальной поверхности.

Определить кинетическую энергию муфты.

Уравнение газового состояния. Работа и теплоемкость газа.

И. А. Зайцев

Задачи на изменение состояния идеального газа решаются с помощью уравнения газового состояния — уравнения Клапейрона — Менделеева, связывающего между собой параметры состояния — давление, объем и температуру:

$$PV=\frac{m}{\mu}RT,$$

где m — масса газа, μ — молекулярная масса (грамм-моль) этого газа, $\frac{m}{\mu}$ — число молей, R — универсальная газовая постоянная. Эту статью мы начнем с того, что решим несколько типичных задач. Затем рассмотрим как находить работу, совершаемую газом или над газом, и теплоемкость газа в различных процессах.

Задача 1. *Как менялся объем некоторой массы газа при его переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис. 1)?*

Решение. Из уравнения газового состояния следует, что при постоянном объеме газа его давление пропорционально температуре:

$$P=\frac{1}{V}\frac{m}{\mu}RT.$$

График зависимости P от T — это прямая, уравнение которой

$$P=aT,$$

где $a=\frac{1}{V}\frac{m}{\mu}R$. Чем больше V, тем меньше коэффициент пропорциональности a и тем меньше угол α наклона графика к оси T. Нарисуем две изохоры, проходящие через точки 1 и 2. Так как $\alpha_1>\alpha_2$, то $V_2>V_1$, то есть объем газа увеличивается.

Задача 2. *Как изменилась масса газа в баллоне емкостью V, если при нагревании газа от температуры T_1 до температуры T_2 давление в баллоне изменилось от P_1 до P_2? Молекулярная масса газа равна μ.*

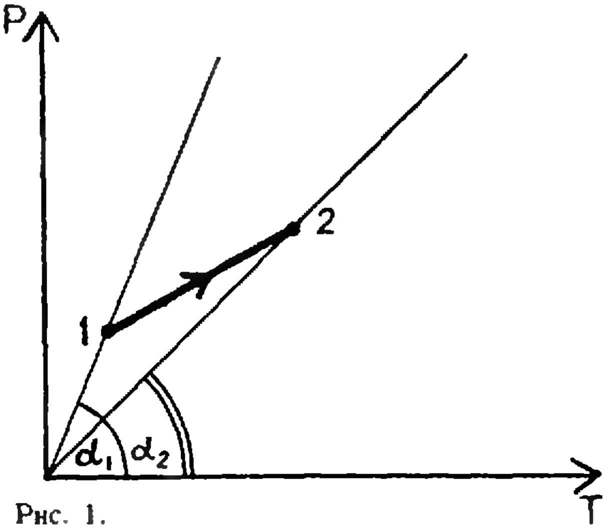


Рис. 1.

Решение. Эту задачу можно решать, используя не уравнение газового состояния, а законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака и Шарля. Однако такое решение является громоздким и требует известной изобретательности. С помощью уравнения газового состояния задача решается совсем просто.

Запишем уравнение состояния газа в баллоне в начале и в конце процесса:

$$P_1V=\frac{m_1}{\mu}RT_1,$$

$$P_2V=\frac{m_2}{\mu}RT_2.$$

Здесь m_1 — масса газа в баллоне до нагревания, а m_2— после нагревания. Выразим m_1 и m_2 из этих уравнений

$$m_1 = \frac{\mu V}{R} \frac{P_1}{T_1},$$

$$m_2 = \frac{\mu V}{R} \frac{P_2}{T_2}.$$

Тогда изменение массы $\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right)$.

Задача 3. *Из сосуда объемом V, давление в котором равно P, откачивают воздух. Сколько качаний должен сделать поршневой насос объемом v для того, чтобы давление в сосуде упало в k раз? Температура воздуха не меняется.*

Решение. До того, как поршень сделал первое «качание», для газа в сосуде можно записать

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Когда поршень насоса стоит в крайнем положении, объем газа равен $V + v$, давление P_1, причем

$$P_1 (V + v) = \frac{m}{\mu} RT.$$

Это означает, что

$$P_1 = P \frac{V}{V + v}.$$

Аналогично найдем, что после второго качания давление в сосуде будет равно

$$P_2 = P_1 \frac{V}{V + v} = P \left(\frac{V}{V + v}\right)^2.$$

После n качаний давление станет равным

$$P_n = P \left(\frac{V}{V + v}\right)^n.$$

По условию задачи

$$P_n = \frac{1}{k} P.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{V}{V + v}\right)^n,$$

то есть

$$n = -\frac{\lg k}{\lg \frac{V}{V + v}} = \frac{\lg k}{\lg \frac{V + v}{V}}.$$

Если в сосуде имеется смесь нескольких газов, то согласно закону Дальтона давление этой смеси на стенки сосуда равно сумме парциальных давлений. Давление, которое создал бы каждый газ в отдельности, если из сосуда удалить остальные газы, называют парциальным давлением. Это означает, что состояние каждого газа в смеси не зависит от состояния других газов. Одинаковыми являются только объем и температура (так как газы находятся в равновесии). Поэтому для каждого из газов независимо можно записать уравнение газового состояния. Рассмотрим пример.

Задача 4. *Определить плотность смеси, состоящей из $m_1 = 50$ г кислорода и $m_2 = 20$ г водорода при температуре $t = 20°$ С и давлении $P = 0{,}9$ атмосфер.*

Решение.

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1 — парциальное давление кислорода и P_2 — парциальное давление водорода.

Обозначим объем сосуда V, тогда

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT,$$

$$P_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT,$$

и

$$PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) RT.$$

Плотность смеси равна

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{\frac{RT}{P}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)} \approx 0{,}23 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 5. *Закрытый сосуд объемом $V = 5$ л разделен на две равные части неподвижной полупроницаемой перегородкой. В одной половине сосуда первоначально находится*

$m_1 = 30$ *г водорода, в другой* $m_2 = 160$ *г кислорода. Через перегородку может диффундировать только водород. Какие давления установятся в сосуде после прекращения процесса диффузии, если сосуд находится все время при постоянной температуре* $t = 27°$ C.

Решение. Процесс диффузии прекратится, когда водород равномерно распределится по всему объему. В первой половине сосуда будет только водород, во втором — водород и кислород. Причем давление водорода в первой половине равно парциальному давлению водорода в смеси во второй половине сосуда. Если давление водорода обозначить P_1, то

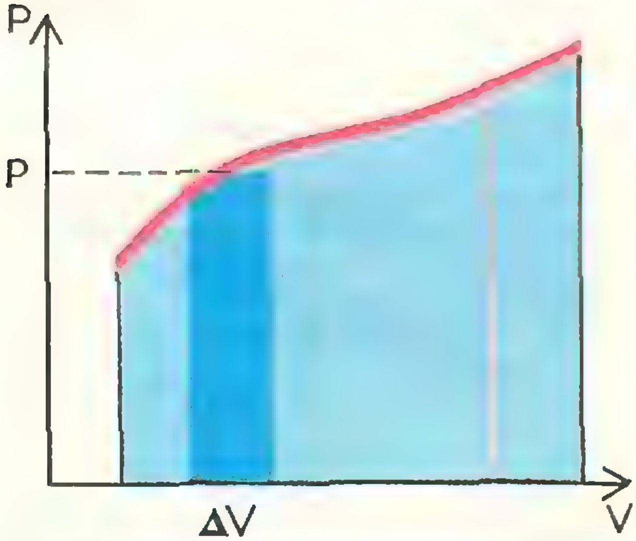


Рис. 2.

$$P_1 \frac{V}{2} = \frac{\frac{m_1}{2}}{\mu_1} RT = 73{,}8 \text{ атм}$$

($\mu_1 = 2$ *г/моль* — молекулярная масса водорода).

Во второй половине сосуда давление равно

$$P = P_1 + P_2,$$

где

$$P_2 \frac{V}{2} = \frac{m_2}{\mu_2} RT.$$

($\mu_2 = 32 \frac{г}{моль}$ — молекулярная масса кислорода).

Таким образом

$$P = \left(2 \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_1}{\mu_1}\right) \frac{RT}{V} \approx 123 \text{ атм}.$$

Теперь остановимся на другом важном вопросе — о работе, совершаемой газом. Если газ расширяется при постоянном давлении, то он совершает работу

$$A = P\Delta V,$$

где ΔV — изменение объема газа. Доказать эту формулу совсем нетрудно. Пусть газ находится в цилиндре с поршнем, площадь которого равна S. Тогда сила F, действующая со стороны газа, равна PS и при смещении поршня на расстояние Δl газ совершает работу

$$A = F\Delta l = PS\Delta l.$$

Так как

$$S\Delta l = \Delta V,$$

то

$$A = P\Delta V.$$

При уменьшении объема газа $\Delta V < 0$ и газ совершает отрицательную работу. Это означает, что внешние силы, действующие на поршень, совершают положительную работу.

Как быть в том случае, если давление в сосуде непостоянно? Например, меняется с изменением объема так, как показано на рисунке 2? Изменение объема газа можно разбить на маленькие участки, такие, что на протяжении каждого из них давление можно считать постоянным. На каждом из таких участков работа, совершаемая газом, равна произведению давления газа на изменение его объема. Это произведение равно площади выделенного на рисунке прямоугольника. Работа, совершаемая газом во время всего процесса, равна сумме таких произведений. При $\Delta V \to 0$ эта сумма стремится к площади фигуры, ограниченной графиком $P(V)$ и осью V.

Итак, чтобы найти работу, совершаемую газом при определенном процессе, нужно нарисовать график зависимости его давления от объема и найти площадь фигуры под графиком.

Как это сделать?

Решим задачу.

Задача 6. *Над 1 молем идеального газа совершается цикл (замкнутый процесс), показанный графиче-*

ски на рисунке 3. Какую полную работу совершил газ во время этого процесса?

Решение. Нарисуем график зависимости P от V (рис. 4). На участке 1—2 давление меняется по закону $P = \alpha \cdot T^{\frac{1}{2}}$, где α — некоторая постоянная. Выразим температуру газа через давление $T = \frac{P^2}{\alpha^2}$ и подставим в уравнение Клапейрона — Менделеева:

$$PV = RT.$$

Получим

$$V = R\frac{P}{\alpha^2}; \qquad P = \frac{\alpha^2}{R} \cdot V,$$

то есть давление прямо пропорционально объему. На этом участке газ совершает положительную работу. Процесс 2—3 — изохорический, во время этого процесса работа равна нулю. Во время изобарического процесса 3—1 работа совершалась над газом, то есть газ совершал отрицательную работу. Таким образом полная работа, которую совершил газ, равна площади треугольника 1 2 3:

$$A = \frac{P_2 - P_1}{2}(V_2 - V_1).$$

Так как

$$V_2 = \frac{1}{P_2}RT_2 \text{ и } V_1 = \frac{1}{P_1}RT_1, \text{ то}$$

$$A = \frac{P_2 - P_1}{2}\left(\frac{T_2}{P_2} - \frac{T_1}{P_1}\right)R.$$

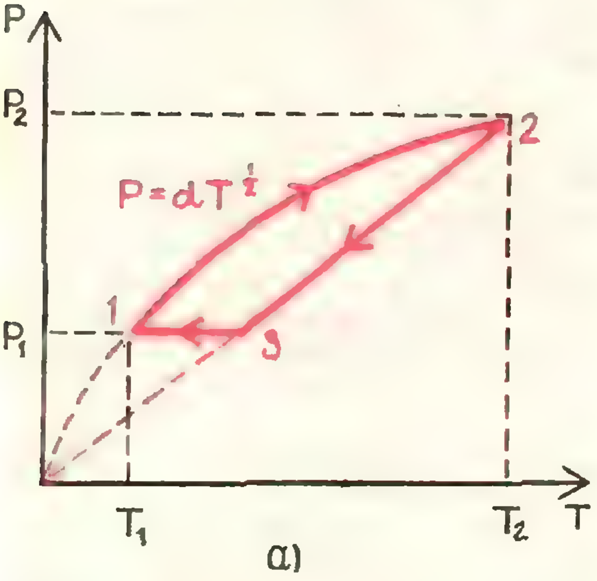


Рис. 3.

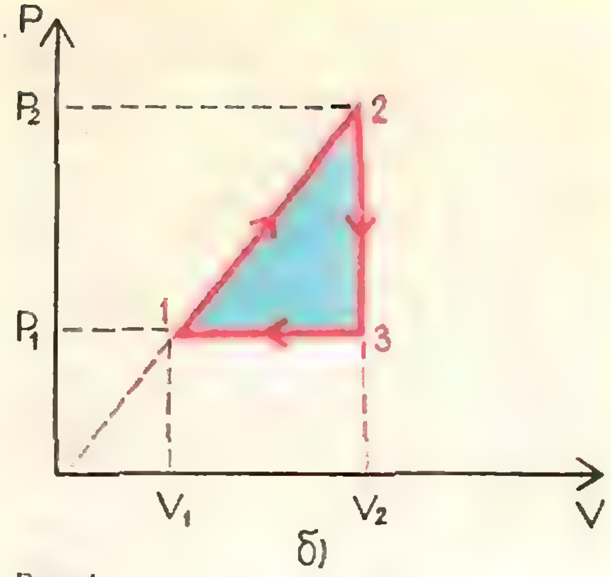


Рис. 4.

Теплоемкость идеального газа (в отличие от жидкостей и твердых тел) зависит от того, какой процесс происходит с газом. Напомним, что теплоемкость — это количество тепла, которое нужно сообщить газу для того, чтобы увеличить его температуру на 1°. Когда масса газа равна единице массы, теплоемкость называют удельной, а когда процесс идет с одним молем газа, — молярной.

Если газу сообщается количество тепла Q, то

$$Q = cm\Delta T$$

(c — удельная теплоемкость и m — масса газа).

Согласно I закону термодинамики количество теплоты, сообщенной газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа и работы, совершенной газом:

$$Q = \Delta U + A.$$

Следовательно, теплоемкость газа связана с тем, какую работу совершает газ.

Например, если работа совершается газом за счет уменьшения его внутренней энергии, теплоемкость газа равна нулю. Теплоемкость газа может быть и отрицательной, если газ за счет уменьшения своей внутренней энергии не только совершает работу, но еще и отдает во внешнюю среду некоторое количество тепла, так что Q отрицательно.

Если процесс идет при постоянном объеме, то газ не совершает работы. В этом случае количество тепла, которое сообщается газу, равно изменению его внутренней энергии. Теплоемкость газа во время изохорического процесса называют теплоемкостью при постоянном объеме и обозначают c_V. Так как при любых процессах, при которых начальная и конечная температура газа одни и те же, изменения внутренней энергии газа одинаковы — внутренняя энергия определяется температурой газа, — то при любом процессе изменение внутренней энергии газа равно $c_V m\Delta T$. Поэтому I закон термодинамики можно записать в таком виде

$$cm\Delta T = c_V m\Delta T + A.$$

Это означает, что для того, чтобы найти теплоемкость газа в каждом данном процессе, нужно найти выражение для работы, совершенной газом. А как это сделать, мы уже знаем.

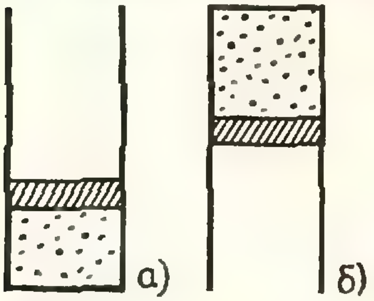


Рис. 5.

Решим следующую задачу.

Задача 7. *Найти удельную теплоемкость газа при постоянном давлении, если его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна c_V.*

Решение. Мы показали, что

$$c_P m\Delta T = c_V m\Delta T + A.$$

Но работа газа равна

$$A = P(V_2 - V_1).$$

Так как

$$PV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } PV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2, \text{ то}$$

$$V_1 = \frac{1}{P}\frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } V_2 = \frac{1}{P}\frac{m}{\mu}RT_2 \text{ и}$$

$$A = P\frac{1}{P}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

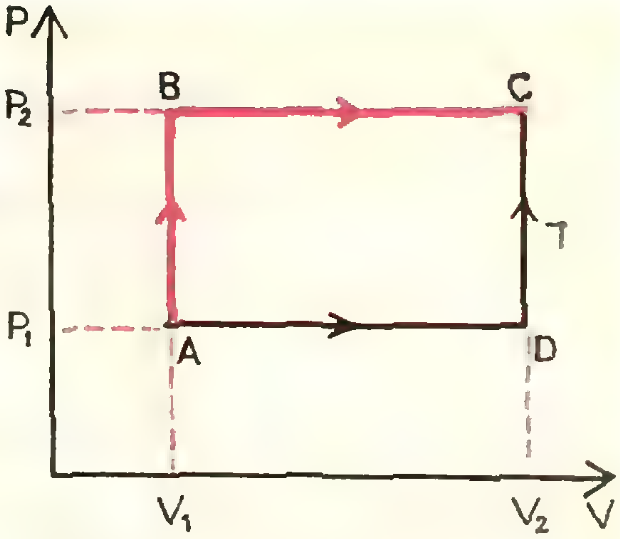


Рис. 6.

Это означает, что

$$c_P m\,\Delta T = c_V m\,\Delta T + \frac{m}{\mu}R\,\Delta T.$$

Отсюда

$$c_P = c_V + \frac{R}{\mu}.$$

Упражнения

1. До какой температуры нужно нагреть баллон емкостью $V = 10$ *л*, содержащий $m_1 = 14$ *г* азота и $m_2 = 30$ *г* гелия для того, чтобы он разорвался, если баллон выдерживает давление не более $P = 100$ *атм*?

2. В закрытом поршнем цилиндре находится газ. В каком случае необходимо больше тепла для нагревания этого газа на одинаковое число градусов: если сосуд расположен так, как показано на рисунке 5, а или в том случае, когда он расположен так, как показано на рисунке 5, б?

3. Решите задачу Ф174 из «Задачника «Кванта».

4. Сколько электронов находится в некоторой массе кислорода, занимающего объем 1 литр при температуре 200° С и давлении 10 атмосфер?

5. В сосуде находится $m_1 = 16$ *г* кислорода и $m_2 = 10$ *г* водорода. Во сколько раз изменится давление в сосуде, когда весь кислород соединится с необходимой для реакции частью водорода? Температура в сосуде поддерживается постоянной. Давлением насыщенных водяных паров пренебречь.

6. Баллон, содержащий $m_1 = 1$ *кг* азота, при испытании взорвался при температуре $t_1 = 350°$ С. Какое количество водорода m_2 можно хранить в этом сосуде при температуре $t_2 = 20°$ С, имея пятикратный запас прочности?

7. Если над идеальным газом совершается процесс ABC (рис. 6), то ему сообщается количество тепла Q. Какое количество тепла сообщается газу при процессе ADC?

8. Может ли удельная теплоемкость газа быть бесконечно большой?

ИНФОРМАЦИЯ

Вниманию семиклассников!

Всесоюзная заочная математическая школа
при МГУ объявляет прием учащихся на 1973—1974
учебный год

В ВЗМШ принимаются только ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ВЗМШ не принимаются. Занятия в школе начнутся с 1 сентября.

В ВЗМШ три курса. Ученики, успешно окончившие школу, получат свидетельство о ее окончании. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ВЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1973 года. После проверки работы (примерно в июле 1973 года) будет сообщено, приняты ли вы в ВЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике. Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решать все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются. Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 см с написанным в нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ). На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область: **Вологодская**
Фамилия, имя, год рождения: **Иванов Петр, 1959 г.**
Школа (полное название): **Школа № 2, г. Тотьмы**
Класс: **7 класс «Б»**
Фамилия, имя, отчество учителя математики: **Никаноров Николай Алексеевич**
Место работы и должность родителей: **отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка.**
Полный почтовый адрес: **г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8**

Результаты проверки (заполняется проверяющим).

1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12
					а	б						

Школьники, проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны высылать работы по адресу: **Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ, заочная школа, на конкурс.**

Школьники, проживающие в Курской, Белгородской, Воронежской и Тамбовской областях высылают работы по адресу: **Воронеж, Университет, ФЗМШ, на конкурс.**

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: **Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ, на конкурс.**

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1973 году

1. На плоскости даны две точки, A и B ($AB = 5{,}3$ *см*). Блоха может прыгнуть в любом направлении на 1 *см*. Может ли она за несколько прыжков допрыгать из точки A в точку B?

2. Существуют ли такие целые числа, что при зачеркивании первой цифры они уменьшаются в 57 раз?

3. Стальную плитку размерами 73×19 обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея в распоряжении только эту плитку и карандаш.

4. Двенадцать разбойников ограбили царя Додона. Добыча оказалась большой — почти 30 000 золотых. Стали они делить деньги поровну, но один золотой оказался лишним. Разбойники передрались из-за того, кому достанется лишний золотой, и ненароком одного убили. Оставшиеся 11 разбойников стали тогда делить золото поровну между собой, но все повторилось снова: один золотой оказался лишним, разбойники передрались, одного убили, стали делить золото на десятерых, тогда снова один золотой оказался лишним и т. д. Когда в живых осталось шестеро разбойников, самый умный из них, по имени Иван Замашкин, который все время стоял в стороне и думал, сказал: «Стойте! Дальше все снова будет так же! Отдайте лучше лишний золотой мне, а остальное разделим поровну». Разбойники удивились, отдали ему лишний золотой, а остальное разделили поровну. Прав ли был Иван Замашкин? Сколько было золотых?

5. На доске было написано 4 числа. Их сложили всевозможными способами по два и получили следующие шесть сумм: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Какие числа были написаны на доске?

6. Можно ли расставить девять чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась бы на 3 и была: а) больше 9; б) больше 12?

7. Треугольник ABC после поворота около вершины A занял положение AB_1C_1. Докажите, что если прямая AC делит пополам отрезок BB_1, то прямая AB_1 делит пополам отрезок CC_1.

8. Представьте число 203 в виде суммы нескольких положительных слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых тоже равнялось 203.

9. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе как на стороне во внешнюю сторону треугольника построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

10. На сколько частей могут делить плоскость 4 различные прямые? Для каждого случая нарисуйте пример.

11. Утром Коля и Оля решили полить огород. Коля открыл кран, наполнил свою лейку, и сразу вслед за ним Оля подставила свою лейку под струю. Колина лейка наполняется за 15 *сек*, а Олина — за 10 *сек*. Наполнив свою лейку, каждый из детей тут же начинает поливать огород. Из Колиной лейки вода выливается за 60 *сек*, а из Олиной — за 45 *сек*. Как только лейка оказывается пустой, каждый из них мгновенно подставляет ее под струю воды, а если в этот момент набирает воду другой, то дожидается, пока кран не освободится, и сразу же начинает наполнять свою лейку. Когда никто не набирает воду, она льется в бочку, стоящую под краном. Если бы никто не набирал воду, бочка наполнилась бы за 15 *мин*. За сколько времени после включения крана наполнится бочка, если Коля и Оля все это время поливают огород? Кто первый будет набирать воду после того, как она польется через край бочки?

12. Разложите выражение $x^9 + x^4 - x - 1$ на 5 множителей.

Новый прием в ВЗМШ

В отличие от прошлых лет в этом году во Всесоюзную заочную математическую школу будут приниматься ученики 7-х классов. Это связано с тем, что теперь обучение в ВЗМШ будет не двухлетнее, а трехлетнее.

Школьники, принятые в ВЗМШ, будут регулярно, раз в месяц, получать задания и брошюры, в которых излагаются разные вопросы математики.

Работа над заданиями ВЗМШ поможет ребятам глубже, а зачастую даже по-новому взглянуть на изучаемые в школе вопросы. Большое внимание уделяется также повышению логической культуры. Некоторые нестандартные задачи, метод координат (включая понятие о четырехмерном пространстве), функции и их графики, последовательности, пределы, тригонометрические функции, различные вопросы геометрии, методы решения уравнений и неравенств — вот неполный перечень заданий ВЗМШ. По каждой теме надо выполнить контрольную работу, которую проверит преподаватель и подробно объяснит все ошибки, подскажет, что еще нужно доработать, на какие вопросы ответить.

Учиться в этой школе непросто, но зато интересно. Особенно нужна она тем ребятам, которые живут в сельской местности и в малых городах — ведь у них нет возможности посещать математические кружки и школы при институтах, как у школьников, живущих в крупных научных центрах.

Поскольку ВЗМШ не имеет возможности принять всех желающих (их число обычно в 5—6 раз превышает число мест), приходится проводить конкурсный прием. Для поступления в ВЗМШ надо хорошо решить задачи вступительной контрольной работы. Конкурс самый маленький для ребят из села, немного больше для школьников из малых городов и рабочих поселков и довольно высокий для жителей крупных городов и научных центров.

Ребята, выполнившие все задания ВЗМШ, получают удостоверение об ее окончании.

Ж. М. Раббот

Новое измерение скорости света

Хорошо известна формула

$$c = \lambda\nu,$$

где c — скорость света, λ — длина его волны, а ν — частота. Естественный способ измерения скорости света, казалось бы, должен сводиться к измерению λ и ν. Однако до последнего времени точность таких измерений была недостаточна, чтобы этот способ мог конкурировать с принятым методом измерения времени, которое свет затрачивает на прохождение известного пути.

Трудность состояла в том, что частоту умели хорошо измерять в области микроволнового спектра, а длину волны—в области видимого.

В прошлом году удалось измерить частоту света, испускаемого красным лазером (длина волны 6330 Å $= 6330\cdot10^{-10}$ *м*). Частота была измерена с точностью до 7 знаков:

$$\nu = 473\,612\,166 \pm 29 \text{ Мц}$$

(1 Мегацикл — миллион колебаний в секунду).

Отсюда получено значение для скорости света

$$c = 299\,792\,462 \pm 18 \text{ м/с}$$

(«18» — это возможная ошибка). Принятое значение скорости света

$$c = 299\,792\,500 \pm 100 \text{ м/с}$$

имеет ошибку, в 6 раз большую.

Заочная физико-техническая школа

Т. А. Чугунова

при Московском
физико-техническом институте
объявляет набор учащихся
на 1973—74 учебный год

Заочная физико-техническая школа была создана в 1966 году с целью оказать помощь учащимся 9 и 10 классов средних школ в самостоятельных занятиях физикой и математикой на повышенном уровне.

Школа набирает в 8, 9 и 10-е классы учащихся в основном из сельской и отдаленной местности. Учащихся Москвы ЗФТШ не принимает.

Прием ограничен, но на местах могут работать физико-технические кружки по программе ЗФТШ.

По «Положению» о ЗФТШ кружки могут организоваться на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок считается организованным, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии его руководителей и поименный список членов кружка.

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемое ЗФТШ решение заданий. Работы учащихся школы проверяют и оценивают в ЗФТШ, а членов кружка — его руководители.

Вступительное задание ученик выполняет самостоятельно. Коллективные решения не допускаются и рассматриваться не будут.

Работа должна быть написана на русском языке. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите простой бандеролью. Вместе с решением вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради (без справки решения не рассматриваются), а на внешнюю наклейте лист бумаги, на котором напишите ответы на следующие вопросы.

1. Область (край или АССР)
2. Фамилия, имя, отчество
3. Класс, в котором вы учитесь
4. № и адрес школы
5. Национальность
6. Профессия родителей и занимаемая должность:
   отец
   мать
7. Подробный домашний адрес

Срок отправления решения не позднее 10 марта 1973 года (по почтовому штемпелю места отправления). Решения, отправленные позже этого срока, не рассматриваются.

Присланные в школу решения вступительного задания не возвращаются.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: **141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.**

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской, Эстонской и Белорусской ССР должны прислать работы по адресу: **197228, г. Ленинград, ул. Савушкина, 61, специнтернат № 45 при ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.**

Учащиеся Амурской, Камчатской, Иркутской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки должны присылать работы по адресу: **660607, г. Красноярск, Красноярский**

пединститут, ул. Перенсона, 7, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Зачисление в школу производится не позднее 1 августа 1973 года.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

Физика

Задачи 1—4 — для учеников седьмого класса, 3—8 — для восьмого, 6—11 — для девятого, а 12 — для всех.

1. Торпедный катер, находящийся в точке A (рис. 1) выпускает две торпеды по кораблю, проходящему в момент пуска через точку B. Скорости движений торпед и корабля относительно воды постоянны (направления и величины скоростей заданы на рисунке). С помощью циркуля и линейки определите, попадут ли торпеды в корабль. Корабль и торпеды считать материальными точками.

2. Рассказывая на уроке о передаче электроэнергии на большие расстояния, ученик Н. сказал, что для уменьшения мощности тепловых потерь следует уменьшать силу тока в цепи, поскольку формула мощности имеет вид I^2R. На это ученик К. возразил, что та же формула может быть представлена в виде $\frac{U^2}{R}$, и тогда необходимо снижение напряжения. Кто из учеников ошибался и почему?

3. В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R = 8$ *см*, налита вода до высоты $^3/_4R$. Сколько льда нужно поместить в сосуд, чтобы сила давления на боковую поверхность стала равной силе давления на дно?

4. Три одинаковых медных прутка длины h и площадью поперечного сечения S свернуты в кольца и спаяны, как показано на рисунке 2. Чему равно сопротивление между точками A и B? Удельное сопротивление меди ρ. Плоскости колец попарно перпендикулярны.

5. Свинцовый шар, имеющий температуру $t = 20°$ C, падает без начальной скорости с высоты $H = 10$ *км* на горизонтальную поверхность. Какая часть массы шара расплавится, если удар абсолютно неупругий, а теплоемкость поверхности пренебрежимо мала? Удельная теплоемкость свинца $c = 130\ \frac{дж}{кг \cdot град}$, удельная теплота плавления $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^4 \frac{дж}{кг}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Каждый из элементов схемы, изображенной на рисунке 3, имеет сопротивление R. Найдите сопротивление между точками A и B.

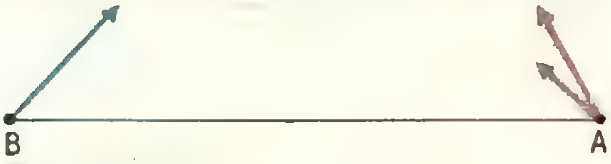


Рис. 1.

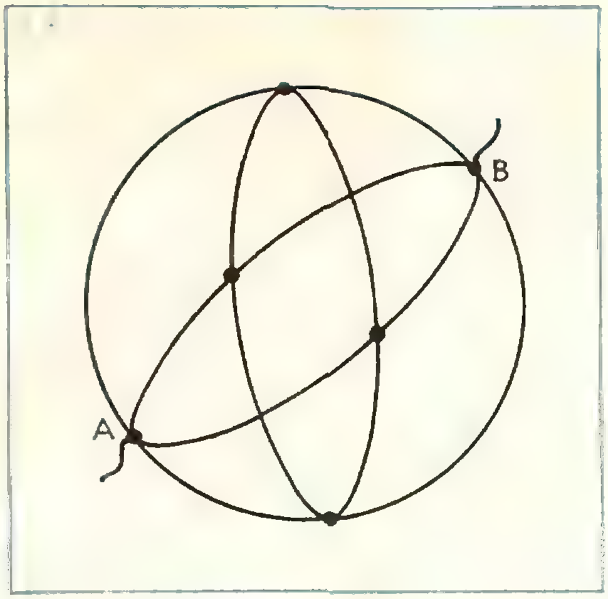


Рис. 2.

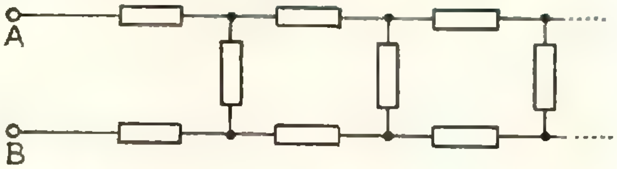


Рис. 3.

7. Тонкий обруч небольшого радиуса скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости и падает на горизонтальную плоскость (см. рис. 4). Найдите скорость центра обруча в момент удара о плоскость. $H_1 = 10$ *м*, $H_2 = 5$ *м*.

8. В два сосуда налита жидкость до уровней $H_1 = 1$ *м* и $H_2 = 2$ *м* с температурами $t_1 = 40°$ C и $t_2 = 60°$ C соответственно. В нижних частях сосудов имеются одинаковые отверстия, через которые жидкость стекает в третий сосуд, расположенный непосредственно под первым. Найдите установившуюся температуру в третьем сосуде.

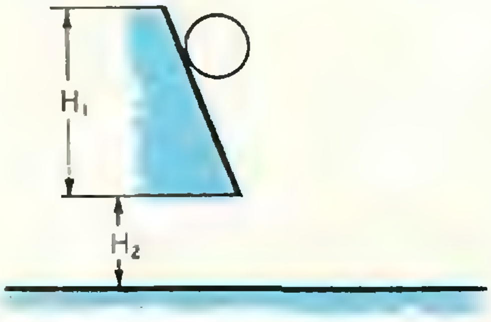


Рис. 4.

если в первых двух уровни и температуры жидкостей поддерживаются постоянными.

9. Газ в цилиндрическом сосуде закрыт поршнем и разделен подвижной перегородкой на объемы $V_1 = 10$ *л* и $V_2 = 15$ *л* (см. рис. 5). На какую величину сместится перегородка, если поршень изотермически сместили на $\Delta x = 1$ *см*?

10. Оцените, во сколько раз среднее расстояние между молекулами воды меньше среднего расстояния между молекулами водяного пара при нормальных условиях.

11. Имеется выключатель (ключ), набор различных сопротивлений и лампочек накаливания. Составьте схему, содержащую ключ, две лампочки и, возможно, некоторые сопротивления, так, чтобы при замкнутом ключе горела одна лампочка, а при разомкнутом — только вторая.

12. Исследуйте экспериментально характер движения катушки по шероховатой поверхности, возникающего при сматывании нити с катушки (рис. 6). Для проведения исследования сделайте катушку, у которой возможно изменение большого радиуса. Например, такую катушку можно изготовить из бутылки и картонных или фанерных съемных колец.

Как зависит направление движения катушки от величины угла α?

Постройте на основании экспериментальных данных график зависимости угла, при котором катушка вращается на месте, от величины отношения R/r. Угол α можно измерять с помощью транспортира и отвеса. Опишите вашу экспериментальную установку. Как вы производили измерения? Какие погрешности могли исказить полученный график? Как можно эти погрешности уменьшить?

Математика

Задачи 1—5 — для седьмого класса, 4—10 — для восьмого, 7—13 — для девятого.

1. Упростить выражение:

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):$$

$$:\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right).$$

2. На школьной викторине было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ участнику засчитывали 7 очков, а за неправильный ответ с него списывалось 12 очков. Сколько верных ответов дал ученик, если он набрал 77 очков?

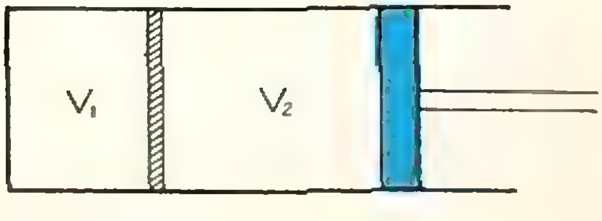


Рис. 5.

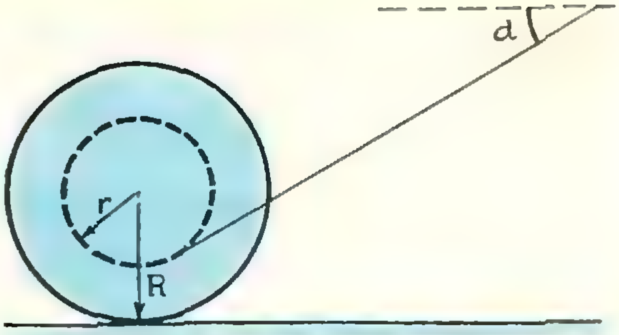


Рис. 6.

3. Построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе (с помощью циркуля и линейки).

4. Найти натуральные значения n такие, чтобы числа n, $n + 10$, $n + 14$ все были простыми.

5. Между числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 поставить вместо запятых пять знаков плюс и три знака минус так, чтобы получилось число 21. Сколько решений имеет задача?

6. Какое из чисел больше: $\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ или 6?

7. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60 *см*. Определить основание.

8. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист, а одновременно навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Мотоциклист прибыл в пункт B через два часа после встречи с велосипедистом, а велосипедист прибыл в пункт A через 4,5 часа после встречи с мотоциклистом. Сколько часов были в пути мотоциклист и велосипедист?

9. Основания трапеции равны $5\sqrt{2}$ *см* и $8\sqrt{2}$ *см*. Определить длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

10. В шахматном турнире участвовало k человек — школьники и студенты. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал половину своих очков в партиях против студентов. Доказать, что k — полный квадрат.

11. Построить ромб, зная его диагональ и радиус вписанной окружности.

12. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy}-3\sqrt{xy}=4, \\ x+y=20. \end{cases}$$

13. Упростить выражение:

$$\sqrt{a+2m\sqrt{a-m^2}}+$$

$$+\sqrt{a-2m\sqrt{a-m^2}}.$$

Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

И. А. Дьяконов, А. Г. Мордкович, И. И. Наслузов

Четвертый год существуют организованные Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы.

В течение 9 месяцев (с октября по июнь) по 3-й программе Центрального телевидения проводятся занятия для слушателей телевизионных физико-математических курсов.

Цикл занятий по физике состоит из 39 телепередач, из которых 26 являются лекционными, 10 — консультациями по решению задач, и 3 передачи посвящены вопросам, включенным в новую школьную программу. Лекции сопровождаются демонстрацией физических приборов и экспериментов и различным иллюстративным материалом: схемами, фотографиями, рисунками, и диапозитивами.

Курс по математике содержит 50 телепередач теоретического и практического характера. Пять из них посвящены обсуждению контрольных работ, которые проводятся после завершения каждого основного раздела математики.

Еженедельно по пройденным темам слушателям курсов для самостоятельной работы предлагаются обязательные для выполнения домашние задания. По математике таких заданий будет 20, по физике — 30. Домашние задания и контрольные работы будут регулярно публиковаться в еженедельнике «ПТР».

Редакция журнала «Квант» и Главная редакция научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения, начиная с января 1973 г., будет публиковать на страницах журнала некоторые учебно-методические материалы, связанные с работой телекурсов: дополнительные задачи и примеры по рассматриваемым на телезанятиях темам, методические указания к их решению, различную текущую информацию и т. п. Эти материалы будут полезны не только слушателям телевизионных физико-математических курсов, но и всем будущим абитуриентам 1973 года.

Первый очный зачет по физике будет проходить в начале февраля. На него выносятся следующие разделы: «Механика», «Жидкости и газы» и «Молекулярная физика и теплота».

Порядок проведения зачета следующий:

На решение задач отводится 60 *мин*. (Типовые варианты мы публикуем ниже). Затем слушатели разбирают с преподавателями решения и отвечают на ряд дополнительных вопросов по материалу, входящему в программу зачета.

На основании решения задач и ответов на устные вопросы слушателям выставляется итоговая оценка.

Предлагаем читателям журнала испробовать свои силы в решении типичных вариантов первого очного зачета.

Вариант 1

1. Пуля, вылетающая из горизонтально установленной винтовки, попадает точно в центр мишени, находящейся на расстоянии $L = 200$ *м* от винтовки. Мишень отодвинули на $l = 20$ *м* и опустили на $h = 25$ *см*. Определить, на каком расстоянии от центра пуля попадет в мишень, выше или ниже центра? Начальная скорость пули при вылете из винтовки $v = 600$ *м/с*. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На нерастяжимой нити, перекинутой через блок, укреплены три груза одинаковой массы A, B и C, причем груз C закреплен (см. рис. 1). Построить и объяснить график зависимости скорости груза C от времени после его освобождения. Нить и блок невесомы. Силу сопротивления и толщину грузов не учитывать.

3. Сани с человеком общей массой $m = 80$ *кг* скатываются с вершины горы (угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$) и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 40$ *м*, останавливаются. Сколько снега расплавилось при движении саней, если температура снега $t = 0°$ C, коэффициент трения $k = 0{,}02$ постоянен на всем пути и вся работа против сил трения идет на плавление снега?

Вариант 2

1. С башни высотой $h = 30$ *м* брошено тело под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить начальную скорость тела и дальность его полета в горизонтальном направлении, если последние 30 *м* пути в вертикальном направлении (высоту башни) тело прошло за $t = 0{,}8$ *с*?

2. Маленький шарик массы $m = 10$ *г*, подвешенный на нити длиной $l = 1{,}0$ *м*, был отведен в сторону до горизонтального

положения нити и отпущен. При прохождении наинизшей точки траектории шарик ударился в тело массы $M = 0{,}2$ *кг* и, отскочив, отклонился на угол $\alpha = 45^\circ$ от вертикали (см. рис. 2). Чему равен коэффициент трения при движении тела M по горизонтальной плоскости, если до полной остановки оно прошло путь $S = 2{,}0$ *м*?

3. Кусок льда, внутри которого замерзла свинцовая пластинка, плавает в цилиндрическом сосуде с водой. Внутренний диаметр сосуда $d = 40$ *см*. После полного таяния льда уровень воды в сосуде понизился на $h = 3$ *см*. Определить массу свинцовой пластинки. Плотность свинца $\rho_1 = 11{,}3$ *г/см*^{3}, плотность воды $\rho_2 = 1{,}0$ *г/см*^{3}.

На занятиях по математике в первом полугодии рассматривались следующие темы: основные понятия арифметики; числовые неравенства; тождественные преобразования рациональных выражений и основные законы алгебры; тождественные преобразования алгебраических выражений, корни с натуральным показателем, обобщение понятия о показателе, степени степени с рациональными показателями и их свойства; тождественные преобразования тригонометрических выражений; тригонометрические вычисления.

Предлагаем читателям контрольную работу, связанную с этими примерами.

Контрольная работа № 1

1. Вычислить

$$\frac{\left[\frac{5}{8} + 2{,}708\,(3)\right] : 2{,}5}{[1{,}3 + 0{,}7\,(6) + 0,\,(36)\,] \cdot \frac{110}{401}} \cdot 0{,}5.$$

2. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

3. Упростить выражение

$$\left[\frac{a-1}{a^2-2a+1} + \frac{2(a-1)}{a^2-4} - \frac{4(a+1)}{a^2+a-2} + \frac{a}{a^2-3a+2}\right] \times \frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1} : \frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1} + 1.$$

5. Упростить выражение

$$\frac{9b^{4/3} - a^{3/2}b^{-2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2} + 6a^{3/4}b^{-1/3} + 9b^{4/3}}} \times \frac{b^2}{a^{3/4} - 3b^{5/3}}.$$

6. Упростить выражение

$$\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \cdot \sin(75^\circ - 2\alpha)$$

7. Вычислить без таблиц

$$\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}.$$

8. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 10\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0$ и что угол α удовлетворяет неравенствам $\frac{5}{4}\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

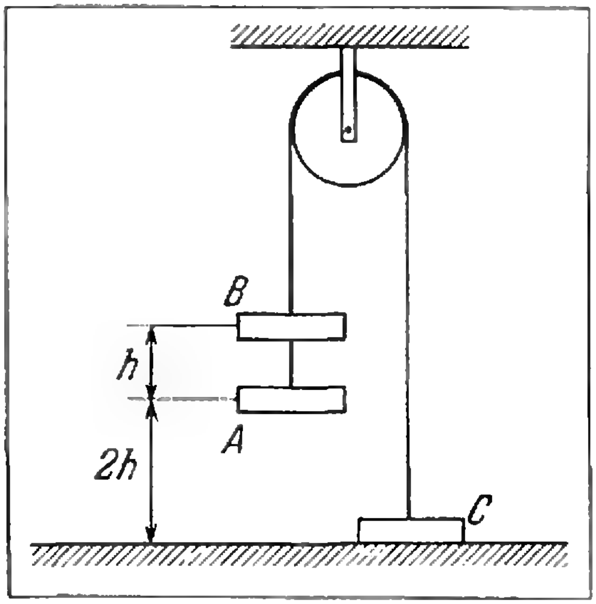


Рис. 1.

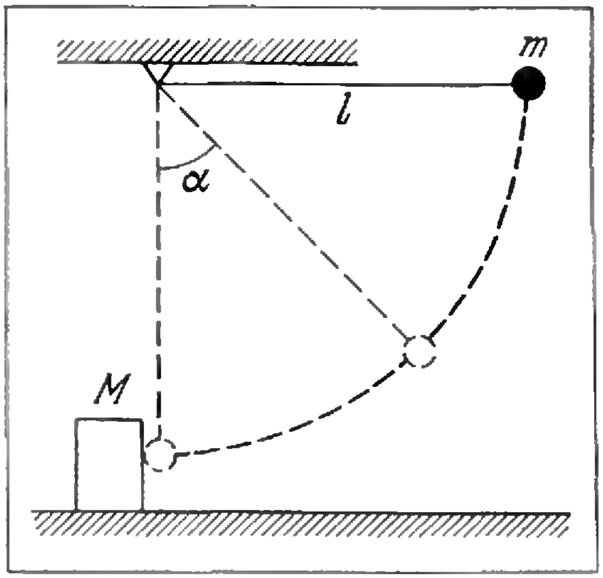


Рис. 2.

К статье «Формализация условий задачи»

1. Пусть x_1, x_2 и x_3 — количества приобретенных путевок по 21, 40 и 60 рублей за каждую путевку соответственно. Вначале мы должны ответить на вопрос, как нужно толковать слова, приведенные в условии задачи: «предполагается использовать 2000 руб». Значит ли это, что должно быть израсходовано в точности 2000 руб или же суммарный расход не должен превышать указанной суммы? Поскольку второй вариант является более общим, то следует принять именно его. Итак, нужно найти наибольшее значение выражения

$$15\ x_1+27\ x_2+45\ x_3$$

при условии

$$21\ x_1+40\ x_2+60\ x_3\leqslant 2000.$$

Постараемся обратиться к экономическим соображениям. Так как благом для нас является наибольшее количество дней отдыха, то путевки нужно сравнить по средней стоимости одного дня. Получим $\frac{21}{15}$, $\frac{40}{27}$ и $\frac{60}{45}$ рубля в день, или $\frac{189}{135}$, $\frac{200}{135}$ и $\frac{180}{135}$. Таким образом, наилучшими с нашей точки зрения будут путевки на 45 дней, вторыми — 15-дневные и на последнем месте — 27-дневные путевки. Если бы путевки можно было дробить, то суммой 2000 руб. удалось бы оплатить $\frac{2000}{60}\cdot 45=1500$ дней отдыха. Однако путевки продаются лишь целиком. Поэтому на имеющуюся сумму в 2000 руб. можно купить 33 самых выгодных путевки, что обеспечит $33\times 45=1485$ дней отдыха. При этом 20 руб. останутся неиспользованными. На эти 20 рублей ничего купить не удастся и их можно рассматривать как прямой убыток по сравнению с тем условным случаем, когда все имеющиеся деньги расходуются на оплату самых дешевых дней отдыха. Если отказаться от одной из шестидесятирублевых путевок, то к 20 рублям добавится еще 60 рублей и на эти деньги можно приобрести две сорокарублевые путевки:

$$2000=32\times 60+2\times 40.$$

В результате получится

$$32\times 45+2\times 27=1494$$

дней отдыха. Таким образом, найденный вариант выгоднее предыдущего.

Докажем, что он наилучший из всех возможных. Оценим для этого тот условный «ущерб», который мы несем по сравнению с наивыгоднейшим распределением всех 2000 руб. Этот ущерб составит $\frac{200-180}{135}$ руб. в день, а так как таких дней будет 54, то всего получим $\frac{20}{135}\cdot 54$ руб. = =8 руб.

Лучшим по сравнению с найденным вариантом может оказаться только тот, где используются путевки ценою по 21 руб., которые выгоднее путевок по 40 руб.

Пусть $2000-21\ x_1-40\ x_2-60x_3=a$. Тогда

$$21\ x_1+a=2000-40\ x_2-60\ x_3,$$

то есть число $21\ x_1+a$ делится на 20. Если $x_1=1$, то $a\geqslant 19$; если $x_1=2$, то $a\geqslant 18,\ldots$ Так как остаток a представляет собой «ущерб», то нецелесообразно рассматривать случаи, когда $a>8$. Поэтому x_1 не может быть меньше 12. Но если $x_1\geqslant 12$, то потери в результате замены более выгодных путевок менее выгодными составят не менее

$$\frac{189-180}{135}\cdot 12\cdot 15=12 \text{ руб.}$$

Таким образом, выгоднее всего приобрести 32 путевки на 45 дней каждую и 2 путевки на 27 дней каждую.

2. Ответ:

$$x=4\frac{r-70}{90-r},\qquad 70\leqslant r\leqslant 76\frac{2}{3}.$$

3. Ответ: 50%.

4. Если принять объем резервуара за единицу, а через x_i обозначить пропускную способность i-й трубы (в долях единицы объема в час), то уравнения составляются без труда:

$$\begin{cases} x_1=3/2,\\ x_2+x_3+x_4=6,\\ x_2+x_3+x_5=3,\\ x_4+x_5=2.\end{cases}$$

Требуется определить величину $\frac{1}{x_1+\ldots+x_5}$, то есть найти $x_1+\ldots+x_5$. Сложим второе уравнение с третьим и вычтем из полученной суммы четвертое

$$2\,(x_2+x_3)=7,\quad x_2+x_3=3{,}5.$$

К полученному уравнению прибавим первое и четвертое

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7,$$

то есть все пять труб наполнят резервуар за 1/7 часа.

Эту систему уравнений можно решать иначе. Вычтем из третьего уравнения второе и сложим с четвертым:

$$2\ x_5 = -1,\ x_5 = -1/2.$$

Если сложить полученное уравнение с двумя первыми уравнениями, системы, то придем к тому же результату, что и прежде. Но как же быть с отрицательным значением для x_5? Оно свидетельствует о том, что через пятую трубу вода не поступает в резервуар, как об этом сказано в условии, а, наоборот, вытекает из него. Конечно, формулировку условия этой задачи следует признать неудачной для экзамена. Тем не менее абитурнент должен был решать *эту* задачу и он имел возможность ее решить, доказав, что задача решения не имеет.

Вообще говоря, решение должно содержать либо доказательство, либо проверку существования всех промежуточных величин. Все они должны иметь именно тот физический смысл, который приписан им в условии.

Поскольку в условии сказано, что резервуар снабжается водой по пяти трубам, то помимо отыскания значения величины $1/(x_1 + + \ldots + x_5)$, нужно убедиться в том, что у исходной системы уравнений имеется неотрицательное решение. Подобная проверка не увенчалась бы успехом и мы пришли бы к выводу, что решения у этой задачи нет.

5. Указание: обозначим через x часть объема сосуда, занимаемую первоначальным раствором, а объем всего сосуда примем за единицу. Через p_i обозначим концентрацию раствора в сосуде после i-й операции. Докажите по индукции, что $p_i = (p-q)\,x^i + q$.

Ответ: $x = \sqrt[k]{\dfrac{r-q}{p-q}}$.

К статье «Московский инженерно-физический институт»

Математика

Вариант 1

1. Решение такой задачи следует начинать с составления системы неравенств. Так как искомые числа — двузначные, то обозначим буквой x число десятков, а y — число единиц. Тогда из условий задачи имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geq 7, & (1)\\ x^2 + y^2 \leq 30, & (2)\\ 10y + x \leq \dfrac{1}{2}(10x + y). & (3)\end{cases}$$

Не все поступающие справились с выводом неравенств (3). Многие записали последнее неравенство в композиционной системе:

$$\overline{yx} \leq \frac{1}{2}\overline{xy}, \qquad (3а)$$

что значительно снизило возможности анализа. Множеством допустимых значений, на котором следует искать решение системы неравенств (1—3), являются целые числа от нуля до девяти, точнее, $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$. Формально перебирая все возможные комбинации $\overline{xy}$, мы в принципе можем найти решение. Однако такой путь является громоздким. Поэтому попытаемся сузить множество рассматриваемых чисел.

Перепишем систему неравенств (1—3) в виде

$$x + y \geq 7,$$
$$x^2 + y^2 - 30 \leq 0,$$
$$8x - 19y \geq 0$$

Далее, умножив первое неравенство на 19 и складывая с третьим, получаем: $27\,x \geq 133$, то есть $x \geq 4\dfrac{25}{27}$. Но так как x — целое, то $x \geq 5$.

С другой стороны, из (2) имеем $x < 6$. Тогда окончательно $x = 5$. При этом неравенства (1) и (2) принимают вид:

$$\begin{cases} y \geq 2,\\ y^2 \leq 5,\end{cases}$$

единственное решение которых в целых числах есть $y = 2$.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет единственное двузначное число 52.

Наряду с приведенным методом решения абитуриентами было предложено много других, однако все они вели к цели значительно медленнее.

2. Пусть KN и LP — биссектрисы (рис. 1), Q — точка пересечения биссектрис. По условию задачи вершина M лежит на окружности, проходящей через точки P, Q, N. Соединим точки M и Q прямой линией. Тогда QM — биссектриса угла KML, так как три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Так как QM — биссектриса угла KML, то $\measuredangle QMP = \measuredangle QMN$. Из равенства этих углов следует равенство дуг $\smile QN = \smile QP$ и стягивающих эти дуги хорд $NQ = QP$.

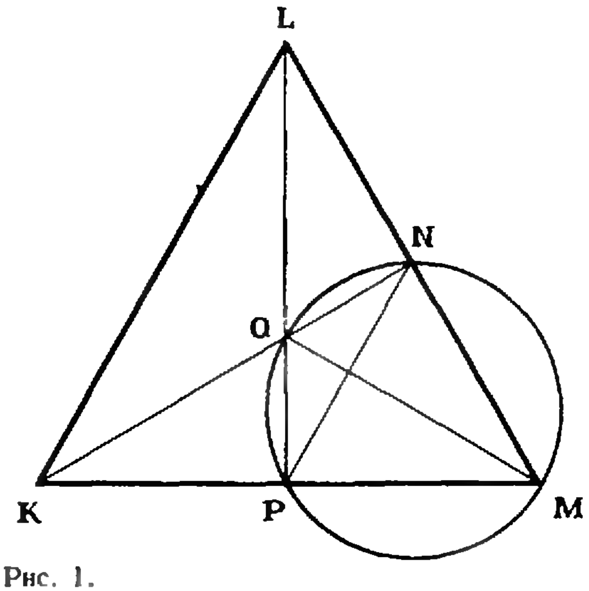


Рис. 1.

Характерной ошибкой поступающих было утверждение, что биссектриса MQ перпендикулярна хорде NP. По условию задачи в равнобедренном треугольнике QPN известна длина основания $PN = 1$ *см* и для определения всех элементов треугольника достаточно знать один угол.

Имеем:

$$\angle PQN = \angle KQL = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\angle MKL + \frac{1}{2}\angle MLK\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KML) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle PQN$$

или $\frac{3}{2}\angle PQN = 180^\circ$,

откуда окончательно находим $\angle PQN = 120^\circ$, $\angle QPN = \angle QNP = 30^\circ$, тогда $NQ = PQ = \frac{PN}{2\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: стороны и углы треугольника PNQ соответственно равны $1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$. Многие абитуриенты не смогли доказать, что прямая MQ — биссектриса, и не справились с решением задачи.

3. В данном случае решение следует начать с определения ОДЗ функций, входящих в неравенство:

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x-1}{x+1} > 0, & (1) \\[2ex] \dfrac{x-1}{x+1} > 0, & (2) \\[2ex] \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x+1}{x-1} > 0. & (3) \end{cases}$$

Однако легко видеть, что неравенство (3) эквивалентно (1). В самом деле

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1} = -\log_3 \frac{x+1}{x-1} = \log_3 \frac{x-1}{x+1}.$$

Тогда из системы неравенств (1) и (2) находим ОДЗ: $-\infty < x < -1$. Характерной ошибкой поступающих при решении является неверное определение ОДЗ, а именно, многие абитуриенты опустили неравенства (1) и (3).

В ОДЗ исходное неравенство может быть преобразовано к виду:

$$2\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < 0 \qquad (4)$$

или

$$0 < \log_3 \frac{x-1}{x+1} < 1. \qquad (5)$$

Левую часть неравенства (5) можно было бы не писать, так как в нашем способе решения этот факт учтен в ОДЗ. Далее из (5) получим:

$$1 < \frac{x-1}{x+1} < 3. \qquad (6)$$

Вычтем из всех частей неравенства (6) по единице и после простых преобразований получим:

$$-1 < \frac{1}{x+1} < 0. \qquad (7)$$

Правая часть (7) выполняются в ОДЗ в силу того, что $x < -1$. Решение левой части: $-\infty < x < -2$, что и является ответом.

4. Заменив квадраты тригонометрических функций с помощью формул двойного аргумента, получим:

$$1 - \cos\left\{\frac{\pi}{2}(1 + \cos 2x)\right\} = 1 - \cos(\pi \sin 2x) \qquad (1)$$

или

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}(1 + \cos 2x)\right\} = \cos(\pi \sin 2x).$$

Отсюда находим:

$$\frac{\pi}{2}(1 + \cos 2x) = \pm\pi \sin 2x + 2k\pi, \qquad (2)$$

где параметр k может принимать целочисленные значения.

Сократив обе части на число π, приведем (2) к виду:

$$\frac{1}{2}\cos 2x \pm \sin 2x = 2k - \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Наиболее простой и эффективный способ решения уравнений (3) — введение вспомогательного угла. А именно: разделим обе части уравнения (3) на корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, то есть на $\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x = \frac{4k-1}{\sqrt{5}}. \qquad (4)$$

Введем обозначения $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, такие углы φ существуют, так как $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$. Тогда

$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{1}{2}$ и для знака плюс $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, а для знака минус $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. При этом уравнение (4) может быть записано в следующей форме:

$$\sin(2x + \varphi_{1,2}) = \frac{4k-1}{\sqrt{5}}. \qquad (5)$$

Это уравнение имеет действительные корни только при

$$-1 \leqslant \frac{4k-1}{\sqrt{5}} \leqslant +1,$$

то есть при $k = 0$.

В этом месте многие абитуриенты допустили ошибку и не смогли выделить те значения параметра k, при которых уравнение (3) имеет действительные корни.

Далее, подставляя $k = 0$ в (5), находим ответ по известной школьной формуле:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{n\pi}{2}, \qquad (6)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{m+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{m\pi}{2},$$

где $n,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

Полученный ответ может быть значительно упрощен. Действительно, положим в (3) $k = 0$, тогда (3) может быть преобразовано к виду:

$$\cos x\ (\cos x \pm 2\sin x) = 0. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) находим два решения:

$$\cos x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

$$\text{где } n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \qquad (8)$$

$$\cos x \neq 0, \quad \cos x \pm 2\sin x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + m\pi,$$

где $m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

Непосредственное преобразование ответа в форме (6) к виду (8) требует вывода формул, связывающих различные обратные тригонометрические функции от одного аргумента, на чем мы не будем останавливаться.

Вариант 2

1. $1{,}5\ \frac{м}{с} \leqslant x \leqslant 42\ \frac{м}{с}$.

Указание. Пусть скорость точки x *м/сек*. Тогда она тратит на прохождение пути в 630 *м* $\frac{630}{x}$ *с*, а при скорости $(x+3)\ \frac{м}{с}$ — $\frac{630}{x+3}$ *с*. Согласно условию задачи должна иметь место система неравенств

$$\frac{630}{x} - 280 \leqslant \frac{630}{x+3} \leqslant \frac{630}{x} - 1.$$

Решая указанную систему неравенств, получим ответ.

2. $\frac{2\sqrt{3}}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt[3]{9V^2\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3. $\frac{1}{9}$.

4. $x = \pi n + \operatorname{arctg}\left[2b + \left(\frac{b-a-2}{2}\right)^2\right]$,

где $b \geqslant a + 2$ и $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

Указание. Обозначим $\sqrt{\operatorname{tg} x - 2a} = u > 0$, $\sqrt{\operatorname{tg} x - 2b} = v \geqslant 0$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} u - v = 2, & (1)\\ u^2 - v^2 = 2(b-a). & (2)\end{cases}$$

Из (1) следует, что $u > v$. Следовательно, $b > a$, поскольку левая часть уравнения (2) положительна. Система (1) — (2) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} u - v = 2,\\ u + v = b - a,\end{cases}$$

решениями которой являются

$$\begin{cases} v = \dfrac{b-a-2}{2}, & (3)\\[2mm] u = \dfrac{b-a+2}{2}. & (4)\end{cases}$$

Так как $v \geqslant 0$ и $u > 0$, то, как это следует из (3) и (4), должно выполняться неравенство $b \geqslant a + 2$. Соотношению (3) соответствует уравнение

$$\operatorname{tg} x = 2b + \left(\frac{b-a-2}{2}\right)^2,$$

решая которое, получим ответ.

Вариант 3

1. В первый сосуд нужно перелить $\frac{4(p-70)}{90-p}$ литров раствора; $70 \leqslant p \leqslant \frac{230}{3}$.

2. $\dfrac{a}{4\cos\alpha\,\cos\beta\sin\beta}$

3. $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4. 1) x — любое действительное число, если $a = b = 0$.

2) $x = \dfrac{n\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{8}$, $x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{4}$, где $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ при $a=0$, $b>0$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ при $a = 0$, $б < 0$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, если $a > 0$, и $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, если $a<0$. n, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Физика

Билет № 1

Сразу после пережигания горизонтальной нити груз m_1 начинает двигаться по дуге окружности с ускорением $\mathbf{a}_1$, касательным к окружности. Поскольку скорость этого грузика в момент пережигания нити равна нулю, его центростремительное ускорение в этот момент отсутствует. Груз m_2 приходит в движение с ускорением $\mathbf{a}_2$, направленным вертикально вниз.

Уравнения движения обоих грузиков имеют вид

$$m_1 a_1 = (m_1 g + T)\sin\alpha, \tag{1}$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T, \tag{2}$$

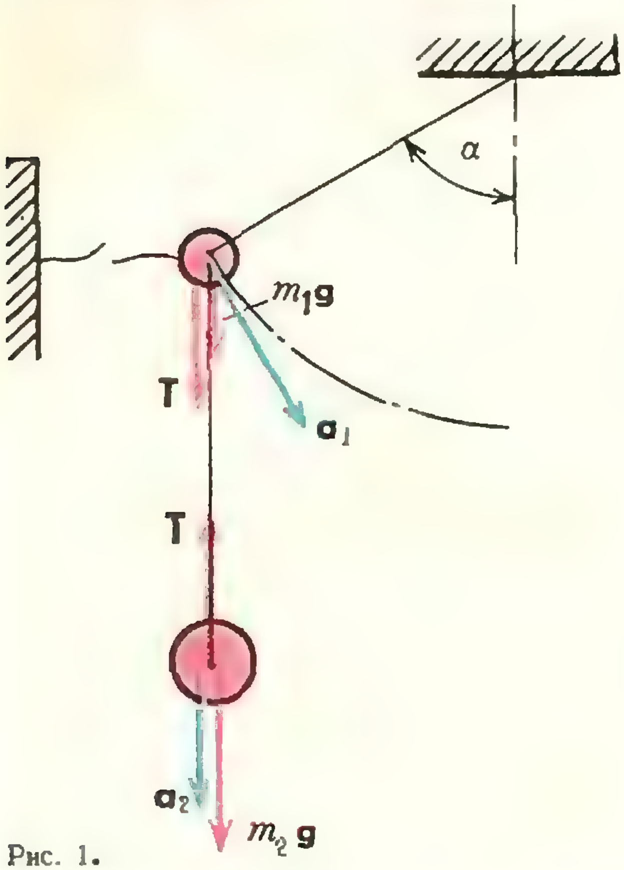


Рис. 1.

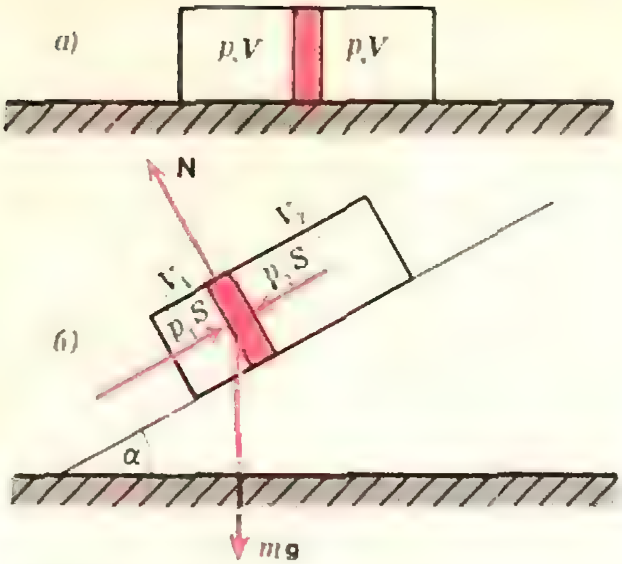


Рис. 2.

где T — натяжение нити, соединяющей оба грузика (см. рис. 1). Так как нить нерастяжима, ускорение нижнего грузика и вертикальная составляющая ускорения верхнего грузика одинаковы:

$$a_2 = a_1 \sin\alpha. \tag{3}$$

Из равенств (1) — (3) находим

$$a_2 = g\sin^2\alpha\,\frac{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}{\dfrac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha} \approx 9\ м/с^2.$$

Билет № 2

Из уравнения движения системы тел труба — поршень по наклонной плоскости определяем их ускорение a:

$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha). \tag{1}$$

Запишем уравнение движения поршня вдоль наклонной плоскости (см. рис. 2,*б*):

$$ma = mg\sin\alpha - (p_1 - p_2)S. \tag{2}$$

На основании закона Бойля — Мариотта

$$p_1V_1 = pV, \tag{3}$$

$$p_2V_2 = pV. \tag{4}$$

(Введенные в соотношениях (1) — (4) обозначения ясны из рисунков 2, *а*, *б*.)

Из системы уравнений (1) — (4) с учетом того, что $V_1 + V_2 = 2V$, находим искомое отношение объемов V_2/V_1:

$$\frac{V_2}{V_1} = \eta + \sqrt{\eta^2 + 1} \approx 1{,}2,$$

где

$$\eta = \frac{kmg\cos\alpha}{pS} \approx 0{,}2.$$

Билет № 3

При медленном приближении заряженного шарика q из бесконечности в точку 0

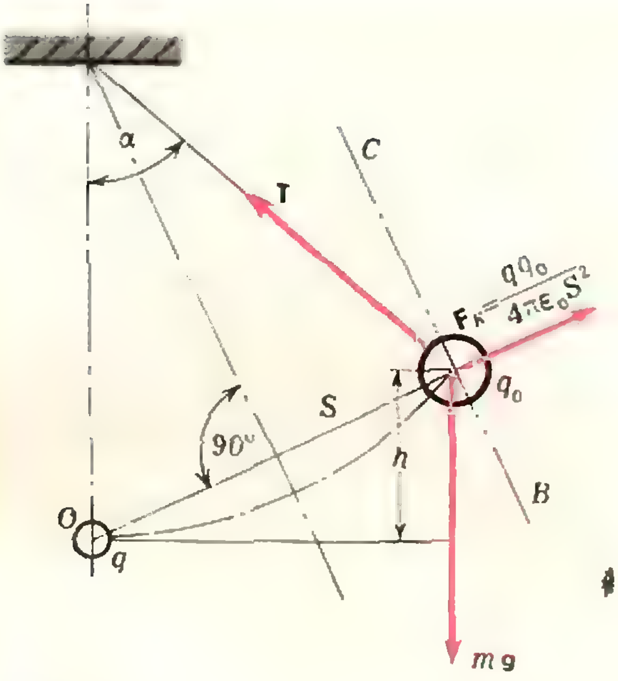


Рис. 3.

(рис. 3) внешние силы совершают работу $A' = mgh$ по поднятию шарика и работу A'' против сил электростатического отталкивания:

$$A'' = q(\varphi_0 - \varphi_\infty) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S},$$

где $\varphi_\infty = 0$, $\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 S}$ = потенциалы электрического поля заряда q_0 на бесконечном удалении и на расстоянии S.

Разложим силы, действующие на заряженный шарик на нити, по направлению кулоновской силы и перпендикулярному к ней направлению BC, параллельному биссектрисе угла α отклонения нити (см. рис. 3). Запишем условия равновесия шарика с зарядом q_0:

$$T\cos\frac{\alpha}{2} = mg\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$T\sin\frac{\alpha}{2} + mg\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S^2},$$

из которых находим

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S^2} = 2mg\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Исключив из последнего равенства $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{S}$, получим

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S} = 2mgh.$$

Следовательно, $A'' = 2mgh$, и полная работа по перемещению заряда q равна $A = A' + A'' = 3mgh \approx 3\cdot10^{-4}$ *дж*.

Билет № 4

При входе рамки в магнитное поле и при выходе из него возникает э. д. с. индукции

$$E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока:

$$\Delta\Phi = B\Delta S = Bl_1 v\Delta t.$$

Возникающий в рамке индукционный ток

$$I_{инд} = \frac{E_{инд}}{R} = \frac{Bl_1 v}{R}.$$

За время $\Delta t = 2\frac{l_2}{v}$ в рамке выделяется количество теплоты $Q = I_{инд}^2 R\Delta t = 10^{-3}$ (*дж*), или

$$Q = \frac{2l_2 v(Bl_1)^2}{R} = 10^{-3}\ (дж).$$

Отсюда находим скорость рамки

$$v = \frac{QR}{2l_2(Bl_1)^2} = 4\ (м/с).$$

Билет № 5

На рисунке 4 показаны силы, действующие на вращающуюся муфту. Действие силы тяжести mg компенсируется силой реакции **N** со стороны стержня. Центростремительное ускорение муфте сообщает упругая сила пружины:

$$m\frac{v^2}{l} = k\,\Delta l.$$

Здесь l — длина растянутой пружины, $\Delta l = l - l_0$. Величину l можно найти, зная освещенность в точке O:

$$E = \frac{I\cos\alpha}{l^2 + h^2} = \frac{Ih}{(l^2 + h^2)^{3/2}},$$

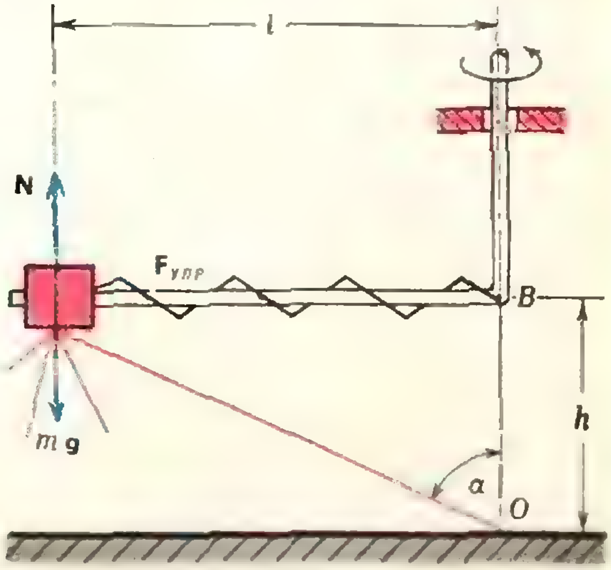


Рис. 4.

откуда

$$l = \sqrt{\left(\frac{lh}{E}\right)^{2/3} - h^2} = 30\ (см).$$

Кинетическая энергия муфты

$$T = m\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}kl\,\Delta l = 0,03\ (дж).$$

К статье «Уравнение газового состояния. Работа и теплоемкость газа»

1. $$T = \frac{PV}{R\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)} =$$

$$= \frac{100\ атм \cdot 10\ л}{0,082\ \frac{атм \cdot л}{град \cdot моль}\left(\frac{14}{28} + \frac{30}{4}\right)\ моль} \approx$$

$$\approx 1,5 \cdot 10^3\ °К.$$

2. В обоих случаях понадобится одинаковое количество тепла $Q = Cpm\Delta t°$, так как оба процесса являются изобарическими.

4. Каждый атом кислорода содержит 8 электронов, молекула — 16 электронов. 1 *г-моль* кислорода содержит $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул. В заданных условиях в 1 литре кислорода содержится $\frac{PV}{RT}$ молей, то есть $\frac{PV}{RT}N_A$ молекул и $16\frac{PV}{RT}N_A \approx$ $\approx 2,5 \cdot 10^{24}$ электронов.

5. До начала реакции давление в сосуде равно сумме парциальных давлений кислорода и водорода

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{V}RT\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right),$$

где $\mu_1 = 32$ *г/моль* и $\mu_2 = 2$ *г/моль* — молекулярные массы соответственно кислорода и водорода.

Из уравнения реакции соединения водорода с кислородом $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ следует, что 1 *г-моль* кислорода (32 *г*) соединяются с 2 *г-молями* водорода (4 *г*). 16 *г* кислорода соединятся с 2 *г* водорода, в сосуде останется $m_2' = 8$ *г* водорода, и давление в сосуде будет равно

$$P' = \frac{1}{V}RT\frac{m_2'}{\mu_2}.$$

Отношение $\frac{P'}{P}$ равно:

$$\frac{P'}{P} = \frac{m_2'\mu_1}{m_1\mu_2 + m_2\mu_1} = \frac{8 \cdot 32}{16 \cdot 2 + 10 \cdot 32} =$$

$$= \frac{8}{11} \approx 0,73.$$

6. $$P = \frac{1}{V}\frac{m_1}{\mu_1}RT_1 \quad и \quad \frac{1}{5}P =$$

$$= \frac{1}{V}\frac{m_2}{\mu_2}RT_2$$

($\mu_1 = 28$ *кг/кмоль* и $\mu_2 = 2$ *кг/кмоль* — молекулярные массы азота и водорода). Отсюда

$$\frac{1}{5} = \frac{m_2\mu_1}{m_1\mu_2}\frac{T_2}{T_1} \quad и \quad m_2 = \frac{1}{5}m_1\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{T_1}{T_2} \approx$$

$\approx 0,03$ *кг*.

7. Работа, совершенная газом при процессе ABC, $A = P_2(V_2 - V_1)$, значит изменение его внутренней энергии $\Delta U = Q - P_2(V_2 - V_1)$. Изменение внутренней энергии газа при процессе ADC такое же, а совершенная газом работа $A' = P_1(V_2 - V_1)$. Поэтому $Q' = Q - (P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$.

8. Удельная теплоемкость может быть бесконечно большой при изотермическом расширении.

К задаче М142

Ответ: Расстановка цифр 1, ..., 6, 8, ..., 13, показанная на рисунке 5 на стр. 28, единственная. Существуют ровно две различные (не получающиеся друг из друга отражением или поворотом) расстановки цифр 1, ..., 10, 12, 13 (рис. 1, 2) и ровно две расстановки цифр 1, 2, 4, ..., 13; они получатся из расстановок рисунка 1 заменой каждой цифры k на «симметричную»: $k \to 14 - k$.

Указание. Полезно подметить различные симметричные линейные соотношения, которые вытекают из требования задачи. (Например, разность чисел на двух противоположных ребрах одной грани должна быть равна разности чисел на двух других параллельных им ребрах и т. п.)

Еще полезнее с самого начала выписать все тройки различных натуральных чисел, дающих в сумме S (например, для $S = 21$ существует всего по две тройки, содержащие число 13 и не содержащие число 7: 13, 6, 2; 13, 5, 4, и две «симметричных» им тройки, содержащие число 1).

Каждый из этих подходов или их сочетание позволяет рационально организовать перебор, отыскать все расстановки, указанные в ответе, и доказать, что других не существует.

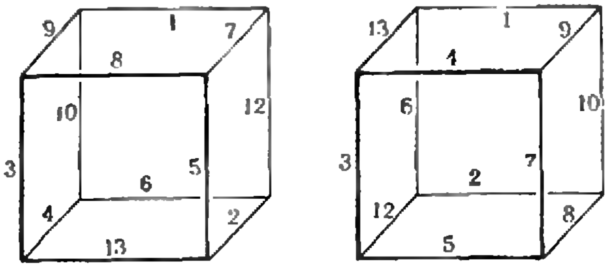


Рис. 5.

К задачам

(см. стр. 13)

1. $1971 = 73 \cdot 27$.

2. а) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, $1972 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 29$, $x_1 = 46$, $y_1 = 12$, $x_2 = 494$, $y_2 = 492$.

б) 1973 — простое число; $x = 987$, $y = 986$.

3. Опустим перпендикуляры: h_1 из точки B на AC, h_2 из K на AB и h_3 из K на BC. Тогда

$$\frac{BC \cdot h_3}{AB \cdot h_2} = \frac{BC \cdot NK}{AB \cdot LK} = \frac{KC}{AK},$$

откуда $BC \cdot NK \cdot AK = AB \cdot LK \cdot KC$.

4. Может. При $r < R$ это будет, если

$$h > \frac{2(R^2 - r^2)}{\sqrt{3R^2 - 2rR - r^2}}.$$

За сколько ходов

Перед вами пять необычных шахматных досок. В каждой из позиций нужно выполнить указанное ниже задание, связанное с перестановкой фигур, причем достаточно знать только, как они ходят. Такие задачи называются пермутационными задачами на шахматной доске (слово «пермутация» — синоним перестановки). Пермутационные задачи составляли многие известные шахматные композиторы. Среди этих задач встречаются очень сложные, решения которых состоят более чем из ста ходов. В предлагаемых позициях размеры «шахматных досок» невелики, и задачи будут вполне вам под силу. Разумеется, в каждой позиции задание нужно выполнить в минимальное число ходов.

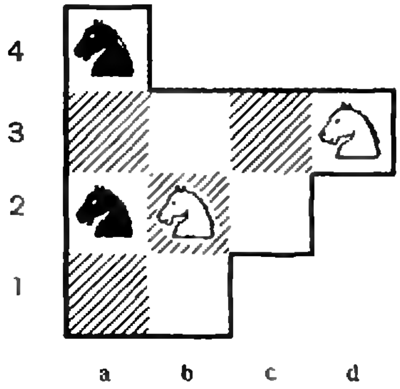


Рис. 1. Поменять местами белых и черных коней. Очередность ходов произвольна (конь одного цвета может сделать несколько ходов подряд), но кони разного цвета не должны попадать под бой друг друга.

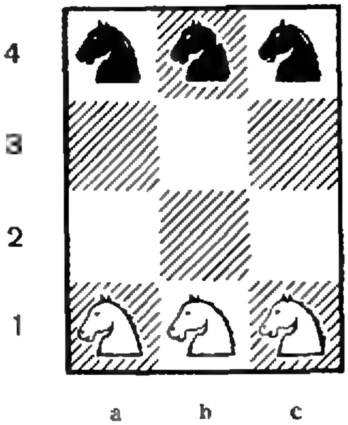


Рис. 2. То же задание, что и в первой позиции (кони разного цвета не должны находиться под боем), но здесь белые и черные кони ходят поочередно.

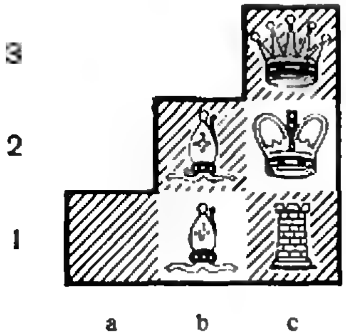


Рис. 3. Перевести белого короля на поле a1, не становясь им на b2.

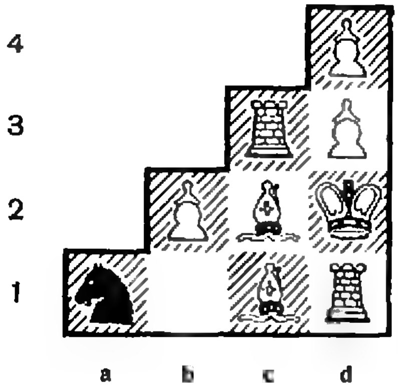


Рис. 4. Съесть белым королем черного коня при условии, что конь неподвижен, а король не может становиться под шах (на поле c2).

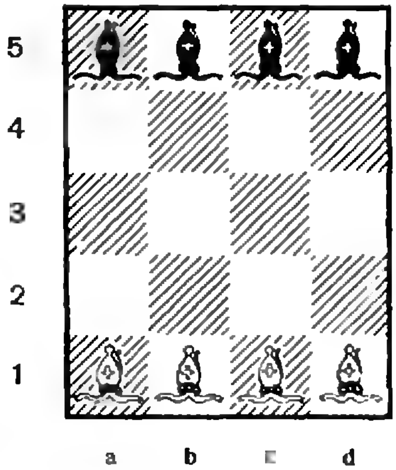
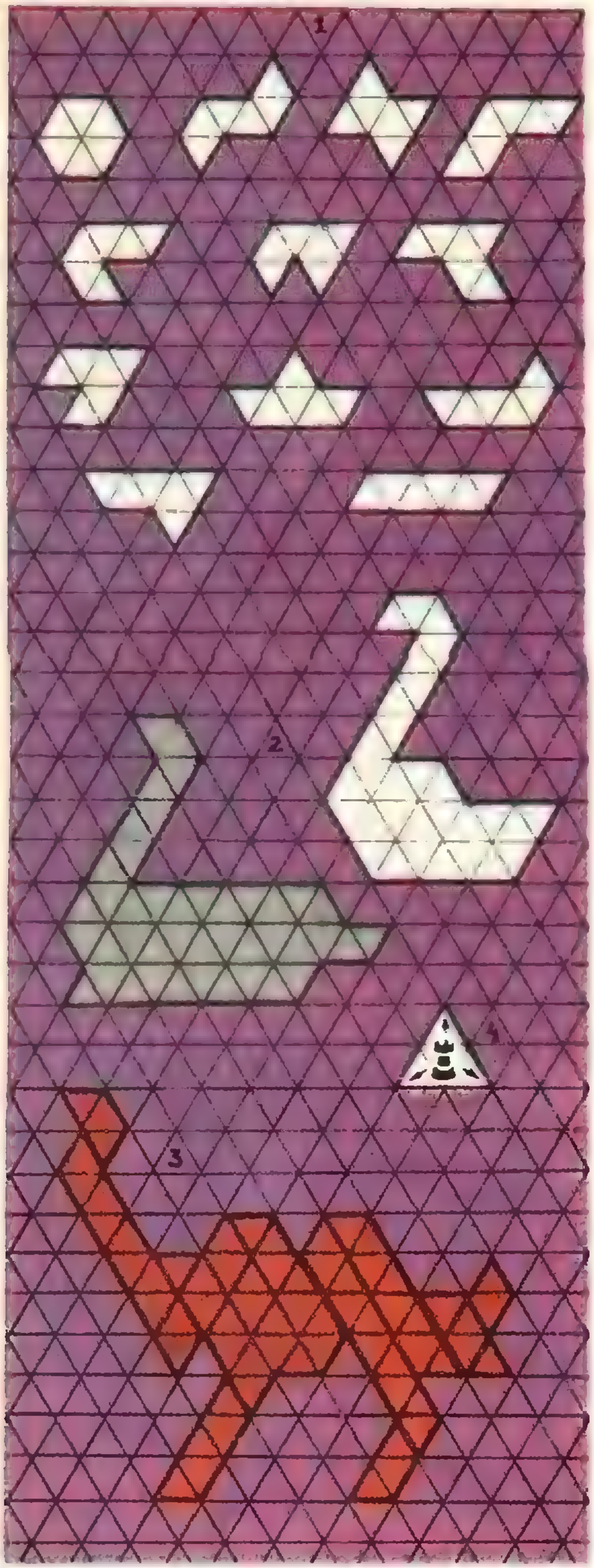


Рис. 5. Поменять местами белых и черных слонов так, чтобы ни на одном ходу слоны разного цвета не угрожали друг другу (белые и черные слоны ходят по очереди).

Е. Я. Гик

Квант для младших школьников



Наш зоопарк

У нас открылся зоопарк! Этой новостью мы и спешим поделиться с вами. Первыми у нас появились два веселых гуся, а затем — двугорбый верблюд. Как они у нас появились? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, изготовьте из картона 12 фигурок, изображенных на рисунке 1, и попытайтесь из них сложить сначала гусей (рис. 2) — одновременно и белого, и серого — двух веселых гусей, а затем верблюда (рис. 3).

Вы, наверное, уже заметили, что каждая из фигур, из которых мы складывали обитателей нашего зоопарка, состоит из шести одинаковых правильных треугольников, причем все шесть треугольников можно обойти «треугольной ладьей», которая ходит как показано на рисунке 4. Такие фигуры мы назовем треугольным гексамино. Существует ровно 12 различных треугольных гексамино*), и все они изображены на рисунке 1 (проверьте)!

Для того, чтобы сложить гусей, вам потребуются все 12 треугольных гексамино, а для верблюда — только 11. Справившись с этим заданием, попытайтесь из этих же фигур сложить новых зверюшек. Наш зоопарк ждет новоселов!

Если вас заинтересует эта игра, то подробнее о такого рода играх и о связанных с ними математических задачах можно прочесть в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (издательство «Мир», М., 1971).

---

*) Две фигуры, переходящие друг в друга при переворачивании, считаем одной и той же фигурой.

А. Ю. Сойфер.

Задачи

1. Двое приятелей не виделись много лет. Встретившись, они разговорились, и один похвалился другому, что у него уже трое детей. «Сколько же им лет?», — спросил второй. «Произведение их лет равно 36, а сумма — номеру вот этого проезжающего трамвая». Посмотрев на номер трамвая, второй собеседник сказал, что этих данных недостаточно. «А старший сын у меня рыжий», — «Тогда я знаю, сколько им лет», — сказал его приятель и точно назвал возраст каждого ребенка.

Сколько же лет было каждому ребенку?

2. На очередном занятии математического кружка каждый школьник получил 8 карточек с числами. Требовалось разложить карточки в две строчки (по 4 карточки в строчку) так, чтобы суммы чисел строчек были равны между собой.

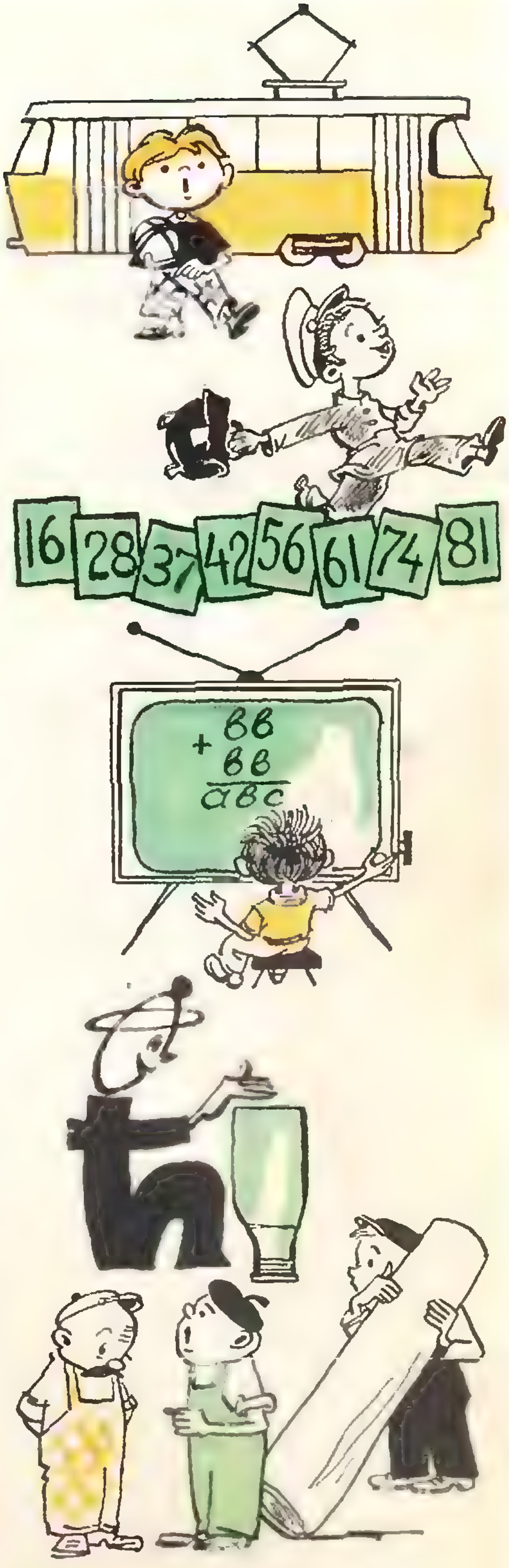
Один из играющих разложил карточки в одну строчку так, как показано на рисунке, и немедленно заявил комиссии, что задача не имеет решения. Почему ученик, не занимаясь подробным подсчетом, сделал такое заявление? И как все-таки решить задачу?

3. Расшифруйте пример на сложение:

$$\begin{array}{r} +\,вв \\ вв \\ \hline авс \end{array}$$

4. Переверните нераспечатанную бутылку кефира и постучите по донышку так, чтобы брызнул кефир (для осторожности, проделайте все это над глубокой тарелкой). Что сделается с крышкой и почему?

5. Два человека несут бревно, поддерживая его на одинаковых расстояниях от концов. Третий, желая помочь, берется за бревно впереди первого. Будет ли легче несущим бревно? (Или: что скажет второй?)



ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

1

РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ

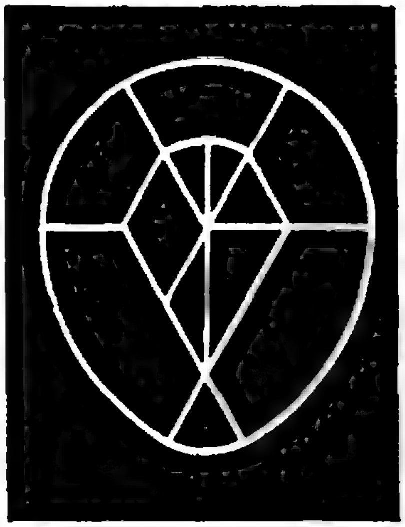
На нижних рисунках приведены изображения утки, самовара, рачка-циклопа, парусной яхты, собаки и гуся. Докажите, что площади, занимаемые этими фигурами, равны.

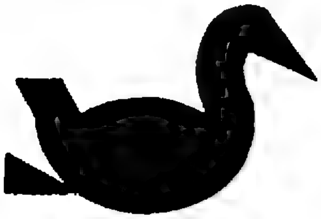
Чтобы легче было провести доказательство, на схеме справа показаны кусочки, из которых можно собрать фигурки. Учтите, что масштабы рисунка и схемы разные.

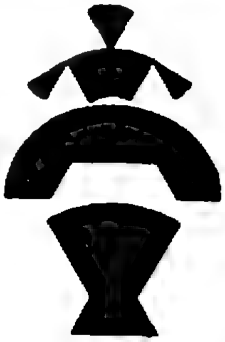
Для решения задачи достаточно показать, что любые две фигуры равносоставлены, то есть сложены из одинаковых кусочков плоскости.

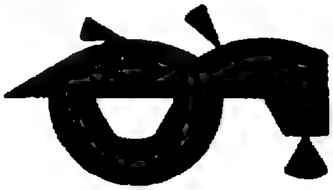
ПОПРАВКА

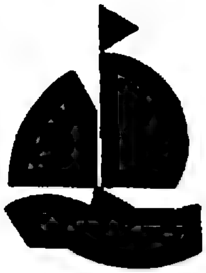
В части тиража на стр. 31 рисунки 13, 14 оказались перевернутыми.

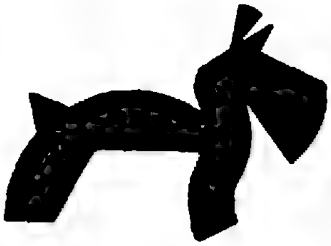


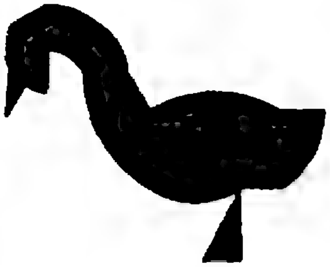












НОМЕР
2

Московское математическое общество
Оргкомитет Московской математической олимпиады

Главный редактор —
академик **И. К. Кикоин**
Первый заместитель
главного редактора
академик
А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
Л. А. Арцимович,
М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
И. Н. Бронштейн,
Н. Б. Васильев,
И. Ф. Гинзбург,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
А. И. Климанов
(*главный художник*),
С. М. Козел,
В. А. Лешковцев
(*зам. главного редактора*),
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
М. Д. Миллионщиков,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
М. Л. Смолянский
(*зам. главного редактора*),
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:
В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
Т. М. Макарова
(*художественный редактор*),
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
Л. В. Чернова
(*зав. редакцией*).

Корректор Т. А. Панькова

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант»,
тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 16/XI 1972 г.
Подписано в печать 26/XII 1972 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$ Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,66
Тираж 379 580 экз.
Т-20448
Цена 30 коп. Заказ 2102

Чеховский полиграфический комбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Основан в 1970 году

1973
2

Квант

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии
педагогических наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

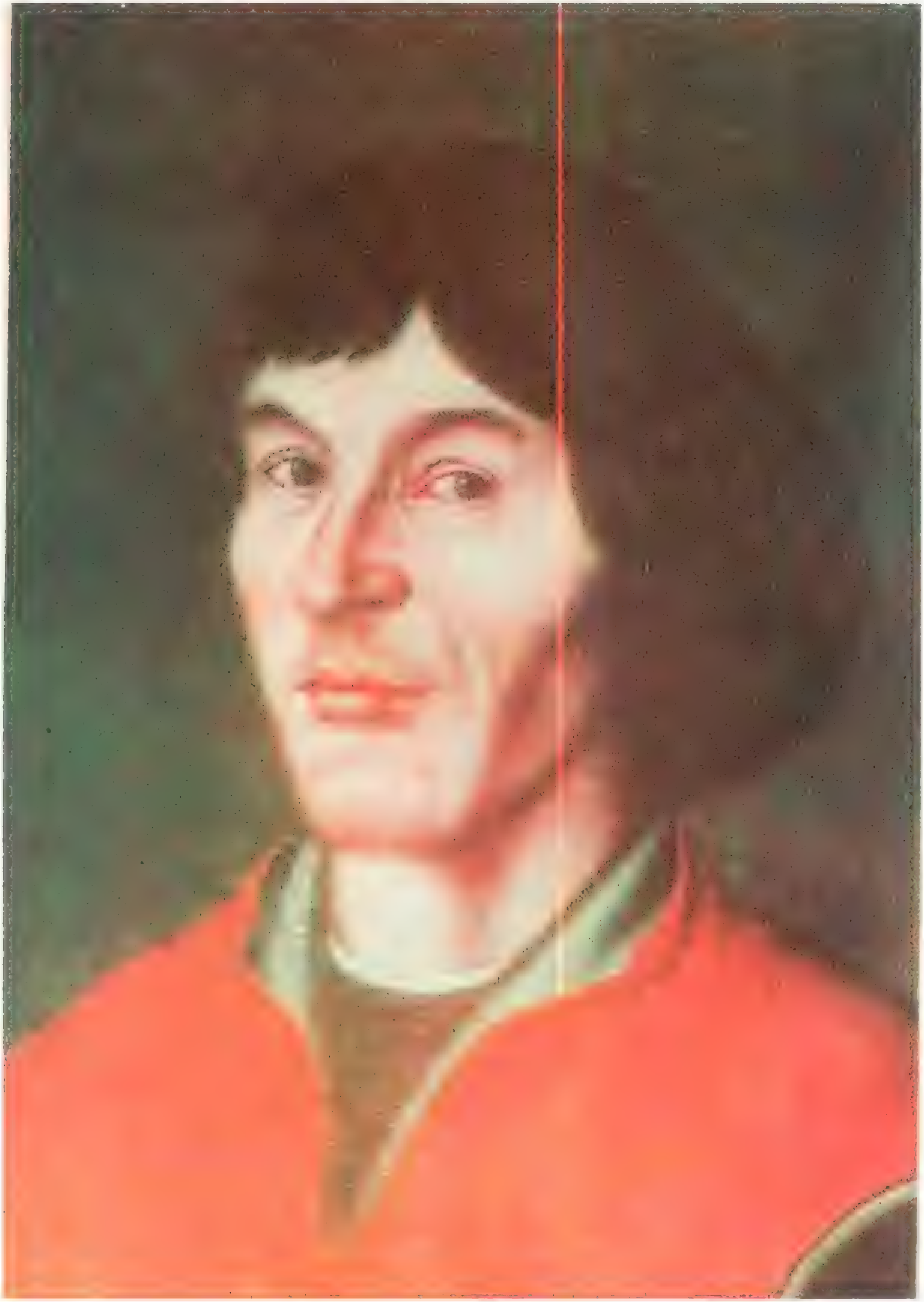
В НОМЕРЕ:

2 *Я. А. Смородинский.* Николай Коперник
9 Николая Коперника малый комментарий относительно установленных им гипотез о небесных движениях
11 *Н. Б. Демидович.* Вычисления, ошибки, контроль
17 *Д. Бородин.* Гравитационная масса
22 *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман.* О некоторых пространственных изопериметрических задачах
27 *В. Н. Вагутен.* Числа C_n^k, многочлены, последовательности
35 *А. В. Бялко.* Коэффициент полезного действия ракеты
Математический кружок
39 *М. Л. Гервер.* Про лису и собаку
Задачник «Кванта»
45 Задачи М186—М190 и Ф198—Ф202
47 Решения задач М146—М150 и Ф164—Ф169
Практикум абитуриента
58 *М. И. Шабунин, С. В. Черемных.* Тригонометрические уравнения
64 Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова
67 *И. Л. Дьяконов, А. Г. Мордкович, И. И. Наслузов.* Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы
«Квант» для младших школьников
68 Задачи
69 *А. Н. Виленкин.* Картезианский водолаз
Информация
70 *В. В. Иванов, А. Г. Фэнотов.* Экономико-математическая школа при экономическом факультете МГУ
Рецензии, библиография
72 *П. А. Серпов.* Отпугивающая реклама
74 *М. Л. Смолянский.* Новые книги
75 **Ответы, указания, решения**
Уголок коллекционера (*3-я стр. обложки*)
А. В. Алтыкис. Марки, посвященные Копернику
Смесь (*стр. 21, 38, 44, 66, 73*)

Портрет Николая Коперника, который мы приводим на первой странице обложки, был написан неизвестным художником в 1575 году.

На второй странице обложки — кабинет геометрии Краковского университета, где учился Коперник в 1491 года. Поскольку учебников не хватало, основные теоремы чертили на стенах.

На четвертой странице вы видите еще один портрет Коперника. Предполагают, что это автопортрет ученого.



Николай Коперник

Я. А. Смородинский

Жизнь Коперника

В этом году весь мир отмечает юбилей великого польского астронома Николая Коперника. Коперник родился 500 лет тому назад, 19 февраля 1473 года, в городе Торуни. Учился в Краковском университете, потом прожил почти 10 лет в Италии. В Болонье, Риме, Падуе и Ферраре он изучал медицину, юриспруденцию и астрономию. Возвратившись в Польшу (около 1506 года), он в течение нескольких лет был секретарем и врачом своего дяди епископа.

В 1512 году, после смерти дяди, Коперник переехал в город Фромборк, расположенный на берегу Балтийского моря. Здесь он продолжал упорно заниматься астрономией. Много раз ему приходилось прерывать научные изыскания из-за большого количества административных обязанностей, которые он должен был исполнять, будучи управляющим южной частью провинции Вармии. Несмотря на это, он упорно работал над своим основным (и фактически единственным) астрономическим сочинением «О вращении небесных сфер». Первые главы этой книги, содержащие разные тригонометрические теоремы, были изданы учеником Коперника Георгом Ретиком в 1542 году. Но значительно раньше, еще в 20-х годах XVI века, в Европе была известна рукопись Коперника, так называемый «Малый комментарий», в которой содержались новые представления о строении Солнечной системы. Главную же свою книгу Коперник не решался издать почти до самой смерти. Лишь умирая (в 1543 году), он смог подержать в слабеющих руках отпечатанные листы этой книги.

Что же сделал Коперник, и почему его книга оказала столь большое влияние на развитие науки?

Идеи Коперника положили начало новой эре в науке. Их трудно было понять людям, воспитанным на авторитете древних ученых и на догматах церкви. Поняли Коперника немногие. Но среди них были Кеплер и Галилей.

Среди тех, кто не смог понять Коперника, был Лютер, один из руководителей Реформации, положившей конец беспредельному господству католической церкви в Европе. Он написал о Копернике:

«Рассказывают о новом астрономе, который хочет доказать, будто Земля вращается вокруг себя, а не небо, Солнце и Луна; все равно, как если бы кто-либо сидит в телеге или на корабле и движется, а думает, что он остается на месте, а земля и деревья идут и движутся. Но тут дело вот в чем: если кто-либо хочет быть умным, то должен выдумать что-либо собственное и считать самым лучшим то, что он выдумал. Дурак хочет перевернуть все искусство астрономии...»

В книгу Коперника без ведома автора было добавлено предисловие богослова и математика Оссиандера, который следил за ее печатанием. В этом предисловии он успокаивает читателя (и цензоров): «...во всем же, что касается гипотез, пусть никто не ожидает получить от астрономии че-

---

Портрет Николая Коперника, репродукцию с которого мы приводим, был написан неизвестным польским художником, современником Коперника. Этот портрет считается одним из наиболее достоверных изображений ученого. Перевод подрисуночных подписей выполнен Т. А. Кротовой.

го-нибудь истинного, поскольку она не может дать что-либо подобное; если же он сочтет истинным то, что придумано для другого употребления, то после такой науки окажется более глупым, чем когда приступал...»

Идея автора предисловия состояла в том, что теория Коперника удобна для вычислений, но не имеет никакого отношения к реальному миру. Тем не менее в 1616 году, при жизни Галилея и Кеплера, декретом инквизиции книга Коперника была включена в список запрещенных церковью книг.

Но все эти меры оказались бесполезными. Новая наука завоевывала себе признание, древняя наука уходила в историю.

Древние идеи

В неведомую глубь веков ушло время, когда человек впервые увидел среди неподвижных звезд семь небесных тел, положение которых изменялось на его глазах. Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн удивляли и пугали древних наблюдателей неба. Движение их предвещало тревоги и радости. Солнце приносило с собой времена года, Луна сменяла дни и ночи, багровый Марс был предвестником войны.

Еще египтяне знали, что движения Солнца и Луны можно предсказывать. Те, кто умел это делать, занимали особое положение — они были жрецами, знающими тайны богов. Жрецы объявляли о начале года, о праздниках, о сроках работ на полях. С тех пор на многие сотни лет наблюдение небесных тел было связано с календарем. Сам Коперник углубился в астрономию, когда в 1514 году папа Лев X призвал к исправлению календаря. (Эта реформа — переход к новому стилю — была проведена позже, в 1574 году.)

Греки пошли значительно дальше египтян. Они задумались над тем, как устроена вся планетная система, как движутся планеты. Еще в III веке до нашей эры Аристарх Самосский высказал идею о гелиоцентрической системе — системе планет с Солнцем в центре. Во II веке до нашей эры на острове Родосе и в Александрии наблюдал звезды Гиппарх, который первым научился предсказывать положение Солнца и Луны, создав теорию их движения. Астрономы видели, что каждая планета движется по своим особым правилам; поэтому они говорили о теории Марса, теории Луны и т. д. Только Кеплер смог объединить эти разрозненные теории в единую схему.

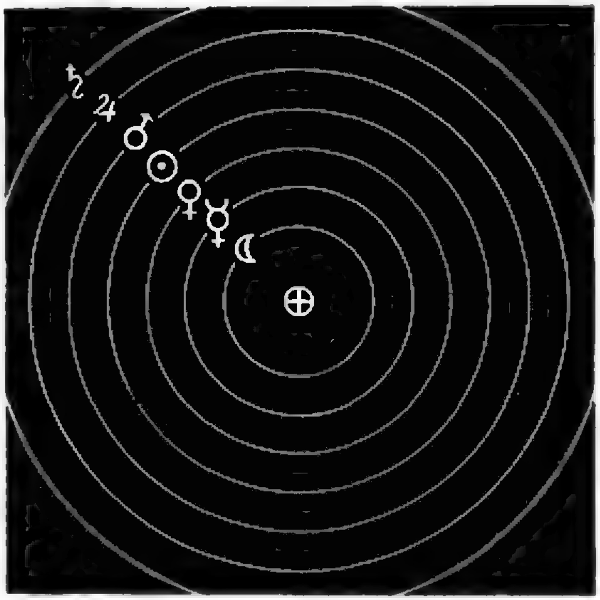


Рис. 1.

Первую последовательную схему планетной системы дал Клавдий Птолемей, работавший в Александрии в середине II века нашей эры. Он в значительной степени опирался на труды Гиппарха, которые не дошли до наших дней. Система Птолемея продержалась 15 веков и дожила, почти не изменившись, до Коперника. Вплоть до XVI века никто не сомневался в ее истинности *).

Птолемей считал, что в центре Вселенной расположена Земля, а вокруг нее вращается семь сфер, которые влекут за собой семь планет (рис. 1)

---

*) Сочинение Птолемея называлось «Математический трактат в XIII книгах». В арабском переводе, в котором с ним познакомились средневековые ученые, оно называлось «Альмагест» (от греческого «μεγίζτη» — величайшее). Под этим названием оно цитируется и сейчас

в таком порядке: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн. На рисунке 1 в действительности изображена не система Птолемея — она значительно более сложна. До того, как о ней рассказать, поймем сначала, что означало для греков (да и для Коперника) построить теорию движения планеты.

Кинематика без динамики

Белым пятном в системе знаний древних естествоиспытателей было то, что они не имели ни малейшего представления о динамике. Причина движения тел была для них недоступна. Когда камень толкали, все было понятно — хотя и в этой задаче никаких количественных соотношений получить не могли (да и не думали об этом). Когда же дело касалось планет, то ни о каких причинах движения и речи быть не могло — планеты двигались сами по себе, просто потому, что движение заключено в их природе. Почти вся наука о движении описана у Коперника так: «Аристотель говорит, что единому и простому телу присуще и простое движение; из простых же движений одно прямолинейное, другое круговое; из прямолинейных одно идет вверх, другое вниз. Поэтому всякое простое движение идет или к середине вниз, или от середины вверх, или вокруг середины, и это движение круговое. Только земле и воде, которые считаются тяжелыми, следует двигаться вниз, то есть стремиться к середине; воздух же и огонь, обладающие легкостью, должны двигаться вверх и удаляться от середины. И кажется вполне сообразным приписать этим четырем стихиям прямолинейное движение, а небесным телам предоставить вращаться кругом середины. Так утверждает Аристотель». Вот и вся механика древних. Итак, планеты должны двигаться по окружностям и, наверное, с постоянной скоростью, так как (опять из Коперника): «Круговое движение всегда совершается равномерно, ибо оно имеет неубывающую причину...» Отсюда и

Рукопись книги «De revolutionibus orbium coelestium» («О вращении небесных сфер»), открытая на той странице, где Коперник нарисовал циркулем Солнечную систему, хранится в Кракове, и коснувшись пальцами бумаги, еще можно ощутить «бороздки», оставленные циркулем великого астронома. В предисловии к своему труду Коперник признается, что лишь уговоры и упреки друзей убедили его дать согласие на издание своего трактата.

«Зал правосудия» в замке Гейльсберг. Здесь Коперник жил с дядей епископом после возвращения из Италии, вплоть до смерти могущественного прелата в 1512 году.

схема геоцентрической системы. Но система, изображенная на рисунке 1, хотя и очень эффектна, противоречит наблюдениям; с ее помощью нельзя разобраться в истинном движении планет.

Эта задача и стояла перед Птолемеем. Как совместить «принцип инерции Аристотеля» с реальным миром? Как описать реальный мир на основании одной кинематики?

Движение сфер

Древние наблюдатели видели, что движение планет сложное. Они разделяли это сложное движение на несколько более простых. Первым главным движением было суточное движение неба, вторым — его годовое движение. В этих двух движениях участвовали все семь сфер, которые тянули за собой планеты. Восьмая сфера, к которой прикреплены звезды, была неподвижна. Еще Гиппарх усовершенствовал эту систему. Чтобы учесть движение точки весеннего равноденствия (точки пересечения плоскости экватора с орбитой Земли), он приписал восьмой сфере медленное движение на один градус за 100 лет (по 36″ в год) *).

Однако эти простые движения не удовлетворяли «принципу инерции Аристотеля». Скорости их были непостоянны. Поэтому говорили о существовании двух неравенств. Первое неравенство — это неравномерность движения планет по орбитам; второе — наблюдавшееся «попятное» движение планет — изменение направления их движения по небу на противоположное. Только у Солнца и Луны не было второго неравенства. Поэтому уже теория Гиппарха позволяла определять их положение с ошибкой, меньшей одной минуты. С этими неравенствами надо было справиться, и Птолемей справился с ними великолепно.

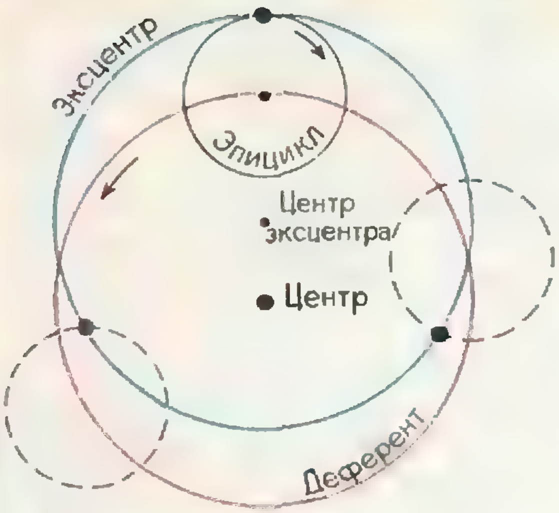


Рис. 2.

Эксцентр и эквант

Выход из, казалось бы, безнадежного положения был весьма остроумен. Надо предположить, что по окружности вокруг центра Мироздания (Земли в системе Птолемея) движется не сама планета, а лишь центр другой окружности, названной **эпициклом** (рис. 2). Планета же движется по эпициклу с той же угловой скоростью по величине, но обратной по направлению, с какой центр эпицикла движется по основной орбите, названной **деферентом** *). В результате таких построений оказывается (хорошее упражнение для читателя!), что планеты по-прежнему движутся по окружности (она называется **эксцентром**), но центр ее смещен относительно Земли.

Таким образом была установлена важная кинематическая эквивалентность схемы движения эпицикла по деференту и эксцентра. Но столь простая схема описывала лишь путь Солнца, которое всегда движется по небу в одном направлении, не поворачивая вспять. Угловая скорость движения Солнца по эксцентру (относительно его центра) предполагалась постоянной. Тогда, очевидно,

---

*) В действительности смещение точки весеннего равноденствия происходит немного быстрее — на 50″ в год.

*) Такое движение в механике называют парой вращения.

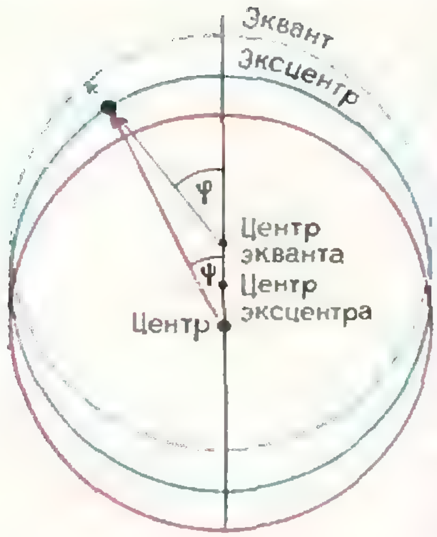


Рис. 3.

угловая скорость движения, наблюдаемая с Земли, окажется переменной. Так просто объяснялось первое неравенство.

Для планет теорию нужно было усложнить. Особенно трудно было объяснить движение Меркурия, у которого, как мы теперь знаем, самый большой эксцентриситет: он равен 0,2 и в 10 раз больше, чем у Земли.

К двум окружностям добавили третью — эквант. Центр экванта обладал той особенностью, что наблюдатель, находящийся в нем, видел бы равномерное движение планеты. Иными словами, хотя угол ψ (рис. 3) изменяется со временем неравномерно, угол φ растет пропорционально времени. Таким образом как бы вводилась фиктивная планета, движущаяся равномерно по экванту. Гипотеза экванта (при дополнительном условии, что центр эксцентра делит отрезок центр — центр экванта пополам) улучшила теорию, но и она оказалась все же недостаточной. Пришлось вводить дополнительные предположения, например, что центр экванта сам движется по окружности или что по эпициклу катится другой эпицикл. В конечном счете для описания движения планет надо было вводить почти 40 различных круговых движений. Да и сама гипотеза экванта была на самом деле чужда кинематике. Схема, таким образом, была сложной и неудовлетворительной с принципиальной точки зрения. Однако она позволяла очень точно рассчитывать положение Солнца и планет и поэтому удовлетворяла всех. Рассчитанные на ее основе астрономические таблицы (так называемые Альфонсинские таблицы) были во всеобщем употреблении с XIII века *). Правда, надо иметь в виду, что только в конце XV века подлинное учение Птолемея стало распространяться в университетах Европы — до этого учились по тяжелым латинским переводам арабских трактатов.

В то время наиболее важно было рассчитывать движение Солнца и Луны; для этого теории Птолемея было вполне достаточно. Причина этого обстоятельства, как мы сейчас знаем, лежит в малости эксцентриситетов (малой вытянутости) планетных орбит, которые поэтому могут приближенно описываться системой Птолемея.

Солнце — Центр Вселенной

Итак, не практические цели стояли перед Коперником, когда он начал размышлять над системой планет. Вопрос о календарной реформе был только лишним поводом. Коперник не мог принять сложной системы катящихся сфер Птолемея. Он не оставил после себя никаких дневников или записей, по которым можно было бы восстановить ход его мыслей. Никто не знает, о чем он думал почти сорок лет, создавая свою систему.

Когда сейчас мы смотрим на систему Птолемея, то обнаруживаем много

---

*) Таблицы, с большой точностью рассчитанные по системе Коперника, были опубликованы в 1551 году Эразмом Рейнгольдом. Ночью 17 августа 1563 года Тихо Браге увидел, что Юпитер и Сатурн почти совпадают на небе. Посмотрев в таблицы, он обнаружил, что Альфонсинские таблицы предсказывают время этого события с ошибкой в месяц, а Коперниковские — в 7 дней. Этот случай дал толчок работам Тихо Браге, а потом и Кеплера.

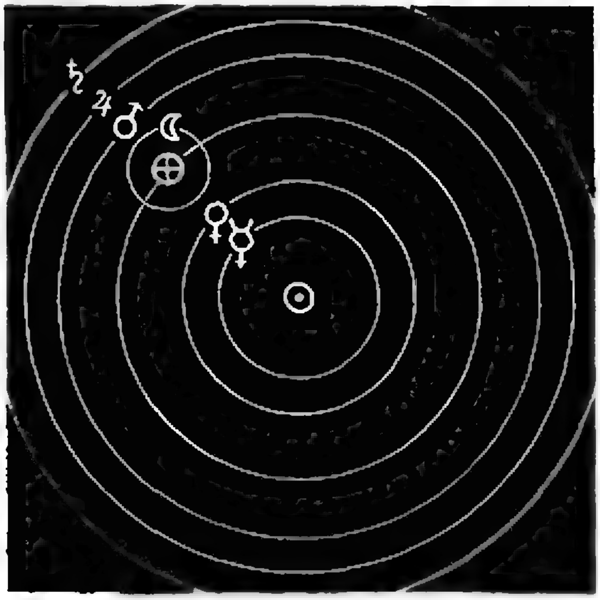


Рис. 4.

закономерностей, которые трудно считать случайными и на которые не мог не обратить внимания Коперник. Почему центры эпициклов Меркурия, Венеры и Солнца, всегда лежат на одной прямой? Почему периоды обращения Марса, Юпитера и Сатурна в их эпициклах равны одному земному году?

Немало таких проблем связано с системой Птолемея.

Гипотеза Коперника была проста. Надо поменять в старой Птолемеевской системе Землю и Солнце местами, оставив только Луну вращаться вокруг Земли (рис. 4). Но эта простая гипотеза была недоступна для понимания большинства современников Коперника. Первый раз в истории науки наблюдатель был лишен своего привилегированного положения, и обсуждался вопрос о картине мира с точки зрения другой (движущейся относительно наблюдателя) координатной системы. Такой шаг был революционным не только с точки зрения церкви — Земля и человек перестали быть главными во Вселенной,— но и с точки зрения механики — никогда еще относительность движения не использовалась для решения конкретных задач. Поместив центр планетной системы на Солнце, Коперник сразу же упростил ее схему.

После того, что было рассказано, читателю будет понятно введение в «Малый комментарий», в котором Коперник кратко формулирует свою идею (см. стр. 9).

По схеме Коперника суточное движение неба объяснялось вращением Земли вокруг своей оси, годичное движение — обращением ее вокруг Солнца. Исчезло второе неравенство — попятное движение планет стало следствием разной угловой скорости движения Земли и других планет на своих орбитах. Замечательным образом отпала необходимость и в гипотезе о вращении восьмой сферы: для объяснения движения звезд достаточно было предположить, что плоскость орбиты Земли медленно вращается в сторону, обратную движению самой Земли по орбите.

Но не следует думать, что простая схема Коперника полностью решила задачу. Напомним, что естественное движение планет должно было сводиться к комбинациям равномерных движений по окружностям. Для этого и вводились эпициклы, эксцентры и экванты.

Дадим опять слово Копернику: «...становится очевидным, что вследствие одного обращения Земли может происходить все то, чего древние пытались достичь для каждой планеты при помощи эпициклов. Однако, вопреки мнению Аполлония и древних, движение планет не оказывается равномерным, даже после отнесения этой неравномерности за счет обращения Земли. Следовательно, планеты движутся не по концентрическим кругам, а иным образом, каким — мы покажем в дальнейшем...»

Теперь мы знаем, что непостоянство скорости движения планет по орбитам следует из законов Кеплера и его не нужно избегать в теории. Но Коперник остается в плену своих законов кинематики и стремится достичь равномерности движения введением все тех же эпициклов и эксцентров (однако без эквантов). В результате его схема планетной системы оказывается достаточно сложной и совсем не похожей на простую гелиоцентрическую модель, с которой он начал. Конец «Малого комментария» выглядит так: «Таким образом, Меркурий движется при помощи всего семи кругов, Венера — при помощи пяти, Земля — при помощи трех, а Луна вокруг них — при помощи четырех; наконец, Марс, Юпитер и Сатурн — при помощи пяти кругов каждый. Таким образом, для Вселенной будет достаточно 34 кругов, при помощи которых можно объяснить весь механизм мира...».

Теория Коперника, как и многие другие теории (даже современные), оказывается очень эффективной в первом ее приближении. При попытках же улучшить ее согласие с опытом она начинает усложняться и терять убедительность. Такое положение обычно свидетельствует об органических пороках теории. Этот симптом увидел Кеплер, открывший основной дефект теории Коперника: планеты на самом деле движутся по эллипсам, а не по окружностям, и описание их движения многими окружностями в принципе не может быть простым. Однако в рассуждениях Коперника заключалось важное открытие. Предположив, что центр эксцентра движется по окружности, он заметил то, чего не заметили древние: планеты стали двигаться не по окружности, а по овалу. «Против отклонения путей планет от кругового совершенства Птолемей с основанием возражал бы Копернику, но я не возражаю»,— писал Кеплер.

Система Коперника не была существенно точнее Птолемеевой. Более того, изменение системы отсчета не могло изменить результатов вычислений. Однако переход к гелиоцентрической системе настолько изменял все представления о строении мира, что за ним вскоре последовали открытия Галилея и Кеплера, а затем и создание механики Ньютоном. Поэтому книга Коперника оказалась фундаментом, на котором построена вся современная наука. Именно в этом смысле слова ее считают одной из величайших книг, когда-либо написанных рукой человека.

Николая Коперника
малый комментарий относительно установленных им гипотез о небесных движениях

Наши предки ввели множество небесных сфер, как я полагаю, для того, чтобы сохранить принцип равномерности для объяснения видимых движений светил. Им казалось слишком нелепым, что небесное тело в своей совершенной сферичности не будет всегда двигаться равномерно. Однако они полагали возможным, что при сложении или совместном участии нескольких правильных движений светила будут казаться по отношению к какому-либо месту движущимися неравномерно.

Этого не могли добиться Калипп и Евдокс, старавшиеся получить решение посредством концентрических кругов и ими объяснить все особенности движений планет, не только относящиеся к видимым круговращениям звезд, но даже и те, когда, как нам кажется, планеты то поднимаются в верхние части неба, то опускаются, чего, конечно, концентричность никак не может допустить. Поэтому было сочтено лучшим мнение, что это можно воспроизвести при помощи эксцентрических кругов и эпициклов, с чем, наконец, большая часть ученых и согласилась.

Однако, все то, что об этом в разных местах дается Птолемеем и многими другими, хотя и соответствует числовым расчетам, но тоже возбуждает немалые сомнения. Действительно, все это оказалось достаточным только при условии, что надо выдумать некоторые круги, называемые эквантами. Но тогда получалось, что светило двигалось с постоянной скоростью не по несущей его орбите и не вокруг собственного ее центра. Поэтому, подобные рассуждения не представлялись достаточно совершенными, не вполне удовлетворяли разум.

Так вот, обратив на это внимание, я часто размышлял, нельзя ли найти какое-нибудь более рациональное сочетание кругов, которым можно было бы объяснить все видимые неравномерности, причем каждое движение само по себе было бы равномерным, как этого требует принцип совершенного движения. Когда я приступил к этой весьма, конечно, трудной и почти неразрешимой задаче, то у меня все же появилась мысль, как этого можно добиться при помощи меньшего числа сфер и более удобных сочетаний по сравнению с тем, что было сделано раньше, если только согласиться с некоторыми нашими требованиями, которые называют аксиомами. Они следуют ниже в таком порядке.

Первое требование. Не существует одного центра для всех небесных орбит или сфер.

Второе требование. Центр Земли не является центром мира, но только центром тяготения и центром лунной орбиты.

Третье требование. Все сферы движутся вокруг Солнца, расположенного как бы в середине всего, так что около Солнца находится центр мира.

Четвертое требование. Отношение, которое расстояние между Солнцем и Землей имеет к высоте небесной тверди, меньше отношения радиуса Земли к ее расстоянию от Солнца, так что по сравнению с высотой тверди оно будет даже неощутимым.

Пятое требование. Все движения, замечающиеся у небесной тверди, принадлежат не ей самой, но Земле. Именно Земля с ближайшими к ней стихиями вся вращается в суточном движении вокруг неизменных своих полюсов, причем твердь и самое высшее небо остаются все время неподвижными.

Шестое требование. Все замечаемые нами у Солнца движения не свойственны ему, но принадлежат Земле и нашей сфере, вместе с которой мы вращаемся вокруг Солнца, как и всякая другая планета; таким образом, Земля имеет несколько движений.

Седьмое требование. Кажущиеся прямые и попятные движения планет принадлежат не им, но Земле. Таким образом, одно это ее движение достаточно для объяснения большого числа видимых в небе неравномерностей.

При помощи этих предпосылок я постараюсь коротко показать, как можно вполне упорядоченно сохранить равномерность движений. Однако здесь ради краткости я полагаю нужным опустить математические доказательства, поскольку они предназначены для более обширного сочинения. Впрочем, при описании этих кругов мы укажем величины полудиаметров орбит, при помощи которых каждый сведущий в математике легко поймет, как хорошо подобная композиция кругов подойдет к числовым расчетам и наблюдениям.

Поэтому пусть никто не полагает, что мы вместе с пифагорейцами легкомысленно утверждаем подвижность Земли; для этого он найдет серьезные доказательства в моем описании кругов. Ведь те доводы, при помощи которых натурфилософы главным образом пытаются установить ее неподвижность, опираются большей частью на видимость; все они сразу же рухнут, если мы также на основании видимых явлений заставим Землю вращаться.

Вычисления, ошибки, контроль

Н. Б. Демидович

Ошибки наблюдения

Считать точно не всегда означает считать правильно. Рассмотрим для примера следующую задачу.

Сторона квадратного участка земли равна 1,4 *м. Чему равен его полупериметр* p *и площадь* S (рис. 1)?

Решение напрашивается само собой: $p = 1{,}4 + 1{,}4 = 2{,}8$ (*м*), $S = 1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$ (*м*^{2}). Но насколько точен этот ответ? Абсолютно точен, если длина стороны участка задана точно. А если она не задана, а, например, измерена дециметровой мерной лентой? Тогда естественно предположить, что 1,4 *м* — это деление ленты, ближайшее к истинной длине измеряемой стороны участка. Отсюда ясно лишь, что точная длина отличается от 1,4 *м* не более чем на 0,05 *м*, то есть абсолютная величина ошибки наблюдения (она называется *абсолютной погрешностью* измеряемой величины x и обозначается Δ_x) не превосходит 0,05 *м*.

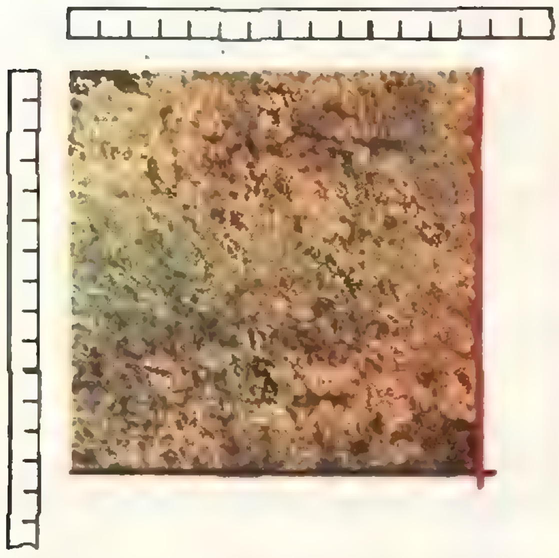


Рис. 1.

Возникает практически важный вопрос: с какой точностью при указанных предпосылках можно определить площадь? Этим и подобными ему вопросами занимается специальный раздел математики — теория приближенных вычислений. Продемонстрируем на данной задаче ее методы.

Пусть истинная длина стороны (далее все длины измеряются в метрах) равна $1{,}4 + \alpha$, где $|\alpha| \leqslant 0{,}05$, то есть $-0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}05$. Тогда *полупериметр участка равен*

$$p = (1{,}4 + \alpha) + (1{,}4 + \alpha) = 2{,}8 + 2\alpha.$$

Абсолютная погрешность Δ_p значения полупериметра 2,8 не превосходит $2 \times 0{,}05 = 0{,}1$, то есть

$$2{,}7 = 2{,}8 - 0{,}1 \leqslant p \leqslant 2{,}8 + 0{,}1 = 2{,}9.$$

Легко проверяемая формула

$$|(x_{\text{прибл}} \pm y_{\text{прибл}}) - (x_{\text{точн}} \pm y_{\text{точн}})| \leqslant \leqslant \Delta_x + \Delta_y$$

показывает, что при сложении и вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются.

При умножении чисел удобнее иметь дело с относительной погрешностью. *Относительной погрешностью* ε_x числа x называется отношение абсолютной погрешности Δ_x к абсолютной величине числа x: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta_x}{x_{\text{точн}}}$. Поскольку значения $x_{\text{точн}}$ мы не знаем, можно ε'_x заменить на ε_x, где $\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{x_{\text{прибл}}}$. В данном примере $\varepsilon_x = \frac{0,05}{1,4} \approx 0,036 = 3,6\%$.

Заменяя значения $\varepsilon'_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{точн}}}$ на $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{прибл}}}$, мы, конечно, допускаем некоторую погрешность, но обычно она настолько мала, что ею всегда пренебрегают.

При умножении и делении чисел происходит сложение их относительных погрешностей. Доказательство этого утверждения мы оставляем читателю, заметив только, что надо оценить числа

$$\varepsilon_{xy} = \left| \frac{(x+\alpha)(y+\beta) - xy}{xy} \right|$$

и

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} = \left| \frac{\frac{x+\alpha}{y+\beta} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} \right|.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. Площадь участка получается как произведение длин сторон, поэтому ее относительная погрешность имеет порядок 7,2%. Прямые вычисления дают

$$S = (1,4 + \alpha)^2 = 1,96 + 2,8\alpha + \alpha^2.$$

Здесь 1,96 — наш первоначальный ответ, а два других слагаемых — его отклонения от точного ответа. Оценим абсолютную погрешность результата:

$$\Delta_S \leqslant |2,8\alpha + \alpha^2| \leqslant |2,8\alpha| + \\ + \alpha^2 \leqslant |2,8 \cdot 0,05| + |0,05|^2 = \\ = 0,1425 < 0,15.$$

Значит, площадь S лежит в пределах

$$1,81 = 1,96 - 0,15 < S < \\ < 1,96 + 0,15 = 2,11.$$

Последняя формула наглядно показывает, что в первоначальном ответе 1,96, содержащем два знака после запятой, может не оказаться ни одной верной цифры.

Так теория приближенных вычислений избавляет нас от иллюзии, будто большое число точно вычисленных цифр всегда обеспечивает соответствующую точность самого результата. Более того, она дает ответ, как точность результата зависит от точности исходных данных, их количества и вида действий, производимых над ними.

Округление чисел

В исходном примере мы решили, что число 1,4 *м* получилось при измерении дециметровой мерной лентой и потому погрешность измерения не превосходит 0,05 *м*. При вычислениях часто получается «хвост» из цифр, в правильности которых у нас нет никакой уверенности, поэтому полученное число следует округлить. Грамотно округленное число обладает следующим свойством: *его погрешность не превосходит половины единицы последнего разряда.* Таким образом, число 1,4 *м* было задано грамотно, а ответ $S = 1,96$ *м* следует округлить до $S = 2$ *м*. С этой точки зрения число 1,0 *м* имеет следующий смысл: его абсолютная погрешность не превосходит 0,05 *м*, в отличие от числа 1 *м*, абсолютная погрешность которого не больше 0,5 *м*.

Один пример

В теории приближенных вычислений, в частности, разрабатываются такие приемы счета, которые, гарантируя достижение необходимой точности результата, сводят число операций к минимуму.

Рассмотрим, например, умножение положительных n-разрядных правильных десятичных дробей, то есть чисел вида

$$A = 0, a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Известно, что десятичная дробь (1) является сокращенной записью числа

$$A = \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_i}{10^i} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Будем считать дробь (1) приближенным, грамотно округленным числом. Тогда она имеет абсолютную погрешность, не превосходящую $\frac{5}{10^{n+1}}$.

Пусть

$$A = 0, a_1 a_2 \dots a_n,$$
$$B = 0, b_1 b_2 \dots b_n$$

— два приближенных числа, а α и β — их соответствующие отклонения от точных чисел, причем одинаково: $|\alpha| \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-n}$, $|\beta| \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-n}$. Вычислим абсолютную ошибку произведения:

$$\Delta_{AB} = (A + \alpha) \cdot (B + \beta) - AB = \alpha \cdot B + \beta \cdot A + \alpha \cdot \beta.$$

Здесь $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \leqslant 0{,}5 \times 10^{-n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-n} = 0{,}25 \cdot 10^{-2n}$, то есть этот член по модулю не превосходит четверти последней возможной цифры результата и потому может не приниматься во внимание. Оценим сумму двух средних слагаемых, учитывая, что $A < 1$ и $B < 1$. Получим

$$|\alpha \cdot B + \beta \cdot A| < |0{,}5 \cdot 10^{-n} \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 10^{-n} \cdot 1| = 10^{-n}. \qquad (2)$$

Значит, из $2n$ цифр произведения гарантируется верность лишь первых $n-1$ цифр, n-я цифра в силу (2) уже оказывается сомнительной (она может отличаться от верной на ± 1). Верность цифр $(n+1)$-й и далее формула (2) совершенно не гарантирует. Поэтому эти цифры незачем включать в окончательный ответ.

Отсюда следует, что при умножении приближенных чисел школьным способом — «лесенкой влево» — мы половину работы делаем впустую. Спрашивается, а можно ли эту половину работы вообще не делать? Оказывается, можно. Для этого надо использовать сокращенный способ умножения — «лесенкой вправо». Далее в целях наглядности изложения мы ограничимся примером умножения приближенных чисел $0{,}587 \times 0{,}736$.

Как известно, умножение десятичных дробей выполняется аналогично умножению целых чисел. Ниже приводится три способа умножения

$$\times\begin{array}{r}0{,}587\\ 0{,}736\\ \hline 3\;522\\ 17\;61\\ 410\;9\\ \hline 0{,}432\;032\end{array}\qquad \begin{array}{r}\times\;0{,}587\\ 0{,}736\\ \hline 4\;109\\ +\;\;1761\\ 3522\\ \hline 0{,}432032\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}0{,}587\\ 0{,}736\\ \hline 4\;109\\ 176\\ 35\\ \hline 0{,}4\;320\end{array}$$

(а) — «лесенкой влево» (школьный); (б) — «лесенкой вправо»; (в) — «сокращенный»

При способе (б), в отличие от способа (а), умножение начинается со старших цифр множимого и множителя; учет единиц переноса от соседней правой цифры множимого (реже — от двух соседних) производится сразу. После небольшой тренировки этот способ становится не труднее способа (а).

Способ (в) представляет собой сокращенную модификацию способа (б), в которой частичные произведения не вычисляются до конца, а сразу округляются. Место округления обеспечивает в окончательном ответе одну лишнюю цифру, которая необходима для правильного округления последней, сомнительной, цифры.

Окончательный ответ нашего примера по всем трем способам его вычисления будет 0,432. Для его получения по способу (в) потребовалось вдвое меньше работы и времени, чем по способам (а) и (б). Указанный прием особенно пропагандировал выдающийся советский математик, инженер и кораблестроитель, академик А. Н. Крылов, чью книгу*) мы рекомендуем нашему читателю.

Последовательные приближения и контроль вычислений

Приближенность исходных данных (ошибка наблюдения и измерения) является не единственной причиной ошибки результата. Другим источником ошибки результата служит приближенность самого процесса вычисления. Причины такого явления коренятся или в принципиальной невозможности провести точное вычисление (например, $\sqrt{2}$, $\sin 20^\circ$), или в неудобстве использования точной формы результата (так, точная простая дробь $^1/_7$, как правило, заменяется на приближенную десятичную дробь 0,143). Разработка способов вычислений с наперед заданной сколь угодно большой степенью точности представляет собой важное прикладное направление классической высшей математики. Понятие об этих способах читатель получит, взглянув на последнюю страницу таблиц Брадиса. Там приводятся формулы — так называемые бесконечные ряды,— по которым вычисляются значения синуса, тангенса, логарифма и других табличных функций. Анализ этих формул выявляет основной методический прием — замену вычисления искомой функции вычислением многочлена, то есть другой, более простой функции, значения которой с заданной степенью точности равны значениям искомой функции.

---

*) А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, М., ФМ, 1954.

Другим способом проведения вычисления с заданной степенью точности является метод последовательных приближений. Продемонстрируем его на вычислении квадратного корня из числа A.

В качестве нулевого приближения $\sqrt{A}$ возьмем произвольное положительное число x_0.

Рассмотрим на числовой прямой (рис. 2) отрезок, ограниченный точками x_0 и $\frac{A}{x_0}$. Построим второе приближение x_1 как среднее арифметическое x_0 и $\frac{A}{x_0}$:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{A}{x_0}\right):$$

Имеем по свойству среднего арифметического $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{A}{x_0}$ и по свойству обратных величин $\frac{A}{x_0} \geqslant \frac{A}{x_1} \geqslant x_0$. Иными словами, отрезок

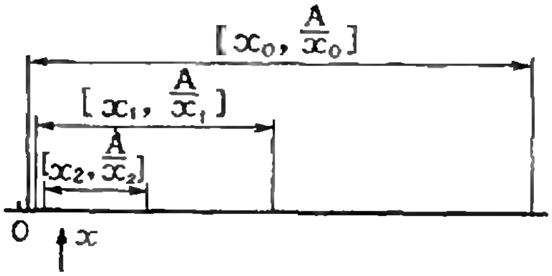


Рис. 2.

$\left[x_1, \frac{A}{x_1}\right]$ целиком расположен внутри отрезка $\left[x_0, \frac{A}{x_0}\right]$, то есть вложен в него. По первому приближению аналогичным образом строим второе, по нему — третье и так далее.

Запишем формулу $(n+1)$-го приближения:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right) \quad (n=0, 1, \ldots). \qquad (3)$$

Отрезки $\left[x_0, \frac{A}{x_0}\right]$, $\left[x_1, \frac{A}{x_1}\right]$, …, $\left[x_n, \frac{A}{x_n}\right]$, $\left[x_{n+1} \frac{A}{x_{n+1}}\right]$, … последовательно вложены один в другой, и их длины последовательно уменьшаются не менее чем вдвое; это следует из формул

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)-\frac{A}{\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)}=$$
$$=\left(\frac{A}{x}-x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A-x^2}{A+x^2}$$

и

$$\left|\frac{A-x^2}{A+x^2}\right|<1.$$

Эти отрезки стягиваются к единственной точке x, принадлежащей всем отрезкам. Для вычисления x подставим его в формулу (3): $x=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{A}{x}\right)$, $x=\frac{A}{x}$, $x=\sqrt{A}$.

Точка $x=\sqrt{A}$ принадлежит всем отрезкам, поэтому x_n стремится к $x=\sqrt{A}$, то есть метод последовательных приближений решает поставленную задачу. Остается заметить, что вычисление следует прекращать после того, как x_{n+1} станет равным x_n с заданным количеством десятичных знаков.

Метод последовательных приближений обладает одним большим достоинством: случайная ошибка в промежуточных действиях не повлияет на величину результата, а лишь увеличит время на его получение.

Вообще при проведении вычислений контролю должно быть уделено самое серьезное внимание. Конечно, процесс вычислений можно повторить заново, но это вдвое увеличит общее время работы. В особо ответственных случаях приходится идти и на этот шаг, но возможны и другие методы контроля, учитывающие специфику конкретного расчета. Например, если от одного аргумента x вычисляется $\sin x$ и $\cos x$, то естественно затем подсчитать $\sin^2 x + \cos^2 x$ и сравнить с единицей.

Еще один пример

Особый интерес представляет методика, позволяющая контролировать каждый этап вычислений. Продемонстрируем ее на примере решения системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть нам задана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 19, \\ 3x + 7y = 23. \end{cases} \tag{4}$$

Запишем ее коэффициенты и свободные члены в виде таблицы:

$$\left|\begin{array}{c|c|c} 5 & 2 & 19 \\ \hline 3 & 7 & 23 \end{array}\right|$$

Пополним эту таблицу *контрольным столбцом*, элементы которого равны сумме элементов соответствующей строки. Получим расширенную таблицу:

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 5 & 2 & 19 & 26 \\ \hline 3 & 7 & 23 & 33 \end{array}\right| \tag{5}$$

В дальнейшем будем рассматривать таблицу (5) как изображение двух систем с одинаковыми коэффициентами и разными свободными членами: системы (4) и системы

$$\begin{cases} 5\tilde{x} + 2\tilde{y} = 26 \\ 3\tilde{x} + 7\tilde{y} = 33. \end{cases} \tag{6}$$

Решая системы (4) и (6) методом Гаусса, поделим все элементы первой строки на ее первый член. Получим таблицу

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 1 & 0{,}4 & 3{,}8 & 5{,}2 \\ \hline 3 & 7 & 23 & 33 \end{array}\right| \tag{7}$$

Контроль состоит в том, что на любом этапе сумма первых трех чисел любой строки должна равняться четвертому числу; здесь это выполняется.

Далее умножим все элементы первой строки на первый член второй строки. Получим

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 3 & 1{,}2 & 11{,}4 & 15{,}6 \\ \hline 3 & 7 & 23 & 33 \end{array}\right|$$

Вычтем почленно из 2-й строки 1-ю:

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 3 & 1{,}2 & 11{,}4 & 15{,}6 \\ \hline 0 & 5{,}8 & 11{,}6 & 17{,}4 \end{array}\right| \tag{8}$$

Из второй строки (8) получаем

$$y = \frac{11{,}6}{5{,}8} = 2, \quad \tilde{y} = \frac{17{,}4}{5{,}8} = 3.$$

Наконец, из 1-й строки таблицы (7) находим

$$x = 3{,}8 - 2\cdot 0{,}4 = 3,$$
$$\tilde{x} = 5{,}2 - 3\cdot 0{,}4 = 4.$$

Искомое решение: $x = 3$, $y = 2$; решение системы (6): $\tilde{x} = 4$, $\tilde{y} = 3$. Имеют место равенства

$$\tilde{x} = x + 1, \quad \tilde{y} = y + 1, \tag{9}$$

значит, система решена верно. Отметим, что если в окончательном ответе равенства (9) не выполняются, то или при счете имели место слишком грубые округления, или была где-то допущена ошибка. Наличие контрольного столбца на каждом этапе вычислений позволяет быстро найти место ошибки или неточности.

Равенства (9) являются обоснованием способа контроля. Если мы возьмем систему (6), решениями которой являются решения системы (4), увеличенные на единицу, $\tilde{x}=x+1$, $\tilde{y}=y+1$, то свободные члены системы (6) будут равны сумме коэффициентов строк системы (4). Например, для первой строки системы (4)

$$5(\tilde{x}-1)+2(\tilde{y}-1)=19,$$
$$5\tilde{x}-5+2\tilde{y}-2=19,$$
$$5\tilde{x}+2\tilde{y}=19+5+2=26.$$

Указанное свойство легко проверяется и в общем случае. А поскольку при решении мы переходим к эквивалентным системам, то и в них суммы коэффициентов должны быть равны числам в контрольном столбце.

Ошибки метода

Существует еще одна группа причин, приводящая к ошибке результата. Она носит название «ошибка метода». Проявляется она, например, в том случае, когда вместо точной системы уравнений рассматривается система более простых уравнений, приближенно описывающих тот же процесс. Причины такой замены бывают самые разнообразные: отсутствие точной системы уравнений, невозможность подготовить исходные данные для точной системы, невозможность или большая сложность точно решить имеющуюся точную систему и другие. В качестве примера рассмотрим задачу из учебника физики.

Самолет летит горизонтально на высоте H со скоростью v. На каком горизонтальном расстоянии от объекта он должен сбросить бомбу для прямого попадания в этот объект?

При упрощающем предположении — отсутствии сопротивления воздуха — задача легко решается.

Искомое расстояние S получается из формулы $S=v\cdot t$ при $\frac{gt^2}{2}=H$, отсюда $S=v\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Согласно этому предположению траектория бомбы представляет собой параболу (синяя кривая на рисунке 3). Но в действительности сопротивление воздуха делает траекторию более крутой. Она носит название «баллистической кривой» (красная кривая на рисунке 3) и строится на основе опытных данных и дополнительных теоретических предположений. Баллистическая кривая заметно уменьшает «ошибку метода», но в силу своего экспериментального характера несколько увеличивает «ошибку наблюдения» и «ошибку округления».

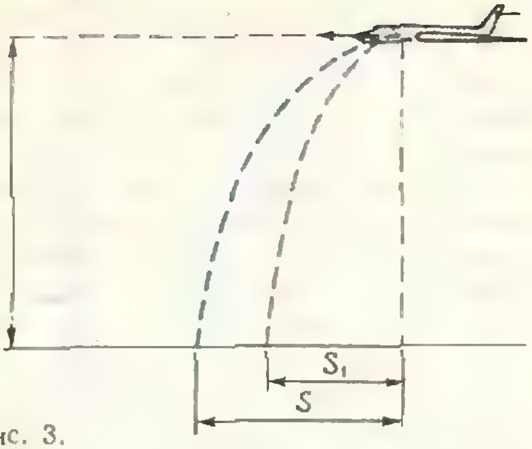


Рис. 3.

Теперь можно подвести некоторые итоги. Приведенные примеры и рассуждения показывают, что процесс численного расчета любой практической задачи должен быть тщательно спланирован.

Этапами на этом пути служат:

1) выбор метода решения с оценкой ошибки, которую он дает;

2) оценка точности исходных данных;

3) выбор схемы счета с оценкой точности округления промежуточных величин и разумной организацией контроля.

Существенное влияние на дальнейшее развитие методов вычислений оказывает вычислительная техника, особенно электронные цифровые вычислительные машины (ЭЦВМ), которые позволяют выполнять расчеты, состоящие из миллиардов арифметических действий. Это обстоятельство требует повышенного внимания к накоплению ошибок и выбору схем счета, менее «чувствительных» к ним.

Гравитационная масса

Л. Бородин

Физики имеют дело с двумя массами — инертной и гравитационной. Первая входит в законы движения Ньютона, вторая — в закон всемирного тяготения.

Согласно закону всемирного тяготения величина силы притяжения между двумя материальными точками равна

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2},\tag{1}$$

где γ — гравитационная постоянная *), m_1 и m_2 — массы материальных точек, r — расстояние между ними. Массы m_1 и m_2, входящие в эту формулу,— те же самые величины, которые входят во второй закон Ньютона

$$F=ma,\tag{2}$$

связывающий силу и ускорение тела.

Роль массы в формулах (1) и (2) совершенно различна. В выражении (2) она определяет инертность материальной точки, а в выражении (1) характеризует поле тяжести, которое создает материальная точка, и силу, с которой это поле действует на другую материальную точку. Заметим, что в силу третьего закона Ньютона нам все равно, какую массу (m_1 или m_2) считать создающей поле, а какую — находящейся в этом поле: действие равно противодействию. То, что масса, входящая в закон тяготения (1),— ее называют гравитационной (или тяготеющей) массой — оказывается той же, что и инертная масса, входящая в формулу (2), есть великий закон природы.

Его называют *принципом эквивалентности гравитационной и инертной масс.*

В обыденной жизни мы к этому принципу настолько привыкли, что не обращаем на него внимания. А между тем мы его используем, когда определяем массу тела, взвешивая его на весах; производя эту операцию, мы, не задумываясь о физике, молчаливо предполагаем, что сила притяжения к земле пропорциональна инертной массе этого тела. Мы сказали «пропорциональна». На самом деле на практике обе массы — и гравитационная, и инертная — измеряются в одних и тех же единицах и численно равны. Поэтому мы никогда и не думаем, какая именно масса фигурирует в том или ином случае. Единицу измерения массы принято выбирать так, чтобы во втором законе Ньютона не было никаких коэффициентов; тогда в законе всемирного тяготения появляется численный коэффициент γ. Можно, конечно, ввести новую единицу для гравитационной массы так, что $m'=\sqrt{\gamma}m$; тогда и в формуле (1) исчезает коэффициент γ, но появляется m'. Таким образом можно подчеркнуть физическое различие инертной и гравитационной масс; однако на практике это было бы очень неудобно.

---

*) По последним измерениям гравитационная постоянная (постоянная тяготения)

$$\gamma=6{,}6732\,(31)\cdot10^{-11}\ \textit{нм}^2/\textit{кг}^2$$

(скобки означают возможную неточность в двух последних знаках).

Принцип эквивалентности

С древних времен в физике господствовал авторитет Аристотеля*), считавшего, что скорость тела увеличивается только при увеличении силы. И лишь Галилей (1564—1642) понял, что если на тело действует постоянная сила, оно движется с постоянным ускорением. Если же на тело никакие силы не действуют, то оно движется с постоянной скоростью. Галилей, размышляя о том, как падают тела на землю, создал теорию этого явления.

Рассказывают, что Галилей для проверки своей теории бросал со знаменитой падающей башни в Пизе шарики, сделанные из разных материалов. Никто не знает, было ли это действительно так, однако Галилей на самом деле открыл важный закон природы: все тела, независимо от их массы, падают на землю с одинаковым ускорением. В этом и заключается суть теории свободного падения. Кстати, и само понятие ускорения — «скорость изменения скорости» — было впервые введено именно им. Но зная, что причиной ускорения падающего тела является «тяжесть», Галилей не знал, что источник ее — Земля. Более того, он даже не мог себе представить, что между телами, разделенными расстояниями, может вообще существовать какое-то взаимодействие. Действие на расстоянии считалось в то время совершенно невозможным. Когда Галилей узнал, что Кеплер объяснил приливы и отливы в океанах действием Луны, он отверг такие измышления как ненаучные. Идея Кеплера стала достоянием физики, когда Ньютон (1642—1726) открыл закон всемирного тяготения.

Пусть, например, тело массы m движется в гравитационном поле другого тела с массой M. Из второго закона Ньютона

$$F = ma$$

и закона всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

следует, что ускорение в поле тяжести

$$a = \gamma \frac{M}{r^2}$$

не зависит от массы движущегося тела (но зависит, конечно, от массы тела — источника поля).

Вывод этот настолько прост, что в нем долгое время не видели почти ничего существенного. Важность закона эквивалентности была по-настоящему осознана только Эйнштейном (1889—1955).

Таким образом, ускорение свободного падения оказывается одинаковым для любых тел. Поэтому, установив опытным путем равенство ускорений, можно было бы вывести из этого факта и принцип эквивалентности. На самом деле точно измерить ускорение падающего тела трудно, и приходится придумывать хитрые опыты, чтобы доказать этот принцип с достаточной точностью. Об этих опытах мы и расскажем в дальнейшем. Однако сначала рассмотрим пример другого поля — электростатического, в котором нет ничего подобного принципу эквивалентности.

Поле и заряд

Закон Кулона для силы взаимодействия зарядов

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

вполне аналогичен закону всемирного тяготения. Однако ускорение заряда в электрическом поле зависит от величины заряда. Таким образом, мы уже не можем утверждать, что все заряды движутся в электрическом поле с одинаковым ускорением, как то было с телами в гравитационном поле. Если обозначить напряженность поля через **E**, то сила, действующая на заряд e, будет равна $e\mathbf{E}$. Уравнение Ньютона при этом выглядит так:

---

*) Аристотель жил с 384 по 322 год до нашей эры. Он был наставником греческого полководца Александра Македонского. Авторитет Аристотеля был настолько велик, что его утверждения перестали считаться догмой лишь через восемнадцать столетий после его смерти.

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E},$$

а ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m}\mathbf{E},$$

как мы видим, зависит от отношения заряда к массе, то есть от величины, различной для разных частиц.

Здесь надо подчеркнуть, что электрический заряд e определяет силу, с которой поле действует на частицу, а инертная масса m — ускорение, возникающее под действием этой силы. В гравитационном поле сила определяется той же самой инертной массой, которая определяет и ускорение. Иначе говоря, роль гравитационного «заряда» (то есть гравитационной массы по нашей терминологии) играет все та же инертная масса, и отношение обеих масс (играющее роль отношения e/m) в случае гравитационного поля равно единице. Это и есть принцип эквивалентности.

Вращающаяся Земля

Рассмотрим тело, находящееся во вращающейся системе координат, например, на Земле. На него (с точки зрения земного наблюдателя) действует центробежная сила инерции *), направленная перпендикулярно оси вращения Земли. Величина центробежной силы инерции равна

$$F_{цб} = m\omega^2 r.$$

(m — инертная масса, r — расстояние от оси вращения, ω — угловая скорость).

Так как эта сила пропорциональна инертной массе, то в поле центробежных сил также действует закон Галилея: ускорение тела

$$a = \omega^2 r$$

не зависит от его массы. Например, на экваторе это ускорение равно $0{,}02$ *м/с²*.

Для того чтобы понять, как возникает центробежная сила инерции, рассмотрим простую задачу о грузике, подвешенном на нитке. Наблюдатель вне Земли будет видеть, что грузик и подвес вращаются вместе с Землей. Грузик имеет ускорение $\omega^2\rho$ (ρ — расстояние до оси Земли); значит, на него действует сила $F_{цс} = m_и\omega^2\rho$, направленная к оси вращения ($m_и$ — инертная масса). Эта сила создается притяжением к центру Земли $F_T = m_г g$ ($m_г$ — гравитационная масса) и натяжением нити $\mathbf{F}_г + \mathbf{F}_н = \mathbf{F}_{цс}$ (рис. 1, *а*).

Если мы теперь перепишем баланс сил так:

$$\mathbf{F}_г + \mathbf{F}_н - \mathbf{F}_{цс} = 0,$$

то можно сказать, что груз находится в равновесии (как это видит наблюдатель на Земле) под действием трех сил. Третья сила, $-\mathbf{F}_{цс}$, направленная в сторону от оси вращения, и есть центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{цб}$ (рис. 1, *б*).

Опыты Этвеша

Вопрос о проверке принципа эквивалентности занимал еще Ньютона. Им же был проделан и первый опыт. Ньютон наблюдал качание маятников, сделанных из разных материалов (рис. 2). Из принципа эквивалентности следует, что период колебаний

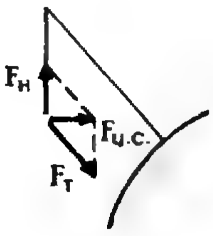


Рис. 1,*а*.

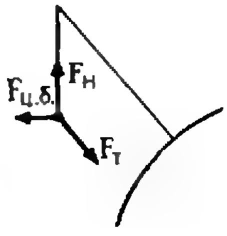


Рис. 1,*б*.

---

*) Это та самая сила, которая прижимает пилота к креслу на крутом вираже. Силы такого типа, появляющиеся при переходе в неинерциальную систему координат, называются инерциальными.

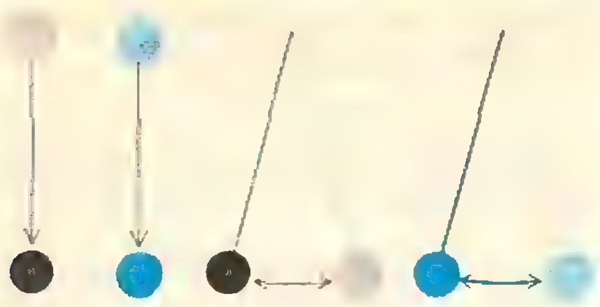


Рис. 2. Опыт Ньютона. Если $m_\text{г} \neq m_\text{и}$, то периоды колебаний этих маятников будут разными.

маятника определенной длины не должен зависеть от материала, из которого сделан маятник. Напротив, если принцип эквивалентности неверен, то период должен зависеть от отношения гравитационной массы к массе инертной. Ньютон показал, что период маятника не изменяется с точностью до 10^{-3}, то есть $\frac{\Delta m}{m} < 0{,}001$ (здесь Δm — разница между гравитационной и инертной массами).

Аналогичные опыты были повтерены Бесселем, уменьшившим ошибку до $^1/_{8000}$.

В 1890 году новые опыты провел венгерский физик Этвеш.

Идея Этвеша состояла в том, что если подвесить тело на крутильных весах, то на него будут действовать две силы: сила притяжения к Земле, пропорциональная гравитационной массе, и центробежная сила инерции, пропорциональная инертной массе.

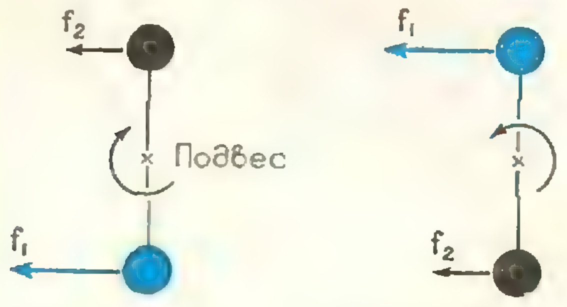


Рис. 3. Опыт Этвеша. На рисунке показаны проекции сил, действующих на коромысло крутильных весов.

Если $m_\text{г} \neq m_\text{и}$, то силы f_1 и f_2 окажутся разными, и нить весов закрутится. Если шарики поменять местами, повернув весы на 180°, то нить закрутится в другую сторону.

Для того чтобы сравнить гравитационные массы двух тел, сделанных из разных материалов, были изготовлены образцы с одинаковыми инертными массами. Образцы уравновешивались на коромысле крутильных весов. Предположим теперь для простоты, что коромысло расположено по географической параллели (рис. 3). Если гравитационные массы образцов не равны их инертным массам, то углы отклонения образцов от вертикали будут разными, так как результирующие силы будут составлять разные углы с вертикалью. Спроектируем эти силы на горизонтальную плоскость: мы обнаружим, что проекции сил не равны друг другу. Это значит, что возникнет момент сил (равный произведению разности сил $f_1 - f_2$ на половину длины коромысла), который будет закручивать нить. Этот момент можно определить, если зафиксировать два положения коромысла, расположив грузы вдоль параллели с запада на восток и с востока на запад. Таким образом можно проверить, изменится направление закручивания нити или нет.

Этвеш производил опыты с образцами, сделанными из разных материалов (меди, воды и даже сала), сравнивая их с образцами из платины, и увидел, что нить не закручивается. Он пришел к выводу, что гравитационная масса равна инертной массе по крайней мере с точностью до $5 \cdot 10^{-9}$.

Сейчас непонятно, как Этвеш достиг такой точности; для этого ему надо было учесть даже такие поправки, как гравитационное поле своего собственного тела! Вообще, надо сказать, что одно из самых тонких рассуждений в физике — это рассуждение об ошибках такого опыта, в котором искомый эффект на самом деле не был обнаружен *).

---

*) Подробное описание опытов Этвеша было опубликовано лишь в 1922 году его учениками после смерти автора. Опыт в то время не был никем повторен, и многие детали опыта, в частности, вопрос о его точности остались не до конца выясненными.

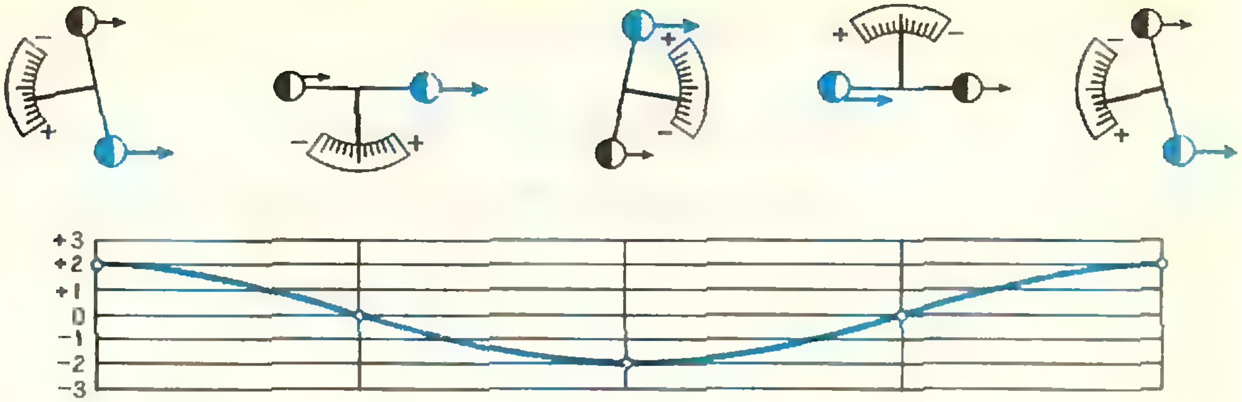


Рис. 4. Опыт Дике. На рисунке схематически показано положение стрелки, регистрирующей закручивание нити крутильных весов в разное время суток, если $m_г \neq m_и$. Внизу приведен гипотетический график показаний стрелки в таком опыте.

Опыты Дике и Брагинского

Более точные эксперименты были проведены только в 1962 году. Американский физик Дике поставил новые опыты, в которых гравитационной силой, действующей на коромысло крутильных весов, была сила притяжения грузиков не Землей, а Солнцем. Если коромысло не трогать, не поворачивать его на 180°, как это делалось в опытах Этвеша, то направление закручивания нити крутильных весов, казалось бы, будет оставаться неизменным. Дике, однако, заметил, что если принцип эквивалентности несправедлив, то коромысло весов должно медленно поворачиваться из-за действия на образцы силы притяжения со стороны Солнца (рис. 4). Ориентация коромысла относительно Солнца изменяется со временем из-за вращения Земли, и экспериментатор должен был бы наблюдать крутильные колебания нити с периодом в 24 часа. Таких колебаний обнаружено не было. Преимуществом опытов Дике по сравнению с опытами Этвеша было то, что в новых опытах экспериментатор не должен был сам изменять положение коромысла; это избавляло его от опасности дополнительных ошибок.

Анализ показал, что в опытах Дике ошибка была уменьшена до 10^{-10}.

Результат Дике был улучшен советским физиком В. Б. Брагинским. Брагинский использовал идею Дике, но понизил возможную относительную ошибку до 10^{-12}.

Вряд ли можно ожидать, что в ближайшее время кто-либо займется новыми опытами: слишком много труда надо на это затратить, и слишком малы шансы, что принцип эквивалентности может оказаться несправедливым при измерении с еще большей точностью.

Ошибка Галилея

Галилей рассуждал так: Возьмем два камня, большой и маленький. Предположим, что большой камень падает быстрее маленького. Свяжем их вместе и бросим эти связанные камни с высоты вниз. Если большой камень падает быстрее маленького, то маленький должен тормозить движение большого. Но тогда связанные вместе камни падали бы медленнее одного большого, но быстрее маленького. С другой стороны, масса связанных камней больше массы каждого из них, значит, они должны по условию падать быстрее. Получается видимое противоречие. Положение не спасает и противоестественное предположение, что большой камень падает медленнее. Казалось бы, отсюда следует закон равенства ускорений всех тел.

На самом деле это не так. Ошибка рассуждений — в неявном предположении, что ускорение тел зависит только от одной физической величины — «тяжести» (то есть от гравитационной массы). Если бы масс было две (гравитационная и не равная ей инертная), то подобное «доказательство» провести было бы нельзя.

О некоторых пространственных изопериметрических задачах

М. Г. Крейн, А. А. Нудельман

Введение

Прежде чем приступить к предмету настоящей статьи, предлагаем читателю самостоятельно доказать (или вспомнить) следующие хорошо известные предложения.

Предложение 1.

Среди всех параллелограммов с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Предложение 2.

Среди всех параллелограммов с заданными периметром и длиной одной из диагоналей наибольшую площадь имеет ромб.

Очевидно, что предложение 2 эквивалентно следующему:

Предложение 2′.

Среди всех треугольников с заданными периметром и длиной одной из сторон наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Предложение 3.

Среди всех треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Предложения 1—3 относятся к числу так называемых *изопериметрических задач*: среди фигур определенного вида с заданным периметром требуется найти фигуру наибольшей площади. Отметим здесь, что предложения 1 и 3 являются частными случаями более общего утверждения: среди всех n-угольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный n-угольник. Из него предельным переходом легко получить, что среди всех фигур с заданным периметром (на вид фигур не накладывается ограничений) наибольшую площадь имеет круг *).

Постановка задач

Рассмотрим теперь пространственные аналоги предложений 1—3; в них параллелограммы заменяются параллелепипедами, треугольники — тетраэдрами (треугольными пирамидами), а площади — объемами.

Задача 1. *Среди всех параллелепипедов с заданной суммой длин ребер найти параллелепипед, имеющий наибольший объем.*

Задача 2. *Среди всех параллелепипедов с заданными суммой длин ребер и длиной одной из диагоналей найти параллелепипед, имеющий наибольший объем.*

Прежде чем переформулировать задачу 2 так, чтобы получить аналог предложения 2′, введем некоторые определения.

Замкнутую ломаную линию, состоящую из четырех звеньев, вершины которой не лежат в одной плоскости, назовем *пространственным четырехугольником*. О тетраэдре, вершины которого совпадают с вершинами пространственного четырехугольника, будем говорить, что он *натянут* на этот четырехугольник (рис. 1).

Легко видеть, что объем тетраэдра, натянутого на пространственный

---

*) Изящное доказательство этого утверждения, не использующее предельного перехода, читатель найдет в книге: Г. Радемахер и О. Теплиц. Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1962.

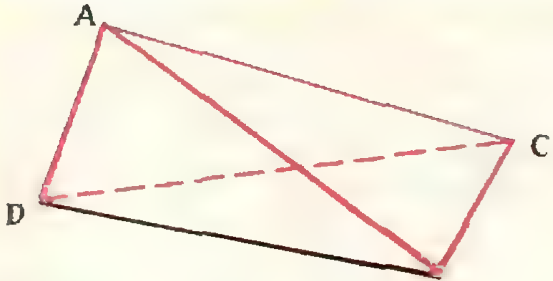


Рис. 1.

четырехугольник, сторонами которого являются диагональ параллелепипеда и три его последовательно соединенных ребра (рис. 2), составляет одну шестую часть объема параллелепипеда. Поэтому задача 2 эквивалентна следующей задаче:

Задача 2′. *Среди всех пространственных четырехугольников с заданными периметром 2p и длиной одной из сторон h найти такой, что натянутый на него тетраэдр имеет наибольший объем.*

После решения этой задачи легко решается

Задача 3. *Среди всех пространственных четырехугольников с заданным периметром 2p найти такой, что натянутый на него тетраэдр имеет наибольший объем.*

Решения задач

Решение задачи 1

Так как среди параллелограммов с фиксированными длинами сторон наибольшую площадь имеет прямоугольник, а среди параллелепипедов с фиксированными длинами ребер наибольший объем имеет прямоугольный параллелепипед, то при решении задачи 1 достаточно рассматривать прямоугольные параллелепипеды.

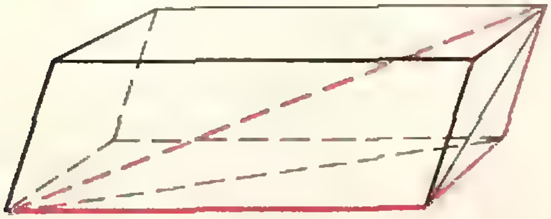


Рис. 2.

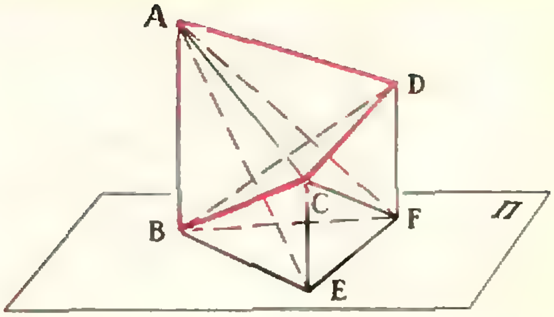


Рис. 3.

Если длины ребер прямоугольного параллелепипеда обозначить через a_1, a_2, a_3, то известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leqslant \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$$

(где знак равенства имеет место лишь в случае $a_1 = a_2 = a_3$) приводит к следующему результату:

Теорема 1. *Среди всех параллелепипедов с заданной суммой длин ребер наибольший объем имеет куб.*

Решение задачи 2′

Приступим к рассмотрению задачи 2′. При ее решении будет использовано следующее вспомогательное предложение.

Обозначим через П плоскость, перпендикулярную стороне AB пространственного четырехугольника $ABCD$ (рис. 3). Спроектировав $ABCD$ на П, получим треугольник BEF.

Лемма 1. *Объем V тетраэдра, натянутого на $ABCD$, вычисляется по формуле*

$$V = \frac{1}{3} hS, \qquad (1)$$

где h — длина стороны AB, S — площадь треугольника BEF.

Для доказательства достаточно заметить, что тетраэдры $ABCD$ и $ABEF$ равновелики, так как каждый из них равновелик тетраэдру $ABCF$.

Формула (1) сразу подсказывает путь решения задачи 2′: нужно длины и положения сторон BC, CD и

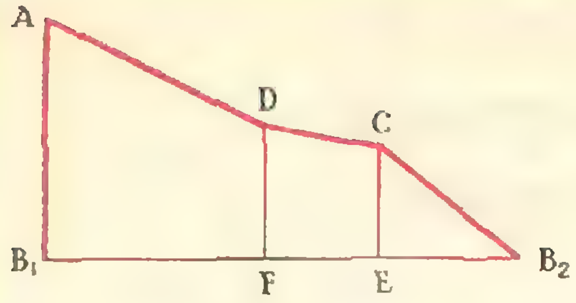


Рис. 4.

AD (рис. 3) выбрать так, чтобы площадь треугольника BEF оказалась наибольшей из возможных.

Чтобы добиться этого, позаботимся сначала о том, чтобы его периметр был наибольшим. Развернем на плоскость грани $ABFD$, $FDCE$, CEB, проектирующие четырехугольник $ABCD$ на плоскость П. В получившейся плоской фигуре (рис. 4) длина стороны B_1B_2 равна периметру треугольника BFE, откуда ясно, что этот периметр будет наибольшим в том случае, когда отрезки AD, DC, CB образуют один и тот же угол $\alpha = \arccos \frac{h}{2p-h}$ со стороной AB (рис. 5). Таким образом, пространственный четырехугольник со стороной $AB = h$ и периметром $2p$, для которого треугольник BEF имеет наибольший периметр, можно получить в результате следующего построения: прямоугольник со стороной $AB_1 = h$ и диагональю $AB_2 = 2p - h$ сворачивается в треугольную призму так, что точки B_1 и B_2 совпадают, а ее боковым ребром служит отрезок AB_1. При этом линия B_1ADCB_2 превратится в искомый пространственный четырехугольник.

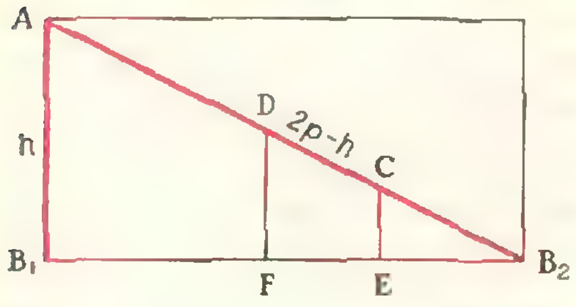


Рис. 5.

Таким образом, наша задача свелась к изопериметрической задаче для треугольника BEF. Как мы знаем, при заданном периметре площадь этого треугольника максимальна, когда $BF = FE = EB$, вследствие чего у четырехугольника $ABCD$, являющегося решением задачи 2′, стороны AD, DC и CB равны. Этими условиями и тем, что AD, DC и CB образуют один и тот же угол с AB, четырехугольник $ABCD$ определяется однозначно.

Итак, доказана

Теорема 2. *Среди всех тетраэдров, натянутых на пространственные четырехугольники $ABCD$ с заданными периметром $2p$ и длиной h стороны AB, наибольший объем имеет тетраэдр, натянутый на четырехугольник, стороны которого AD, DC и CB имеют равные длины и образуют равные углы со стороной AB.*

Одновременно получен способ построения экстремального четырехугольника: для этого нужно прямоугольник, у которого одна сторона равна h, а диагональ равна $2p - h$, свернуть в правильную треугольную призму.

Решение задачи 3

Подсчитаем максимальный объем, о котором идет речь в теореме 2. Из рисунка 5 мы видим, что периметр треугольника BFE равен $\sqrt{(2p-h)^2 - h^2} = 2\sqrt{p(p-h)}$, а значит, его наибольшая площадь равна

$$\left[\frac{2\sqrt{p(p-h)}}{3}\right]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{p(p-h)}{3\sqrt{3}};$$

наконец, наибольший объем натянутого тетраэдра, в соответствии с формулой (1), равен

$$V = \frac{1}{3} h \frac{p(p-h)}{3\sqrt{3}} = \frac{p}{9\sqrt{3}} h (p-h). \qquad (2)$$

Теперь легко решается задача 3. Она отличается от задачи 2′ тем, что в ней задается *только периметр* четырехугольника.

Очевидно, что для ее решения достаточно в предыдущей задаче задать такое значение h, при котором правая часть формулы (2) принимает наибольшее значение. Это значение h находится с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$h(p-h) \leqslant \left[\frac{h+(p-h)}{2}\right]^2 = \frac{p^2}{4};$$

оно равно $\frac{p}{2}$, так как $h = p - h$ именно при $h = \frac{p}{2}$. Отсюда следует решение задачи 3:

Теорема 3. *Среди всех тетраэдров, натянутых на пространственные четырехугольники с заданным периметром, наибольший объем имеет тетраэдр, натянутый на четырехугольник, у которого все стороны равны и равны углы, образованные любой парой сторон.*

Действительно, если $h = \frac{p}{2}$, то длина каждой из трех остальных сторон равна $\frac{2p-h}{3} = \frac{p}{2}$; равенство углов можно получить непосредственным вычислением (так как $h = \frac{p}{2}$, то все углы равны $\arccos {}^1/_3$), однако проще заметить, что в рассматриваемом четырехугольнике все стороны равноправны.

Средствами, выходящими за рамки элементарной математики, можно доказать, что параллелепипед, дающий решение задачи 2, дает также решение следующей задачи: *при тех же условиях найти параллелепипед с наибольшей полной поверхностью.*

Некоторые обобщения

Формула (1) может быть обобщена на тела более сложной формы, чем тетраэдр, и позволяет решить для таких тел задачи, подобные задачам 2′ и 3, аналогичным путем: сведением пространственной изопериметрической задачи к плоской изопериметрической задаче.

Пусть задана некоторая n-звенная пространственная ломаная $A_0 A_1 \ldots A_n$. Будем говорить, что она является *простым каркасом*, если всякая плоскость, проходящая через ее концы A_0 и A_n, имеет с ломаной $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ не более одной общей точки.

О многограннике, гранями которого служат треугольники $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_3$, ..., $A_0A_{n-1}A_n$ и треугольники $A_nA_0A_1$, $A_nA_1A_2$, ..., $A_nA_{n-2}A_{n-1}$, будем говорить, что он *натянут* на данный простой каркас (рис. 6) (указанные грани образуют его «обшивку»).

Так как многогранник, натянутый на простой каркас, можно составить из тетраэдров $A_0A_1A_2A_n$, $A_0A_2A_3A_n$, ..., $A_0A_{n-2}A_{n-1}A_n$, к каждому из которых применима лемма 1, то верна

Лемма 2. *Объем V многогранника, натянутого на простой каркас, вычисляется по формуле*

$$V = \frac{1}{3} hS,$$

где h — расстояние между концами A_0 и A_n, S — площадь многоугольника $A'_0A'_1 \ldots A'_{n-1}A'_n (A'_n = A'_0)$, являющегося проекцией каркаса на плоскость Π, перпендикулярную прямой A_0A_n.

Используя тот же прием, что при доказательстве теоремы 2, читатель легко докажет, опираясь на решение изопериметрической задачи для n-угольников, следующую теорему:

Теорема 4. *Среди всех многогранников, натянутых на простые n-звенные каркасы $A_0A_1 \ldots A_n$ с данным периметром L и с данным расстоянием h между концами, наибольший объем имеет многогранник, натянутый на каркас, расположенный на боковых гранях правильной n-угольной призмы, у которой отрезок A_0A_n служит ребром, а основание имеет периметр $\sqrt{L^2-h^2}$; при этом стороны каркаса образуют с A_0A_n равные углы $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$.*

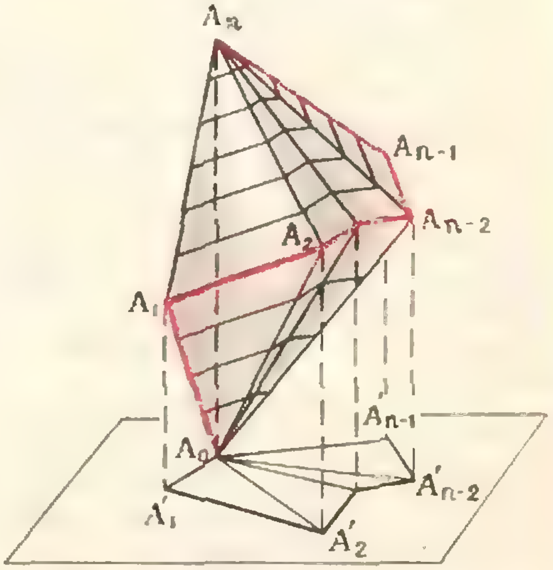


Рис. 6.

Таким образом, наибольший объем равен

$$\frac{1}{12}\, h\,(L^2-h^2)\,\frac{1}{n}\,\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\,.$$

Если же не фиксировать расстояние между концами каркаса, то из теоремы 4 немедленно следует

Теорема 5. *Среди всех многогранников, натянутых на простые n-звенные каркасы данной длины L, наибольший объем имеет многогранник, натянутый на каркас, расположенный на боковых гранях правильной n-угольной призмы с высотой* $\frac{L}{\sqrt{3}}$ *и периметром основания* $L\sqrt{\frac{2}{3}}$, *причем стороны каркаса образуют с высотой призмы равные углы* $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Этот наибольший объем равен*

$$\frac{1}{18\sqrt{3}}\,L^3\cdot\frac{1}{n}\,\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\,.$$

Известно, что среди n-угольников с заданными длинами сторон наибольшую площадь имеет тот, который можно вписать в окружность. Используя этот факт, читатель сможет доказать, что среди всех многогранников, натянутых на простые n-звенные каркасы с данными длинами звеньев $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и расстоянием h между концами, наибольший объем имеет многогранник, натянутый на каркас, расположенный на боковых гранях прямой призмы с высотой h, сторонами основания $b_k = a_k\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, где $L=a_1+a_2+\ldots+a_n$, причем основание призмы можно вписать в окружность.

Откажемся теперь от требования, чтобы каркас был непременно составлен из прямолинейных отрезков: будем рассматривать «гладкие» пространственные кривые. Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке можно провести касательную и направление касательной «плавно» изменяется при малых изменениях положения точки касания. Таким образом, мы не рассматриваем кривых с «изломами», хотя ценой некоторого усложнения изложения можно было бы распространить результаты и на такие кривые. Гладкую пространственную кривую AB назовем *простым гладким каркасом*, если всякая плоскость, проходящая через ее концы A и B, имеет с ней не более одной общей точки.

Пусть точка M перемещается по простому каркасу. Тогда отрезки AM и BM опишут некоторые поверхности, составляющие «обшивку» каркаса; о теле, ограниченном «обшивкой», будем по-прежнему говорить, что оно натянуто на каркас (рис. 7).

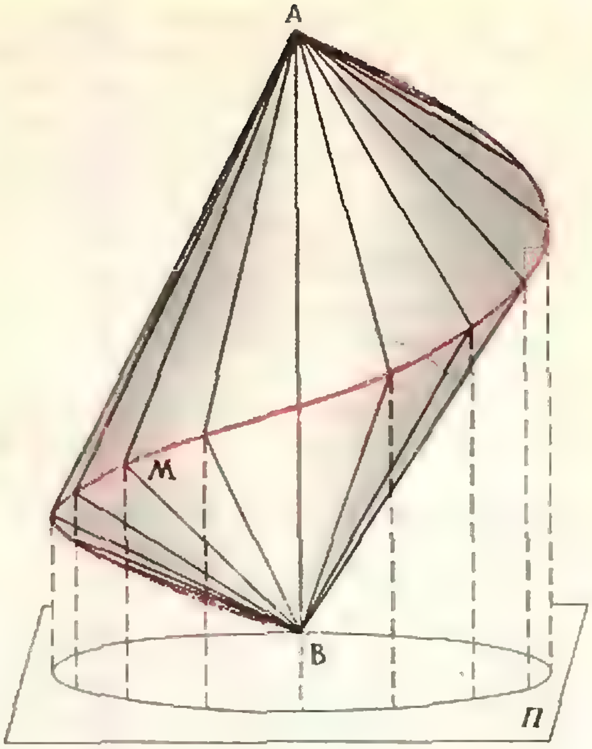


Рис. 7.

С помощью предельного перехода можно показать, что объем тела, натянутого на гладкий простой каркас, также вычисляется по формуле (1), в которой S теперь обозначает площадь фигуры, ограниченной проекцией каркаса на плоскость П. Характер предельного перехода интуитивно ясен: нужно заменить гладкий каркас «близкими» к нему ломанными; однако проведение точных рассуждений — дело довольно скрупулезное.

Используя изопериметрическое свойство окружности, можно, как и выше, убедиться в справедливости следующих теорем:

Теорема 6. *Среди всех тел, натянутых на простые гладкие каркасы с данной длиной L и с данным расстоянием h между концами, наибольший объем имеет тело, натянутое на каркас, представляющий собой один виток винтовой линии с шагом h, расположенный на круговой цилиндрической поверхности с радиусом основания* $\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{2\pi}$ (рис. 7).

Теорема 7. *Среди всех тел, натянутых на простые гладкие каркасы с данной длиной L, наибольший объем имеет тело, натянутое на каркас, представляющий собой один виток винтовой линии с шагом* $h=\frac{L}{\sqrt{3}}$, *расположенный на круговой цилиндрической поверхности с радиусом основания* $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$.

Числа C_n^k, многочлены, последовательности

(несколько подходов к одной задаче)

В. Н. Вагутен

Напомним одну задачу из «Задачника «Кванта», элементарное решение которой было напечатано в «Кванте» № 12 за 1972 год.

M138. *Докажите, что если m и n—целые числа и $1<m<n$, то*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m C^k = 0,$$

где C^k *—биноминальные коэффициенты.*

Разные доказательства этих тождеств послужат нам удачным поводом для того, чтобы познакомить читателя с некоторыми важными математическими понятиями и фактами, не входящими в школьную программу (конечные разности, интерполяционная формула для многочленов, производная многочлена, степенной ряд экспоненты). Вслед за определениями и теоремами в каждом параграфе читатель встретит слова «вернемся теперь к нашей задаче», а за ними — новое решение задачи **M138**.

Доказательства теорем можно пропустить, но лучше их разобрать, хотя сделать это нелегко, так как они написаны очень коротко.

Введение. Биномиальные коэффициенты и формулировка задачи

Мы перечислим несколько свойств чисел C_n^k. Каждое из свойств **0.1—0.3** можно принять за определение этих чисел.

0.1. C_n^k — коэффициенты многочлена

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \ldots + C_n^k a^{n-k} x^k + \ldots + C_n^n x^n. \qquad (1)$$

0.2. $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \qquad (2)$$

0.3. Для всех n и k $(0 \leqslant k \leqslant n)$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}, \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad (3)$$

где $m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m$; $0! = 1! = 1$.

Упражнение 0. а) Найдите числа C_n^k для всех n от 1 до 10, пользуясь каждым из определений **0.1**, **0.2**, **0.3**. б) Выведите **0.2** из **0.1**, пользуясь тождеством $(a+x)^n = (a+x)^{n-1}(a+x)$. в) Выведите **0.3** из **0.2**, пользуясь методом математической индукции (то есть проверьте, что если формула (3) верна для $n-1$, то она верна и для n). г) Проверьте, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Многочлен $a+x$ иногда называют «биномом» (*бином* — то же, что *двучлен*), формулу (1) — формулой «бинома Ньютона», а числа C_n^k — «биномиальными коэффициентами».

Положим в равенстве (1) a равным 1. Получим

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n. \qquad (4)$$

Подставив сюда $x = -1$, получим

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (5)$$

Оказывается, что кроме соотношения (5) для чисел C_n^k верны еще следующие равенства:

$$\begin{aligned} -C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \ldots + (-1)^n nC_n^n &= 0,\\ -C_n^1 + 2^2C_n^2 - 3^2C_n^3 + \ldots + (-1)^n n^2 C_n^n &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ -C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 - 3^{n-1}C_n^3 + \ldots + (-1)^n n^{n-1} C_n^n &= 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Именно эти равенства требовалось доказать в задаче **М138**; о них и будет идти речь в конце каждого параграфа.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться короткой записью сумм с помощью значка Σ. Например, формулу (1) можно коротко записать так: $(a+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} x^k$, формулу (4) — $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k$, равенство (5) — $\sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k = 0$ и, наконец, равенства (6), которые требуется доказать в задаче **М138** —

$$\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k k^m C_n^k = 0 \qquad (6')$$

при каждом натуральном $m < n$.

§ 1. Последовательности и конечные разности

Пусть на множестве целых неотрицательных чисел 0, 1, 2, 3 ... задана функция f. Это значит, что задана *последовательность*

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots$$

Если из каждого члена последовательности f, разумеется, кроме первого, вычесть предшествующий ему член последовательности, то мы получим новую последовательность — *последовательность разностей*

$$f(1)-f(0),\ f(2)-f(1),\ f(3)-f(2),\ \ldots$$

Обозначим соответствующую ей функцию через Δf: $\Delta f(0) = f(1) - f(0)$; $\Delta f(1) = f(2) - f(1)$; $\Delta f(2) = f(3) - f(2)$ ...

Если проделать эту же операцию — переход от f к Δf — с последовательностью Δf, то мы получим последовательность

$$f(2) - 2f(1) + f(0),\ f(3) - 2f(2) + f(1),\ \ldots$$

Обозначим ее через $\Delta^2 f$.

Эта последовательность называется *последовательностью вторых разностей для* f. Еще раз взяв разности, получим *последовательность третьих разностей* — $\Delta^3 f$:

$$f(3) - 3f(2) + 3f(1) - f(0),\ f(4) - 3f(3) + 3f(2) - f(1),\ \ldots$$

и так далее.

Таким образом, по определению

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta^n f(x+1) - \Delta^n f(x). \tag{7}$$

(Напомним, что аргумент x функций $f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots$ принимает целые неотрицательные значения: $x = 0, 1, 2, \ldots$).

Рассмотрим в качестве первого примера постоянную функцию f:

$$f(0) = f(1) = f(2) = \ldots = a.$$

Для нее последовательность разностей Δf будет, очевидно, состоять из одних нулей. Кратко это запишем так: $\Delta f \equiv 0$ (при всех x).

Естественно, что и последовательности $\Delta^2 f, \ldots, \Delta^n f$ так же будут состоять из одних нулей, то есть $\Delta^n f \equiv 0$.

Если f — линейная функция: $f(x) = ax + b$, то есть если последовательность представляет собой арифметическую прогрессию $b, a + b, 2a + b, 3a + b, \ldots$, то все члены последовательности Δf будут равны одному и тому же числу a. Отсюда $\Delta^2 f \equiv 0$.

Если f — квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, то Δf — линейная функция (от номера x):

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$
$$= a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + b.$$

Тогда $\Delta^2 f$ — постоянная функция: $\Delta^2 f = 2a$. Следовательно, $\Delta^3 f = 0$ и, конечно, $\Delta^n f = 0$ для всех $n > 2$.

Упражнение 1. а) Пусть $f(x) = x^3$. Найдите $\Delta f, \Delta^2 f, \Delta^3 f, \ldots$ б) Тот же вопрос, если $f(x) = 2^x$.

Наши наблюдения обобщаются в следующих двух теоремах.

1.1. *Число* $\Delta^n f(x)$ *выражается через значения функции* f *по формуле*

$$\Delta^n f(x) = C_n^0 f(x+n) - C_n^1 f(x+n-1) + \ldots + (-1)^n C_n^n f(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k f(x+n-k). \tag{8}$$

1.2. *Если* $f(x)$ — *многочлен степени* $m < n$, *то* $\Delta^n f = 0$.

Оба утверждения **1.1** и **1.2** доказываются индукцией по n. Для $n = 1, 2, 3$ мы их уже проверили. Предполагая, что они верны для n, доказываем для $n+1$.

1.1. Используя (7), (8) и (2), получаем

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta^n f(x+1) - \Delta^n f(x)$$
$$= C_n^0 f(x+n+1) - C_n^1 f(x+n) + \ldots + (-1)^n C_n^n f(x+1) -$$
$$- C_n^0 f(x+n) + \ldots + (-1)^n C_n^{n-1} f(x+1) - (-1)^n C_n^n f(x) =$$
$$= C_{n+1}^0 f(x+n+1) - C_{n+1}^1 f(x+n) + \ldots - (-1)^{n+1} C_{n+1}^n f(x+1) + (-1)^{n+1} \times$$
$$\times C_{n+1}^{n+1} f(x).$$

1.2. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_j x^j + \ldots + a_m x^m$. Напишем m равенств (они следуют из (4))

$$(x+1)^j - x^j = C_j^1 x^{j-1} + C_j^2 x^{j-2} + \ldots + C_j^{j-1} x + 1$$

(здесь $j = 1, 2, \ldots, m$). Умножим их соответственно на коэффициенты a_j и сложим. Получим: в левой части $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, в правой — некоторый многочлен от $g(x)$ степени не выше $m - 1$. Если $m < n$, то $m - 1 < n - 1$ и по предположению индукции $\Delta^{n-1} g = 0$. Следовательно, $\Delta^n f = \Delta^{n-1}(\Delta f) = \Delta^n g = 0$.

Вернемся теперь к нашей задаче.

Равенство (6′), согласно **1.1.** в точности означает, что $\Delta^n f(0) = 0$ для функции $f(x) = x^m$, а это следует прямо из утверждения **1.2.**

Задача 1. Пусть $f(x) = a + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Найдите $\Delta^n f$. Пользуясь этим результатом, вычислите сумму

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^n C_n^k .$$

Задача 2. Докажите, что есть $\Delta^{n+1} f(x) = 0$ для всех x, то $f(x)$ — многочлен степени не выше n.

Задача 3. Найдите все последовательности f, для которых $\Delta f(x) = \lambda f(x)$, где λ — некоторое число.

§ 2. Многочлены и интерполяционная формула

Мы знаем, что через две точки можно провести единственную прямую. Другими словами, если заданы две пары чисел (α_0, β_0), (α_1, β_1), причем $\alpha_0 \neq \alpha_1$, то существует единственный многочлен степени не выше первой $P(x) = ax + b$ такой, что $P(\alpha_0) = \beta_0$ и $P(\alpha_1) = \beta_1$.

Этот факт обобщается следующим образом.

Пусть заданы $n+1$ различных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $n+1$ чисел $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Тогда справедливы следующие утверждения.

2.1. *Существует многочлен P степени не выше n такой, что*

$$P(\alpha_i) = \beta_i \quad (\textit{для всех } i = 0, 1, \ldots, n). \tag{9}$$

2.2. *Многочлен P определяется единственным образом.*

Для доказательства 2.1 достаточно предъявить такой многочлен. Для этого рассмотрим сначала многочлены

$$D_k(x) = \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_k-\alpha_0)(\alpha_k-\alpha_1)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)} \tag{10}$$

(в числителе и знаменателе по n множителей). Ясно, что

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Умножим теперь $D_k(x)$ на число β_k и сложим все эти многочлены. Для полученного многочлена

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \beta_k D_k(x) \tag{11}$$

выполнены все равенства (9).

Для доказательства 2.2 нам понадобятся две важные теоремы о корнях многочленов.

2.3. *Если многочлен*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{12}$$

степени не выше n имеет $n+1$ различных корней, то этот многочлен равен 0, то есть $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

2.4. («Теорема Безу».) *Если α — корень многочлена $f(x)$, то многочлен $f(x)$ делится на $x - \alpha$, то есть*

$$f(x) = (x - \alpha)\, g(x), \tag{13}$$

где $g(x)$ — некоторый многочлен.

Доказательство 2.4. Напишем n тождеств $(x^j-\alpha^j)=(x-\alpha)(x^{j-1}+x^{j-2}\alpha+\ldots+\alpha^{j-2}x+\alpha^{j-1})$, $(j=1, 2, \ldots, n)$, умножим их соответственно на коэффициенты a_j и сложим все эти тождества. Получим формулу, справедливую для любого многочлена (12) и любого числа α:

$$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)\,g(x),$$

где $g(x)$ — некоторый многочлен. В частности, если $f(\alpha)=0$, получаем (13).

Доказательство 2.3 проведем индукцией по n. Для $n=1$ утверждение 2.3 очевидно. Докажем, что если оно верно для $n-1$, то верно и для n. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни многочлена (12). Тогда, согласно 2.4

$$f(x)=(x-\alpha_n)\,g(x),$$

причем многочлен $g(x)$ имеет степень не выше $n-1$ и имеет n различных корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. По предположению индукции, $g(x)$ равен нулю; из (14) следует, что $f(x)$ тоже равен нулю.

Доказательство 2.2. Пусть p_1 и p_2 — два многочлена, для каждого из которых верны равенства (9). Тогда их разность удовлетворяет условиям теоремы 2.3 (многочлен $f(x)=p_1(x)-p_2(x)$ степени не выше n имеет $n+1$ корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$) и поэтому равна нулю, то есть $p_1(x)=p_2(x)$.

Итак, мы доказали, что через $n+1$ точку $(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ можно провести единственную кривую вида

$$y=f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

и даже привели формулу, позволяющую сразу написать нужный многочлен. Эта формула (11) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Упражнение 2. а) Найдите квадратный трехчлен, который в точках 2, 3, 5 принимает значения соответственно 7, 11, 13. б) Найдите многочлен степени не выше 4, график которого проходит через точки $(-2, -7)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$.

Вернемся к нашей задаче. Построим многочлен степени не выше n, который в точках $\alpha_k=k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ принимает значения соответственно $\beta_k=k^m$. Из формулы (11) следует, что этот многочлен равен $\sum\limits_{k=0}^{k=n} k^m D_k(x)$, где

$$D_k(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)(x-k-1)\ldots(x-n)}{k(k-1)\ldots1(-1)(-2)\ldots(k-n)}. \tag{15}$$

Ясно, что коэффициент при x^n у многочлена (15) равен

$$\frac{1}{k(k-1)\ldots1(-1)(-2)\ldots(k-n)}=(-1)^{k-n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}=\frac{(-1)^n}{n!}(-1)^kC_n^k,$$

поэтому коэффициент при x^n у многочлена $P(x)$ равен

$$(1/n!)\,(-1)^n\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k k^m C_n^k.$$

С другой стороны, ясно, что многочлен $P(x)$ есть просто x^m, ведь $m<n$. Поэтому коэффициент при x^n у $P(x)$ равен нулю.

Задача 4. Докажите, что набор чисел $y_0, y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяет условию: «для любого многочлена $f(x)$ степени не выше $n-1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{k=n} f(k)\,y_k=0»,$$

в том и только том случае, если $y_k=t(-1)^k C_n^k$, где t — некоторое число.

Задача 5 (обобщение). Докажите, что если числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ попарно различны, то система уравнений

$$\begin{gathered}
y_0 + y_1 + \ldots + y_n = 0, \\
\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\
\alpha_0^2 y_0 + \alpha_1^2 y_1 + \ldots + \alpha_n^2 y_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_0^{n-1} y_0 + \alpha_1^{n-1} y_1 + \ldots + \alpha_n^{n-1} y_n = 0
\end{gathered}$$

имеет решением набор чисел

$$y_k = \frac{t}{(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\ldots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k - \alpha_n)}$$

($k = 0, 1, \ldots, n + 1$), где t — произвольное число, и не имеет других решений.

§ 3. Производная многочлена и кратные корни

Пусть $f(x)$ — многочлен степени n:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k.$$

Тогда по определению многочлен степени $n - 1$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k x^{k-1}$$

называется *производной многочлена* $f(x)$. Оказывается верным следующее утверждение.

3.1. *Если многочлен* $f(x)$ *делится на* $(x-\alpha)^{m+1}$, то *многочлен* $f'(x)$ *делится на* $(x-\alpha)^m$. Другими словами, если число α является корнем кратности $m + 1$ многочлена $f(x)$, то α является корнем кратности не менее m многочлена $f'(x)$.

Для доказательства 3.1. мы используем такую лемму.

3.2. *Если* $f(x) = (x-\alpha)g(x)$, *то*

$$f'(x) = g(x) + (x-\alpha) g'(x). \tag{16}$$

Доказательство 3.2. Если $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, то, как нетрудно проверить, пользуясь определением производной многочлена, и правая, и левая часть равенства (16) равна

$$(b_0 - b_1\alpha) + 2(b_1 - b_2\alpha)x + \ldots + (n-1)(b_{n-2} - b_{n-1}\alpha)x^{n-2} + nb_{n-1}x^{n-1}.$$

Доказательство 3.1 проведем индукцией по m. Проверим 3.1 при $m = 1$. Если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^3$, то $f(x) = (x-\alpha)g(x)$, где $g(x)$ делится на $(x-\alpha)$, и, как видно из (16), $f'(x)$ тоже делится на $(x-\alpha)$.

Докажем, что если 3.1 верно для $m - 1$, то оно верно и для m. Пусть $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^{m+1}$. Тогда $f(x) = (x-\alpha)g(x)$, где $g(x)$ делится на $(x-\alpha)^m$, и из (16) следует, что $f'(x)$ делится на $(x-\alpha)^m$ ($g'(x)$ делится на $(x-\alpha)^{m-1}$ по предположению индукции).

Упражнение. 3. а) Имеет ли многочлен $x^3 - x^2 - 8x + 12$ кратные корни? б) Найдите a, b и c такие, что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ делится на $(x+1)^2$.

Вернемся теперь к нашей задаче. Равенство (6′) означает в точности, что многочлен $f_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} k^m C_n^k x^{k-1}$ имеет число $x = -1$ своим корнем. Докажем более сильное утверждение: *многочлен* $x\,f_m(x)$ *имеет число* (-1) *корнем кратности* $n - m$, то есть делится на $(x+1)^{n-m}$ (если $m < n$).

Для $xf_0(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k = (1+x)^n$ это очевидно. Для $0 < m < n$ проведем индукцию по m. Пусть $xf_{m-1}(x)$ имеет число (-1) корнем кратности $n-(m-1)$. Тогда согласно **3.1** многочлен

$$(xf_{m-1}(x))' = \left(\sum_{k=0}^{k=n} k^{m-1} C_n^k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{k=n} k^m C_n^k x^{k-1} = f_m(x)$$

а, следовательно и многочлен $xf_m(x)$ имеет (-1) корнем кратности $n-(m-1)-1=n-m$.

Задача 6. Для того, чтобы многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

делился на $(x+1)^m$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned}
a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n &= 0,\\
-a_1 + 2a_2 - 3a_3 + \ldots + (-1)^n n a_n &= 0,\\
-a_1 + 2^2 a_2 - 3^2 a_3 + \ldots + (-1)^n n^m a_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
-a_1 + 2^m a_2 - 3^m a_3 + \ldots + (-1)^n n^m a_n &= 0.
\end{aligned}$$

Докажите это.

§ 4. Степенные ряды и экспонента

Формальным степенным рядом называется выражение

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — произвольная последовательность чисел (z — так же, как в записи многочлена, «переменная» буква). Тот же ряд коротко записывается так: $\sum\limits_{m=0}^{m=\infty} a_m z^m$. В частности, если все a_m при $m > n$ равны 0, получается обычный многочлен степени n.

Так же как для многочленов, для степенных рядов естественно определяются операции сложения, умножения, замены переменной. А именно, пусть

$$A(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m z^m,\ B(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} b_m z^m,\ C(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} C_m z^m,$$

λ — число. Тогда по определению

1°) $A(z) + B(z) = C(z)$, если $a_m + b_m = c_m$ для всех m;

2°) $A(z) \cdot B(z) = C(z)$, если $a_m b_0 + a_{m-1} b_1 + \ldots + a_{m-k} b_k + \ldots + a_0 b_m = c_m$ для всех m; в частности, $\lambda A(z) = C(z)$, если $\lambda a_m = c_m$;

3°) $A(\lambda z) = B(z)$, если $\lambda^m a_m = b_m$ для всех m.

Нетрудно проверить, что для определенных таким образом операций над формальными степенными рядами выполняются все основные свойства сложения и умножения, которые справедливы для чисел и для многочленов.

Упражнение 4. Найдите произведение:

а) $(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)$;

б) $(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots)(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots)$.

Назовем *экспонентой* степенной ряд

$$\operatorname{Exp}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^m}{m!} + \ldots = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{z^m}{m!}.$$

Докажем основное свойство этого ряда.

4.1. *Для любых двух чисел α и β*

$$\operatorname{Exp}((\alpha+\beta)z) = \operatorname{Exp}(\alpha z) \cdot \operatorname{Exp}(\beta z) \tag{17}$$

Нужно проверить, что коэффициенты при z^m (для каждого m) справа и слева совпадают (определение 2'), то есть что

$$\frac{(\alpha+\beta)^m}{m!}=\frac{\alpha^m}{m!0!}+\frac{\alpha^{m-1}\beta}{(m-1)!1!}+\ldots+\frac{\alpha^{m-k}\beta^k}{(m-k)!\,k!}+\ldots+\frac{\beta^m}{0!m!}.$$

Но это равенство прямо следует из формул (1) и (3).

Пользуясь (17), индукцией по k легко доказать равенство

$$\operatorname{Exp}(kz)=(\operatorname{Exp}(z))^k.$$

Вернемся теперь к нашей задаче. Рассмотрим $n+1$ формальных степенных рядов

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{k^m z^m}{m!}=\operatorname{Exp}(kz)$$

($k=0, 1, 2, \ldots, n$). Умножим k-й ряд соответственно на $(-1)^k C_n^k$ и сложим все эти ряды (для этого достаточно сложить коэффициенты при z^m для всех m). Получим ряд

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k k^m C_n^k\right)\frac{z^m}{m!}=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k\operatorname{Exp}(kz)=(-1)^n\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^{n-k}\times$$

$$\times(\operatorname{Exp}(z))^k=(\operatorname{Exp}(z)-1)^n=\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)^n.$$

Ясно, что этот ряд будет начинаться с члена z^n, то есть коэффициенты при z^{n-1}, z^{n-2}, $\ldots$, z и свободный член этого ряда равны 0. Но это и означает, что верны равенства (6).

Задача 7. Пользуясь последним равенством, найдите сумму

$$\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\,k^n C_n^k\,.$$

Задача 8. По определению $A'(z)=\left(\sum_{m=0}^{m=\infty}a_m z^m\right)'=\sum_{m=1}^{m=\infty}ma_m z^{m-1}$.

Докажите, что $(\operatorname{Exp}(z))'=\operatorname{Exp}(z)$.

Конечно, эта статья трудна для неискушенного читателя, впервые встретившегося с целым рядом непривычных понятий. Для того, чтобы освоиться с каждым из этих понятий, нужно проделать большое число упражнений и прочесть менее формальные и более подробные разъяснения.

Автор надеется, что у некоторых из начинающих читателей возникнет желание продолжить знакомство с этими понятиями, а у более искушенных— подумать, как связаны между собой приведенные четыре доказательства.

Литература

А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей, М., «Наука», 1967.

Коэффициент полезного действия ракеты

А. В. Бялко

Начнем с небольшой задачи. За какое время электрический утюг потребляет столько энергии, сколько необходимо для его запуска на орбиту спутника Земли? (Мощность утюга $P = 1$ *квт*, масса $m = 1$ *кг*.)

Кинетическая энергия спутника, движущегося по круговой орбите, $\frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{2}$, где v — первая космическая скорость, R — радиус Земли. Потенциальной энергией mgh для не слишком высоких орбит можно пренебречь по сравнению с кинетической. Приравнивая энергию утюга-спутника к Pt, найдем что

$$t = \frac{mgR}{2P} = 3{,}2 \cdot 10^4 с \approx 9\ ч.$$

Всего 9 часов! 9 киловатт-часов, 36 копеек необходимы для выведения на орбиту спутника Земли каждого килограмма массы. Почему же для осуществления космических программ требуются затраты, соизмеримые с национальными бюджетами небольших стран?

Потому, что эта энергия, 9 *квт-ч*, необходима, но недостаточна. Потому, что ракета как тепловая машина имеет очень низкий коэффициент полезного действия. Попробуем его найти.

Сначала выведем формулу, связывающую массу и скорость ракеты, то есть решим «задачу Циолковского». Сложность здесь состоит в том, что масса ракеты при разгоне все время уменьшается — выгорает топливо. Такие процессы изучают, решая дифференциальные уравнения. Чтобы этого избежать, представим себе, что сгорание происходит не непрерывно, а некими малыми порциями. Скажем, каждый раз ракета выбрасывает $\frac{1}{N}$-ю часть своей массы, как бы выстреливает снарядом, масса которого в N раз меньше массы ракеты в этот момент (рис. 1).

Скорость такого «снаряда» относительно ракеты будем считать постоянной и называть скоростью истечения V. При каждом таком «выстреле» выполняется закон сохранения количества движения. Пусть вначале масса ракеты была M_0, а скорость равна нулю. Тогда $\frac{M_0}{N}V$ — количество движения массы, выброшенной после первого толчка и $\left(1 - \frac{1}{N}\right) M_0 v_1$ — равное ему коли-

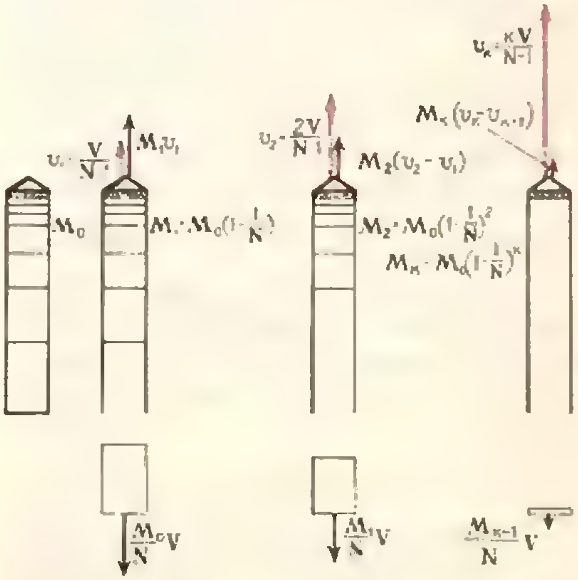


Рис. 1.

чество движения ракеты. Итак,

$$M_1 = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right), \quad v_1 = \frac{V}{N-1}.$$

После второго «выстрела» масса ракеты станет $M_2 = M_1\left(1 - \frac{1}{N}\right) = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$. Закон сохранения количества движения, записанный в системе отсчета, связанной с ракетой, летящей со скоростью v_1, дает $\frac{M_1V}{N} = M_2(v_2 - v_1)$, и, таким образом,

$$v_2 = v_1 + V\frac{M_1}{NM_2} = \frac{2V}{N-1}.$$

После k-го «выстрела», как нетрудно видеть, скорость ракеты станет $v_k = \frac{kV}{N-1}$, а оставшаяся масса $M_k = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right)^k$. Если нам нужно достичь скорости v, то необходимо сделать $k = \frac{v}{V}(N-1)$ «выстрелов», и оставшаяся (полезная) масса будет равна

$$m = M_k = M_0\left\{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1}\right\}^{v/V}.$$

Реальный процесс истечения, конечно, происходит непрерывно. Это значит, что для того, чтобы рассмотренное нами движение хорошо описывало происходящее на самом деле, нам нужно брать как можно бо́льшие числа N, тогда движение ракеты будет состоять из большого числа маленьких по величине толчков, то есть будет почти непрерывным.

Оказывается, что при увеличении N величина $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1}$ стремится к конечному пределу *). Этот предел равен 0,36788... и обозначается в математике через e^{-1}, e — основание натуральных логарифмов — равно 2,71828...

Таким образом, масса ракеты, достигшей скорости v, равна

$$m = M_0 e^{-v/V}.$$

Эта формула была получена К. Э. Циолковским в 1903 году и носит его имя. Из нее видно, что ракета может достичь скорости, большей скорости истечения топлива, но при этом ее оставшаяся масса будет много меньше начальной.

Если, например, скорость истечения равна 2 *км/с*, то при достижении первой космической скорости 7,9 *км/с* конечная масса будет в $e^{3,95} \approx 52$ раза меньше начальной, а при достижении второй космической скорости 11,2 *км/с* — в $e^{5,6} \approx 270$ раз меньше той же начальной массы. При этом надо учесть, что значительная часть оставшейся массы приходится на конструкции ракеты, так что доля действительно полезного груза становится еще меньше. Чтобы уменьшить бесполезную массу, разгоняемую до конечной скорости, ракеты делают многоступенчатыми. При этом корпуса низших ступеней сбрасываются, когда в них кончается горючее.

Формулу Циолковского можно записать по-другому:

$$v = V\ln\frac{M_0}{m}.$$

Отсюда следует, что для получения больших скоростей движения ракеты при заданных m и M_0 нужно максимально увеличить скорость истечения. Однако для ракет, использующих энергию, выделяющуюся в результате химической реакции, то есть химических ракет, невозможно сделать скорость истечения больше некоторой величины, предельной для каждой реакции. И в этом нетрудно убедиться.

Пусть q — теплотворная способность данного топлива, то есть энергия, выделяющаяся при сгорании 1 *кг* его. Эта энергия расходуется на нагревание отходящих газов и на сообщение им кинетической энергии.

---

*) Более подробное решение этой задачи смотрите в статье «Экспонента» С. Д. Осятинского и А. З. Румшиского, «Квант» № 12, 1972 год.

Рассмотрим ракетный двигатель, закрепленный неподвижно, так называемый стендовый двигатель. При сгорании массы μ (мы считаем вместе и горючее, и окислитель) выделяется энергия $q\mu$, но только часть ее превращается в кинетическую энергию продуктов реакции $\mu\frac{V^2}{2}$. Поэтому $\frac{V^2}{2} < q$. Если ввести коэффициент полезного действия стендового двигателя η_0 — отношение полезной *) энергии к затраченной, — то получим

$$\mu\frac{V^2}{2} = \eta_0 q\mu,$$

$$V = \sqrt{2\eta_0 q},$$

то есть скорость истечения для данной химической реакции не может превысить ее предельной скорости истечения $V_0 = \sqrt{2q}$ (так как $\eta_0 < 1$).

Рассмотрим несколько химических реакций и вычислим для них предельные скорости истечения.

1. Горение ацетилена:

$$2C_2H_2 + 5O_2 = 4CO_2 + 2H_2O + 611 \text{ ккал}.$$

Число килокалорий в правой части уравнения реакции показывает, какая энергия выделяется при сгорании массы, равной сумме молей горючего и окислителя. В данном случае — при сгорании двух молей C_2H_2 и пяти молей O_2, то есть всего $2 \cdot 26 + 5 \cdot 32 = 212$ *г*. Таким образом, теплотворная способность этого топлива

$$q = \frac{611}{212}\,\frac{\text{ккал}}{\text{г}} = 2880\,\frac{\text{ккал}}{\text{кг}} = 1{,}2 \cdot 10^7\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},$$

а предельная скорость истечения

$$V_0 = \sqrt{2q} = 4{,}9\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

2. $$2H_2 + O_2 = 2\underset{(\text{газ})}{H_2O} + 115{,}6 \text{ ккал}.$$

Вычисляем аналогично

$$q = 3220\frac{\text{ккал}}{\text{кг}};\quad V_0 = 5{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

3. $$2\,Al + \frac{3}{2}\,O_2 = Al_2O_3 + 394 \text{ ккал};$$

$$q = 3860 \text{ ккал/кг};\qquad V_0 = 5{,}6 \text{ км/с}.$$

Наибольшая из всех возможных предельная скорость истечения достигается в реакции горения металлического бериллия:

$$Be + \frac{1}{2}\,O_2 = BeO + 146 \text{ ккал};$$

$$q = 5840 \text{ ккал/кг};\quad V_0 = 7 \text{ км/с}.$$

Практическому использованию этой реакции, однако, мешает то обстоятельство, что металлический бериллий и его соединения очень ядовиты.

Рассмотрим теперь коэффициент полезного действия ракеты в целом, то есть отношение ее полезной энергии, равной $\frac{mv^2}{2}$, к затраченной. Последнюю с небольшой ошибкой можно считать равной qM_0, поскольку подавляющая часть начальной массы приходится на топливо. Таким образом,

$$\eta = \frac{mv^2}{2M_0 q} = \frac{v^2}{2q}\,e^{-v/V}.$$

Или, подставляя вместо q его выра-

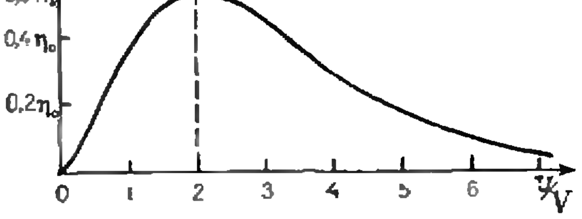


Рис. 2.

---

*) Заметим, что энергия $\frac{\mu V^2}{2}$ не является по-настоящему полезной. Ведь основная задача — разогнать до нужной скорости полезную массу, а не отходящие газы.

жение из формулы $V^2 = 2\eta_0 q$, получаем

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{v}{V}\right)^2 e^{-v/V}.$$

График зависимости η от $\frac{v}{V}$ дан на рисунке 2.

Итак, только часть затраченной энергии, равная $\eta q M_0$, превращается в кинетическую энергию ракеты.

Возникает вопрос, куда девается остальная часть затраченной энергии, поскольку в тепло при сгорании топлива переходит лишь $(1-\eta_0)\,q\,M_0$. Ответ состоит в том, что остальная энергия, а именно

$$(1-\eta)\,qM_0 - (1-\eta_0)\,qM_0 = (\eta_0 - \eta)\,qM_0 = \eta_0\left[1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2 e^{-v/V}\right] qM_0,$$

является кинетической энергией отходящих газов ракеты (в системе отсчета Земли), которая в конечном счете также переходит в тепло, нагревая атмосферу.

Таким образом, мы видим, что при достижении ракетой скорости, заметно большей скорости истечения, реальный коэффициент полезного действия становится весьма малым. Например, если ракета со скоростью истечения $V = 2$ *км/с* достигает второй космической скорости $v = 11{,}2$ *км/с*, то $\eta = 0{,}116\eta_0$ и, соответственно, $0{,}884\eta_0$ полной энергии ракеты уносят отходящие газы.

Создание мощных двигателей с большими скоростями истечения, использующих энергию ядерной реакции или разгон ионов в электрическом поле, существенно повысит к. п. д. ракет. Это дело недалекого будущего.

Разные задачи

1. Брошены два игральных кубика. Какая сумма чисел на их верхних гранях наиболее вероятна?

2. $\sqrt[6]{4****}$ — целое число. Найти это число.

3. $\sqrt[5]{*****4}$ — целое число. Найти его.

4. Задумано число. Если записать его в двоичной системе, а затем зачеркнуть в нем последнюю цифру, то получится то же самое число, но записанное уже в троичной системе. Если же и в этом числе снова зачеркнуть последнюю цифру, то опять получится задуманное число, но изображенное в десятичной системе.

Найти задуманное число.

5. Найти двузначное число, которое, будучи записано в двоичной, четвертичной и восьмеричной системах счисления, каждый раз изображается одинаковыми цифрами (но различными в различных системах).

6.

$$\begin{array}{r} \text{four}\\ +\,\text{five}\\ \hline \text{nine}\end{array}$$

Известно, что four кратно 4, five кратно 5, nine кратно 3.

Расшифровать это сложение.

7. В шахматном турнире участвовали ученики 9 и 10 классов. Каждый игрок играл один раз с каждым участником турнира. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, а набрали они в 4,5 раза больше очков, чем девятиклассники. Сколько в турнире было девятиклассников и сколько очков они набрали?

П. Ю. Германович

Про лису и собаку

М. Л. Гервер

Эта заметка не имеет отношения к зоологии: «лиса» и «собака» — просто удобные условные названия для двух движущихся точек, одна из которых «пытается поймать» другую.

§ 1. Формулировка задачи

Лиса бежит по прямой с постоянной скоростью. Собака гонится за лисой с той же скоростью, причем бежит так, что видит лису все время перед собой. Лиса бежит из точки $Л_0$ (рис. 1) в направлении, указанном стрелкой. Собака в начальный момент находится в точке C_0. При каких C_0 собака догонит лису?

Сейчас трудно установить, кто придумал эту красивую задачу — ее уже много лет предлагают на мехмате МГУ студентам, которые недавно узнали, что такое производная. После того, как тема «Производная» была включена в программу математических школ, про лису и собаку стали рассказывать и школьникам, заранее предупреждая, что это — «задача с двумя звездочками».

В начале 1972 года мы предложили задачу про лису и собаку в 10 «б» классе 57-й школы г. Москвы. Первыми в классе ее решили (разными способами) Коля Надирашвили, Володя Лидский и Сережа Глядков*). Одно из решений (придуманное С. Глядковым) удалось упростить настолько, что оно стало совсем «элементарным».

Это решение (не требующее знакомства с понятием производной) и будет приведено ниже. Прежде, чем читать его, попробуйте, конечно, решить задачу сами. Может быть, это не удастся (я уже предупреждал, что задача трудная) — тогда постарайтесь хотя бы угадать ответ. Он довольно неожиданный.

§ 2. Попробуем угадать ответ

1. Обозначим прямую, по которой бежит лиса $Л$, через l. В точке $Л_0$ восставим к ней перпендикуляр p (рис. 2).

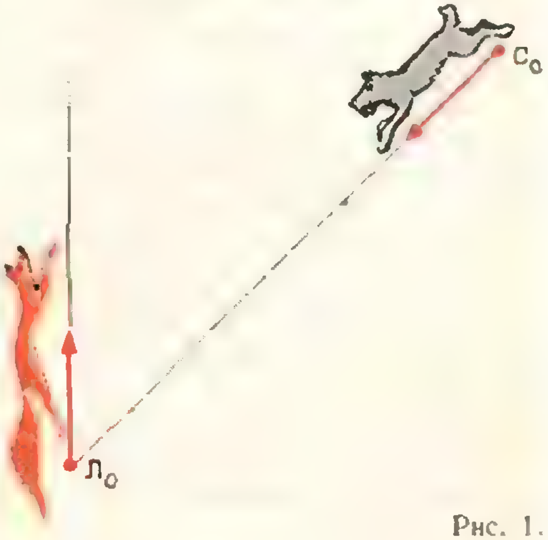


Рис. 1.

Если собака находится в начальный момент на прямой l, все ясно: если C_0 расположена перед $Л_0$, то собака бежит навстречу лисе и ловит ее; если C_0 — сзади $Л_0$, то собака никогда не догонит лису.

Пусть теперь C_0 — вне прямой l. Если она позади $Л_0$ (ниже перпенди-

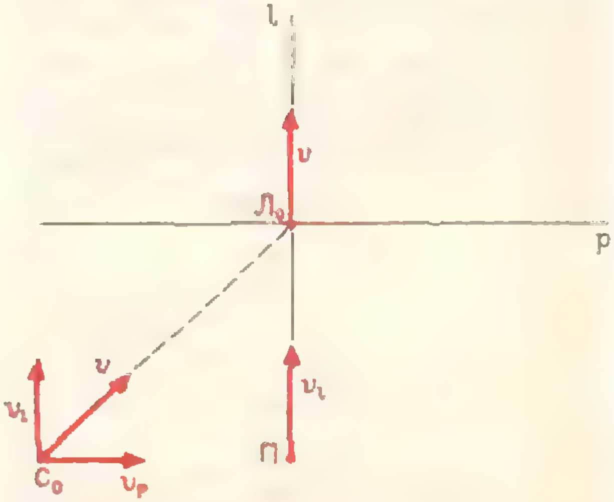


Рис. 2.

---

*) Сейчас все трое — уже первокурсники.

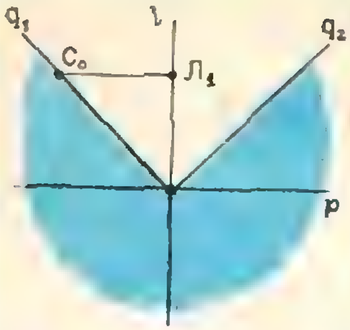


Рис. 3.

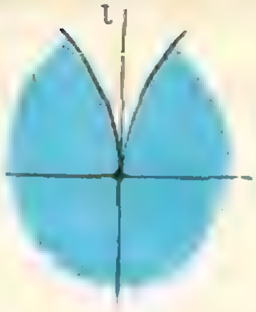


Рис. 4.

кулярa p), то лису не догнать. Доказать это можно, например, так.

Разложим скорость собаки $\mathbf{v}$ на две составляющие: $\mathbf{v}_l$ (вдоль l) и $\mathbf{v}_p$ (вдоль p). Спроектируем точку C_0 на прямую l в точку $П$ ($C_0П \perp l$). Тогда $\mathbf{v}_l$ можно истолковать как скорость *) с которой точка $П$ движется вдоль прямой l вслед за $Л$. Поскольку $v_l < v$, то расстояние между $П$ и $Л$ не уменьшается с течением времени **), так что собака в этом случае не догонит лису.

2. Пока все было просто. Трудности начинаются, когда точка C_0 — вне прямой l и впереди $Л_0$ (выше перпендикуляра p).

Проведем из точки $Л_0$ два луча: q_1 и q_2 (рис. 3) — под углом 45° к прямым l и p. Зона, окрашенная на рисунке 3, безопасна для лисы: если C_0 находится в этой зоне, то собака, бегущая из точки C_0, не догонит лису. Чтобы доказать это, возьмем точку C_0 даже не внутри, а на границе зоны (например, на луче q_1).

Пусть $Л_1$ — такая точка на прямой l, что $C_0Л_1 \perp l$. Даже если бы собака бежала наперерез лисе по перпендикуляру $C_0Л_1$, то и тогда она подбежала бы к прямой l лишь одновременно с лисой ($Л_0Л_1 = C_0Л_1$). На самом же деле собака бежит к l по более длинному пути. Значит, когда лиса окажется в точке $Л_1$, собака еще не добежит до l. Легко проверить, что при этом она окажется позади лисы — за перпендикуляром $C_0Л_1$. А в такой ситуации, как мы уже видели, она не сможет догнать лису.

3. Так или примерно так начинает решать обсуждаемую задачу большинство людей.

Интуиция подсказывает, что зону, безопасную для лисы, можно еще расширить. Как же она выглядит? Примерно так, как на рисунке 4? Нет, оказывается, не так...

§ 3. В движущейся системе координат

Сделаем решительный шаг, который резко упростит все дальнейшие рассуждения. Выберем прямоугольную систему координат x, y так, чтобы она равномерно двигалась вместе с лисой *) в направлении оси y. Пусть в начальный момент лиса находилась в начале координат нашей движущейся системы (в точке O). Тогда она все время будет находиться в этой точке.

Как будет двигаться собака относительно системы x, y?

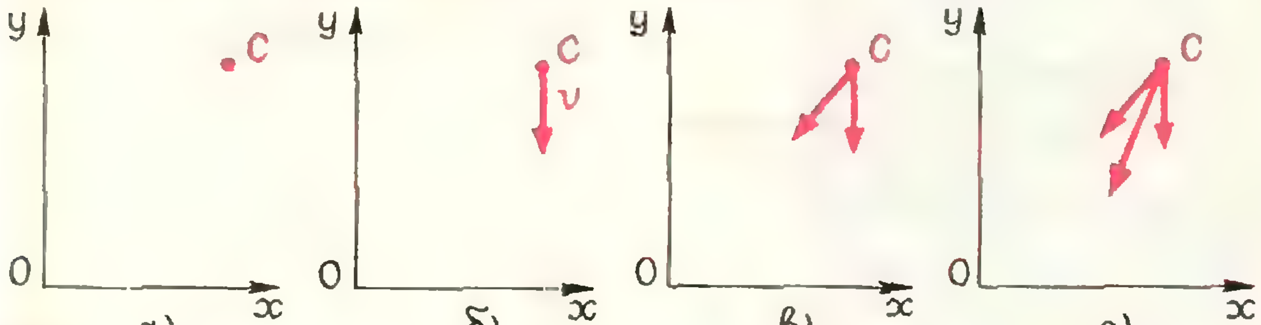
Возьмем на плоскости (x, y) какую-нибудь точку C (рис. 5, a).

---

*) $\mathbf{v}$ — это вектор, а v — его длина.

**) Расстояние между $П$ и $Л$ даже увеличивается: расстояние между C и $Л$, как мы покажем ниже, наоборот, уменьшается.

*) Относительно неподвижного наблюдателя.



а) б) в) г)

Рис. 5.

Если бы эта точка находилась в покое относительно системы координат x, y, то это означало бы, что она движется вместе с лисой) — в том же направлении и с той же скоростью.

Чтобы точка C находилась в покое с точки зрения неподвижного наблюдателя, нужно скомпенсировать движение системы x, y, то есть нужно заставить точку C двигаться относительно системы x, y в направлении, противоположном направлению оси y, причем абсолютная величина скорости этого движения должна быть та же, что и у лисы (рис. 5, *б*).

По условию задачи собака бежит прямо на лису (с точки зрения неподвижного наблюдателя). Значит, относительно системы x, y собака участвует в двух движениях: во-первых, равномерно движется со скоростью v в направлении, противоположном оси y, во-вторых, приближается с той же скоростью к началу координат. Стрелки на рисунке 5, *в* — это векторы скоростей в каждом из указанных движений. Результирующую скорость движения собаки относительно системы координат x, y найдем по правилу параллелограмма (рис. 5, *г*).

До сих пор мы рисовали точку C в одном и том же месте на плоскости (x, y). На рисунке 6 показано, как результирующая скорость зависит от расположения точки C. Чем больше угол между векторами, которые складываются, тем короче вектор результирующей скорости. Если расположить точку C на отрицательной полуоси оси y, то векторы, которые складываются, будут иметь противоположные направления и результирующая скорость окажется равной нулю Так, разумеется, и должно быть: если собака находится строго сзади лисы, то она бежит за ней, не приближаясь и не отставая, то есть находится в покое относительно системы x, y.

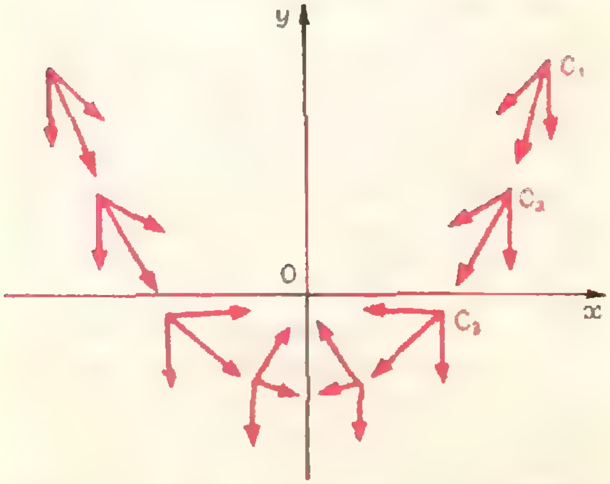


Рис. 6.

§ 4. Собака бежит по параболе

1. В школе много занимаются квадратными уравнениями. Каждый старшеклассник знает, как выглядит парабола (график квадратного трехчлена).

Снова посмотрим на рисунок 6. Очень похоже, что точки C_1, C_2, C_3 лежат на параболе. Мы сейчас покажем, что это так и есть, если эти точки указывают несколько последовательных положений бегущей собаки.

2. Некоторые из вас знают, другие — без труда проверят следующее свойство параболы:

Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки O и от некоторой прямой d *).

Мы сейчас проверим это свойство в случае, когда точка O является началом координат, а прямая d параллельна оси x и расположена «под ней», то есть при некотором $a>0$ задается уравнением $y = -a$. В этом случае (рис. 7) квадрат расстояния от точки (x, y) до точки O равен (по теореме Пифагора)

$$x^2 + y^2,$$

расстояние от точки (x, y) до прямой d равно

$$|y + a|,$$

а квадрат этого расстояния равен

---

*) Точка O называется *фокусом*, а прямая d — *директрисой параболы*.

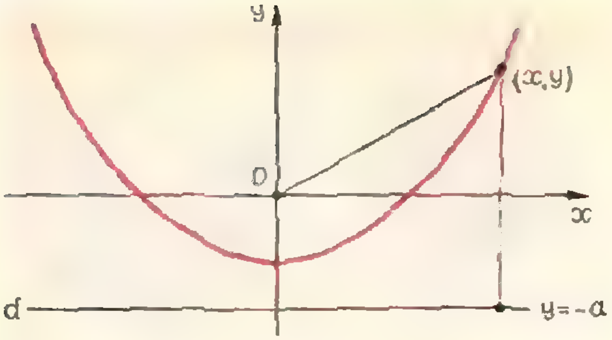


Рис. 7.

$(y+a)^2$. Для точек, равноудаленных от O и d, выполняется, таким образом, соотношение

$$x^2+y^2=(y+a)^2,$$

или, что то же самое,

$$x^2=2ay+a^2.$$

Последнее уравнение перепишем окончательно в виде

$$y=\frac{x^2-a^2}{2a}. \qquad (A)$$

Все точки, равноудаленные от O и d, лежат, таким образом, на параболе, которая задается уравнением (А). Так как при выводе уравнения (А) мы делали тождественные преобразования, то, *и обратно, все точки указанной параболы равноудалены от точки O и прямой d.*

3. Прежде чем идти дальше, отметим что при $b \neq a$ $(b>0)$ парабола

$$y=\frac{x^2-b^2}{2b} \qquad (B)$$

не имеет с параболой (А) ни одной общей точки. Действительно, если бы некоторая точка (x, y) принадлежала обеим параболам, то выполнялось бы соотношение

$$\frac{x^2-a^2}{2a}=\frac{x^2-b^2}{2b}.$$

Но эквивалентное ему равенство $x^2=-ab$ невозможно, так как $x^2 \geqslant 0$, а $-ab<0$.

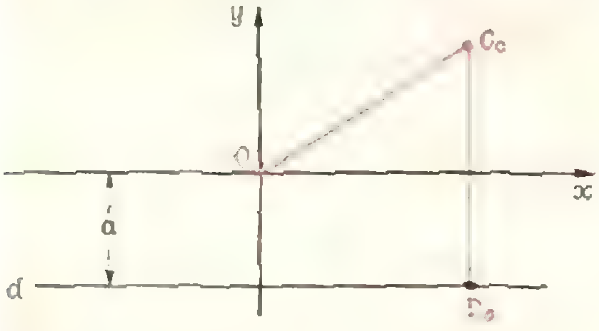


Рис. 8.

4. Возьмем на плоскости (x, y) точку C_0, не лежащую на оси y, а в остальном произвольную. Отложим от нее в направлении, противоположном оси y, отрезок $C_0D_0=OC_0$ *(рис. 8) и проведем через точку* D_0 прямую d, параллельную оси x. Расстояние между осью x и прямой d обозначим через a. Согласно п. 2 парабола (А) равноудалена от O и d и проходит через точку C_0.

Докажем, что именно по этой параболе и побежит собака (относительно системы x, y), если в начальный момент она находилась в точке C_0.

Для доказательства представим себе, что OC_0 и C_0D_0 — это туго натянутые веревки; в точке D_0 веревка C_0D_0 привязана к кольцу, которое надето на прямую d и может свободно скользить по ней; веревка OC_0 *крепко привязана в точке O.* Еще, пожалуй, представим себе, что в точке C_0 находится не собака, а, скажем, обезьяна (у собаки не хватит прыти проделать то, что мы ей сейчас поручим). Дадим обезьяне веревки и попросим подтягиваться по ним обеим сразу — одновременно к точке O и к прямой d.

Каждый, кто когда-нибудь лазил по канату (даже по одному, а не по двум сразу), легко представит себе, что получится. Перебирая лапами, наша собака (то есть обезьяна) будет приближаться с одинаковой скоростью к точке O и к прямой d. Через некоторое время она очутится в точке C_1 (рис. 9); кольцо, скользящее без трения по прямой d, передвинется в такое положение D_1, что $C_1D_1 \perp d$; так как обе веревки укоротятся на один и тот же кусок, то отрезки OC_1 и C_1D_1 будут равны.

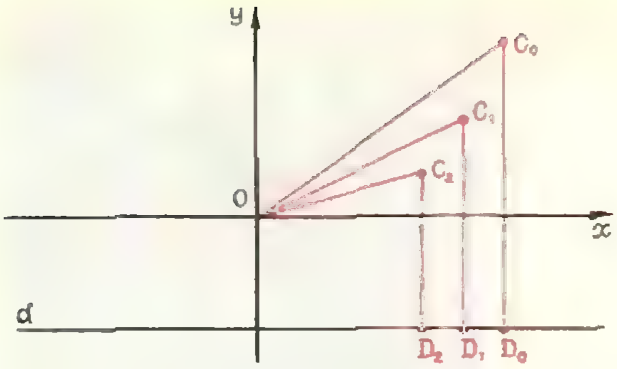


Рис. 9.

Потом она окажется в точке C_2 ($C_2D_2 \perp d$, $OC_2 = C_2D_2$) и т. д.

Так как C_0, C_1, C_2 и т. д. равноудалены от O и d, то движение, как мы и обещали показать, происходит по параболе (А).

§ 5. Решение задачи

Теперь уже легко ответить на вопрос задачи: при каких C_0 собака догонит лису? — Только при C_0 лежащих на полупрямой l перед точкой $Л_0$. Вся плоскость, кроме этого луча, — зона, безопасная для лисы. Действительно, если точка C_0 лежит в указанной зоне, то относительно системы координат x, y, движущейся вместе с лисой, собака побежит по параболе. Через некоторое время она пересечет ось x и окажется позади лисы. А в этом случае поймать лису она не сможет.

Благодаря введению движущейся системы координат, мы сможем легко разобраться и в более тонких деталях.

Двигаясь из точки C_0 по параболе (А), собака все время приближается к ее директрисе d, а тем самым — и к ее фокусу O. Другими словами, расстояние $СЛ$ между собакой и лисой все время сокращается. При этом (см. рис. 7) оно стремится к пределу, равному $a/2$. Пусть координаты C_0 были x_0, y_0; расстояние $C_0Л_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ обозначим через r_0; совсем легко проверить, что тогда $a/2 = (r_0 - y_0)/2$. Таким образом, расстояние $СЛ$, первоначально равное r_0, никогда не может стать меньше, чем $s = (r_0 - y_0)/2$.

А может ли оно стать равным s? Этот вопрос нам поможет решить рисунок 6. Скорость движения собаки по параболе все время уменьшается. И хотя (в системе координат x, y) собаке нужно пробежать путь конечной длины, чтобы $СЛ$ стало равным $(r_0 - y_0)/2$, сделать это за конечное время она не сможет. Точное доказательство этого факта потребует некоторых вычислений.

Пусть C — точка на параболе (А) с координатами (x, y), E — проекция точки C на ось x; $u(x)$ — скорость, с которой E приближается к O. Из рисунка 10 видно, что $u(x)/v = x/\sqrt{x^2+y^2}$. Используя уравнение (А), находим, что $\sqrt{x^2+y^2} = y + a = (x^2+a^2)/2a$, откуда $u(x) = 2avx/(x^2+a^2) < 2vx/a$.

Таким образом, при $a/2 \leqslant x \leqslant a$ скорость $u(x) < 2v$; от $a/2$ до $a/4$ проекция E движется со скоростью $u(x)$, меньшей v; от $a/4$ до $a/8$ — со скоростью $u(x) < v/2$ и т. д. То есть на прохождение каждого из этих отрезков тратится время, большее T $\left(T = \frac{a}{2} : 2v = \frac{a}{4} : v = \frac{a}{8} : \frac{v}{2}\right.$ и т. д.$\left.\right)$. Значит E не сможет дойти до точки $x = 0$ ни за какое конечное время. Иначе говоря, $СЛ$ всегда больше, чем $(r_0 - y_0)/2$.

Задачи

1. Пусть за лисой гонится из точки C_0 не собака, а охотник, стреляющий без промаха с расстояния r. Пренебрежем временем полета пули, то есть будем считать, что охотник догнал лису, если приблизился к ней на расстояние r. При каких C_0 лисе не убежать?

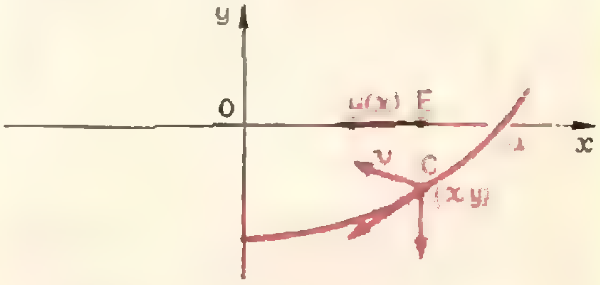


Рис. 10.

2. В § 4 использовалось, что парабола — это геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса O и директрисы d. Вот еще несколько задач о параболе*).

а) Сколько общих точек могут иметь парабола и прямая?

б) Докажите, что через каждую точку параболы $y = ax^2 + bx + c$ можно провести ровно одну прямую, не параллельную оси y, которая не имеет с параболой других общих точек; такая прямая называется касательной к параболе.

Напишите уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(x_0, y_0 = x^2)$; в какой точке эта касательная пересекает ось x?

Напишите уравнение касательной к параболе (А) в точке $x_0, y_0 = (x_0 - a^2)/2a$; как связаны направление этой касательной и направление вектора скорости, которую имеет собака в точке (x_0, y_0) при движении по параболе (А)?

в) Поверхность, которая получается, если вращать параболу вокруг ее оси симметрии (например, параболу $y = x^2$ вокруг оси y), называется параболоидом вращения. В зеркальных телескопах применяют зеркала, имеющие форму параболоида вращения. Свет далекой звезды, идущий параллельным пучком, упав на зеркало телескопа, собирается в фокусе. Объясните этот факт.

3. Мы выяснили, что в движущейся системе координат x, y собака бежит за лисой по параболе. А как она движется относительно неподвижного наблюдателя? Нарисуйте кривую погони, по которой бежит собака в неподвижной системе координат.

4. На кривую погони немного похожа другая интересная кривая — «трактриса». В замечательной книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» она определяется так: когда ребенок, гуляющий по тротуару, тащит тележку по мостовой, то тележка описывает линию, которая называется «трактриса» (что значит «линия влечения»).

Пусть, как и раньше, лиса $Л$ бежит по прямой l со скоростью v из некоторой точки $Л_0$, а собака C бежит прямо на нее (из некоторой точки C_0, не принадлежащей l и находящейся позади $Л_0$), но не с постоянной, а с переменной по величине скоростью. Обозначим через α угол $CЛЛ_0$. Как скорость собаки должна зависеть от α, чтобы собака бежала по трактрисе, то есть чтобы отрезок $CЛ$ имел одну и ту же длину? Пересекаются ли еще где-нибудь, кроме точки C_0, трактриса и кривая погони, проходящие через эту точку? (Точка $Л_0$ при построении обеих кривых — одна и та же.)

ТРИ ДЕРЕВНИ

На острове Трисельске имеется всего три деревни: Правдово, Чередово и Лгуново. Известно, что жители первой деревни всегда говорят правду, жители третьей деревни всегда лгут, а в ответах чередовцев ложь чередуется с правдой (первый ответ чередовца может оказаться как правдой, так и ложью).

Как-то раз приезжий встретился с пятью островитянами, которым он по характерным чертам их внешности мысленно дал следующие прозвища: Косоглаз, Борода, Курнос, Алощек и Длинноух. Желая узнать, в каких деревнях эти люди живут, приезжий попросил первых двух рассказать ему по порядку, кто из какой деревни родом. Косоглаз ответил, что Борода — чередовец, Курнос правдовец, Алощек также родом из Чередова, а Длинноух лгуновец. Борода, однако, утверждал, что Косоглаз чередовец, Курнос из Лгунова, Алощек правдовец, а Длинноух из Чередова. Можно ли из полученных ответов сделать верные выводы о родной деревне каждого из пяти островетян?

ЮНЫМ МЫСЛИТЕЛЯМ

В Клубе Юных Мыслителей на вступительном экзамене каждому поступающему была прежде всего вручена записка следующего содержания:

ИМНОУРТДЕНМНДИИДОНО ВТНЛВАМЕРЕЕКТЕСИ

причем было сказано, что теперь каждый поступающий должен сам знать, что ему для продолжения экзамена надо делать. Какое указание давала записка?

---

*) О других интересных свойствах параболы можно узнать, например, из книги И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и Э. Э. Шноля «Функции и графики», «Наука», 1965.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Задачи

М186 — М190; Ф198 — Ф202

*Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 марта 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», **М186, М187** или «... **Ф200**».*

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М186. Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

в целых числа, отличных от 1.

В. Слепченко, ученик 10 класса

М187. На плоскости заданы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C треугольника ABC, у которого:

а) высота AA' равна стороне BC;
б) медиана AA_1 равна стороне AC;
в) медиана AA_1 равна стороне BC;
г) высота CC' равна медиане BB_1;
д) высота BB' равна медиане CC_1.

М. А. Квантов

М188. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан не менее чем с n другими (беспосадочными рейсами). Докажите, что даже если отменить любые $n-1$ рейсов, то все равно из любого города можно добраться в любой другой на самолетах (с пересадками). Укажите все случаи, когда такая «связность» нарушается при отмене n рейсов.

А. К. Кельманс

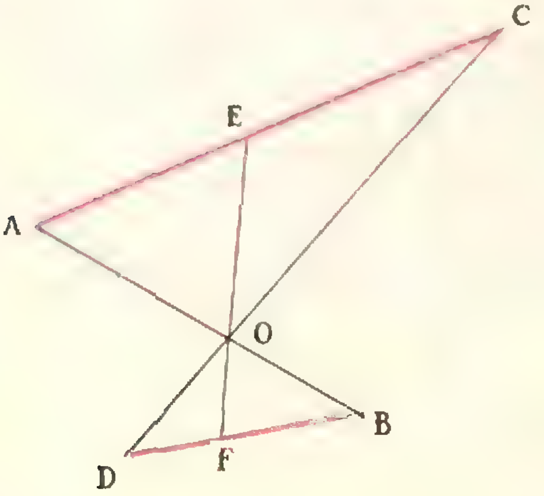


Рис. 1.

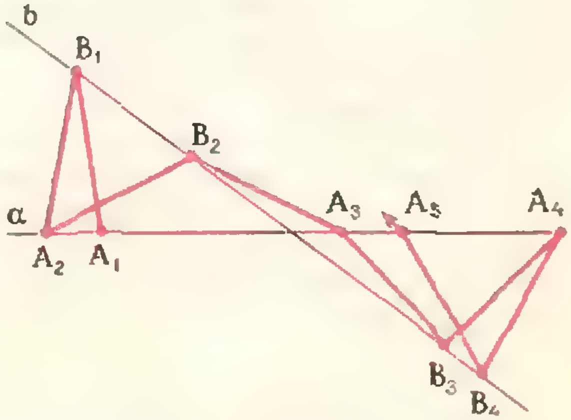


Рис. 2.

М189. Три отрезка AB, EF и CD проходят через одну точку O, причем точка E лежит на отрезке AC, а точка F — на отрезке BD. Докажите, что EF меньше хотя бы одного из двух отрезков — AB или CD (рис. 1).

Д. Ю. Григорьев

М190*. На плоскости даны две прямые a и b. В точке A_1, находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b, сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ..., руководствуясь следующими правилами (рис. 2):

(1) точки $A_1, A_2, A_3, \dots$ лежат на прямой a, точки $B_1, B_2, B_3, \dots$ — на прямой b;

(2) $A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 = \dots = 1$;

(3) точка A_n не совпадает с A_{n+1}, кроме случая, когда $A_nB_n \perp a$ (и, аналогично, B_n совпадает с B_{n+1}, только если $B_nA_{n+1} \perp b$). (Нетрудно видеть, что условиями (1) — (3) последовательность прыжков, начиная с B_1A_2, определяется однозначно.)

Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, то есть в некоторый момент она попадет в начальную точку A_1 и затем будет последовательно проходить те же самые точки $B_2, A_2, B_3, \dots$, как в начале пути, а если — иррациональным числом, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Ф198. Конькобежец решил затормозить и свел вместе пятки. Хотя это и трудно (почему?), но конькобежцу удается удерживать пятки вместе. Как он будет двигаться дальше?

Г. Л. Коткин

Ф199. Нейтрон легко проходит через слой свинца, но задерживается в таком же слое парафина, воды или другого соединения, содержащего водород. Объясните, почему.

П. Л. Капица.

Ф200. В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный гелий происходит нагревание газа до температуры T. Оценить величину T, если напряжение на конденсаторе $U = 30$ *кв*, емкость конденсатора $C = 18$ *мкф* и газ занимает объем 10 *л* при давлении 10^{-2} *мм рт. ст.*

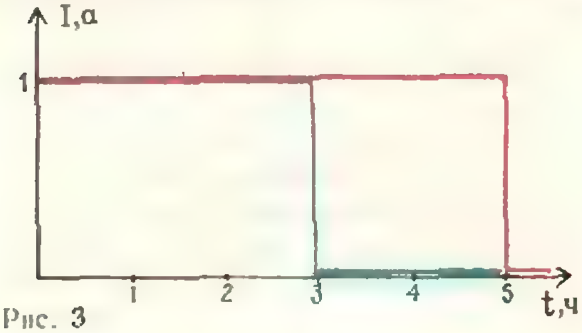


Рис. 3

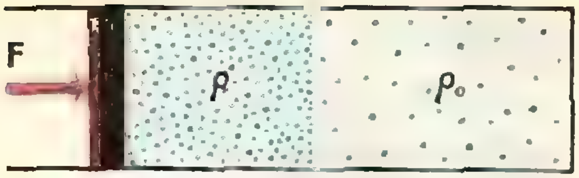


Рис. 4.

Ф201. Если к некоторому сопротивлению подключить аккумулятор, то зависимость тока в цепи от времени будет такой, как показано на рисунке 3 красной линией. Если к этому же сопротивлению подключить другой такой же аккумулятор, но частично разряженный, то зависимость тока от времени будет такой, как показано на рисунке 3 синей линией. Если оба аккумулятора подключить к тому же сопротивлению вместе, соединив их параллельно, то вначале по цепи будет идти ток 1,5 *а*. Нарисуйте график дальнейшего изменения тока в цепи со временем.

Внутреннее сопротивление аккумулятора в процессе разрядки не меняется.

Ф202. Труба радиуса r заполнена пористым веществом плотности ρ_0. Невесомый поршень, на который действует постоянная сила F, вдвигаясь в трубу, уплотняет вещество до плотности ρ (рис. 4). С какой скоростью движется поршень, если уплотнение происходит скачком, то есть в трубе как бы перемещается с некоторой скоростью поверхность, справа от которой плотность вещества ρ_0, а слева ρ? В начальный момент поверхность совпадает с плоскостью поршня.

Решения задач

М146—М150; Ф164—Ф169

М146. *а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.*

б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в) Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное утверждение верно, а для каких — нет.

а) Ясно, что среди семи вершин обязательно найдутся две соседние вершины с фишками одного цвета (если бы цвета чередовались, то многоугольник имел бы четное число сторон).

Обозначим эти вершины через A_1 и A_2. Можно считать, что стоящие в них фишки — белые (рис. 1). Заметим, что существуют три вершины, каждая из которых образует вместе с вершинами A_1 и A_2 равнобедренный треугольник; обозначим их через A_0, A_3 и B. Если в одной из них стоит белая фишка, то соответствующий треугольник — $A_0A_1A_2$, — $A_3A_1A_2$ или BA_1A_2 — искомый. Если же во всех трех этих вершинах черные фишки, то треугольник A_0A_3B — искомый.

То же самое рассуждение годится для любого правильного n-угольника с нечетным $n \geqslant 5$ (в роли A_0, A_3 выступают соседние с A_1 и A_2 вершины, в роли B — середина большей из дуг A_1A_2).

б) Для $n = 8$ утверждение неверно. Пример расстановки черных и белых фишек, при которой никакие три фишки одного цвета не располагаются в вершинах равнобедренного треугольника, изображен на рисунке 2, *а*.

Еще легче построить аналогичные примеры для $n = 3$, 4 и 6 (рис. 2, *б*, *в*, *г*); возможны и другие примеры.

в) Ответ: утверждение верно для $n = 5$, $n = 7$ и $n \geqslant 9$.

Примеры, изображенные на рисунке 2, показывают, что утверждение неверно для $n = 3, 4, 6, 8$. Выше мы доказали, что оно верно для $n = 5$, $n = 7$ и для больших нечетных n. Докажем, что оно верно для всех $n \geqslant 9$.

Предположим, что для некоторой расстановки фишек в вершинах правильного n-угольника утверждение неверно. Прежде всего, ясно, что где-то найдутся две соседние вершины с фишками одного цвета, — если цвета фишек чередуются, то уже среди пяти последовательных вершин встретится требуемый равнобедренный треугольник. Можно считать, что это — вершины A_4 и A_5 с фишками белого цвета (рис. 3). Тогда последовательно

Рассматриваем	Делаем вывод
$A_3A_4A_5$ и $A_4A_5A_6$	A_3 и A_6 — черные
$A_3A_6A_9$	A_9 — белая
$A_1A_5A_9$ и $A_5A_7A_9$	A_1 и A_7 — черные
$A_1A_2A_3$ и $A_6A_7A_8$	A_2 и A_8 — белые
$A_2A_5A_8$	противоречие

Можно показать, что верно и более сильное утверждение: *при любом разбиении множества $\{1, 2, \ldots, 9\}$ на два подмножества хотя бы в одном из подмножеств встретятся три числа, из которых одно равно полусумме двух других*. Мы доказали это ут-

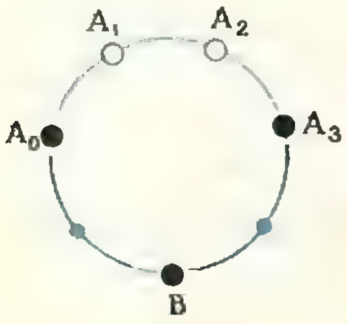


Рис. 1.

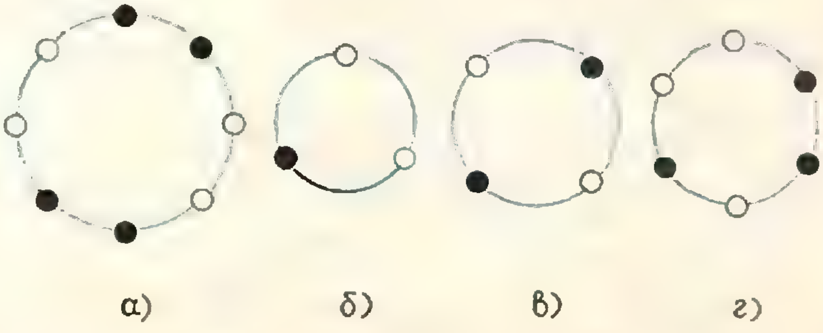

а) б) в) г)

Рис. 2.

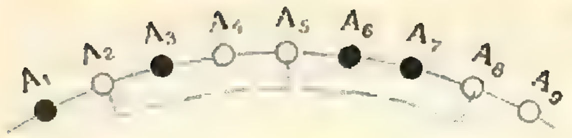


Рис. 3.

верждение при дополнительном предположении, что 4 и 5 принадлежат одному подмножеству. Другие случаи разбираются аналогично.

М147. *Докажите, что если четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, таков, что касательные к окружности в точках A и C пересекаются на продолжении диагонали BD, то*
а) касательные в точках B и D пересекаются на продолжении диагонали AC;
б) биссектрисы внутренних углов A и C четырехугольника пересекаются на диагонали BD (а углов B и D — на AC).

а) Пусть A, B и C — три точки на окружности, K — точка пересечения касательных, проведенных в точках A и C. Найдем условие, определяющее положение точки D пересечения прямой BK с окружностью (рис. 4).

$\triangle ABK \backsim \triangle DAK$: угол K у этих треугольников общий, а $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ADK$, поскольку каждый из них измеряется половиной дуги AB. Поэтому

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{AK} = \frac{AK}{DK} \qquad (1)$$

(попутно мы доказали известную теорему: $AK^2 = BK \cdot KD$).

Точно так же $\triangle CBK \backsim \triangle DCK$, и поэтому

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK}. \qquad (2)$$

Правые части в (1) и (2) равны, потому что $AK = CK$, отсюда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}. \qquad (3)$$

Заметим, что отношение AD/CD монотонно увеличивается при движении точки D по дуге окружности от A к C. Действительно, по теореме синусов, примененной к $\triangle ACD$ (рис. 5)

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\sin \sphericalangle C}{\sin \sphericalangle A} = \frac{\sin(180^\circ - \sphericalangle D - \sphericalangle A)}{\sin \sphericalangle A} =$$
$$= \sin(180^\circ - \sphericalangle D) \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle A - \cos(180^\circ - \sphericalangle D);$$

здесь $180^\circ - \sphericalangle D$ — величина постоянная, $\sin(180^\circ - \sphericalangle D) > 0$, а $\operatorname{ctg} \sphericalangle A$ монотонно убывает при увеличении $\sphericalangle A$ от 0 до $180^\circ - \sphericalangle D$, то есть при движении точки D от C к A. Отсюда следует, что условию (3) соответствует одно определенное положение точки D (при заданных A, B и C).

Таким образом, условие (3) не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы точки B, D и точка пересечения касательных, построенных в точках A и C, лежали на одной прямой.

Точно так же можно доказать, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы касательные, проведенные в точках B и D, пересекались на прямой AC, можно записать так:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC}. \qquad (3')$$

Но условия (3) и (3′), очевидно, совпадают: и (3), и (3′) можно записать в симметричном виде:

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD.$$

Это делает утверждение задачи а) очевидным.

б) Пусть L_1 — точка пересечения биссектрисы угла A треугольника BAD с прямой BD (рис. 6). Тогда, как известно,

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{AB}{AD}.$$

Аналогично, если L_2 — точка пересечения биссектрисы угла C с BD, то

$$\frac{BL_2}{L_2D} = \frac{BC}{CD}.$$

Поэтому из условия (3) следует, что

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{BL_2}{L_2D}.$$

Но каждому значению отношения $\frac{BL}{DL}$ соответствует одна точка L на отрезке BD,

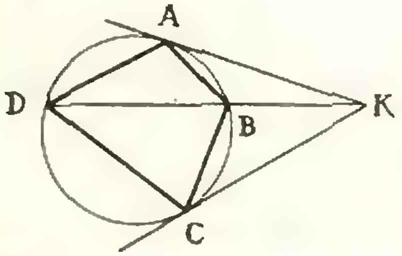


Рис. 4.

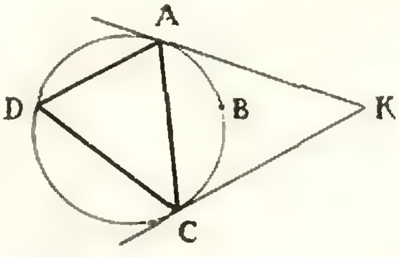


Рис. 5.

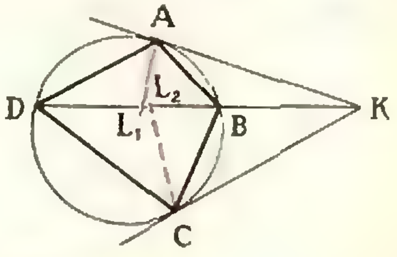


Рис. 6.

поскольку при движении точки L от B к D эта величина монотонно возрастает. Поэтому точки L_1 и L_2 совпадают.

М148. *Последовательность* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *определяется следующими условиями:* $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$, *для любого* $n > 1$

$$(\alpha+\beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1} \beta x_{n-1} x_1 + \\ + \alpha^{n-2} \beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n.$$

Здесь λ, α, β *— заданные положительные числа. Найдите* x_n *и выясните, при каком* n *величина* x_n *будет наибольшей.*

Выпишем равенства, определяющие x_n, для нескольких первых значений $n>1$ (пользуясь условием $x_0 = 1$):

$$[(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2]\, x_2 = \alpha\beta x_1^2,$$

$$[(\alpha+\beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3]\, x_3 = \alpha^2\beta x_2 x_1 + \alpha\beta^2 x_1 x_2,$$

$$[(\alpha+\beta)^4 - \alpha^4 - \beta^4]\, x_4 = \\ = \alpha^3\beta x_3 x_1 + \alpha^2\beta^2 x_2^2 + \alpha\beta^3 x_1 x_3.$$

Отсюда находим (пользуясь условием $x_1 = \lambda$)

$$x_2 = \frac{\lambda^2}{2}, \qquad x_3 = \frac{\lambda^3}{2\cdot 3}, \qquad x_4 = \frac{\lambda^4}{2\cdot 3\cdot 4}.$$

Естественно предположить, что

$$x_n = \frac{\lambda^n}{n!},$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots n$. Докажем по индукции, что это действительно так для всех n (если считать, как это принято, что $0! = 1! = 1$, то формула $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$ верна для $n = 0$ и $n = 1$). Мы можем считать известным, что $x_k = \frac{\lambda^k}{k!}$ для всех $k \leqslant n-1$. Тогда из равенств

$$[(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n]\, x_n = \\ = \sum_{k=1}^{k=n-1} \alpha^{n-k}\beta^k x_{n-k} x_k = \\ = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\alpha^{n-k}\beta^k\lambda^{n-k}\lambda^k}{(n-k)!\,k!} = \\ = \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=1}^{k=n-1} C_n^k \alpha^{n-k}\beta^k = \\ = [(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n]\, \frac{\lambda^n}{n!}$$

следует, что $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$, поскольку $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и общий множитель левой и правой частей положителен при $n > 1$.

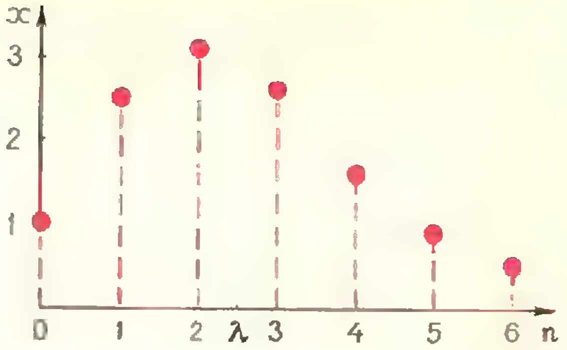


Рис. 7.

Мы использовали выше формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

для коэффициентов разложения бинома

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

о которой рассказано в статье В. Н. Вагутена (см. стр. 27—34).

Выясним, при каком n величина x_n наибольшая. Неравенство

$$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{\lambda^n}{n!}$$

эквивалентно неравенству $n \leqslant \lambda$. Таким образом, при переходе от $n-1$ к n число x_n увеличивается, если $n<\lambda$, и уменьшается, если $n > \lambda$. Отсюда мы получаем ответ на вопрос задачи: наибольшее значение x_n принимает при $n = [\lambda]$ ($[\lambda]$ — наибольшее целое число, не превосходящее λ); если λ — целое число, то $x_{[\lambda]-1} = x_{[\lambda]}$ — два наибольших числа последовательности x_n.

На рисунке 7 в качестве иллюстрации приведен график последовательности $n \to x_n$ для $\lambda = 2{,}5$.

М149. *Пусть* O *— точка пересечения диагоналей четырехугольника* $ABCD$. *Докажите, что*

а) если равны периметры треугольников ABC, BCD, CDA *и* DAB, *то* $ABCD$ *— прямоугольник;*

б) если равны периметры треугольников ABO, BCO, CDO *и* DAO, *то* $ACBD$ *— ромб.*

а) Обозначим стороны и диагонали четырехугольника, как показано на рис. 8. Из равенств

$$x_1 + x_2 + y_1 = x_3 + x_4 + y_1,$$

$$x_2 + x_3 + y_2 = x_1 + x_4 + y_2,$$

складывая их друг с другом (и вычитая одно из другого), находим: $x_2 = x_4$, $x_1 = x_3$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

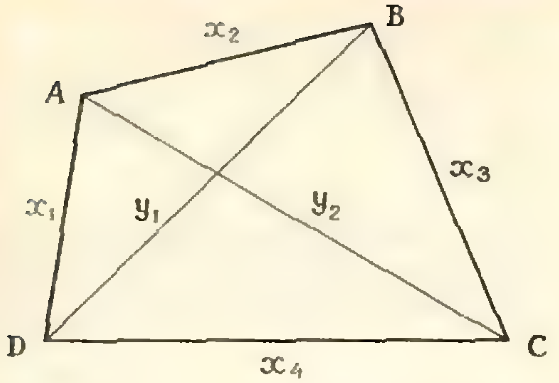


Рис. 8.

Из равенства

$$x_1 + x_2 + y_1 = x_2 + x_3 + y_2 = x_2 + x_1 + y_2$$

теперь следует, что $y_1 = y_2$, то есть $ABCD$ — прямоугольник.

б) Выберем на каждой диагонали AC, BD больший из отрезков, на которой она делится точкой O. Можно считать, изменив, если нужно, обозначения, что $AO \geqslant OC$, $BO \geqslant OD$ (рис. 9). Тогда периметр треугольника AOB не меньше периметра треугольника COD, причем равенство возможно, только если $AO = OC$ и $BO = OD$. (Для того чтобы убедиться в этом, достаточно построить треугольник $A'OB'$, симметричный треугольнику AOB относительно точки O: $A'OB'$ объемлет COD.) Но если $AO = OC$ и $BO = OD$, то из равенства периметров сразу следует, что $AB = BC = CD = DA$, то есть $ABCD$ — ромб.

Н. Б. Васильев

M150. *Из чисел 1, 2, ..., k составляются всевозможные наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n (легко видеть, что их k^n). Выбраны два подмножества P и Q таких наборов (один и тот же набор может входить и в P, и в Q). Известно, что если взять произвольный набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ из P и произвольный набор $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ из Q, то они будут совпадать хотя бы в одном месте (то есть $p_i = q_i$ для некоторого i). Тогда либо в P, либо в Q не более, чем k^{n-1} наборов.*

Докажите это утверждение

а) для $k = 2$ и любого n;

б) для $n = 1, 2, 3$ и любого k;

в) для произвольных $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$.

Попробуйте найти другие ограничения на количество элементов в подмножествах P и Q, связанных таким условием.

а) $k = 2$. Набор $\bar{d}$ назовем противоположным набору d, если $\bar{d}$ получен из d заменой всех 1 на 2, а 2 на 1. Обозначим через $\overline{M}$ множество всех наборов, противоположных наборам из M. Наборы d и $\bar{d}$ ни на одном месте не совпадают. Поэтому, если d входит в P, то $\bar{d}$ не может входить в Q. Значит, $\overline{P}$ и Q не содержат одинаковых наборов. Поэтому либо в $\overline{P}$, либо в Q не более половины всех наборов. Но в P и в $\overline{P}$ одинаковое количество наборов. Значит, либо в P, либо в Q не более половины всех наборов, то есть не более чем 2^{n-1} наборов.

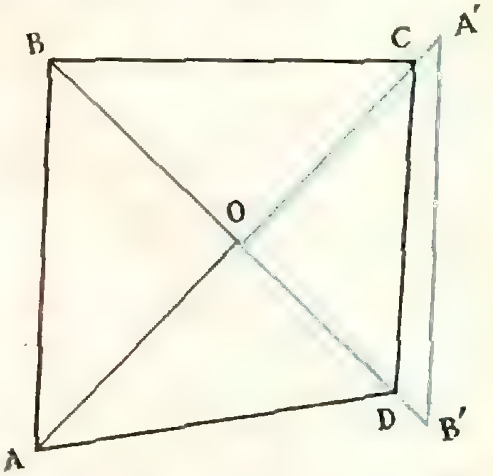
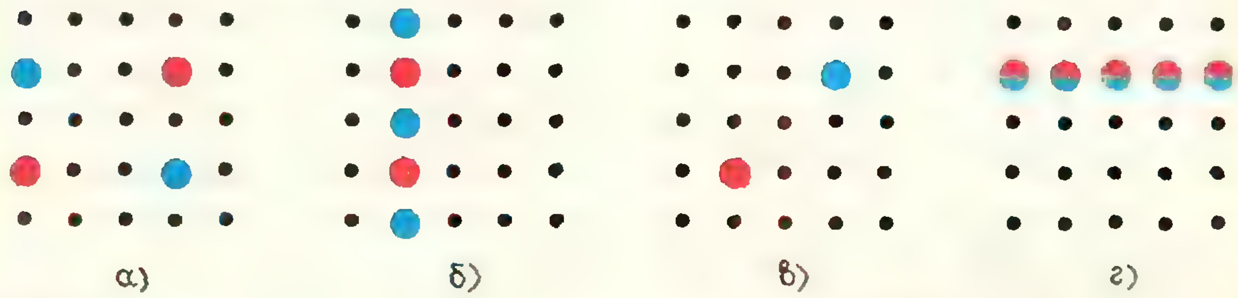


Рис. 9.

б) Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Для $n = 2$ задачу можно сформулировать так: k^2 точек расставлены на плоскости в узлах квадратной решетки $(k - 1) \times \times (k - 1)$ (рис. 10). Некоторые из этих точек нужно закрасить красным, некоторые — синим цветом так, чтобы любая из красных и любая из синих точек лежали либо в одном столбце, либо в одной строке (то есть ситуация в) невозможна). Одну точку можно закрашивать в оба цвета (случай г). Нужно



а) б) в) г)

Рис. 10.

доказать, что всегда точек какого-то одного цвета не более k. Рисунки а) и б) соответствуют следующим двум случаям.

1) *В подмножестве P есть два таких набора (a_1, a_2) и (b_1, b_2), что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$.*

Тогда в Q могут входить только 2 набора (a_1, b_2) и (b_1, a_2). Но $2 \leqslant k$, и утверждение верно.

2) *В подмножестве P любые два набора совпадают в одном месте (для определенности — в первом).*

Тогда любой набор из P имеет вид (a, b), где a — фиксировано. Но таких наборов не более k.

Подобным, но значительно более длинным рассмотрением случаев можно доказать утверждение и при $n=3$. Рассмотрим сразу общий случай.

в) Пусть P содержит p наборов, Q содержит q наборов. Докажем индукцией по n при фиксированном k более сильное утверждение: если $p \geqslant k^{n-1}$, *то при выполнении условий задачи* $p+(k-1)q \leqslant k^n$. Отсюда будет следовать, что если $p \geqslant k^{n-1}$, то $q \leqslant k^{n-1}$.

Если $n=1$, то по условию $p \geqslant 1$. Если $p=1$, то $q \leqslant 1$. Если $2 \leqslant p \leqslant k$, то $q=0$. В любом случае $p+(k-1)q \leqslant k$.

Пусть для $n=s$ утверждение доказано. Рассмотрим $n=s+1$. Пусть $p \geqslant k^s$. Надо доказать, что $p+(k-1)q \leqslant k^{s+1}$. Обозначим через P_1 множество всех наборов из P, оканчивающихся цифрой 1. Зачеркнув в наборах из P_1 последнюю цифру 1, мы получим можество P'_1 наборов длины s. Число наборов в P_1 (столько же наборов и в P'_1) обозначим через p_1. Точно так же рассмотрим множества $P_2, \ldots, P_k$ (наборов, оканчивающихся на $2, \ldots, k$); $P'_2, \ldots, P'_k$; $Q_1, \ldots, Q_k$; $Q'_1, \ldots, Q'_k$ и числа $p_2, \ldots, p_k$; $q_1, \ldots, q_k$. По условию любые 2 набора из P_r и Q_t совпадают хотя бы в одном месте, но если $r \neq t$, то в последнем разряде они совпадать не могут, поэтому любые 2 набора из P'_r и Q'_t при $r \neq t$ совпадают хотя бы в одном месте. Так как $p \geqslant k^s$, то $p_i \geqslant k^{s-1}$, хотя бы для одного p_i (так как набор P разбит на k наборов). Можно считать, что

$$p_1 \geqslant k^{s-1}, \ldots, p_m \geqslant k^{s-1},$$
$$p_{m+1} < k^{s-1}, \ldots, p_k < k^{s-1}. \quad (4)$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $m=1$, то есть

$$p_1 \geqslant k^{s-1}, \quad p_2 < k^{s-1}, \ldots, \quad p_k < k^{s-1}. \quad (5)$$

Из сказанного выше о P'_r и Q'_t и предположения индукции вытекают следующие неравенства:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1+(k-1)q_2 \leqslant k^s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1+(k-1)q_k \leqslant k^s. \end{array}\right. \quad (6)$$

Из этих неравенств следует, что

$$q_2 \leqslant k^{s-1}, \ldots, q_k \leqslant k^{s-1}, \quad (7)$$

так как $p_1 \geqslant k^{s-1}$. Сложив неравенства (6) и разделив полученное неравенство на $k-1$, получим

$$p_1+q_2+\cdots+q_k \leqslant k^s. \quad (8)$$

Если $q_1 \geqslant k^{s-1}$, то точно так же получим

$$q_1+p_2+\cdots+p_k \leqslant k^s. \quad (9)$$

Складывая (8) и (9), получим $p+q \leqslant 2 \cdot k^s$, и так как $p \geqslant k^s$, то

$$q \leqslant k^s. \quad (10)$$

Если же $q_1 < k^s$, то неравенства (9) и (10) тем более выполняются ввиду неравенств (5) и (7). В обоих случаях, складывая (8) и (9) и прибавляя (10), умноженное на $k-2$, получим $p+q+(k-2)q \leqslant 2 \cdot k^s+(k-2)k^s$,

или $\qquad p+(k-1)q \leqslant k^{s+1}$.

2) $m>1$. Тогда, так же как и в случае 1), получим

$$\left\{\begin{array}{l} p_1+q_2+\cdots+q_k \leqslant k^s, \\ p_2+q_1+q_3+\cdots+q_k \leqslant k^s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m+q_1+\cdots+q_{m-1}+q_{m+1}+ \\ \qquad +\cdots+q_k \leqslant k^s \end{array}\right. \quad (11)$$

и

$$q_1 \leqslant k^{s-1}, \ q_2 \leqslant k^{s-1}, \ldots, \ q_k \leqslant k^{s-1}. \quad (12)$$

Складывая неравенства(11), получим

$$p_1+\cdots+p_m+(m-1)(q_1+\cdots+q_m)+ \\ +m(q_{m+1}+\cdots+q_k) \leqslant m \cdot k^s. \quad (13)$$

Прибавляя к (13) неравенства из (4) для $p_{m+1}, \ldots, p_k$ и неравенства (12), первые m из которых умножены на $k-m$, а остальные на $k-m-1$, получим $p_1+\cdots+p_k+(k-1)(q_1+\cdots+q_m) \leqslant m \cdot k^s+(k-m) \times k^{s-1}+m(k-m)k^{s-1}+(k-m)(k-m-1)k^{s-1}=mk^s+(k-m)k^s=k^{s+1}$, то есть

$$p+(k-1)q \leqslant k^{s+1},$$

что и требовалось доказать

Б. В. Алексеев

Большинству читателей, которые присылали нам в 1971 году решения задач из «Задачника «Кванта», мы направили письма, в которых указано, какие задачи решены верно, где допущены ошибки. Ниже мы приводим список тех, кто прислал правильные и полные решения некоторых из задач

М141 — М150. Жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи.

С. Абрамов (Москва) 6; *Н. Ажищев* (п. Литовка Львовской обл.) 1; *И. Акулич* (Хмельницкий) 2, 9; *Р. Али-заде* (п. Джербаильский) 2, 6; *А. Агасян* (Ереван) 2; *А. Асташов* (Львов) 1—3, 5,6, 8—0; *Р. Бадалян* (г. Кафан) 2; *Ю. Бакши* (Москва) 1, 3, 5, 6; *П. Баньковский* (Уральск) 6—9; *А. Баранов* (Семиозерье) 6; *А. Борисов* (Кабардино-Балкарская АССР) 2; *О. Егларян* (Сисиан) 2, 6, 9; *К. Безденежных* (Н. Тагил) 6; *С. Белолипецкий* (Киржач) 2, 7; *А. Блинов* (Абакан) 2; *А. Блох* (Харьков) 2—6, 8; *А. Бочаров* (Николаев) 2; *А. Вильков* (Ташкент) 1, 5; *С. Вилкомир* (Горьковская обл.) 3; *А. Войновский* (Баку) 9; *А. Волков* (Москва) 1, 2; *А. Волков* (Челябинск) 2; *Ю. Вороновский* (Днепропетровск) 2; *Г. Высоцкая* (Красноярск) 1—3, 6; *И.* и *М. Гандельсман* (Ленинград) 2, 3, 6; *И. Гатауллин* (Москва) 2; *Л. Генгринович* (Ташкент) 1, 2; *С. Гладков* (Пучеж) 2; *А. Говш* (Черисе Московской обл.) 1; *А. Гордиенко* (с. Полтавченское) 1, 2, 6; *И. Готман* (Арзамас 9; *А. Григорьева* (Грозный) 2; *А. Григорян* (Баку) 1, 3, 5—8; *С. Григорян* (Ереван) 1, 2, 5—9; *В. Гринман* (Москва) 5; *Е. Гурвич* (Ташкент) 1, 2; *Е. Гусев* (Павлоград) 2, 3; *Г. Данилов* (Магадан) 6, 9; *Г. Дорман* (Магнитогорск) 1—3, 5; *В. Дремучев* (Горький) 2; *С. Дужин* (Могилев) 1, 5, 6; *Э. Дяченко* (г. Андушевка Житомирской обл.) 2, 8; *В. Евдокимов* (Ярославль) 9; *Е. Еремин* (Москва) 6, 8; *А. Жданов* (Новошахтинск) 6; *А. Жданов* (Славянск-на-Кубани) 2, 6; *В. Железный* (Ленинград) 2; *А. Журавлев* (Москва) 6; *Е. Зайцев* (Москва) 5; *Н. Захотей* (с. Карпинено Котовского р-на) 2; *М. Звегинцев* (Верхне-Днепровск) 2; *Т. Кабальнова* (Уфа) 2; *М. Кауль* (Фрунзе) 1, 2, 6—9; *Л. Книжнерман* (Москва) 8; *В. Ковтунец* (Ровенская обл.) 6, 8, 9; *О. Кокотова* (Брянск) 2; *В. Колосов* (Киев) 7, 9; *В. Котенев* (Курск) 9; *В. Кравчук* (Брест) 2; *К. Кудайберденов* (Алма-Ата) 8; *Ю. Кузнецов* (Караганда) 6—9; *А. Кукуш* (Киев) 1—3, 6, 9; *М. Курдаглян* (ГССР) 9; *С. Лахтуров* (Черкассы) 2; *М. Левин* (Витебск) 1, 9; *М. Лифшиц* (Балашиха) 6; *Т. Локотом* (Одесса) 7, 9; *Г. Лутингер* (Черновцы) 2; *С. Мазуренко* (Минск) 6, 9; *А. Макаричев* (Львов) 2, 6—9; *В. Макеев* (Ленинград) 3, 5, 6, 8, 9; *Г. Малинецкий* (Уфа) 2; *Б. Марьяновский* (Винница) 6, 8; *К. Нивников* (Ярославская обл.) 1, 2, 8; *В. Никифоров* (Чебоксары) 2, 3; *А. Николаев* (Москва) 1—3, 5; *Е. Овчинникова* (Североуральск) 2; *Е. Онегин* (Скопин) 2; *В. Панарин* (Красноярск) 6; *И. Пантелеев* (Жуковский) 5; *А. Папин* (Гомель) 9; *П. Парамонов* (Волгоградская обл.) 1, 2, 6, 7, 9; *В. Пекайте* (Варняй) 6; *А. Печковский* (Москва) 1—3, 5—0; *А. Питиков* (Пенза) 2; *П. Полонский* (Москва) 6; *В. Попов* (с. Октябрьское Ивановской обл.) 2; *А. Пригода* (Караганда) 2; *Л. Пугач* (Днепропетровск) 1—3; 5; *Д. Рогозкин* (Москва) 3; *С. Родионов* (Саратов) 1, 2, 5; *Д. Рудицер* (Харьков) 1, 2, 5, 6, 8, 9; *Ю. Сайфаль* (Давид-Городок) 2; *М. Сапир* (Свердловск) 1—3, 6; *В. Сац* (Киев) 2, 3; *М. Селиверстова* (Московская обл.) 2; *Д. Сергеев* (Воронеж) 6, 9; *Р. Сирота* (Харьков) 2, 3, 5, 6; *А. Скирко* (Политотдельское Волгоградской обл.) 2; *С. Скоков* (дер. Соковки) 2; *С. Слепнев* (Горький) 1, 2; *В. Слепой* (Фрунзе) 1, 7; *Ш. Слепой* (Черновцы) 6, 8; *Б. Слепченко* (Челябинск) 1, 2, 6—9; *А. Слесаренко* (Рубцовск) 2; *А. Слинкин* (Москва) 1, 3, 5, 8; *М. Смеркалов* (Рыбинск) 6; *В. Смирнов* (Белохово) 6; *М. Спиваковский* (Москва) 2, 3; *А. Сурков* (Вятские Поляны) 2; *П. Сухов* (Саратов) 1, 2, 6; *А. Ткач* (Каменец-Подольский) 2; *А. Тужилин* (Москва) 6, 7, 9; *Э. Туркевич* (Черновцы) 1—3, 5—9; *И. Файнштейн* (Херсон) 2, 3, 6; *М. Французов* (Никель) 6, 9; *С. Цанава* (Тбилиси) 8; *Н. Чернов* (Кривой Рог) 1—3, 5—9; *Арк. Черняк* (Минск) 1—3; *В. Чертков* (Киев) 6; *Е. Чесноков* (Ивановская обл.) 2, 6; *А. Шамардин* (Воронеж) 2, 3; 5; *В. Шевалдин* (Свердловск) 2; *А. Шерстюк* (Николаев) 1—3, 5, 8; *В. Шрейдер* (с. Михайловка Кустанайской обл.) 2; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 2, 5, 6, 8, 9; *Р. Юлмухаметов* (Иткулово БАССР) 6; *Б. Юсин* (Москва), 2, 3.

Ю. П. Лысов

Ф164. *Кубик из пенопласта массой $M = 100$ г лежит на горизонтальной подставке. Высота кубика равна $a = 10$ см. Снизу кубик пробивает вертикально летящая пуля массой $m = 10$ г (рис. 11). Скорость пули при входе в кубик $v_1 = 100$ м/с, при вылете — $v_2 = 95$ м/с. Подпрыгнет ли кубик?*

Кубик может подпрыгнуть, если сила F, действующая на него со стороны пули, окажется больше силы тяжести $Mg \approx 1$ н. Найдем эту силу. Для этого рассмотрим пулю. На нее со стороны кубика действует такая же по абсолютной величине, но противоположная по направлению сила и сила тяжести mg.

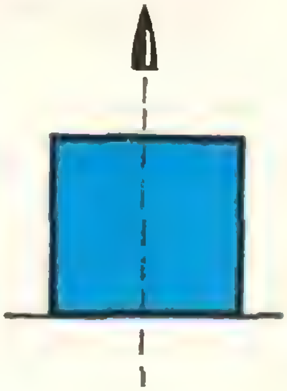


Рис. 11.

Скорость пули при пролете сквозь кубик меняется незначительно — ее изменение равно 5 $м/с$, что составляет всего 5% от скорости пули при входе в кубик. Поэтому можно считать, что сила F не зависит от скорости пули и постоянна.

Импульс пули при пролете сквозь кубик меняется благодаря действию на пулю двух сил — силы тяжести и силы трения. Если время, за которое пуля пролетает кубик, обозначить τ, то

$$m(v_1 - v_2) = (F + mg)\tau. \qquad (1)$$

Время τ найти нетрудно. Средняя скорость полета пули в кубике равна $v_{ср} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ (так как силы, действующие на кубик, постоянны, то постоянно и ускорение пули, а значит, скорость пули линейно меняется со временем). Размер кубика a. Это расстояние пуля пролетает за время

$$\tau = \frac{a}{v_{ср}} = \frac{2a}{v_1 + v_2} \approx 10^{-3} с.$$

Подставив это значение τ в формулу (1), найдем

$$F = \frac{m(v_1 - v_2) - mg\tau}{\tau} \approx 50 \text{ н}^{*)}.$$

Сила F больше силы тяжести, которая действует на кубик. Следовательно, кубик подскочит.

Ф165. *Определить, во сколько раз изменится освещенность изображения Солнца, полученного плосковыпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами?*

Освещенность изображения E равна отношению светового потока Φ, проходящего через линзу, к площади изображения S. Отношение освещенностей для рассматриваемых двух случаев можно записать так:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Phi_2/S_2}{\Phi_1/S_1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

Освещенность поверхностей линз в обоих случаях одна и та же. Поэтому отношение световых потоков $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ равно отношению площадей линз — целой и разрезанной пополам. Это значит, что $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{1}{2}$.

Теперь найдем отношение площадей изображения.

Изображение Солнца лежит в фокальной плоскости линзы. Обозначим фокусное расстояние линзы F, а угол, под которым видно Солнце с Земли, α. Так как Солнце находится очень далеко от Земли, то можно считать, что из каждой точки Солнца на линзу попадает параллельный пучок лучей, собирающихся в фокальной плоскости линзы. Поэтому угол α — это угол между пучками лучей, идущих от крайних точек Солнца.

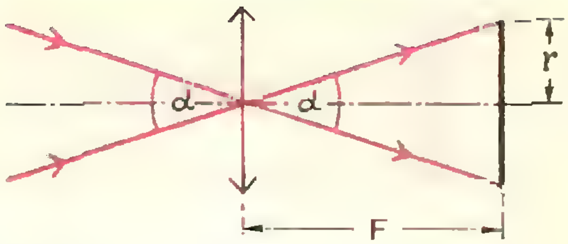


Рис. 12.

Из рисунка 12 видно, что радиус изображения Солнца равен

$$r = F \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Так как угол α мал ($\alpha \approx 30'$), то $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ и $r \approx F \frac{\alpha}{2}$.

Для того чтобы найти размер изображения во втором случае, нужно знать фокусное расстояние составной линзы.

Заметим, что оптическая сила двух сложенных вплотную тонких линз равна сумме их оптических сил. Действительно, луч, вышедший из фокуса первой линзы, становится после того, как он пройдет эту линзу, параллельным главной оптической оси системы и после прохождения второй линзы попадает в ее фокус. Обозначив фокусное расстояние сложной линзы F', мы можем согласно формуле линзы написать

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Но отсюда следует, что фокусное расстояние линзы, составленной из двух половинок плосковыпуклой линзы, вдвое меньше фокусного расстояния целой линзы. Благодаря этому радиус изображения Солнца во втором случае будет вдвое меньше, чем в первом случае, а площадь изображения — в четыре раза меньше, то есть $\frac{S_1}{S_2} = 4$.

Поэтому $\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Следовательно, освещенность изображения Солнца увеличилась в два раза.

Ф166. *В расположенном горизонтально цилиндре с одной стороны от закрепленного поршня находится 1 моль идеального газа. В другой части цилиндра — вакуум. Пружина, расположенная между поршнем и стенкой цилиндра (рис. 13), находится в недефор-*

---

*) Величина $mg\tau$ много меньше изменения импульса пули, и ею можно было пренебречь. Это связано с очень малым временем взаимодействия пули с кубиком.

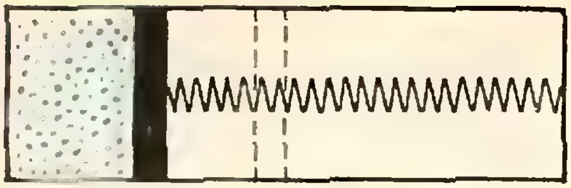


Рис. 13.

мированном состоянии. Цилиндр теплоизолирован от окружающей среды.

Поршень освобождают, и после установления равновесия объем, занимаемый газом, увеличится вдвое. Как изменится температура газа и его давление? Теплоемкости цилиндра, поршня и пружины пренебрежимо малы.

Согласно первому закону термодинамики количество тепла Q, сообщенного газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа ΔU и совершенной им работы A:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (1)$$

Но в данном случае сосуд теплоизолирован и $Q = 0$. Следовательно,

$$\Delta U + A = 0. \qquad (2)$$

То есть работа газа совершается за счет уменьшения его внутренней энергии, поэтому сразу можно сказать, что температура газа уменьшается.

Пусть вначале температура газа была T_1, давление P_1 и объем V_1, а после того, как поршень освободили и установилось равновесие, параметры газа стали соответственно T_2, P_2 и V_2, причем $V_2 = 2V_1$ (по условию).

Изменение внутренней энергии идеального газа пропорционально изменению температуры газа и равно

$$\Delta U = c_V (T_2 - T_1), \qquad (3)$$

где c_V — теплоемкость 1 моля газа при постоянном объеме.

Далее, работа, совершенная газом, равна изменению потенциальной энергии деформированной пружины:

$$A = \frac{kx^2}{2} \qquad (4)$$

(x — смещение поршня).

Выразим величину $\frac{kx^2}{2}$ через параметры газа.

Так как поршень после установления равновесия находится в покое, то сила упругости пружины $F = kx$ равна силе давления газа P_2S (S — площадь поверхности поршня):

$$kx = P_2S. \qquad (5)$$

Давление же газа связано с его температурой уравнением газового состояния. Для одного моля газа

$$P_2V_2 = RT_2. \qquad (6)$$

Так как объем газа при его расширении увеличился вдвое, а изменение объема газа равно Sx, то $V_2 = 2Sx$, и, следовательно,

$$2P_2Sx = RT_2. \qquad (7)$$

Принимая во внимание соотношения (5) и (7), можно записать

$$kx = \frac{RT_2}{2x}, \qquad (8)$$

$$kx^2 = \frac{RT_2}{2}. \qquad (9)$$

Таким образом, работа, совершенная газом, равна

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{RT_2}{4}. \qquad (10)$$

Подставим выражения (3) и (10) в равенство (2):

$$c_V (T_2 - T_1) + \frac{1}{4} RT_2 = 0.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{R}{c_V}}. \qquad (11)$$

Действительно, T_2 меньше T_1.

Теперь посмотрим как изменится давление газа. Согласно уравнению газового состояния первоначальное давление газа P_1, его объем $V_1 = \frac{V_2}{2}$ и температура T_1 были связаны формулой

$$P_1 \frac{V_2}{2} = RT_1.$$

Разделив это равенство на равенство (6), получим

$$\frac{P_1}{P_2} = 2\frac{T_1}{T_2} = 2\left(1 + \frac{1}{4} \frac{R}{c_V}\right),$$

$$P_2 = \frac{P_1}{2\left(1 + \frac{1}{4} \frac{R}{c_V}\right)}.$$

Давление тоже уменьшилось.

Ф167. *К выходу «черного ящика» подключен идеальный амперметр. Если ко входу «ящика» подключена батарея с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r, то ток через амперметр ровно в 2 раза меньше, чем в том случае, когда ко входу ящика подключены две такие батареи, соединенные последовательно. Нарисовать простейшую возможную схему внутреннего устройства «черного ящика».*

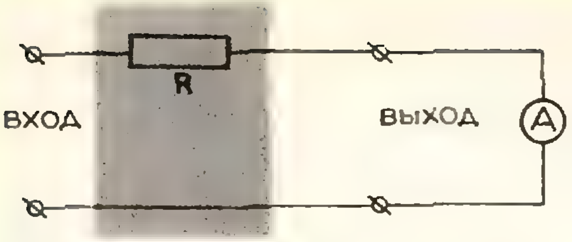


Рис. 14.

Схема внутри ящика не может состоять только из сопротивлений. Действительно, рассмотрим схему, показанную на рисунке 14, где R — сопротивление «ящика». При подключении одного источника через амперметр должен идти ток

$$I = \frac{E}{R + r}, \qquad (1)$$

а при подключении двух источников — ток $2I$, причем

$$2I = \frac{2E}{R + 2r}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) несовместимы. Они не имеют решения ни при каком R. Действительно, разделив уравнение (1) на (2), получим

$$\frac{1}{2} = \frac{R + 2r}{2(R + r)}$$

или

$$R + r = R + 2r,$$

а это невозможно.

Не спасает дела и подключение сопротивления параллельно входу или выходу ящика. (Покажите это!). Поэтому схема внутри ящика должна включать «активный» элемент — источник тока.

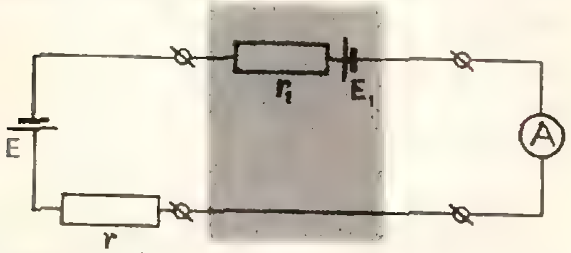


Рис. 15.

Рассмотрим одну из возможных схем, показанную на рисунке 15, и покажем, что она удовлетворяет условию задачи.

При подключении ко входу ящика одной батареи через амперметр пойдет ток

$$I_1 = \frac{E + E_1}{r + r_1},$$

а при подключении двух — ток

$$I_2 = \frac{2E + E_1}{2r + r_1}.$$

Так как $I_2 = 2I_1$, то

$$\frac{2(E + E_1)}{r + r_1} = \frac{2E + E_1}{2r + r_1}.$$

Отсюда найдем

$$E_1 = -E\frac{2r}{3r + r_1}.$$

Это равенство связывает между собой э. д. с. источника E_1 и его внутреннее сопротивление r_1. Знак «—» означает, что источник внутри «ящика» включен навстречу внешнему источнику.

Ф168. *Шестиугольный карандаш толкнули вдоль горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 16. При каких значениях коэффициента трения α между карандашом и плоскостью карандаш будет скользить по плоскости, не вращаясь?*

На движущийся карандаш действуют со стороны плоскости две силы: сила нормальной реакции плоскости N и сила трения $F_{тр}$. Так как карандаш не должен перемещаться в вертикальном направлении, то сила N равна по абсолютной величине силе тяжести:

$$N = mg.$$

Сила же трения равна $F_{тр} = \alpha N = \alpha mg$.

Рассмотрим тот момент, когда карандаш начал катиться, поворачиваясь вокруг ребра A. В этом случае обе силы — и сила N и сила $F_{тр}$ — приложены к ребру A. Если равнодействующая R этих сил проходит ниже центра тяжести карандаша, то есть ниже оси карандаша, то момент этой силы относительно оси карандаша вызывает вращение карандаша. Если же сила R проходит выше оси, то карандаш не будет вращаться.

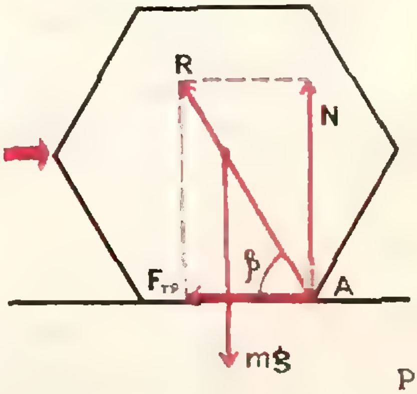


Рис. 16.

Таким образом, условие того, что карандаш не будет вращаться:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{N}{F_{тр}} > \operatorname{tg} 60°,$$

или

$$\frac{mg}{\alpha mg} > \sqrt{3}.$$

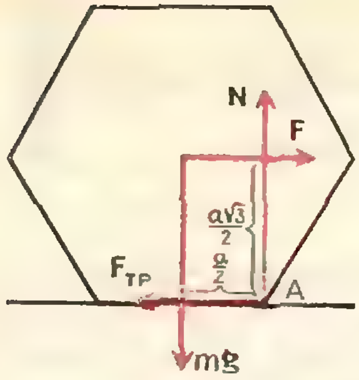


Рис. 17.

Отсюда находим, каким должен быть коэффициент трения:

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Многие из читателей, приславших нам письма, решали эту задачу, пользуясь системой координат, связанной не с плоскостью, а с карандашом. Это неинерциальная система координат, и в ней на карандаш действует еще сила инерции

$$F_и = ma,$$

где a — ускорение карандаша относительно плоскости.

Так как это ускорение сообщает карандашу сила трения о плоскость $F_{тр} = \alpha mg$, то $a = \alpha g$, и поэтому $F_и = m\alpha g$. Карандаш вращается вокруг ребра A (мгновенная ось вращения), если момент силы $F_и$ относительно этой точки больше момента силы тяжести (рис. 17), то есть если

$$F_и \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}\, amg, \text{ или}$$

$$\alpha mg\sqrt{3} > mg.$$

Отсюда получаем, что карандаш катится, не вращаясь, если

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ф169. *Для дальней космической связи используется спутник объемом $V = 100$ м³, наполненный воздухом при нормальный условиях. Метеорит пробивает в его корпусе отверстие площадью $S = 1$ см². Оценить время, через которое давление внутри спутника изменится на 1%. Температуру газа считать неизменной. Универсальная газовая постоянная равна $8.3 \cdot 10^3$ дж/град·кмоль.*

Для оценки можно принять, что каждая из молекул воздуха в спутнике может двигаться только вдоль одной из трех взаимноперпендикулярных осей, одна из которых перпендикулярна плоскости отверстия (такая упрощенная модель часто используется в кинетической теории газов). Тогда вдоль этой оси движется в любой момент 1/3 часть всех молекул воздуха в спутнике, причем скорость половины этих молекул, то есть 1/6 часть всех молекул, направлена к отверстию. Из них за время τ отверстия достигнут и вылетят из спутника те молекулы, которые находятся от отверстия на расстоянии $l = \bar{v}\tau$, то есть молекулы, находящиеся в начальный момент в объеме $V_0 = S\bar{v}\tau$, где $\bar{v}$ — средняя квадратичная скорость молекул (рис. 18). (Мы принимаем для оценки, что все молекулы движутся с одинаковыми по абсолютной величине скоростями, равными средней квадратичной скорости $\bar{v}$). Если число молекул в единице объема равно n, то всего за время τ из спутника вылетит

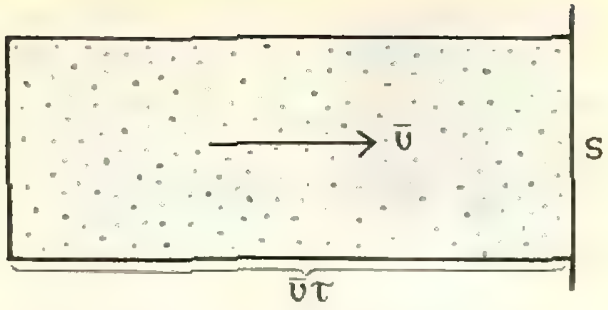


Рис. 18.

$$N = \frac{1}{6}\, S\bar{v}\tau n \text{ молекул.}$$

Поскольку часть молекул вылетела из спутника, изменится число молекул в единице объема. Это изменение есть

$$\Delta n = \frac{N}{V} = \frac{1}{6}\,\frac{S\bar{v}\tau n}{V}.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{6}\,\frac{S\bar{v}\tau}{V}$$

или

$$\tau = 6\,\frac{\Delta n}{n}\,\frac{V}{S\bar{v}}.$$

По условию задачи температура воздуха в спутнике остается неизменной. Как следует из уравнения состояния идеального газа Клапейрона — Менделеева, в этом случае давление пропорционально плотности газа (а следовательно, и числу молекул в единице объема): $P \sim n$. Поэтому

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta n}{n} = 0{,}01.$$

Принимая во внимание выражение для средней квадратичной скорости молекул

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

можно теперь окончательно записать выражение для τ:

$$\tau = 6\frac{\Delta P}{P}\,\frac{V}{S}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}},$$

здесь μ — молекулярная масса воздуха, R — универсальная газовая постоянная.
Подставляя в это выражение числовые значения, получим

$$\tau = 6\cdot 0{,}01\cdot\frac{100}{10^{-4}}\sqrt{\frac{29}{3\cdot 8{,}3\cdot 10^{3}\cdot 273}} \approx$$

$$\approx 120\ с = 2\ мин.$$

Примечание: при решении задачи было сделано несколько упрощающих предположений. В частности, не были учтены явления, связанные с соударениями молекул. Поэтому приведенное решение носит оценочный характер и результат является правильным только по порядку величины. (Строгое решение задачи выходит за рамки школьной программы.)

Редакция получила более 600 писем с решениями задач **Ф159—Ф169**. С задачей **Ф159** до конца не справился ни один читатель. Наиболее интересный подход к ее решению прислал *Е. Щукин* (Москва). Большинство читателей успешно справились с задачами **Ф160**, **Ф162**, **Ф164**. Правильные решения остальных задач прислали следующие читатели (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *С. Алехин* (Липецк) **6**, **8**; *В. Адушкин* (Новороссийск) **7**; *А. Айдагулова* (д. Ново-Кутово Чекмагушевского р-на Башкирской АССР) **5**, **7 — 9**; *И. Акулич* (Хмельницкий УССР) **7**; *Н. Агищев* (Липовка Николаевского р-на Львовской обл.) **1**, **7**; *О. Агошина* (Москва) **5**, **7**; *С. Алексеев* (с. Бобрышево Присосненского р-на Курской обл.) **7—9**; *А. Бегевский* (Гомель) **3**, **5**, **6**; *А. Боржиевский* (Оршинг Хмельницкой обл.) **7—9**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **1**, **3**, **5**; *Т. Вайнтрауб* (Кишинев) **6**, **7**; *Д. Габриэлян* (Белая Калитва Ростовской обл.) **7**, **8**; *В. Гернст* (Москва) **3**, **6**, **7**; *Б. Герасимов* (Сарапул Удм. АССР) **6—8**; *Н. Голевко* (Прохладный) **8**, **9**; *Б. Грибоедский* (Москва) **3**, **5**; *А. Григорян* (Баку) **3**, **6**, **7**; *В. Евсеев* (Новокузнецк) **6—9**; *В. Еремин* (Медногорск) **6**, **8**; *В. Зубов* (Новый Оскол) **7**; *В. Заборозский* (Ленинград) **7**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **5**, **7—9**; *Ю. Ильиных* (Кропоткин Краснодарского края) **8**, **9**; *А. Израилевич* (Свердловск) **7**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **3**, **8**; *С. Карпенко* (Киев) **7**; *В. Карпинский* (Свердловск) **1**, **3**, **5—7**; *М. Каневский* (Хуст Закарпатской обл. УССР) **8**; *Ю. Коталев* (Ковров) **6**, **7**; *А. Карташов* (Москва) **3**, **6**, **7**; *В. Колосов* (Киев) **7—9**; *С. Корнилов* (Грозный) **3**, **6**, **7**; *Л. Коган* (Черновцы) **3**, **6—9**; *С. Корнеев* (Новокузнецк) **7—9**; *Ю. Костиков* (Мытищи Московской обл.) **8**, **9**; *В. Кривицкий* (Новокузнецк) **7—9**; *А. Кравченко* (Запорожье) **3**, **6**, **7**; *А. Кричетников* (Сумы) **8**, **9**; *Н. Кулешов* (Кременчуг) **7**; *О. Кузьмин* (Москва) **7**; *М. Курдачаян* (Ереван) **6**; *Г. Лутинген* (Черновцы) **3**, **5**, **6**; *А. Межерицкий* (Полтава) **6**, **7**; *С. Молотков* (Златоуст) **3**, **9**; *С. Мазуренко* (Минск) **6**, **7**; *А. Марков* (Орджоникидзе) **6—9**; *А. Марков* (Миасс) **8**; *Ю. Матвеев* (Альметьевск) **8**; *С. Могунов* (Ирбит Свердловской обл.) **8**, **9**; *А. Макарычев* (Львов) **7**; *Р. Нарников* (Орджоникидзе) **8**, **9**; *А. Насыров* (Булак-Башинск Хаджабадского р-на Андижанской обл. Уз. ССР) **8**; *Ю. Ништ* (Салават) **9**; *А. Николаев* (Москва) **3**; *В. Новиков* (Саратов) **7**; *И. Пантелеев* (Геленджик) **6**, **7**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) **3**, **6—8**; *Б. Потанкин* (Магнитогорск) **6**, **7**; *Н. Попов* (Ленинград) **7**, **8**; *И. Парнета* (Кременчуг) **6—9**; *М. Ригмант* (Магнитогорск) **3**, **6**, **7**; *В. Рекрут* (Киев) **6**, **8**, **9**; *Л. Рудицер* (Харьков) **1**, **6**, **7**; *А. Ролижен* (Фрязино Московской обл.) **3**, **6—9**; *Е. Румянцев* (Мариинск Кемеровской обл.) **7**; *И. Румянцев* (Грозный) **3**; *Л. Степанов* (Тбилиси) **3**, **7**; *С. Слепнев* (Горький) **6**, **7**; *В. Спиридонов* (ст. Марьюновка Николаевской обл. УССР) **7**, **8**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **3**, **6**; *Ю. Сизов* (Минск) **7**; *С. Соколов* (Владимир) **6**, **7**; *О. Степанова* (Москва) **9**; *Симкин* (Москва) **3**, **7**; *Б. Трейгер* (Кировоград) **8**; *Ф. Тахватуллин* (Ташкент) **3**; *О. Торонов* (Оренбург) **7**; *О. Трунов* (Джамал-Абад Киргизской ССР) **3**, **6**, **7**; *Ю. Филиппов* (Пинск) **6**, **7**; *Н. Федин* (Омск) **7**; *Д. Фушман* (Черновцы) **3**, **6—9**; *Ф. Фазылов* (Оренбург) **7**; *С. Хоменко* (Подольск Московской обл.) **3**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **6**; *В. Шифрин* (Ростов-на-Дону) **3**, **6**, **8**; *А. Шерстюк* (Николаев) **3**, **5—7**; *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.) **5**, **6**; *Е. Щукин* (Днепропетровск) **3**, **7**, **8**; *Р. Ямолдинов* (Глазов Удм. АССР) **7**.

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Тригонометрические уравнения

М. И. Шабунин, С. В. Черемных

Практика приемных экзаменов в вузы показывает, что при решении тригонометрических уравнений абитуриенты нередко затрудняются в выборе способа решения.

В простых случаях способ решения однозначно определяется из вида уравнения. В данной статье авторы обращают внимание на вопросы, связанные с выбором наиболее рационального пути решения в тех случаях, когда таких путей несколько. Характер возникающих здесь затруднений и некоторые способы их преодоления иллюстрируются многочисленными примерами. Всюду в статье k, l, m, n — любые целые числа.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3 = 0.$$

Решение. В данном случае все совершенно ясно. Используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и применяя подстановку $y = \cos x$, приведем данное уравнение к виду

$$y\,(2y^2 - 3y - 2) = 0,$$

откуда $y_1 = 0$; $y_2 = -\frac{1}{2}$; $y_3 = 2$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi$.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\frac{6\cos^3 2t + 2\sin^3 2t}{3\cos 2t - \sin 2t} = \cos 4t.$$

Решение. Так как $\cos 4t = \cos^2 2t - \sin^2 2t$, то данное уравнение приводится к однородному:

$$6\cos^3 2t + 2\sin^3 2t = (\cos^2 2t - \sin^2 2t)(3\cos 2t - \sin 2t).$$

Легко проверяется, что $\cos 2t \neq 0$. Поэтому, деля уравнение на $\cos^3 2t$ и полагая $u = \operatorname{tg} 2t$, получаем уравнение $(u+3)(u^2+1) = 0$, имеющее один вещественный корень $u = -3$ (при этом $3\cos 2t - \sin 2t \neq 0$).

Ответ: $t = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{k\pi}{2}$.

Пример 3 (МФТИ, 1970). *Решить уравнение*

$$\sin x\,(1 - \cos x)^2 + \cos x\,(1 - \sin x)^2 = 2.$$

Решение. В данном случае путь решения подсказывается симметрией данного уравнения относительно $\sin x$, $\cos x$. Выделяя в явном виде простейшие симметрические многочлены относительно $\sin x$ и $\cos x$ (выражения $\sin x+\cos x$, $\sin x\cdot\cos x$), запишем уравнение в виде

$$(\sin x+\cos x)-4\sin x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos x\,(\sin x+\cos x)=2.$$

Пусть $\sin x+\cos x=u$; тогда $u^2-1=2\sin x\cdot\cos x$ и уравнение примет вид

$$u\,(u^2-4u+1)=0,$$

откуда $u_1=0$, $u_2=2+\sqrt{3}$, $u_3=2-\sqrt{3}$.

Уравнение $\sin x+\cos x=u$ легко решается, причем, так как $|u|=|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$, то корень $u_2=2+\sqrt{3}$ не подходит.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2l\pi$.

Следующая группа примеров показывает, что для успешного решения предлагаемых на приемных экзаменах задач недостаточно уметь свести уравнение к одному из известных типов (уравнения, приводимые к одной тригонометрической функции, однородные, симметрические и др.).

Пример 4 (МФТИ, 1970). *Решить уравнение*

$$\sin x+2\cos x=\cos 2x-\sin 2x. \qquad (1)$$

Решение. Переходя в уравнении (1) к аргументу x с помощью формул $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$, получаем

$$\sin x+2\sin^2 x+2\cos x+2\sin x\cos x-1=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) можно было бы свести к алгебраическому уравнению относительно u с помощью так называемой универсальной подставки $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, выразив $\sin x$ и $\cos x$ через u. Нетрудно убедиться, что в этом случае получается уравнение

$$3u^4+2u^3-6u^2-6u-1=0.$$

Мы не будем находить корни этого уравнения, хотя это можно было бы сделать, а попытаемся найти более короткий путь решения, в основе которого лежит разложение левой части уравнения на множители.

Уравнение (2) имеет корень $\sin x=-1$ (при этом $\cos x=0$), поэтому левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$(1+\sin x)(2\sin x+2\cos x-1)=0.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi n$.

Замечание. Следует подчеркнуть, что метод разложения на множители в сочетании с другими методами является одним из наиболее эффективных приемов решения тригонометрических уравнений.

Пример 5 (МФТИ, 1970). *Решить уравнение*

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2. \qquad (3)$$

Решение. Перейдем к двойному аргументу по формуле

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \qquad (4)$$

С помощью формулы (4) уравнение (3) приводится к виду

$$\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0. \qquad (5)$$

Далее, группируя крайние и средние члены и применяя формулы для суммы косинусов, получаем

$$\cos 7x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Замечание. Возможность приведения уравнения (3) к виду (5) связана с тем, что с помощью формулы (4) уничтожается свободный член в правой части уравнения (3) и получается в конечном счете более простое уравнение (5). В процессе дальнейшего решения группировка может быть произвольной.

Пример 6 (МФТИ, 1971). *Решить уравнение*

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

Решение. Попытаемся и здесь использовать формулу (4), хотя на первый взгляд кажется, что эта формула малоэффективна. После преобразований получим $\cos 2x + \cos 4x = 1 + \cos 6x$. Преобразуя, далее, правую часть последнего уравнения по формуле $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, а левую по формуле суммы косинусов, получаем $\cos 3x (\cos x - \cos 3x) = 0$ или

$$\cos 3x \cdot \sin x \cdot \sin 2x = 0. \qquad (6)$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}$.

Замечание. К этому же ответу можно прийти и другим путем. Если исходное уравнение записать в виде $\sin^2 2x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x)$ и преобразовать в произведения выражения, стоящие в скобках, то мы снова получим уравнение (6). Оба рассмотренных способа преобразования исходного уравнения примерно равноценны.

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{ctg}\, 2x. \qquad (7)$$

Решение. Подстановка $u = \mathrm{tg}\, x$ достаточно естественна, если вспомнить, что $\mathrm{ctg}\, 2x = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{2\,\mathrm{tg}\, x}$. Применив эту подстановку, получаем

$$\sqrt{3}\, u^4 - 2u^3 - 2\sqrt{3}\, u^2 + 2u + \sqrt{3} = 0. \qquad (8)$$

Далее надо попытаться разложить левую часть уравнения (8) на множители.

Прежде чем продвинуться в этом направлении дальше, сделаем попытку упростить уравнение (7).

Замечая, что $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = -2 + \frac{4}{\sin^2 2x}$, находим

$$\frac{1}{\sin^2 2x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

и далее, преобразовывая, получим $\sqrt{3}\cos^2 2x + \sin 2x \cdot \cos 2x = 0$. Последнее уравнение легко решается.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{2}$ (легко проверяется, что при этих значениях x имеем $\sin 2x \neq 0$).

Решение получено, однако для сравнения доведем до конца решение уравнения (7) первым способом, который пока привел нас к уравнению (8). Группировка членов, имеющих множитель $\sqrt{3}$, дает уравнение

$$(u^2 - 1)\left[\sqrt{3}(u^2 - 1) - 2u\right] = 0,$$

которое имеет корни: $u_1 = 1$; $u_2 = -1$; $u_3 = \sqrt{3}$; $u_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Нетрудно проверить, что эти корни приводят к тому же ответу.

Замечание. Не вызывает сомнений, что в данном случае преобразование уравнения с помощью перехода к аргументу $2x$ является предпочтительным по сравнению с подстановкой $u = \operatorname{tg} x$. Мы еще раз убедились в том, что нередко увеличение аргумента тригонометрических функций, входящих в уравнение, ведет к его упрощению.

Рассмотрим пример другого типа.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x). \qquad (9)$$

Решение. При отыскании разумного пути решения уравнения (9), очевидно, следует обратить особое внимание на аргументы тригонометрических функций, входящих в уравнение. Связь между этими аргументами становится ясной, если заметить, что $\operatorname{tg}(140^\circ - x) = -\operatorname{tg}(x + 40^\circ)$. Теперь целесообразность использования замены $x + 40^\circ = t$ не вызывает сомнения. С помощью этой замены исходное уравнение преобразуется к виду $\operatorname{tg} 3t + \operatorname{tg} t = 2\sin 2t$, или

$$\frac{\sin 4t}{\cos t \cdot \cos 3t} = 2\sin 2t. \qquad (10)$$

Так как $\sin 4t = 2\sin 2t \cos 2t$, то уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{2\sin 2t\,(\cos 2t - \cos 3t \cdot \cos t)}{\cos t \cdot \cos 3t} = 0.$$

Преобразуем выражение, стоящее в скобках, используя формулу

$$\cos 2t = \cos(3t - t) = \cos 3t \cdot \cos t + \sin 3t \cdot \sin t.$$

Тогда задача сведется к нахождению тех решений уравнения

$$\sin t \cdot \sin 2t \cdot \sin 3t = 0,$$

которые удовлетворяют условию $\cos t \cdot \cos 3t \neq 0$, то есть к решению уравнения $\sin 3t = 0$.

Ответ: $x = -40^\circ + \frac{n\pi}{3}$.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\cos 3x + \cos\frac{5x}{2} = 2.$$

Решение. Если преобразовать левую часть данного уравнения по формуле суммы косинусов, то мы получим уравнение $\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{11x}{4} = 1$. Так как при любом α справедливо неравенство $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то полученное уравнение может иметь решения лишь при выполнении условий

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{4} = 1,\\ \cos\frac{11x}{4} = 1\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\cos\frac{x}{4} = -1,\\ \cos\frac{11x}{4} = -1.\end{cases}$$

Этим способом можно было бы найти решение исходного уравнения. Однако к цели приводит и другой, более простой путь.

Левая часть уравнения может равняться двум лишь в том случае, когда одновременно имеют место равенства $\cos 3x = 1$ и $\cos\frac{5x}{2} = 1$.

Находя решения первого уравнения $\left(x = \frac{2k\pi}{3}\right)$ и подставляя во второе, получаем $\cos\frac{5k\pi}{3} = 1$, откуда $k = 6m$.

Ответ: $x = 4m\pi$.

В следующих примерах требуется умение использовать понятие абсолютной величины.

Пример 10 (МФТИ, 1971). *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1. \tag{11}$$

Решение. Правую часть уравнения (11) можно записать так: $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} - 1 = |\operatorname{tg} x| - 1$. Грубой ошибкой было бы отбрасывание знака модуля (к сожалению, немало абитуриентов, решавших этот пример, допустило эту ошибку). Уравнение (11) принимает вид

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = |\operatorname{tg} x| - 1. \tag{12}$$

Рассмотрим два случая: $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{tg} x < 0$ (при $\operatorname{tg} x = 0$ левая часть уравнения теряет смысл).

а) Если $\operatorname{tg} x > 0$, то уравнение (12) приводится к виду $\operatorname{ctg} x = -9$, откуда следует, что $\operatorname{ctg} x < 0$, что противоречит условию $\operatorname{tg} x > 0$. В данном случае решений нет.

б) Если $\operatorname{tg} x < 0$, то, полагая $u = \operatorname{tg} x$, из (12) находим $18u^2 + 9u + 1 = 0$, откуда

$$u_1 = -\frac{1}{6}; \quad u_2 = -\frac{1}{3}.$$

Оба найденных значения отрицательны, так что условие $\operatorname{tg} x < 0$ выполняется.

Ответ: $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + n\pi$; $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + m\pi$.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}. \qquad (13)$$

Решение. Так как правая часть уравнения неотрицательна, то должно выполняться условие

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x \geqslant 0. \qquad (14)$$

Если освободиться от радикала путем возведения обеих частей уравнения (13) в квадрат, то получим уравнение

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x,$$

которое после упрощения примет вид

$$\cos 2x = \cos 2x. \qquad (15)$$

Мы получили тождество. Это не означает, однако, что исходному уравнению удовлетворяют все значения x, так как уравнение (15) является лишь следствием уравнения (13). Уравнения (13) и (15) становятся равносильными, если выполняется условие (14). Таким образом, решениями уравнения (13) являются все значения x, удовлетворяющие неравенству (14), и только эти значения. Решение неравенства (14) не представляет труда.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Замечание. К этому же ответу можно прийти несколько иным путем. Имеем $2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \left[1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, и поэтому исходное уравнение примет вид $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$. Мы снова приходим к условию (14).

Упражнения

Решить уравнения:

1. (МФТИ, 1969). $\sin^4 x + \sin^3 x \cdot \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cdot \cos^3 x + \cos^4 x = 1$.
2. $\sin^3 x\,(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$.
3. (МФТИ, 1971). $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x$.
4. $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x$.
5. (МФТИ, 1970). $\sqrt{1 - 2\operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + 2\operatorname{ctg} x} = 2$.

Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова

МИНХ им. Г. В. Плеханова — один из крупнейших вузов страны. На его 10 стационарных и одном заочном факультетах обучается более 14 тысяч студентов, а на кафедрах трудятся 500 аспирантов.

В институте имеются следующие факультеты (с дневным и вечерним обучением): общеэкономический, экономической кибернетики, экономики промышленности, экономики и организации материально-технического снабжения, финансовый, торгово-экономический, товароведения промышленных товаров, технологический и механический. Имеется также заочный технологический факультет. Срок обучения на дневных отделениях 4 года, а на вечерних — 5 лет (кроме факультетов экономической кибернетики и механического, где срок обучения соответственно 5 и 6 лет).

Наибольшая математическая подготовка обеспечивается на факультете экономической кибернетики. Студенты наряду с общими экономическими дисциплинами изучают высшую математику и программирование на электронных вычислительных машинах, а также цикл новых экономико-математических дисциплин. Применение ЭВМ в экономических исследованиях и планировании студенты осваивают в специальных лабораториях, оснащенных соответствующими машинами по подготовке и обработке информации и универсальной электронной вычислительной машиной «Урал 11-Б». Сотрудники кафедры и студенты принимают участие в научных исследованиях в содружестве с ГВЦ Госплана СССР и другими организациями.

Выпускники ФЭК обеспечиваются работой в Госплане и ЦСУ СССР и РСФСР, в научно-исследовательских институтах, вычислительных центрах, экономико-математических лабораториях и в плановых органах министерств.

Большую математическую подготовку получают также студенты экономических специальностей. Они изучают высшую математику, программирование, курсы статистики и специальные экономические дисциплины. На этих факультетах готовят экономистов широкого профиля, главным образом для работы в системе планово-экономических органов, в НИИ, на крупных предприятиях.

В своей многогранной деятельности кафедры МИНХ совместно с Госпланом СССР и РСФСР и другими государственными органами помогают братским социалистическим странам в подготовке и повышении квалификации национальных кадров, делятся опытом и оказывают помощь родственным кафедрам многих экономических вузов страны. Изданы оригинальные учебники и учебные пособия.

К проведению научных исследований широко привлекаются студенты, которые участвуют в разработке хоздоговорных тем и других исследованиях, успешно выступают на республиканских конкурсах студенческих научных работ.

На экономических факультетах вступительный экзамен по математике только письменный. На различных факультетах требования по математике разные, поэтому варианты для письменного экзамена предлагались неодинаковой трудности. С этой целью все задачи и варианты в целом получили оценку в «баллах» по трудности. Задачи были разбиты на три группы: легкие (1, 2, 3 балла), средние (4, 5, 6 баллов) и трудные (7, 8, 9 баллов).

Варианты с суммой баллов выше 25 предлагались на факультетах экономической кибернетики, товароведения промышленных товаров, экономики промышленности и торгово-экономическом.

Общеэкономический факультет (24)

1. Из пункта A по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в 1,5 раза, а между третьим и вторым — в два раза.

Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго, если известно, что третий не обгонял первый и второй?

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания равен α.

Определить полную поверхность пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x.$$

4. Решить уравнение $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6.$

Факультет экономической кибернетики (27)

1. Из пункта A выехал первый велосипедист, а ему навстречу из пункта B одновременно выехал второй. После встречи оба велосипедиста направились в пункт B, и второй прибыл в B на 2 часа раньше первого.

Найти скорости велосипедистов, если известно, что расстояние AB равно 100 *км* и что второй велосипедист все расстояние AB проходит на 3 часа 20 минут быстрее первого.

2. Диагонали прямой четырехугольной призмы составляют с основанием углы α и β. Высота призмы равна H. Определить объем призмы, если диагонали основания пересекаются под углом γ.

3. Решить уравнение

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} + 11(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3x - 3 = 0.$$

4. Решить уравнение

$$8\cos^2 x + 2\sqrt{1-\sin^2 x} = 3,$$

если x заключен между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$.

Финансовый факультет (25)

1. Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из одного угла, делят этот угол на три равные части, а сама медиана равна 10 *см*.

2. Решить уравнение

$$\lg^2 2x + \lg^2 3x = \lg^2 2 + \lg^2 3.$$

3. Два автомобиля вышли одновременно навстречу друг другу, первый из города A, а второй из города B, расстояние между которыми 280 *км*, и через 4 часа встретились в пункте D. После встречи первый автомобиль пришел в город B на $2^1/_3$ часа позже, чем второй пришел в город A. Определить среднюю скорость каждого автомобиля.

4. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Факультет товароведения промышленных товаров (26)

1. От пристани A одновременно отправились вниз катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

2. Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

3. Решить уравнение

$$2^{2x} + 2^{x+1} \cdot 3^{x-2} - 8 \cdot 3^{2x-3} = 0.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x.$$

Факультет экономики и организации материально-технического снабжения (24)

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 9x + 16)^2 > \log_{\frac{1}{3}} 2.$$

2. Найти объем пирамиды, основанием которой служит треугольник с углами α и β, если высота пирамиды равна h и образует с каждым боковым ребром угол φ.

3. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились в 4 *км* от пункта B. Продолжая движение и достигнув соответственно пунктов B и A, туристы сразу же повернули обратно. На обратном пути они снова встретились, но уже в 2 *км* от пункта A. Эта встреча произошла через 2 часа после первой. Найти скорость движения туристов и расстояние между пунктами A и B.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{2} + 3\sin^2 x - 3\sin x = \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Факультет экономики промышленности (26)

1. Два поезда выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии 60 *км* от середины AB. Если бы первый вышел на 2 часа позже второго, то они встретились бы на середине AB. Если же, наоборот, второй вышел бы на 2 часа позже первого, то они встретились бы на четверти пути от B. Найти расстояние AB и скорость поездов.

2. Дана правильная шестиугольная пирамида высоты H, все семь граней которой равновелики.

Найти объем и полную поверхность.

3. Решить уравнение

$$\log_3 x^3 + \log_2 x^2 = \frac{2\lg 6}{\lg 2} + 1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos 2x + 4\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x.$$

Торгово-экономический факультет (26)

1. Решить уравнение

$$9\cdot 3^{\log_x^2 4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x 0,125}$$

2. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой боковые стороны равны верхнему основанию и равны a, а острый угол равен α. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объем пирамиды.

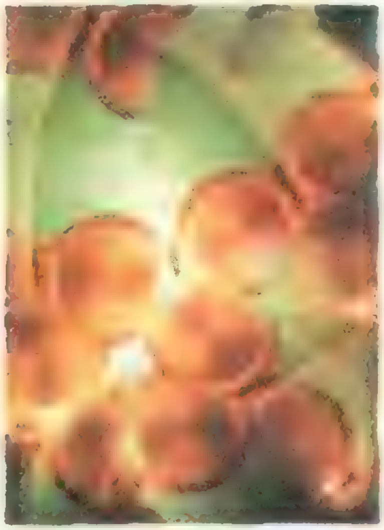
3. Из пункта A в пункт B выехали одновременно два автомобиля. Скорость второго автомобиля больше скорости первого на 10 *км/час*. Через полчаса из A в B выехал третий автомобиль со скоростью 60 *км/час*, который догнал первый и через полтора часа после этого догнал второй. Найти скорости автомобилей.

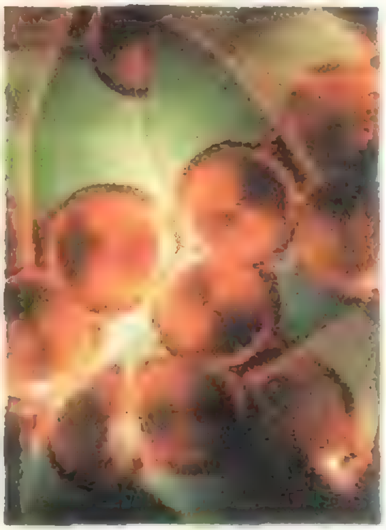
4. Решить уравнение

$$2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2.$$

Неправильные калейдоскопы

В «Кванте» № 8, 1972 г. (стр. 46) в статье «Калейдоскопы» рассказывалось о том, что на фотографии в калейдоскопе можно получить два изображения в одной точке: разные участки объектива будут снимать разные изображения, если хотя бы один угол калейдоскопа будет отличен от $\frac{180^\circ}{n}$.





При этом объектив надо помещать как можно ближе к вершине этого угла. Но если объектив диафрагмировать, то перекрытия исчезнут. На фотографиях в статье различие между снимками было незначительным. Здесь мы помещаем более убедительные снимки.

А. Виленкин

Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

В этом номере мы продолжаем публикацию материалов телевизионных курсов.

На физическом отделении курсов в течение января — февраля изучались следующие темы:

1) Электрические заряды. Электрическое поле.

2) Проводники и диэлектрики в электрическом поле. Электроемкость.

3) Электростатика. Решение задач.

4) Электрический ток. Механизмы проводимости. Закон Ома для участка цепи.

5) Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи. Закон Джоуля — Ленца.

6) Электрический ток. Решение задач.

Предлагаем вам испробовать свои силы в решении некоторых типовых задач.

1. Два металлических шара имеют одинаковые заряды. Величина каждого заряда $q = +10^{-9}$ *к*. После соединения шаров тонким проводником потенциал их стал равным $\varphi = 120$ *в*. Определить радиус первого шара, если емкость второго $C_2 = 10$ *пкф*.

2. Горизонтально расположенное тонкое кольцо радиуса $R = 20$ *см* равномерно заряжено, плотность заряда $q = +10^{-7}$ *к/см*. Из центра кольца начинает падать тело массой $m = 5$ *г* и зарядом $q_1 = -10^{-8}$ *к*. Определить ускорение тела в тот момент, когда оно будет на расстоянии $h = 30$ *см* от плоскости кольца.

До февраля на телекурсах на занятиях по математике, кроме тем, перечисленных в предыдущем номере журнала, были изучены еще такие темы:

по планиметрии — треугольники и многоугольники, подобие плоских фигур, метрические соотношения между элементами плоских фигур, окружности, площади, применение тригонометрии при решении планиметрических задач;

по разделу «функции и графики» — свойства функции и применение их к построению графиков функций, приемы построения графиков функций, взаимно-обратные функции, показательная и логарифмическая функция, логарифмы и их свойства.

Предлагаем читателям журнала по указанным темам контрольную работу.

Контрольная работа № 2

1. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $ADKB$ и $BEPC$. Доказать, что отрезок KE в 2 раза больше медианы BM треугольника ABC.

3. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки 4 *см* и 2 *см*, а высота, опущенная на ту же сторону, равна $\sqrt{15}$ *см*. Найти длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами.

4. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге BC взята произвольная точка M и соединена хордами с вершинами треугольника. Доказать, что $AM = BM + CM$.

5. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC построен квадрат. Центр квадрата соединен с вершиной B. На какие отрезки разбилась гипотенуза, если известно, что катеты треугольника равны 21 *см* и 28 *см*.

6. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна b^2, площадь треугольника AOD равна a^2. Найти площадь трапеции (AD и BC — основания).

7. В треугольнике один из углов равен 60°, а противолежащая этому углу сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки a и b. Найти площадь треугольника.

8. Вычислить $49^{1-0{,}25\log_7 25}$

9. Вычислить $\log_{49} 16$, если известно, что $\log_{14} 28 = a$.

10. Построить график функции $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$.

И. А. Дьяконов,
А. Г. Мордкович,
И. И. Наслузов

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

1. Мышке до норки 20 шагов. Кошке до мышки 5 прыжков. Пока кошка совершит один прыжок, мышка сделает 3 шага, а один кошачий прыжок равен по длине 10 мышиным шагам.

Догонит ли кошка мышку?

2. Как можно измерить высоту телеграфного столба, имея в своем распоряжении только небольшую линейку? (На столб залезать нельзя).

3. Найдите наименьшие натуральные числа a, b ($b > 1$), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=b.$$

4. Канал представляет собой желоб, установленный на сваях. Меняется ли сила давления на сваи, когда по каналу тянут баржу?

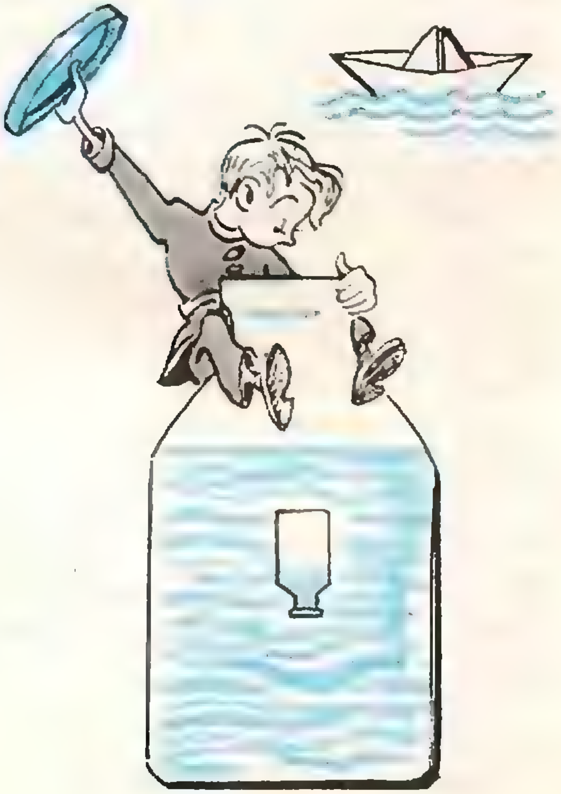
5. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек, они заняли отрезок длины l. На другой прямой через такие же промежутки поставили 100 точек, они заняли отрезок длины L. Во сколько раз L больше l?

6. По шоссе со скоростью 100 *км/ч* движутся машины. При этом расстояние между машинами, идущими друг за другом, около 15 *м*. Можно ли потребовать, чтобы на более узком участке «для обеспечения безопасности» скорость машин понижалась до 15 *км/ч*?

КАРТЕЗИАНСКИЙ ВОДОЛАЗ

Бумажный кораблик легко держится на воде, но, когда бумага намокает, кораблик тонет. Сухой кораблик держит на поверхности воды воздух, находящийся под куполом. Если купол намокнет и расползется, то воздух из-под него выйдет, и кораблик утонет. А нельзя ли сделать так, чтобы воздух то выходил из-под купола, то входил, а кораблик то тонул, то всплывал — по нашему желанию?

Оказывается, можно. Впервые такую игрушку сделал великий французский ученый и философ Рене Декарт, и теперь ее называют «картезианским водолазом» (по латыни Рене Декарт звучит как Ренатус Картезиус). Только в ней воздух не входит и не выходит, а сжимается или расширяется.



Устройство «водолаза» показано на рисунке. Возьмите молочную бутылку, пузырек от какого-нибудь лекарства и надувной резиновый шарик (им придется пожертвовать). Бутылку наполните водой почти до горлышка. Пузырек опустите отверстием вниз в воду и, наклонив его, впустите в него немного воды. Количество воды в пузырьке надо отрегулировать так, чтобы пузырек держался на поверхности воды, но от малейшего толчка уходил под воду (удобно взять соломинку и через нее вдувать под водой воздух в пузырек, пока он не всплывет). Затем накройте горлышко бутылки резиновой пленкой от шарика и привяжите ее ниткой вокруг горлышка.

Нажмите на пленку — и «водолаз» пойдет ко дну. Отпустите — и «водолаз» всплывет. Тонет он вот почему. Когда вы нажимаете на пленку, воздух под ней сжимается, давление в бутылке увеличивается и загоняет в пузырек еще немного воды. Пузырек становится тяжелее и опускается. Как только вы отпускаете пленку, давление в бутылке уменьшается, сжатый воздух в пузырьке выгоняет лишнюю воду, и «водолаз» всплывает.

А теперь попробуйте решить следующую задачу (если вы сделаете «водолаза», то можете провести и эксперимент).

Задача. При увеличении давления воздуха над поверхностью воды «картезианский водолаз» тонет. Опускается ли «водолаз» до дна при небольшом увеличении давления или может остановиться «по дороге», не дойдя до дна (то есть можно ли убрать резиновую пленку и использовать эту игрушку как барометр, отметив на бутылке глубины погружения «водолаза», соответствующие разным давлениям над водой)?

А. Н. Виленкин

Экономико-математическая школа при экономическом факультете МГУ

Знания, которыми не обладают школьники, весьма обширны. Эта переделка афоризма Бернарда Шоу как нельзя более относится к экономике: школьники плохо знакомы с экономикой и имеют о ней самые противоречивые сведения. Да и трудно понаслышке составить себе верное представление о столь сложном предмете. Даже титаны человеческой мысли не были едины в ее оценке. Так, один из творцов квантовой механики Макс Планк начинал с экономики, но она показалась ему слишком трудной, и он обратил свой разум к более легкой, по его мнению, физике.

Дать школьникам представление о современной экономической науке, познакомить с основными экономическими понятиями, дающими ключ к пониманию социальной действительности, привить вкус к экономике — вот цель созданной в 1968 году при МГУ Экономико-математической школы (ЭМШ).

В ЭМШ принимаются девятиклассники и десятиклассники. Все поступающие сдают письменный экзамен по математике — отдельно 9-е и отдельно 10-е классы (предлагаемый вариант содержит по 4 задачи, некоторые из них приведены в конце статьи). В сентябре 1972 года на вступительный экзамен пришло около 700 ребят. Пришлось с великим сожалением отобрать из них 120 девятиклассников и 80 десятиклассников. Счастливчики вместе с 70 «старыми» слушателями (ребятами, которые занимались в ЭМШ в девятом классе) в октябре приступили к занятиям.

Занятия в ЭМШ проводятся два раза в неделю во второй половине дня. Девятиклассники (наш первый курс) изучают введение в современную математику и основы политической экономии. В математический курс включены в первую очередь те разделы, которые используются в современной экономической науке и способствуют формированию логического мышления, столь характерного для современного экономиста. Это основы теории множеств, высшей алгебры, элементы математической логики и математического анализа, введение в теорию вероятностей. С политической экономией ребята знакомятся примерно в объеме первого тома «Капитала» К. Маркса. Для них становятся близкими такие понятия, как «товар», «деньги», «капитал», «прибавочная стоимость» и т. д. Многие ребята открывают для себя новую, совершенно неизвестную и увлекательную науку.

Десятиклассники слушают один из спецкурсов на выбор: «Диалектика и политэкономия», «Макроэкономические модели», «Современные методы планирования и управления», «Математические методы анализа экономики», «Экономические приложения теории игр», «Кибернетические системы». Спецкурсы — это серьезные «кусочки» современной науки, но читаются они так, чтобы школьникам было и интересно, и понятно. Помимо спецкурсов у десятиклассников ведутся занятия по элементарной математике, на которых они более глубоко знакомятся с некоторыми разделами школьного курса.

По окончании ЭМШ слушателям выдается Выпускное свидетельство. Основная часть выпускников поступает, конечно, на одно из двух отделений экономического факультета МГУ (отделение политической экономии или отделение планирования и экономической кибернетики). Часть ребят избирает другие экономические вузы, например, Московский институт народного хозяйства, Московский экономико-статистический институт.

Научно-методическое руководство работой ЭМШ осуществляет Предметная комиссия, состоящая из преподавателей кафедр политической экономии и математических методов анализа экономики.

Организационную работу ведет Совет ЭМШ, куда входят аспиранты и студенты экономического факультета.

В работе ЭМШ принимают участие преподаватели, аспиранты и студенты экономического факультета МГУ, мехмата МГУ, научные сотрудники Института мировой экономики и международных отношений и Центрального экономико-математического института Академии наук СССР.

Очередные вступительные экзамены в ЭМШ состоятся в сентябре 1973 г.

Ждем вас, будущие экономисты!

Задачи из вариантов вступительного экзамена по математике в ЭМШ

9-й класс

1. На заводском складе хранилось более ста одинаковых коробок с заготовками. Вследствие потребления количество заготовок через некоторое время уменьшилось. Когда в каждой коробке осталось лишь по семь заготовок, на склад привезли еще 14 полных коробок, после чего общее количество заготовок оказалось на три меньше, чем до потребления. Сколько коробок с заготовками хранилось на складе первоначально?

2. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислить площадь полученного треугольника.

3. Найти k и l, если они являются корнями уравнения $x^2 + kx + l = 0$.

4. Тридцать студентов с пяти курсов придумали сорок задач для олимпиады, причем однокурсники — одинаковое число задач, а студенты с разных курсов — разное. Сколько студентов придумали ровно по одной задаче?

5. Утром в магазин привезли шесть бидонов молока, в которых было 15, 16, 18, 19, 20, 31 литров. До обеденного перерыва было продано полностью молоко из трех бидонов, а к закрытию магазина продали целиком молоко еще из двух бидонов. Оказалось, что утром было продано молока вдвое больше, чем после обеда. Установить, из каких бидонов было продано молоко до обеденного перерыва.

6. Высота остроугольного треугольника равна 25 *см*. На каком расстоянии от вершины нужно провести прямую, перпендикулярную этой высоте, чтобы площадь треугольника разделить пополам?

7. Определить a так, чтобы один из корней уравнения

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

был квадратом другого.

8. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем все семь собрали разное число грибов. Доказать, что есть трое грибников, которые собрали вместе не меньше 50 грибов.

9. На доске написано пять целых чисел. Сложив их попарно, получили следующие десять чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие пять чисел были написаны на доске?

10. На основании равнобедренного треугольника как на хорде построена окружность, касающаяся равных сторон треугольника. Найти радиус окружности, если основание треугольника равно a и высота b.

11. Определить a так, чтобы уравнения

$$x^2 + x + a = 0$$
$$x^2 + ax + 1 = 0$$

имели общий корень.

10-й класс

1. Имеется n городов. Каждый город соединен с каждым другим авиалинией, причем не по всем линиям движение возможно в обе стороны. Доказать, что можно выбрать такой маршрут, чтобы проехать по всем городам.

2. Маугли попросил обезьян принести ему орехи. По дороге обратно обезьяны передрались и каждая кинула в каждую по одному ореху. Принесли они 26 орехов. Сколько было обезьян и сколько каждая из них сорвала орехов (все обезьяны сорвали орехов поровну)?

3. Мальчик купил черные карандаши по 3 коп., красные по 5 коп., синие по 7 коп. — всего 8 карандашей на 42 коп. Известно, что количество красных карандашей минус количество черных — полный квадрат. Сколько куплено карандашей каждого вида?

4. Решить в целых числах $3^x + 4^x = 5^x$.

5. Три рыбака наловили рыбы и легли спать. Первый проснулся, увидел, что число рыб не делится на три, выбросил одну рыбу, забрал треть оставшихся и ушел. Проснулся второй, увидел, что число рыб не делится на три, выбросил одну, забрал треть оставшихся и ушел. Аналогично, не зная, что товарищи ушли, поступил и третий рыбак. Определить минимальное число рыб, которое они могли поймать.

6. Дано число, взаимно простое с 30. Доказать, что остаток от деления его на 30 — число простое.

7. В зоопарке живут слоны, львы и носороги, всего 30 животных. Для них есть три вида клеток, всего 7 штук. В каждой клетке сидит 2 носорога, или 4 льва, или 7 слонов. Сколько клеток каждого вида?

8. Дан выпуклый четырехугольник с периметром P. Его стороны раздвигаются на единицу вовне, затем продолжаются до пересечения. Доказать, что площадь нового четырехугольника больше $P + 3$.

9. Сколько имеется чисел от 1 до 1000, которые делятся либо на 5, либо на 7, либо на то и другое?

10. В прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами длина гипотенузы делится на 3. Доказать, что длина каждого из катетов делится на 3.

11. Дано пятизначное число. Если приписать единицу впереди него, то мы получим шестизначное число, которое втрое меньше шестизначного числа, полученного приписыванием единицы в конце. Найти это число.

12. Дана окружность и точка A вне ее. Из точки A проведены секущие AB и AC, пересекающие окружность в точках M и K соответственно. Доказать, что треугольники AMK и ABC подобны.

В. В. Иванов
А. Г. Фонотов

Отпугивающая реклама

Всю весну Володя был предельно сосредоточен. Окружающие знали: он будет сдавать экзамены в Московский университет, и относились к нему с подчеркнутым вниманием. Володя работал изо всех сил, каждая минута была на счету. Человек, как говорят, выкладывался.

Зашел он однажды ко мне. Попросил:

—Решите, пожалуйста, задачку, — и положил на стол листок с уравнением

$$x^2\cdot 3^{x-2}+3^{\sqrt{x+2}}=3^x+x^2\cdot 3^{\sqrt{3}}.$$

Взглянув на пример, я сразу же принялся решать его на том же листке. Потом взял другой, чистый, уселся поудобнее и стал писать снова. Когда я достал четвертый листок, то обнаружил, что Володя незаметно исчез. Задача не получалась, и я подумал, что Володя просто решил пошутить.

Спустя несколько дней я встретил Володю на улице.

— Ну как, вышло у вас то уравнение? — спросил он. Хотя в его глазах не было и тени усмешки, я все-таки сказал:

— Ты знаешь, Володя, у меня не нашлось времени, чтобы разгадать твою шутку. Расскажи-ка лучше сам, в чем там дело.

— Да это совсем не шутка, — всполошился Володя. — Это пример с прошлогодних экзаменов. Я его, правда, не умею решать.

— Вот что; Володя, пойдем-ка сейчас ко мне и добьем этот пример.

Мы просидели почти час, а пример так и не поддавался.

— Может быть, ошибка в условии? — предположил я, когда были испробованы все известные мне подходы.

— Нет, все верно, — твердо сказал Володя. — Мы с Толиком из книжки решали, там все так. Да я ее принесу, у меня и другие вопросы были.

И он принес книжку, на титуле которой стояло: «Справочник для поступающих в Московский университет» *). На стр. 183 был наш злополучный пример. Мы полезли в ответы, там значилось: $x=3$; $x=4$. Подставили — ни одно из этих значений не подошло.

— Досадно, Володя, что мы потратили зря столько времени. Но ведь научиться решать подобные уравнения тебе все равно надо. Смотри, на предыдущей странице аналогичное уравнение:

$$x^2\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{\sqrt{2x+1}-1}+ \\ +x^2\cdot 2^{x-2}.$$

Давай решим его. Видишь, здесь нужно только правильно сгруппировать члены, чтобы разложить на множители.

Увы! Через несколько минут стало ясно, что и этот пример нам не под силу. Заглянули в ответ: $x=2$; $x=4$. Подставили — оба корня не подошли. Когда я заявил Володе, что и этот пример не верен, он взглянул на меня с некоторым недоверием, но все-таки вытащил листок с вопросами.

— Вы знаете, мы в школе не проходили, что такое тангенс по основанию x, а это нужно знать. — И он показал мне пример на стр. 196: требовалось решить уравнение

$$\operatorname{tg}_x\sqrt{1+\cos 2x}=\sin 2x.$$

— Не бывает никаких оснований у тангенса! Здесь, наверное, был логарифм, а при наборе получился тангенс.

Я заглянул через Володино плечо в листок с вопросами и понял, что не расстанемся мы до поздней ночи. Оказалось, что невозможно решить уравнение 2 на стр. 192, где вместо $2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0.5)}$ напечатано $2^{\log\sqrt{2}\,(x-0.5)}$; неравенство 4 на стр. 195, где вместо $\log_{\cos x}1{,}5$ стоит $\log\cos x\ 1{,}5$; уравнение 3 на стр. 197, где вместо $\sqrt{1+\cos 2x}$ набрано $\sqrt{1}+\cos 2x$; уравнение 2 из второго варианта (стр. 193), где выражение $5\sqrt{x+3-8}$ следует читать как $5\sqrt{x+3}-8$.

Велико число ошибок и в ответах. Например, неверные ответы даны к задачам № 1 из первого и третьего вариантов факультета вычислительной математики и кибернетики, к задаче № 5 из второго варианта отделения общей геологии, к задаче № 5 из второго варианта филологического факультета, к задаче № 2 из второго варианта отделения экономической кибернетики и т. д. и т. п. Причем многие ошибки можно обнаружить, не решая соответствующих задач. Например, на стр. 224 помещен такой ответ: $\log_4 3<x<0$, откуда следует, что $\log_4 3$ — число отрицательное, а каждому выпускнику средней школы известно, что это не так.

Список ошибок и разного рода небрежностей можно было продолжать и продолжать. Володя, воспитанный в духе уважения к печатному слову, был искренне удивлен. Он получил первый в своей жизни, но очень

---

*) «Справочник для поступающих в Московский университет». Под редакцией В. И. Тропина. Изд-во Московского университета, 1972, 254 стр. Тираж 70 000 экз. Цена 50 коп.

наглядный урок, подтверждающий старую русскую поговорку про бумагу, которая все стерпит. Но разве Володя один? Кто сможет оценить тот ущерб, который нанесен издателями этого справочника? Кто вернет читателям этой книжки драгоценные часы, потраченные попусту? Как знать, быть может, не пошел сдавать экзамены в МГУ будущий Ньютон и не пошел только потому, что не смог решить кем-то неверно переписанные и опубликованные в официальном издании примеры.

Небрежность, с которой составители справочника отнеслись к абитуриентам 1972 года, видна также в списке рекомендуемой литературы (стр. 179), где перечислены относительно давно вышедшие книги по математике, рассчитанные главным образом на поступающих во втузы (заметьте, что МГУ совсем не втуз!). При этом не указывается ни одна из книг, написанных специально по материалам вступительных экзаменов в МГУ. В частности, нет основной книги, ставшей в последние годы наиболее популярной среди выпускников и обобщающей богатейший опыт приемных экзаменов в МГУ за последние 10—15 лет, — «Пособия по математике для поступающих в вузы» Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова. Кстати, именно эта книга допущена Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений высших учебных заведений.

У меня на полке стоит несколько прошлых изданий «Справочника для поступающих в Московский университет». Я покупаю его с 1969 года — с тех пор, как в нем начали полностью помещать варианты письменных работ по математике, предлагавшиеся в МГУ. После этого справочник стал популярным не только среди абитуриентов МГУ, но и среди многих преподавателей вузов и учителей математики. И если работники издательства Московского университета будут так же небрежно относиться к опубликованию этих вариантов, как в 1972 году, то они тем самым серьезно дезориентируют поступающих, и в первую очередь тех из них, кто живет вдали от больших городов.

— А как же Володя? — спросите вы. Он поступил в Московский университет, хорошо учится. Хочется пожелать, чтобы в будущем такие события происходили не вопреки тем изданиям, которые призваны помочь абитуриентам, а благодаря им.

П. А. Серпов

Влажность и климат

Известно, что вода обладает большей теплоемкостью, чем воздух. При нагревании воды на 1° С надо затратить в 3000 раз больше тепла, чем при нагревании такой же массы воздуха.

Средняя температура поверхности мирового океана 17,4° С, тогда как средняя температура воздуха на всем земном шаре 14° С. Таким образом, зимой мировой океан служит как бы гигантской «печкой», которая обогревает сушу.

Правда, теплообмен между водой и воздухом происходит несколько своеобразно: существенную роль при этом играет влажность воздуха. Приведем очень любопытную заметку из дневника одного из участников экспедиции на Эльбрус в августе 1927 г.

«23 августа, после 5 часов, один из нас принес ведро воды для хозяйственных нужд экспедиции из ручья, стекавшего с ледника Малый Азау. К 6 часам вода покрылась ледяной пленкой при температуре воздуха +8, 8°, что показывает большое земное излучение, вызванное малым содержанием водяных паров в атмосфере».

На самом деле следует заменить красивые слова «большое земное излучение» на более правильные — «интенсивное испарение». В таких характерных условиях, как, скажем, в Мурманске, «потепление» климата неизбежно сопровождается повышением влажности. Это происходит потому, что климат Мурманска определяется теплым течением Гольфстрим, которое нагревает прибрежные воды Баренцева моря. Мало кому известно, что если бы эти воды в процессе теплообмена с воздухом теряли бы тепла еще на 1 градус больше, то средняя температура воздуха для Мурманска повысилась бы на 10 градусов!

Новые книги

Начиная с этого номера, мы будем помещать краткие аннотации на книги, выходящие в 1973 году и представляющие интерес для наших читателей.

В I квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).

Математика

Издательство «Наука»

1. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А., *Метод координат*. (Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 13 коп.)

Книга посвящена изложению одного из основных понятий математики — метода координат. На различных, чрезвычайно удачно подобранных примерах авторы показывают, как «работает» это понятие в математике.

Книга рассчитана на школьников 8—10 классов, интересующихся математикой.

2. Градштейн И. С., *Прямая и обратная теорема*. (Объем 7 л., тираж 50 000 экз., цена 23 коп.)

В книге изучаются отдельные вопросы математической логики, связанные со школьным курсом математики (необходимые и достаточные условия, прямые и обратные теоремы, доказательство от противного и т. д.).

На разборе ряда конкретных примеров автор показывает, как довольно тонкие понятия математической логики, теории множеств могут быть использованы при изучении школьного курса математики.

Книга написана простым и увлекательным языком.

Книга рассчитана на школьников 8—10 классов, будет полезна также для учителей, ведущих факультативные занятия.

Издательство «Мир»

3. Бахман Ф., Шмидт Э., *n-угольники*. (Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 74 коп.)

В книге популярно, на материалах элементарной математики излагается теория, устанавливающая зачастую совершенно неожиданную связь между геометрией и современной алгеброй.

Большое количество задач, помещенных в книге, очень помогает в усвоении излагаемого материала.

Книга доступна и представляет большой интерес для самого широкого круга читателей, в том числе и для школьников 8—10 классов.

Физика

Издательство «Наука»

4. *Над чем думают физики*. Выпуск 9. (Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 70 коп.)

Этот сборник переводных статей посвящен вопросам физики элементарных частиц. Сборник составлен из научно-популярных статей, авторы которых являются крупными учеными, творчески работающими в области теоретической и экспериментальной физики.

Сборник рассчитан на самый широкий круг читателей, в том числе и школьников старших классов.

5. Гребенников Е. А., *Николай Коперник*. (Объем 6 л., тираж 25 000 экз., цена 22 коп.)

В книге в популярной форме изложены события, факты и основные идеи, связанные с появлением теории Коперника.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

6. Шкловский И. С., *Вселенная, жизнь, разум*. (Объем 22 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 20 коп.)

Книга посвящена увлекательной проблеме — существования внеземных цивилизаций. В ней также достаточно полно и популярно изложены основные вопросы современной астрофизики.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, включая школьников старших классов.

7. Гуревич В. З., *Энергия невидимого света*. (Объем 8 л., тираж 25 000 экз., цена 50 коп.)

Эта книга — об инфракрасных лучах. О том, как они помогают управлять ракетами и спутниками, снять карту планеты, о том, как с их помощью расшифровывают состав неизвестного вещества и о многих других примерах использования этих лучей.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

8. Островский Ю. И., *Голография и ее применение*. (Объем 8 л., тираж 30 000 экз., цена 60 коп.)

Голография—это новый бурно развивающийся в последнее время метод регистрации и восстановления световых, акустических радиоволн. В книге изложены основы теории и экспериментальной техники применения голографии.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

9. Кедров В., *Ирен и Фредерик Жолио-Кюри*. (Объем 9 л., тираж 90 000 экз., цена 29 коп.)

Книга в живой и популярной форме знакомит с жизнью и научным творчеством замечательных французских ученых Ирен и Фредерик Жолио-Кюри.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

М. Л. Смолянский

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К «Задачам»

(см. стр. 38)

1. Сумма очков на верхних гранях двух кубиков не меньше 2 и не больше 12. Наиболее вероятна та сумма, которая может быть получена наибольшим числом сложений двух слагаемых (учитывая и их порядок), каждое из которых есть одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наибольшим числом сложений—шестью—можно образовать сумму 7:

$$1+6,\ 2+5,\ 3+4,\ 4+3,\ 5+2,\ 6+1.$$

2. $\sqrt[6]{4\bullet\bullet\bullet\bullet}=\sqrt[3]{\sqrt{4\bullet\bullet\bullet\bullet}}=\sqrt[3]{2\bullet\bullet}$ — целое число, то есть $2\bullet\bullet$ — точный куб. Но между числами 200 и 299 единственный точный куб — это число $216=6^3$. Следовательно,

$$\sqrt[6]{4\bullet\bullet\bullet\bullet}=6.$$

3. Пусть $\sqrt[5]{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet 4}=x$, $x^5=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet 4$.

Легко показать, что x оканчивается цифрой 4. Но $x>10$, так как $10^5=100\,000<\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet 4$ и $x<20$, так как $20^5=2^5\cdot 10^5=32\cdot 10^5$ — число семизначное. Итак, $10<x<20$, поэтому $x=14$.

4. $10=101_3=1010_2$.

5. $63=77_8=333_4=111\,111_2$.

6. $1950+1475=3435$.

7. В турнире участвовал только один девятиклассник, который набрал 10 очков.

(см. стр 44)

Три деревни Косоглаз, Борода и Алощек лгуновцы, Курнос чередовец, Длинноух — правдовец.

Юным мыслителям «Иди немедленно в комнату номер двести три». При решении воспользуйтесь принципом телевидения и сложите из этих 35 букв прямоугольник размером 5×7.

К статье «Тригонометрические уравнения»

1. $x=\frac{k\pi}{2}$. Указание. $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Указание. Привести левую часть уравнения к виду $\cos x+\sin x$ и возвести в квадрат.

3. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$;

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}+\pi k.$$

4. $x=3n\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}$.

5. $x=-\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+\pi n=$

$$=-\frac{3}{8}\pi+\pi n.$$

К статье «Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова»

Общеэкономический факультет

1. Трудность задачи состоит в том, что нужно найти не сами неизвестные величины, а их отношение.

Пусть скорости автомобилей будут соответственно v_1, v_2 и v_3. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3}v_1&=2v_1-v_3,\\ \frac{1}{2}v_2&=2v_2-v_3.\end{aligned}\right\}$$

Имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными.

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{2}{3}v_1-\frac{1}{2}v_2=2v_1-2v_2,$$

и поделим его на v_2:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)-\frac{1}{2}=2\left(\frac{v_1}{v_2}\right)-2,$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)=\frac{3}{2},\quad \frac{v_1}{v_2}=\frac{9}{8}.$$

2. 1) $S_п=S_б+S_{осн}$; (рис. 1)

2) $S_п=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot AD\cdot ES+AD^2=2AD\cdot ES+$

$$+AD^2=AD(2ES+AD);$$

3) $OO_1=OM=a\cos\alpha$ (ΔOSM);

4) $O_1E=OO_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=a\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

5) $AD=2O_1E=2a\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

6) $$SE = \frac{O_1E}{\cos\alpha} = \frac{a\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2};$$

7) $$S_{п} = 2a\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\left(2a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} + 2a\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\right) = 4a^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \times$$

$$\times(1+\cos\alpha) = 8a^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{п} = 8a^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\ \textit{кв. ед.}$$

Здесь наиболее частая ошибка — неправильное проведение радиуса шара в точку касания. Многие абитуриенты изобразили его параллельным основанию пирамиды.

3. $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x;$

$$\cos 7x + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2} - \cos x;$$

$$2\cos 4x\cdot\cos 3x = \cos 4x;$$

$$\cos 4x\cdot(2\cos 3x - 1) = 0.$$

1) $\cos 4x = 0;\quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k;$

2) $2\cos 3x - 1 = 0;$

$$\cos 3x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k.$$

4. $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6;$

$$(2+\lg x)^2 - (1+\lg x)^2 + \lg^2 x = 6;$$

$$\lg x = y;$$

$$y^2 + 4y + 4 - 1 - 2y - y^2 + y^2 = 6;$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0;$$

$$y_{1,\,2} = -1 \pm \sqrt{1+3};$$

$$y_1 = 1;\quad y_2 = -3;$$

$$\lg x = 1;\quad x_1 = 10;$$

$$\lg x = -3;\quad x_2 = \frac{1}{1000}.$$

Факультет экономической кибернетики

1. $$\begin{cases} \frac{100}{v_1} - 2\cdot\frac{100}{v_1+v_2} = 2, \\ \frac{100}{v_1} - \frac{100}{v_2} = \frac{10}{3}, \end{cases}$$

$$100\,(v_2 - v_1) = 2v_1\,(v_1 + v_2),$$

$$100\,(v_2 - v_1) = \frac{10}{3}\,v_1v_2.$$

$$\frac{3\cdot 2v_1\,(v_1+v_2)}{10v_1v_2} = 1;$$

$$3v_1^2 + 3v_1v_2 = 5v_1v_2;$$

$$3v_1^2 = 2v_1v_2;\quad v_2 = \frac{3}{2}\,v_1;$$

$$100\cdot\frac{1}{2}\,v_1 = 2v_1\cdot\frac{5}{2}\cdot v_1;$$

$$v_1 = 10\ \textit{км/час};\quad v_2 = 15\ \textit{км/час}.$$

2. $AC = H\,\mathrm{ctg}\,\beta;$ (рис. 2)

$$BD = H\,\mathrm{ctg}\,\alpha;$$

$$S_{осн} = \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}H^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\sin\gamma;$$

$$v = \frac{1}{2}\,H^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\sin\gamma.$$

Многие абитуриенты, используя при определении площади основания формулу $S = \frac{d_1d_2}{2}\sin\gamma$, полагали, что в основании прямой призмы лежит квадрат, прямоугольник или параллелограмм. Здесь нужно было пояснить, какая фигура лежит в основании, и доказать правомерность этой формулы.

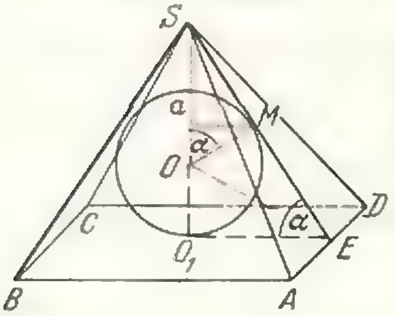


Рис. 1.

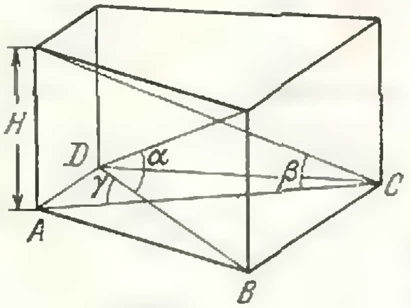


Рис. 2.

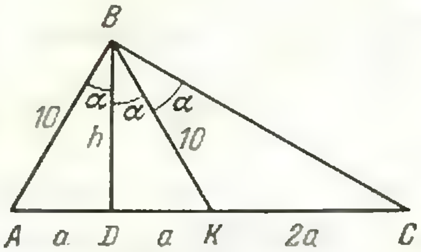


Рис. 3.

3. $(x+1)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-1)}+11\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-\right.$ $\left.-3\right]=0;$ $x_1=-1;$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=y;$ $4y^2+$ $+11y-3=0;$ $y_1=\frac{1}{4};$ $y_2=-3<0;$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2};$ $x_2=2.$ Около 70% абитуриентов не указали корень $x=-1$.

4. Так как при $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ имеем $\cos x\leqslant 0$, то

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x,$$

$$8\cos^2 x-2\cos x-3=0,$$

$$\cos x=-\frac{1}{2},$$

$$x_1=\frac{2}{3}\pi,\quad x_2=\frac{4}{3}\pi.$$

Некоторые абитуриенты уединяли радикал и возводили обе части уравнения в квадрат. Другие не учитывали области определения аргумента и писали

$$x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi.$$

Финансовый факультет

1. Задача допускает несколько интересных решений с использованием теоремы синусов, теоремы тангенсов, с применением дополнительных построений и др. Приведем одно из них (рис. 3):

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{3a}{h},\quad 3\operatorname{tg}\alpha=\frac{3a}{h},\quad \operatorname{tg}2\alpha=3\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=3\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \alpha=30^\circ.$$

Ответ: $AB=10$ *см*, $AC=20$ *см*, $BC=10\sqrt{3}$.

2. $\lg^2 2x+\lg^2 3x=\lg^2 2+\lg^2 3,$

$$\lg^2 2x-\lg^2 2=\lg^2 3-\lg^2 3x,$$

$$\lg x\cdot\lg 4x=\lg\frac{1}{x}\cdot\lg 9x=-\lg x\cdot\lg 9x.$$

1) $\lg x=0,\ x_1=1;$

2) $\lg 4x=-\lg 9x,$

$\lg 4+\lg x+\lg 9+\lg x=0,$

$$2\lg x=-\lg 36,\quad x^2=\frac{1}{36},\quad x_2=\frac{1}{6}.$$

3. Составим таблицу:

Автомобили	Скорость	Время движения до встречи	Пройденное расстояние до встречи	Пройденное расстояние после встречи	Время движения после встречи
I	x	4	$4x$	$4y$	$4\frac{y}{x}$
II	y	4	$4y$	$4x$	$4\frac{x}{y}$

$$\left.\begin{aligned}&4x+4y=280,\\&4\frac{y}{x}-4\frac{x}{y}=\frac{7}{3},\end{aligned}\right\}\ \frac{y}{x}=t;$$

$$4t-\frac{4}{t}=\frac{7}{3},\qquad 12t^2-7t-12=0;$$

$$t=\frac{4}{3};\quad y=\frac{4}{3}x;\quad x=30\ \textit{км/час},$$

$$y=40\ \textit{км/час}.$$

4. $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x,$

$$4\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=2\sin 2x\cdot\cos 2x,$$

$$\sin 2x\,(2\sin x\cdot\sin 3x-\cos 2x)=0,$$

$$\sin 2x\,(\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x)=0,$$

$$\sin 2x\cdot\cos 4x=0,$$

$$x=\frac{k\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{8}(2k+1)\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Факультет товароведения промышленных товаров

1. 14 *км/час*, 2 *км/час*.

2. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$

3. $x=2.$

4. Решений нет.

Факультет экономики и организации материально-технического снабжения

1 $2<x<3;\quad 6<x<7.$

2. $V=\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\operatorname{tg}^2\varphi\sin(\alpha+$ $+\beta)\sin\beta$ *куб. ед.*

3. 6 *км/час*, 4 *км/час*, 10 *км*.

4. $x = \pi k;\ x = (-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k.$

Факультет экономики промышленности

1. 80 *км/час*, 48 *км/час*, 480 *км*.

2. $V = \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 35}H^3;\quad S = \frac{2\sqrt{3}}{5}H^2.$

3. $x = 3.$

4. $x = \frac{\pi}{6} + \pi k.$

Торгово-экономический факультет

1. $x = 2.$

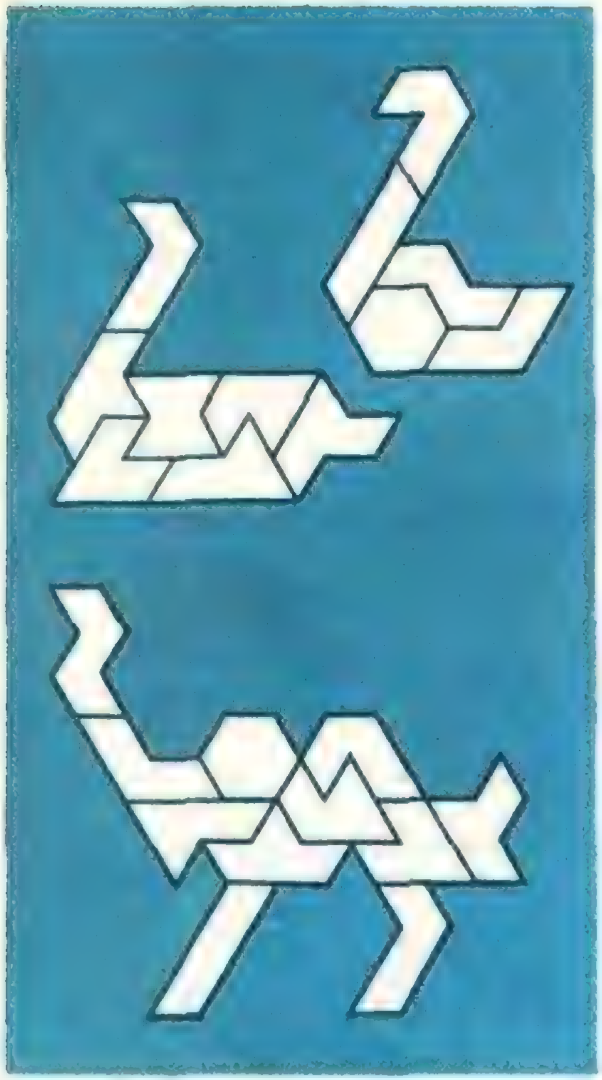
2. $V = \frac{2}{3}a^3\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi.$

3. 40 *км/час*, 50 *км/час*.

4. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3},\quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}.$

К заметке «Наш зоопарк»

(*см. «Квант» № 1, 1973*)



К заметке «Картезианский водолаз»

Барометр сделать не удастся. С увеличением глубины погружения «водолаза» давление воды возрастает, воздух в «водолазе» еще больше сжимается, и «водолаз» все стремительнее опускается на дно. Однако можно отрегулировать «водолаза» так, что он будет опускаться на дно, если атмосферное давление станет выше некоторой величины.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 1, 1973, 3-я стр. обл.*)

1. Есть лишь один случай, когда, зная номер трамвая, нельзя определить возраст детей; отсюда находим номер трамвая. Указание, что один из детей — старший, исключает случай со старшими близнецами.

2. Сумма чисел всех карточек нечетна. Однако можно перевернуть карточки с числом 16 (получив 91) и некоторые другие.

3. $a = 1,\ b = 9,\ c = 8.$

4. Под действием атмосферного давления крышечка «втянется» в бутылку (давление на нее сверху уменьшится).

5. Второму человеку, несущему бревно, станет от этой «помощи» тяжелее. Убедиться в этом вы можете на собственном опыте или воспользовавшись правилом рычага.

К заметке «За сколько ходов»

(*см. «Квант» № 1, 1973*)

1. Для решения воспользуйтесь рисунком 4. Здесь десять квадратов соответствуют полям нашей необычной доски, а отрезками соединены квадраты, между которыми возможен ход коня. Поле с 3 является как бы «транзитным»: связь между двумя ветками полей, которые мы видим на рисунке, а также полем а2, возможна только через него.

2. Сделайте рисунок, аналогичный рисунку 4. Из него будет сразу следовать решение, всего понадобится 22 хода.

3. Цель достигается за 26 ходов.

4. Коня можно съэсть за 27 ходов.

5. Перестановку слонов можно осуществить за 36 ходов.

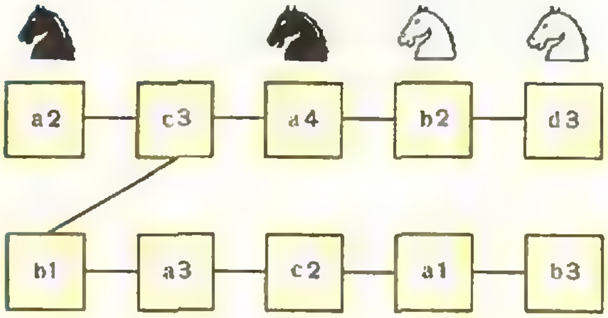


Рис. 4.

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы»

(*см. «Квант» № 1, 1973 г.*)

Физика

Вариант 1

1. Пуля пролетит выше центра мишени на величину

$$S = h - \frac{gl}{2v^2}(2L + l) \simeq 0,14 \text{ м}.$$

2. После освобождения груза C (см. рисунок в условии задачи) система начинает движение с ускорением $a = g/3$. Это происходит до тех пор, пока груз A не коснется подставки. Взаимодействие грузов с подставкой и между собой (при соударении грузов A и B) считаем абсолютно неупругим. Время движения на этом этапе равно $t_1 = 2\sqrt{\frac{3h}{g}}$; конечная скорость $v_1 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$ (на графике в координатах v, t — наклонная прямая, идущая вверх).

Далее груз C движется равномерно со скоростью v_1 до тех пор, пока груз B не коснется груза A. Время движения $t_2 - t_1 = \frac{h}{v_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h}{g}} = \frac{1}{4}t_1$ (на графике — прямая, параллельная оси абсцисс).

Затем груз C движется с ускорением g, направленным вниз (как в случае движения тела, брошенного вертикально вверх). Пройдя наивысшую точку, груз C опускается и в момент t_3 начинает поднимать груз B.

$$t_3 - t_2 = 2\frac{v_1}{g} = 4\sqrt{\frac{h}{3g}} = \frac{2}{3}t_1.$$

Тангенс угла наклона графика скорости к горизонтальной оси по абсолютной величине втрое больше, чем на первом этапе (на графике — наклонная прямая, идущая вниз и пересекающая ось абсцисс).

В момент t_3 происходит скачкообразная потеря скорости груза C (нить считаем нерастяжимой) в соответствии с законом сохранения количества движения: $mv_1 = 2mv_2$; $v_2 = \frac{1}{2}v_1 = \sqrt{\frac{gh}{3}}$ (на графике — прямая, параллельная оси ординат).

Далее грузы движутся с постоянной скоростью v_2 в течение времени $t_4 - t_3 = \frac{h}{v_2}\sqrt{\frac{3h}{g}} = \frac{1}{2}t_1$ (прямая, параллельная оси абсцисс).

В момент t_4 начинает подниматься груз A, и снова происходит скачкообразное изменение скорости груза C. Закон сохранения количества движения имеет вид: $2mv_2 = 3mv_3$; $v_3 = \frac{2}{3}v_2 = \frac{1}{3}v_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{gh}{3}}$ (прямая, параллельная оси ординат). Затем груз C движется равнозамедленно (наклонная прямая, идущая вверх и пересекающая ось абсцисс).

$$t_5 - t_4 = \frac{v_3}{a} = 2\sqrt{\frac{h}{3g}} = \frac{1}{3}t_1$$

Начиная с момента t_5 картина будет повторяться. При этом периодические движения всей системы затухают, так как начальная скорость груза C стремится к нулю при $t \to \infty$.

3. $$m_1 = \frac{mgkl}{\lambda(1 - k\operatorname{ctg}\alpha)} \simeq 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Вариант 2

1. $$v_0 = \frac{2h - gt^2}{2t\sin\alpha} = 67 \text{ м/с}$$

$$s = v_0\cos\alpha\left(2\frac{v_0\sin\alpha}{g} + t\right) = 435 \text{ м}.$$

2. Будем решать задачу на основе закона сохранения энергии. Некоторое усложнение связано с неопределенным характером взаимодействия тел при ударе. Так как шарик отскакивает после удара, ясно, что удар упругий. Но он может быть не абсолютно упругим, то есть часть механической энергии может перейти в немеханические виды, например, в тепловую энергию.

Закон сохранения энергии при ударе:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + Q, \qquad (1)$$

где Q — немеханические виды энергии,
v_0 — скорость шарика перед ударом,
v — скорость шарика после удара,
V — скорость тела после удара.

При движении шарика из начального положения 1 к точке удара A (см. рисунок к условию задачи) сохраняется механическая энергия шарика:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl. \qquad (2)$$

После удара шарик отскакивает от точки A к точке 2. При этом также сохраняется механическая энергия:

$$mgh = mgl(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3)$$

Тело M при ударе получает кинетическую энергию $\frac{MV^2}{2}$, которая переходит в тепловую энергию в процессе совершения работы против сил трения:

$$\frac{MV^2}{2} = F_{\text{тр}}\cdot S = kMgS. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (1—4), получим:

$$mgl = kMgS + mgl\,(1-\cos\alpha) + Q \qquad (5)$$

или

$$kMgS = mgl\cos\alpha - Q. \qquad (6)$$

От уравнения (6) легко переходим к неравенству:

$$kMgS \leqslant mgl\cos\alpha \qquad (7)$$

или

$$k \leqslant \frac{ml\cos\alpha}{MS}, \quad k \leqslant 1{,}8\cdot 10^{-3}.$$

Равенство имеет место при $Q = 0$, то есть при абсолютно упругом ударе.

3. $m = \dfrac{\pi d^2 h \rho_1 \rho_2}{4(\rho_1 - \rho_2)} = 0{,}41$ *кг*.

Математика

Контрольная работа № 1

1. 1. Указание. В этом примере приходится обращать смешанно-периодические и чисто-периодические бесконечные десятичные дроби в обыкновенные дроби. Вот один из практических приемов такого обращения.

Пусть дана чисто-периодическая дробь $x = 0,(a)$, где число a содержит k цифр. Перепишем заданное число так: $x = 0,a(a)$ и умножим на 10^k. Получим $10^k\cdot x = a,(a)$. Если теперь из $10^k x$ вычесть x, то получим $x(10^k - 1) = a$, откуда $x = \dfrac{a}{10^k - 1}$.

Если дана смешанно-периодическая дробь $x = 0,b(a)$, где число b содержит n цифр, а число a содержит k цифр, то умножим x на 10^n, получим $10^n\cdot x = b,(a)$ или $10^n\cdot x = b,a(a)$. А теперь умножим обе части последнего равенства на 10^k: $10^{n+k}\cdot x = \{b\}\{a\},(a)$ (здесь $\{b\}\{a\}$ означает последовательную запись цифр, образующих число b и число a). Если теперь из $10^{n+k}\cdot x$ вычесть $10^n\cdot x$, то получим $\{b\}\{a\} - b$, откуда уже без труда находится x.

Например, $x = 2{,}708(3)$. Тогда $1000x = 2708,(3)$ или $1000x = 2708{,}3(3)$. Далее, $1000x\cdot 10 = 27\,083,(3)$, $10\,000x - 1000x = 27\,083,(3) - 2708,(3)$, то есть $9000x = 24\,375$, откуда $x = \dfrac{65}{24}$.

2. Указание. Применить неравенство Коши: $\dfrac{1+a_i}{2} \geqslant \sqrt{1\cdot a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3. $\dfrac{72}{a^2 - 3a + 9}$.

4. 2, если $a > 1$; 0, если $0 \leqslant a < 1$. Указание. Учесть, что $\sqrt{a - 2\sqrt{a} + 1} = |\sqrt{a} - 1|$.

5. $-b$. Указание. Так как числа a и b возводятся в дробные степени, то они неотрицательны (причем $b \neq 0$).

6. $\sin 2\alpha$.

7. 2.

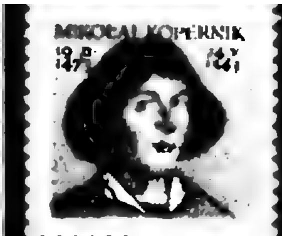
8. 0,6. Указание. Из уравнения $3\,\mathrm{tg}^2\alpha - 10\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0$ находим $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ или $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$. Но из условия $\dfrac{5}{4}\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ заключаем, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

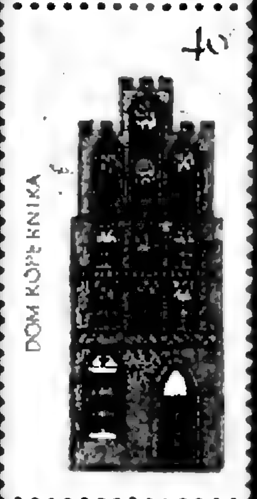
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

НИКОЛАЙ КОПЕРНИК

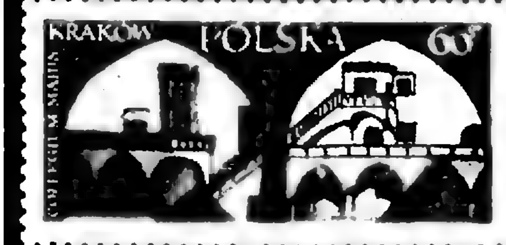
полняется 500 лет со дня рождения великого польского ученого-астронома Николая Коперника (1473—1543 гг.). Эта дата широко отмечается во всем мире.

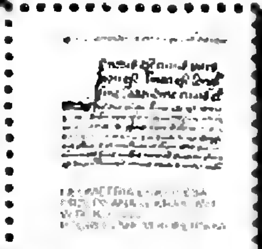
Большинство людей обычно доверяет своему практическому опыту. Опыт говорит, например, что утром Солнце поднимается на востоке, движется по небу и вечером заходит на западе. Этот практический опыт был отражен в учении о строении Вселенной древнегреческого ученого Клавдия Птолемея, утверждавшего, что Земля находится в центре Вселенной, а вокруг нее движутся Солнце, планеты и звезды. Учение Птолемея хорошо согласовывалось с Библией, где говорилось, что, создавая мир, бог первым делом сотворил Землю. В течение многих веков ученые вносили поправки в таблицы Птолемея, предсказывающие различные небесные явления, но саму геоцентрическую систему мира никто не подвергал сомнению.

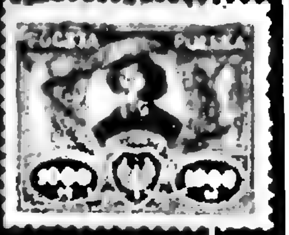




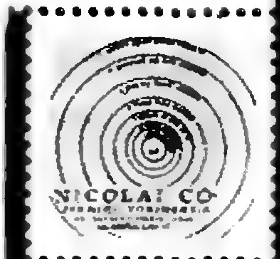
2,50
OLSZTYN
ZAMEK

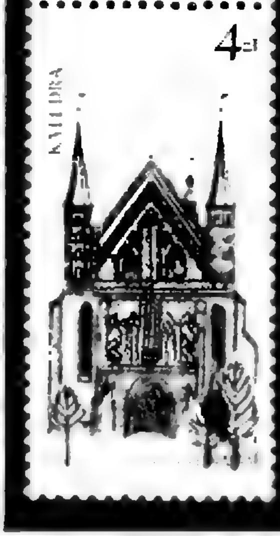






Коперник отверг эти ложные представления о строении Вселенной. Он пришел к выводу, что все планеты движутся по круговым орбитам вокруг Солнца и установил, что Земля обходит Солнце за год, вращаясь при этом вокруг своей оси. Теория Коперника произвела переворот в астрономии и подорвала основы учения церкви.



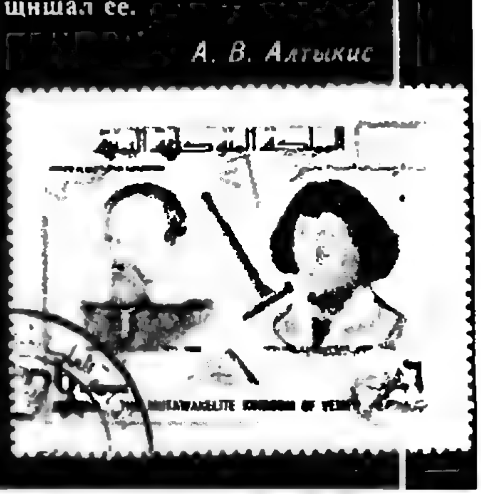


Копернику посвящено около 50 марок и блоков. Вполне понятно, что наибольшее число таких марок выпущено на его родине в Польше. Первые две марки с портретом Коперника вышли в Польше в 1923 г. (на фото приведена одна из них). В нашем журнале (№ 1, 1971 г.) были воспроизведены 17 марок, посвященных Николаю Копернику. После этого в Польше 11 июня 1971 г. была выпущена еще одна серия (4 марки с купонами), посвященная Копернику, которую вы видите на фото.

На одной из марок показан дом в польском городе Торуни, в котором родился Коперник, а на купоне приведен портрет ученого работы польского художника Яна Матейко. На второй изображен замок в Ольштыне, где Коперник провел часть своей жизни, и астролябия. На третьей — Коллегия Майус в Кракове, где учился Коперник, а на купоне — страница из геометрии Евклида, по которой он учился. На последней марке изображен Собор в Фромборке, где помещалась обсерватория Коперника. На купоне приведена схема его гелеоцентрической системы.

На фото вы видите также марку Йеменской арабской республики с портретом Николая Коперника и другого великого астронома Иоганна Кеплера, который был сторонником теории Коперника и страстно защищал ее.

А. В. Алтыкис



2

«...я, наконец, после многочисленных и продолжительных наблюдений обнаружил, что если с круговым движением Земли сравнить движения и остальных блуждающих светил и вычислить эти движения для периода обращения каждого светила, то получатся наблюдаемые у этих светил явления. Кроме того, последовательность и величины светил, все сферы и даже само небо окажутся так связанными, что ничего нельзя будет переставить ни в какой части, не произведя путаницы в остальных частях и во всей Вселенной».

Цена 30 коп.

ИНДЕКС 70 465

НОМЕР
3

Основан в 1970 году

Квант

3

1973

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин**
Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров**

Редакционная коллегия:
Л. А. Арцимович,
М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
И. Н. Бронштейн,
Н. Б. Васильев,
И. Ф. Гинзбург,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
А. Н. Климанов (*главный художник*),
С. М. Козел,
В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*),
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
М. Д. Миллионщиков,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*),
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:
В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
Т. М. Макарова (*художественный редактор*),
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
Л. В. Чернова (*зав. редакцией*).

В НОМЕРЕ:

2 *А. Н. Колмогоров.* Полулогарифмическая и логарифмическая сетки
8 *М. С. Лившиц.* Эхолокация
15 *М. Л. Гервер.* Собака бежит наперерез
19 *Г. Л. Коткин.* Столкновение шариков

Математический кружок

22 *Г. Д. Балк, М. Б. Балк.* Мнимые числа и геометрические задачи
32 **Победители конкурса «Кванта»**

Лаборатория «Кванта»

34 *В. В. Майер.* Борный люминофор

Задачник «Кванта»

35 Задачи М191—М195; Ф203—Ф207
37 Решения задач М151—М154; Ф170—Ф175

Практикум абитуриента

44 *Л. М. Лоповок.* Против шаблона
50 *Л. П. Баканина, С. М. Козел.* Принцип суперпозиции в электростатике
56 Московский государственный университет (экономический факультет)
57 *И. А. Дьяконов, А. Г. Мордкович, И. И. Наслузов.* Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

Рецензии, библиография

58 *Е. И. Олерский.* История числа π
59 *Л. Г. Кузнецова.* Для поступающих в институты и техникумы

«Квант» для младших школьников

60 Задачи
61 *А. П. Азия, И. М. Вольпер.* Квадрат Пирсона
62 **Ответы, указания, решения**

Уголок коллекционера

А. В. Алтыкис. Марки, посвященные Рентгену (3-я стр. обложки)
Смесь *(стр. 21, 55)*

Первая страница обложки иллюстрирует статью В. В. Майера «Борный люминофор» (стр. 34). Объектом освещения мы избрали копию статуи «Менада» греческого скульптора Скопаса, жившего в IV веке до нашей эры.

На четвертой странице обложки приведена репродукция рисунка известного голландского художника М. Эшера «Три сферы». На нем в абстрактной форме показаны деформации сталкивающихся сфер (см статью Г. Л. Коткина «Столкновение шариков» на стр. 19).

Корректор *Н. Д. Дорохова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 24.XI.72 г.
Подписано в печать 18.I.73 г.
Бумага 70×100 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,20
Уч.-изд. л. 6,08
Тираж 179250 экз   Т-00718
Цена 30 коп.   Зак. 2318

Чеховский полиграфический комбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Полулогарифмическая и логарифмическая сетки

А. Н. Колмогоров

1.

В 12 номере «Кванта» за 1972 год была опубликована статья «Экспонента». В ней показано, что многие величины меняются во времени так, что скорость их изменения пропорциональна уже достигнутому ими значению. Общий вид такой показательной зависимости y от t записывается формулой

$$y = y_0 a^t, \qquad (1)$$

где y_0 — значение величины y при $t = 0$. Положив

$$k = \lg a, \quad z = \lg y, \quad b = \lg y_0,$$

из (1) получаем $z = kt + b$.

Мы видим, что зависимость z от t линейна. Ее график есть прямая линия. Начертив обычным способом этот график, мы можем на оси z (или на параллельной ей прямой) поставить отметки соответствующих значений $y = 10^z$. Тогда по нашему прямолинейному графику можно будет при любом заданном t непосредственно считывать значения y. На рисунке 1 такой способ графического изображения применен к функциям $y = 100^t$ и $y = e^t$ ($e = 2{,}718\ldots$). Их графики в декартовой системе координат изображены на рисунке 2.

В магазинах продается полулогарифмическая бумага. На этой бумаге вертикальные линии проведены с промежутками в 1 *мм*, как на обычной миллиметровой бумаге, горизонтальные же линии проведены так, что их расстояние от нижней кромки равно $100 \lg y$, y принимает значения

1 1,05 1,10 1,15 …
2 2,1 2,2 2,3 …

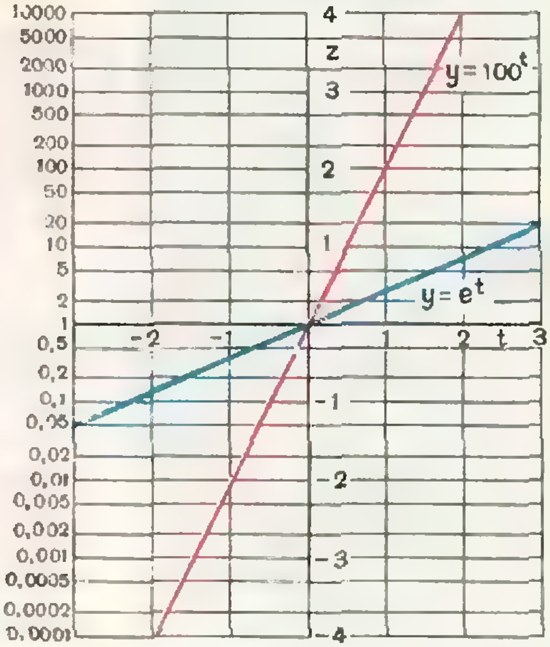


Рис. 1.

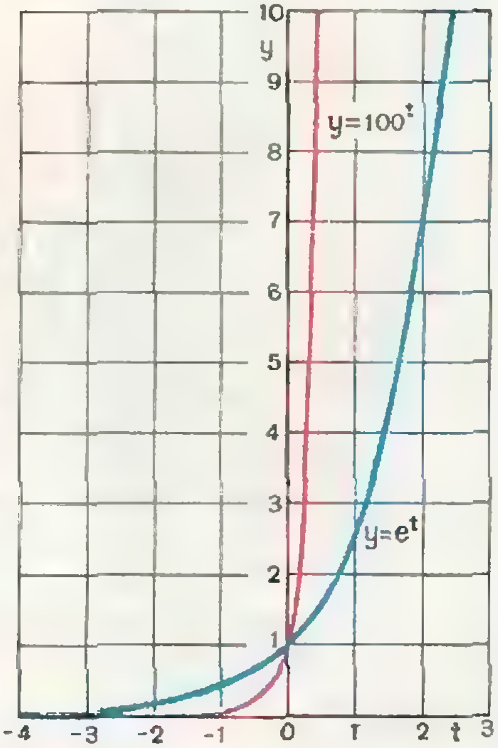


Рис. 2.

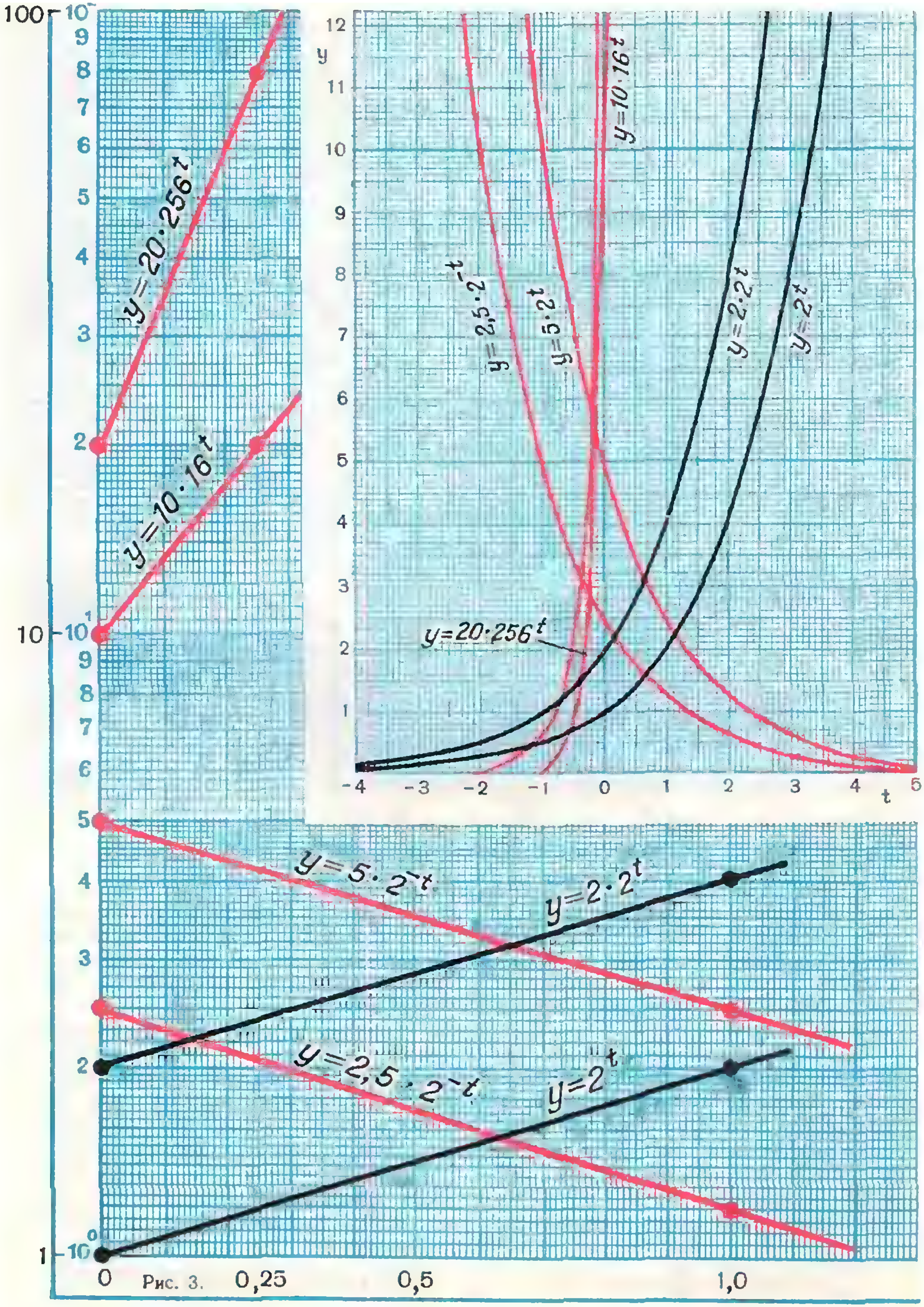

100
10
9
8
7
6
5
4
3
2
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0,25
0,5
1,0
y=20·256^t
y=10·16^t
y=5·2^-t
y=2·2^t
y=2,5·2^-t
y=2^t
y
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
t
y=2,5·2^-t
y=5·2^t
y=10·16^t
y=2·2^t
y=2^t
y=20·256^t

Рис. 3.

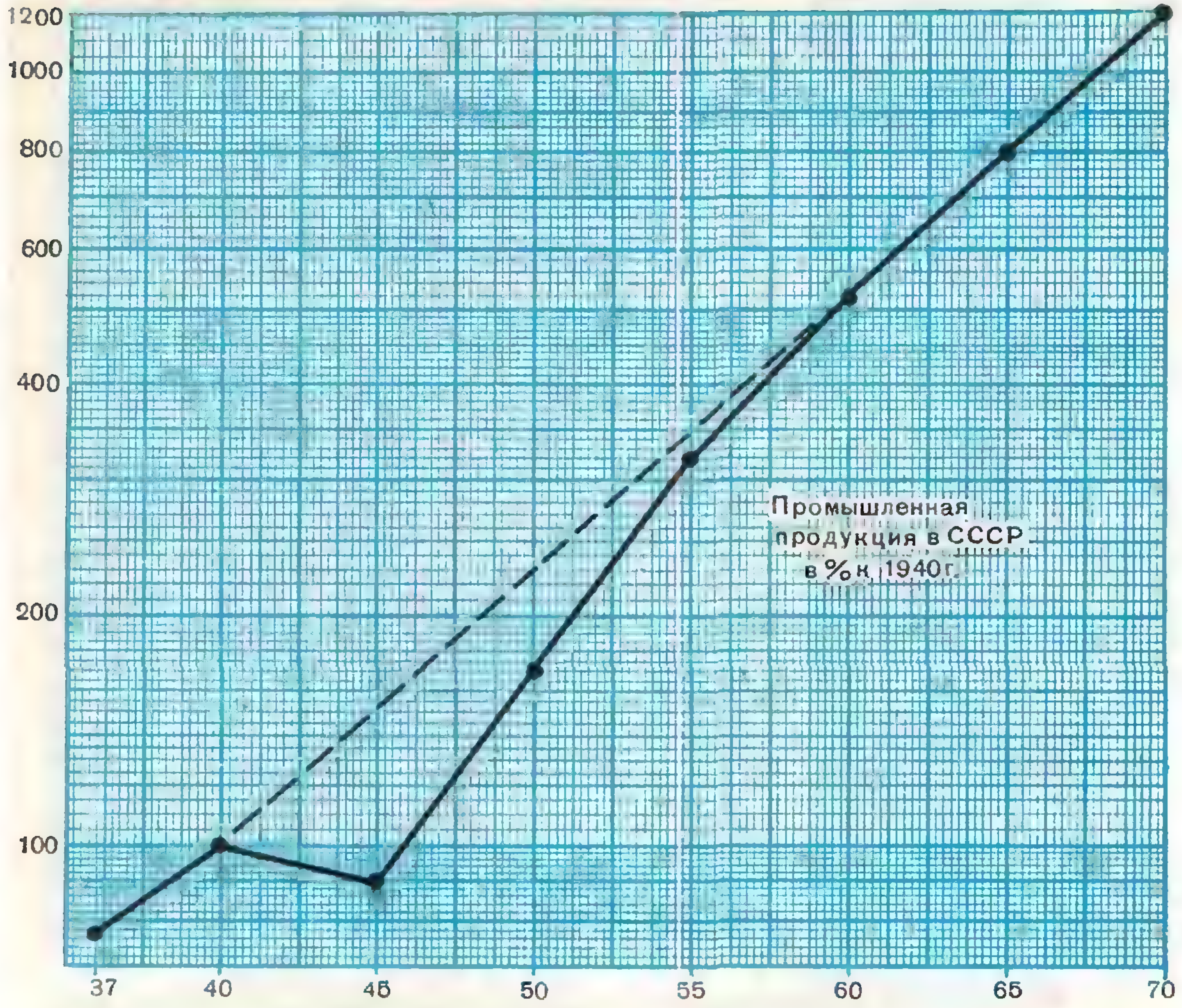


Рис. 4.

и т. д. (разберитесь по рисунку 3, как устроена эта шкала!). В нижней части рисунка 3 показано, как построить на полулогарифмической бумаге графики функций вида (1) по двум точкам ($t = 0$, $y = y_0$), ($t = 1$, $y = y_0a$).

На полулогарифмической бумаге приращению $\Delta t = 1$ соответствует 10 *см*. Такой же масштаб мы выбрали на рисунке 3 по оси y. Поэтому угловой коэффициент наших графиков равен $k = \lg a$. Это не что иное, как относительная скорость изменения y при изменении t:

$$\frac{1}{y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \lg a = k$$

(здесь y' — производная функции $y = f(t) = y_0a^t$). Если масштаб по оси y выбран иначе, то нужен пересчет, с которым вы легко справитесь самостоятельно.

Графики на полулогарифмической бумаге вычерчивают, когда требуется выяснить, можно ли заданную таблицей зависимость $y = f(t)$ хотя бы приближенно считать подчиняющейся закону показательного роста (или убывания). Рассмотрим в виде примера объем промышленной продукции в СССР, выраженный в процентах к продукции 1940 года:

1937	1940	1945	1950	1955	1960	1965	1970
77	100	92	173	320	524	791	1190

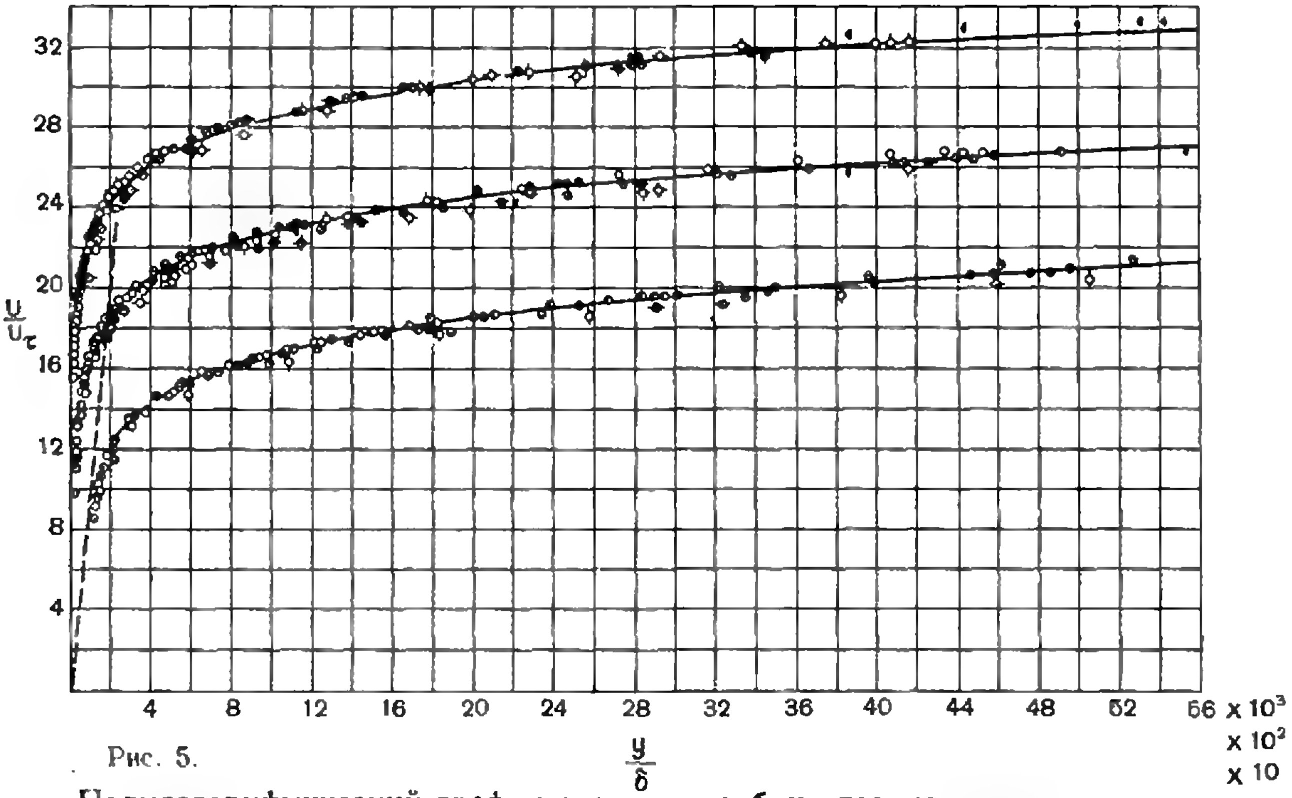


Рис. 5.

Полулогарифмический график дан на рисунке 4 (график в натуральном масштабе по вертикали вы можете для сравнения вычертить сами). По графику видно, что, за исключением военного пятилетия 1940—1945 годов, рост промышленной продукции приблизительно следует показательному закону. Найдите самостоятельно, скольким процентам прироста в год соответствует средний наклон графика. На графике видно, что темпы роста в 1945—1955 годах несколько выше, чем в 1960—1970 годах. Инте-

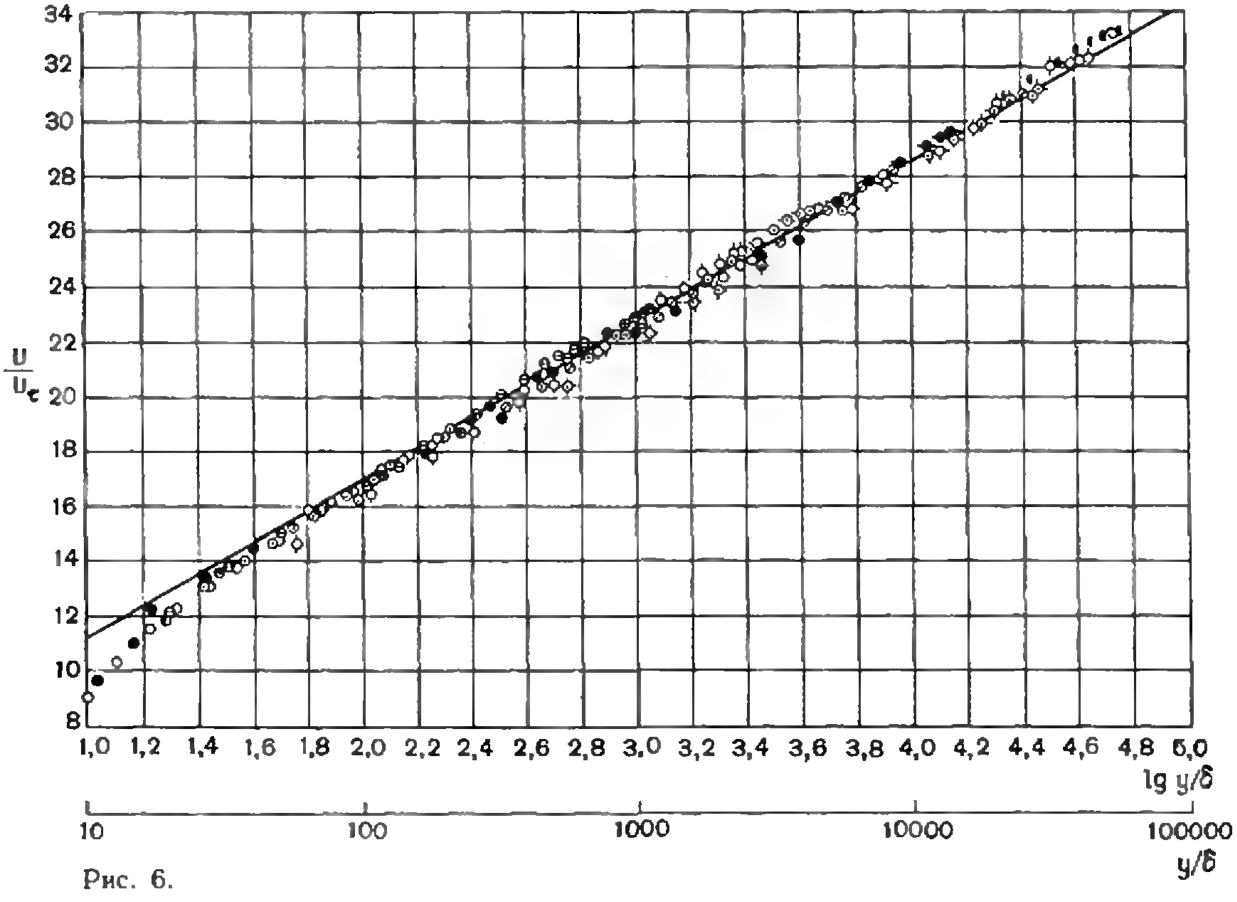


Рис. 6.

ресно, что, выключив из рассмотрения точки, соответствующие 1945 и 1950 годам, мы получим почти прямую линию: за 1945—1955 годы наша промышленность наверстала упущенное за время войны. Определите средний годичный прирост продукции за 1937—1970 годы (в процентах в год).

2.

Понятно, что зависимость вида

$$y = A \lg t + B$$

тоже изображается прямолинейным графиком, если по оси абсцисс откладывать $s = \lg t$, а по оси ординат y. В виде примера рассмотрим изображенную на рисунке 5 зависимость скорости u от расстояния y от стенки при турбулентном течении жидкости вдоль плоской стенки. Здесь δ и u_τ надлежащим образом выбранные масштабы длин и скоростей. Измерения производились при y/δ, меняющемся в пределах от 10 до 56 000. Поэтому для изображения результатов измерений понадобились три графика с различными масштабами по оси абсцисс. После перехода к логарифмическому масштабу для y/δ все эти данные уместились на одном графике (см. рис. 6). При этом график «выпрямился». Прямая на рисунке 6 задается уравнением

$$\frac{u}{u_\tau} = 5,5 + 5,75 \lg y/\delta. \tag{2}$$

Мы видим, что эта закономерность очень точно соблюдается, начиная с $y/\delta = 100$. При меньших y/δ заметны систематические отклонения, а при $y/\delta < 15$ эти отклонения делаются столь значительными, что здесь соотношение (2) надо признать совсем негодным.

3.

Зависимости вида

$$y = ct^\alpha \tag{3}$$

тоже «выпрямляются» при переходе к переменным

$$s = \lg t, \ z = \lg y.$$

В самом деле, из (1) вытекает

$$z = \alpha s + b, \tag{4}$$

где $b = \lg c$. Для изображения зависимостей вида (3) прямолинейными графиками пользуются логарифмической сеткой. Логарифмическая бумага тоже продается в магазинах. На рисунке 7 даны примеры графиков на логарифмической бумаге. Легко понять, что угловой коэффициент графиков здесь равен α.

Графики на логарифмической сетке вычерчивают, если есть основания думать, что какая-либо эмпирическая зависимость приближенно следует закону вида (3). На рисунке 8 на логарифмической сетке нанесены эмпирические данные о распределении энергии пульсаций в турбулентном потоке. Здесь $E(k)$ — спектральная плотность энергии пульсаций, соответствующая частоте k; E_0 и k_0 — условные единицы для E и k. Мы видим, что при

$$10^{-4} k_0 \leqslant k \leqslant 10^{-1} k_0$$

наша зависимость хорошо выражается формулой вида

$$E = ck^{-5/3},$$

которая из теоретических соображений была предложена А. М. Обуховым.

Здесь масштабы для $\lg k$ и $\lg E$ разные. Поэтому угловой коэффициент графика, соответствующего заданному α, не равен α. На рисунке показано, как графически строится прямая с наклоном, соответствующим $\alpha = 5/3$.

Задача

Изобразите на полулогарифмической бумаге данные таблицы (см. стр. 7) о росте продукции промышленности СССР по двум группам: группа А — производство средств производства, группа В — производство предметов потребления (в процентах к 1913 году).

В какие годы рост продукции по группе А обогнал рост продукции по группе В и в какие годы они шли наравне? Сравните особенности военных лет первой и второй мировой войны.

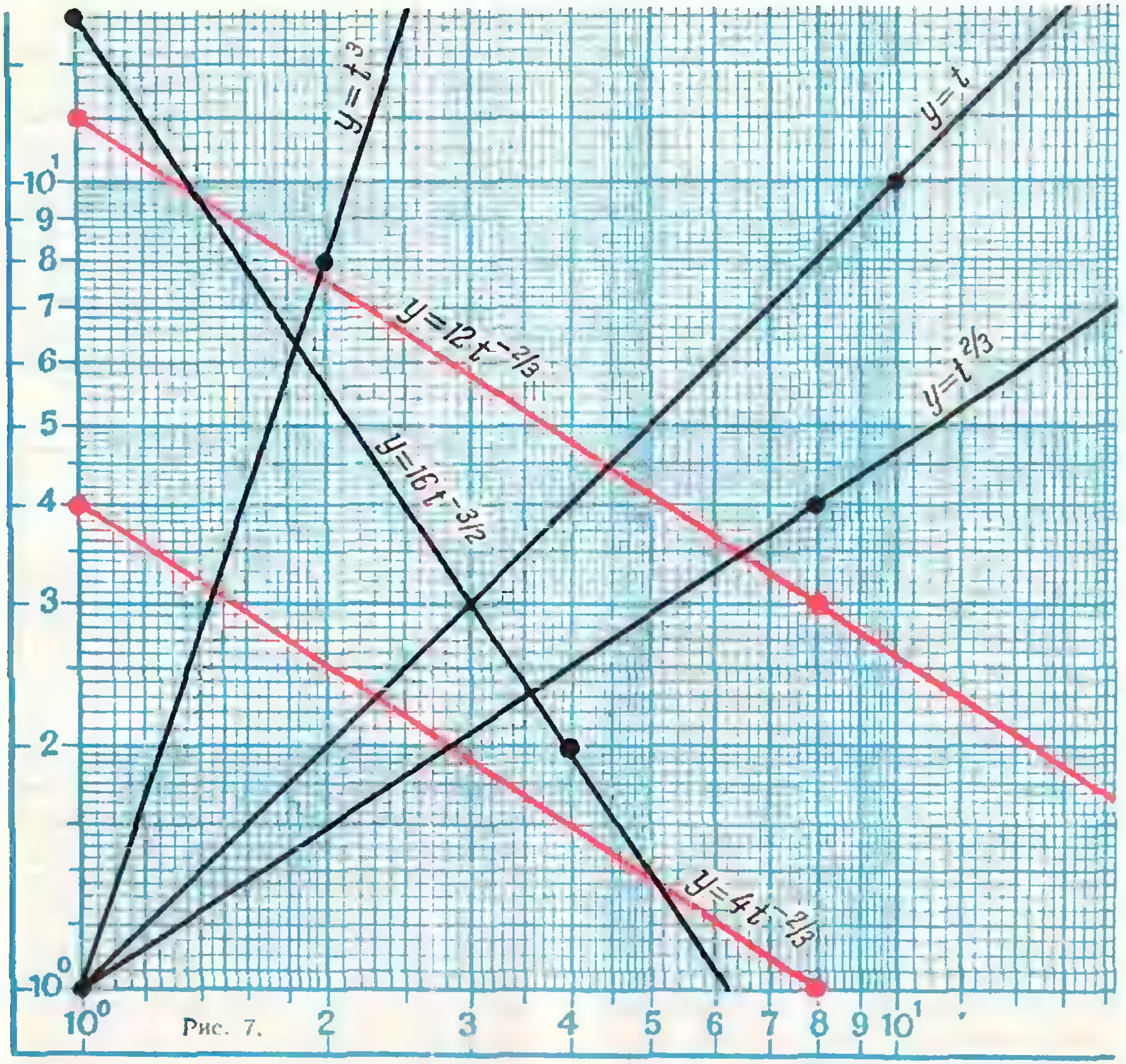


Рис. 7.

Замечание. Во всей промышленной продукции группа А в 1913 году составляла 35,1%, а в 1970 году 74,8%.

Таблица

Год	Группа А	Группа В
1913	100	100
1917	81	67
1928	155	120
1932	424	187
1937	1013	373
1940	1310	460
1945	1504	273
1950	2746	566
1955	5223	996
1960	8936	1498
1965	14156	2032
1970	21359	3281

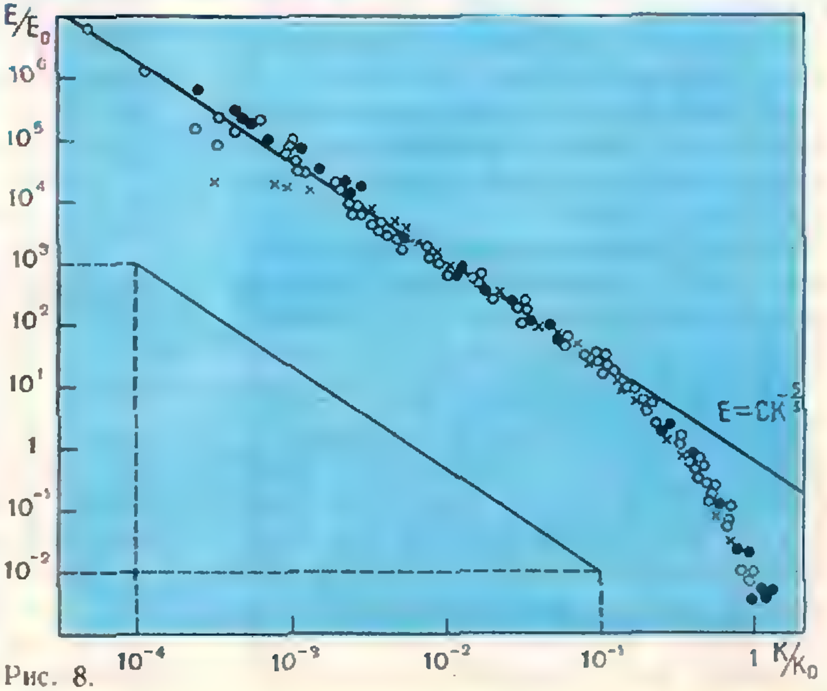


Рис. 8.

Эхолокация

М. С. Лившиц

Встречающиеся на пути волн неоднородности рассеивают их во всех направлениях, в том числе и обратном. Иными словами, неоднородности среды сами становятся источниками (вторичными) волн, и от них, как говорят, *приходит* эхо.

Явление эха используется для локации, то есть определения местонахождения различных объектов с помощью радиоволн (радиолокация) или звуковых волн (звуколокация).

Волны. Колебания. Излучение

Когда говорят о волнах, то мы невольно представляем себе волны на воде. Это—единственный по-настоящему наглядный вид волн. Звуковые волны — волны сжатия и разрежения в упругой среде — уже непросто представить; и еще больше усилий требуется, чтобы представить радиоволны и световые волны.

Неожиданно трудно, оказывается, даже дать точное определение понятия волны. Пожалуй, наиболее общим будет такое:

Волна — это процесс, при котором пространственное распределение некоторой физической величины периодически изменяется со временем.

В простейшем случае, который мы и наблюдаем на воде, волны представляют собой периодическое чередование горбов и впадин. Для волн другой физической природы под «горбом» следует понимать то место в волне, где данная физическая величина (например, плотность среды в случае звуковых волн, напряженность электрического или магнитного поля в случае электромагнитных волн) достигает максимального значения, а «впадиной» — то место, где эта величина достигает минимального значения.

Расстояние между двумя соседними горбами (или впадинами, или другими точками, находящимися в в одинаковых состояниях) называется длиной волны и обозначается λ (рис. 1). Длина волны является очень важной характеристикой.

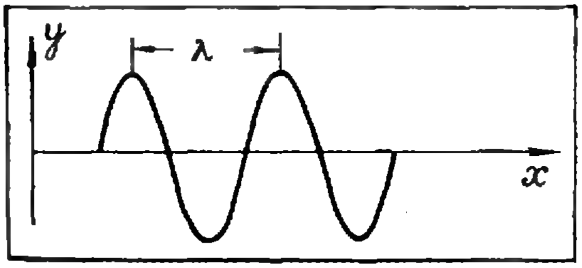


Рис. 1.

Если сосредоточить внимание на какой-то точке в пространстве, где существуют волны, то мы обнаружим периодическое изменение соответствующей физической величины только во времени, называемое колебанием. Имеется самая тесная связь между колебаниями и волнами. Оказывается, волна, представляющая собой совокупность колебаний во всех ее точках, не возникает сама по себе. Есть некоторые особые точки, колебания в которых являются источниками волны. В связи с этим уместно привести еще одно определение волны.

Волна — это процесс распространения колебаний в среде.

Действительно, для того чтобы существовали волны на воде, надо бросить в нее камень или погрузить в нее какой-то вибратор (например, колеблющийся стержень). Звуковые волны существуют, если мы говорим или дрожит струна скрипки. Радиоволны существуют, если есть радиопередатчик с антенной. И так далее.

Имеет место и обратный процесс: если на пути волны, распространяющейся в некоторой среде, окажется предмет, свойства которого отличаются от свойств среды *), в нем возникают колебания. При этом частично может произойти поглощение волны (то есть переход энергии волны в тепло). Но главным результатом обычно является то, что данный предмет сам становится источником волн, называемых вторичными.

Математически связь между колебаниями и волнами выражается зависимостью длины волны λ от частоты колебаний ν (или от периода T) и от скорости распространения волны v:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT.$$

Длина волны есть расстояние, на которое перемещается возмущение в среде за время одного колебания излучателя.

Во многом первичный и вторичный излучатели сходны. В первую очередь это сходство проявляется в одинаковом характере зависимости эффективности действия излучателя I от его линейных размеров d. Эффективность излучателя определяется отношением излучаемой энергии к энергии, питающей излучатель.

Общий вид зависимости (см. рис. 2) одинаков для волн различной длины и любой физической природы. Обратите внимание на кажущуюся парадоксальной особенность графика: когда размер излучателя становится больше $\frac{\lambda}{2}$, он хуже излучает, чем при $d \approx \frac{\lambda}{2}$.

Как же объяснить зависимость, показанную на рисунке 2?

Нетрудно понять общий ход кривой графика, то есть тот факт, что с увеличением размеров предмета увеличивается интенсивность излучения волн. Это происходит в результате сложения возмущений, производимых в среде различными участками первичного излучателя (и обратного воздействия — для вторичного излучения). Поэтому главное — понять наиболее характерную особенность графика: резкий максимум эффективности излучателя при $d \approx \frac{\lambda}{2}$.

В самых общих чертах этому можно дать следующее объяснение. При размерах излучателя $d \approx \frac{\lambda}{2}$ наступает явление резонанса из-за согласования частот внешнего воздействия и собственных колебаний излучателя. При резонансе система всегда забирает от источника и излучает максимум энергии.

Диаграмма направленности

От размеров и конфигурации излучателя зависит не только его эффективность, но и распределение энергии излучаемых им волн по различным направлениям — так называемая диаграмма направленности излучателя.

Такая же диаграмма относится и к колебаниям, возбуждаемым в антенне при попадании на нее волн (в этом заключается так называемая теорема взаимности в теории излучений).

Диаграмма направленности представляет собой кривую распределения интенсивности излучения по различным направлениям. На рисунке 3

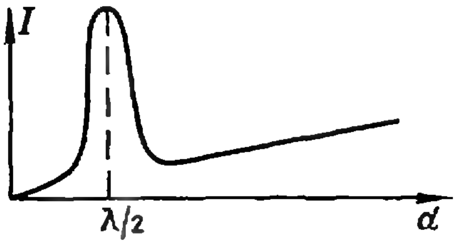


Рис. 2.

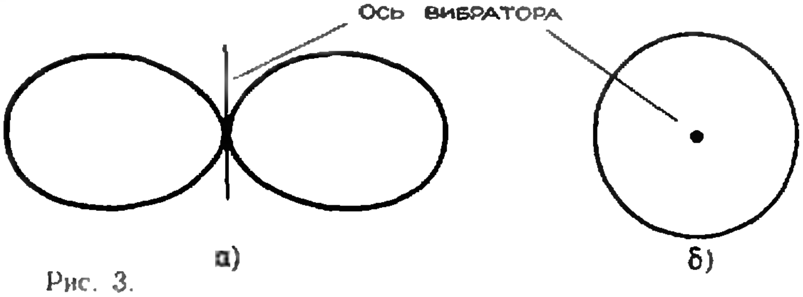


Рис. 3.

---

*) Имеются в виду свойства, связанные с физической природой соответствующей волны (например, проводимость для радиоволн или плотность для звуковых волн).

в качестве примера показана диаграмма направленности электромагнитного полуволнового излучателя (вибратора): *а*) в меридиональной плоскости (то есть в плоскости, в которой лежит излучатель) и *б*) в экваториальной плоскости (то есть в плоскости, перпендикулярной вибратору, а значит, и направлению электрических колебаний в нем).

Из рисунка видно, что электромагнитный полуволновой вибратор не излучает вдоль направления колебаний в нем и, наоборот, максимально излучает в перпендикулярном направлении. В экваториальной плоскости излучение вибратора равномерно по всем направлениям.

Импульс волн.
Разрешающая способность локатора

Теперь обратимся к главному вопросу: как можно заметить наличие вторичных волн (эхо)? Ведь если мы не сможем выделить то или иное эхо, то не сможем и обнаружить его источник, который называется в эхолокации целью.

Трудно придумать более простой ответ, чем такой: нужно, чтобы во время прихода данного эха никаких других волн в приемник не попадало.

Так возникает основная особенность подавляющего большинства локаторов: работа в импульсном режиме. Это значит, что первичный излучатель периодически излучает группу волн (импульс длительностью τ, протяженностью $c\tau$ (рис 4)), а затем долгое (по сравнению с длительностью импульса) время не работает. Вот в этот период «молчания» и приходят отраженные импульсы от различных целей.

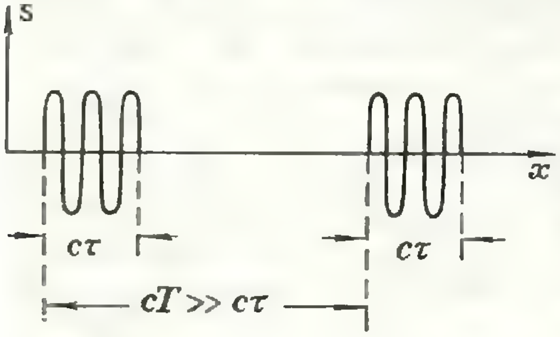


Рис. 4.

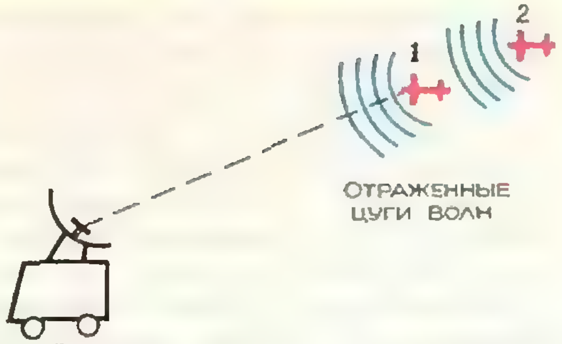


Рис. 5.

Чем короче импульс, излучаемый антенной локатора (зондирующий импульс), тем большее число целей в том же объеме пространства можно обнаружить раздельно. Действительно, если дальность до двух целей отличается на такую величину, что вторичные (отраженные) цуги (то есть группы) волн от них не перекрываются, цели будут наблюдаться локатором раздельно (рис. 5).

Таким образом, длительность импульса определяет так называемую разрешающую способность по дальности $\delta D \sim \tau$.

Кроме того, раздельное наблюдение нескольких целей, направления на которые различны, обеспечивается использованием излучателей с узкой диаграммой направленности (рис. 6).

Здесь уже говорят о разрешающей способности по углу. Действительно, если направления на цели отличаются на угол, больший, чем ширина диаграммы направленности (угол α), то они, даже при одинаковой дальности, не будут видны как одна цель. Отраженные импульсы от них будут приходить не одновременно, а только

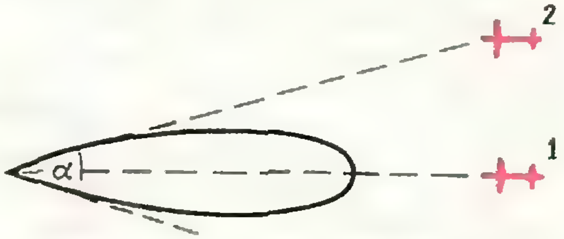


Рис. 6. Цель 1 видна, а цель 2 при этом не наблюдается.

после соответствующего поворота антенны.

Выбор диапазона волн для локации

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы понять, почему в радиолокации используются ультракороткие радиоволны (УКВ), то есть волны, длина которых лежит в метровом, дециметровом и сантиметровом диапазонах.

Рассмотрим несколько причин.

1) Для УКВ легко обеспечить приемлемые размеры антенн радиолокаторов, обладающих узкой диаграммой направленности (для обеспечения хорошего разрешения по углам) и достаточной интенсивностью излучения, так как основной элемент таких антенн — полуволновый вибратор.

2) Размеры обычных целей (самолеты, корабли) будут достаточно велики по сравнению с применяемыми длинами волн, что благоприятствует увеличению интенсивности отраженных сигналов (в соответствии с ходом кривой при $d \gg \lambda/2$ на рисунке 2).

3) Технически трудно сформировать импульс короче хотя бы десятка длин волн, поэтому чем меньше λ, тем легче обеспечить формирование такого импульса, а значит, получить хорошее разрешение по дальности.

Принцип измерения дальности и угловых координат

Полное определение местоположения цели в пространстве требует знания

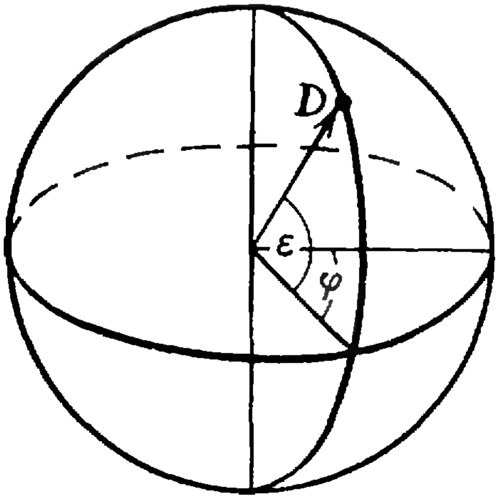


Рис. 7.

трех координат в некоторой системе координат. Для локаторов такой «естественной» системой координат, то есть наиболее соответствующей характеру используемых в них физических явлений, будет сферическая (рис. 7). В ней положение точки определяется следующими координатами: радиусом-вектором D (в радиолокации называемым наклонной дальностью); азимутом φ (углом в горизонтальной плоскости); углом места ε (углом в вертикальной плоскости).

Таким образом, для локации необходимо уметь измерять дальность и угловые координаты.

Когда антенна локатора излучает зондирующий импульс, то требуется определенное время t', чтобы эта группа волн дошла до цели. Как только волны дойдут до цели, цель становится вторичным излучателем, и часть энергии рассеянных (отраженных) ею волн идет обратно, то есть к антенне локатора. При скорости распространения волн, много большей скорости перемещения цели, можно пренебречь смещением цели за это время. Отраженный (вторичный) импульс дойдет от цели до локатора за то же время t', поглотится его приемной антенной и попадет на вход приемника. При этом энергия волн превращается в энергию электрического тока и усиливается приемником для последующей передачи на измерительные устройства локатора. Заметьте, что здесь полезным процессом является поглощение антенной энергии волн.

Суммарное время $t = t' + t'$ является временем задержки отраженного импульса по отношению к зондирующему импульсу и может быть измерено в локаторе. Итак, измерение дальности сводится к измерению времени. Это видно из формулы

$$D = \frac{ct}{2}. \qquad (1)$$

Приведенная формула тем точнее, чем меньше смещение цели за время задержки.

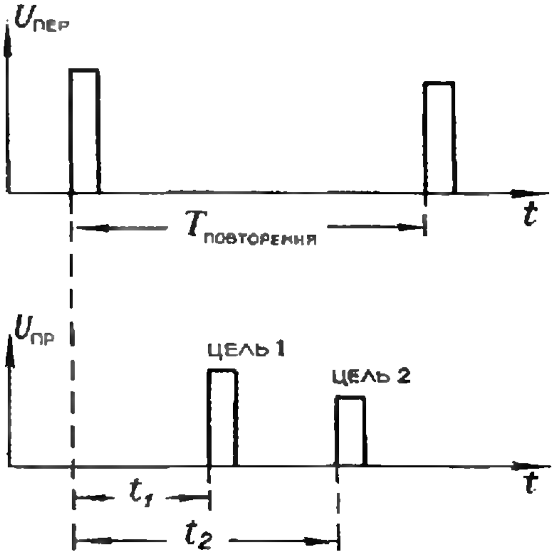


Рис. 8. $T_{повторения}$ — время, через которое передатчик периодически посылает зондирующие импульсы; $U_{пер}$ — выходное напряжение (импульс) передатчика; $U_{пр}$ — напряжение на входе приемника (отраженный импульс); цель 2 находится дальше, чем цель 1.

Поясняют принцип измерения дальности временные диаграммы на рисунке 8.

Какие промежутки времени и с какой точностью приходится измерять в радиолокации?

Обычно должны измеряться дальности в десятки километров с ошибкой, не превышающей десятков метров. Значит, как можно подсчитать по формуле (1) (скорость света $c = 300\,000$ *км/с*), надо уметь измерять промежутки времени порядка сотен микросекунд (1 *мкс* $= 10^{-6}$ *с*) с точностью до десятых долей микросекунды. Никакие механические часы не способны производить такие измерения: слишком велика масса (инерционность) частей их механизма; только электронные устройства, вследствие малой инерционности электронов, могут выполнить эту задачу. Весьма удобным устройством, например, оказывается электронно-лучевая трубка (аналогичная тем, которые применяются в осциллографах и телевизорах). Ее применение в радиолокации объясняется еще известной истиной, что «лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать». Все, что попадает в радиолокатор, электронно-лучевые индикаторы преобразуют в видимую картину соответствующей области пространства.

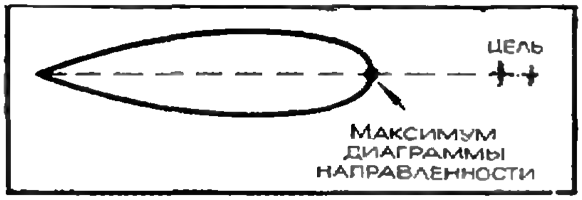


Рис. 9.

Для определения угловых координат существуют различные методы, но общим принципом является использование направленности излучения и приема волн.

Наиболее простым методом, основанным на этом общем принципе, является фиксация каким-либо измерителем углов положения вращающейся антенны в момент, когда отраженный от цели импульс достигает максимума (рис. 9).

Индикаторы

Для более ясного представления о том, как осуществляется измерение координат в радиолокаторах в соответствии с рассмотренными принципами измерения дальности и угла, познакомимся с применяемыми для этой цели индикаторами.

В качестве примеров рассмотрим два типа индикаторов.

Первый из них обеспечивает наглядное представление всей обстановки в окружающем пространстве; второй же благодаря своей простоте может применяться в отдельных устройствах радаров (так часто называют радиолокаторы).

1. Почти во всех локаторах имеется индикатор кругового обзора. В нем электронный луч перемещается так, что его «острие» вычерчивает на экране радиальную линию (от центра к краю экрана). Этим осуществляется так называемая развертка по дальности: положению светящейся точки в центре экрана соответствует нулевая дальность (местоположение локатора в момент посылки зондирующего импульса), а положению светящейся точки на краю экрана

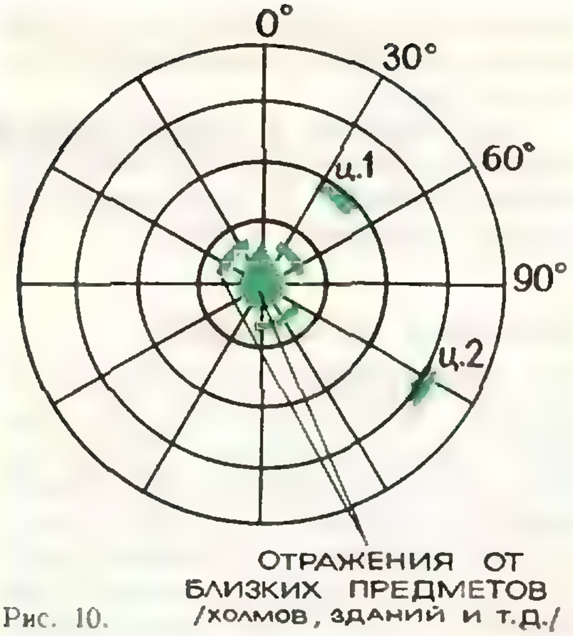


Рис. 10.

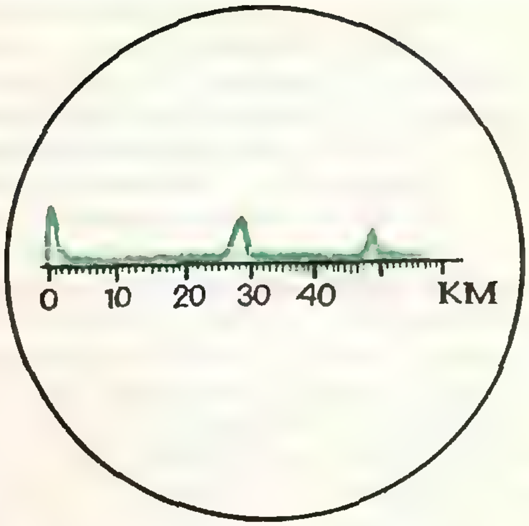


Рис. 11.

соответствует предельная дальность обнаружения. Между этими точками размещается вся шкала дальности локатора.

Направление, по которому прочерчивается радиальная прямая, определяется азимутом излучения радиоволн антенной радара, то есть при вращении диаграммы направленности антенны («луча» антенны) синхронно (одновременно) вращается и развертка. Угол места в таком индикаторе не определяется.

При отсутствии отражающих объектов электронный луч «погашен». Отраженный от объекта сигнал «отпирает» луч, и в соответствующем месте экрана возникает светлое пятно (типовое изображение на экране представлено на рисунке 10). Для того чтобы всю картину видеть одновременно, в этих индикаторах применяется такой люминесцирующий экран, что свечение, возбужденное в любом месте его, длится все время, пока «луч» антенны совершает один оборот.

2. Простейшим индикатором является индикатор, на экране которого по горизонтальному диаметру осуществляется развертка по дальности, а величина отклонения пятна по вертикали (амплитуда импульса) определяется величиной сигнала от цели (рис. 11).

В этом индикаторе применяют экран без послесвечения, и картина меняется по мере того, как антенный «луч» поворачивается в пространстве, поэтому угол «луча» надо отсчитывать по шкале антенны в тот момент, когда амплитуда соответствующего импульса на экране достигает максимума.

«Местники», пассивные и активные помехи

Каждое техническое достижение несет в себе и свою слабость, для преодоления которой приходится еще глубже вникать в физику используемого явления. Это можно увидеть на нескольких поучительных примерах из радиолокации.

1. В условиях горной местности экраны индикаторов оказываются «забитыми» так называемыми «местниками», то есть импульсами, отраженными от холмов, скал и других неровностей местности. Это затрудняет или делает даже невозможным обнаружение полезных сигналов от целей. То же самое наблюдается и вблизи крупных населенных пунктов.

Большие помехи создаются также отражениями от различных облаков, туч и тому подобного.

2. Как мы уже говорили, при размерах неоднородностей, близких к

λ/2, вторичное излучение от них сильно возрастает. Поэтому такие полуволновые отражатели используются в борьбе с радиолокацией для создания ложных «целей» (пассивные помехи). Оказывается, достаточно нескольких сотен грамм фольги или металлизированного стекловолокна, чтобы создать такой же отраженный импульс, как от самолета.

Значит ли это, что ни с «местниками», ни с пассивными помехами ничего нельзя сделать? Конечно, нет.

Дело в том, что источники «местников» вообще неподвижны, а облака и пассивные помехи движутся со скоростью ветра, которая обычно много меньше скорости самолета. Вот это-то и используется для устранения помех. Принцип действия одного из соответствующих устройств связан с так называемым череспериодным вычитанием. Суть последнего заключается в следующем: если сигналы, полученные при двух последовательных зондированиях, подавать на индикатор одновременно, но с противоположными знаками, то местники уничтожатся, а сигналы от быстродвижущихся целей, изменивших за период повторения свое положение, сохранятся.

3. Поступающие на приемник радара сигналы от целей на много порядков слабее, чем зондирующий импульс. Следовательно, для радара характерно сочетание большой мощности зондирующего импульса передатчика с высокой чувствительностью приемника. Только так можно обеспечить большую дальность обнаружения целей.

Но эта сила радара немедленно превращается в его слабость.

Во-первых, мощные зондирующие импульсы локатора могут быть обнаружены на самолете задолго до обнаружения самолета локатором (ибо при этом радиоволны совершают путь «в один конец»).

Во-вторых, можно легко «забить» высокочувствительный приемник локатора ложными сигналами передатчиков помех, устанавливаемых на самолете (эти передатчики могут также сбрасываться с парашютом и тому подобное).

Так возникает еще один способ борьбы с радиолокацией — с помощью активных помех. Однако находятся способы преодолеть и их.

Особенности звуколокации

Для звуколокации существенно, что скорость распространения звуковых волн на много порядков меньше скорости распространения электромагнитных волн (в воздухе скорость звука при нормальных условиях равна 331 *м/с*, то есть почти в миллион раз меньше скорости света). Бессмысленно, например, пытаться применить звуколокацию для определения координат современного сверхзвукового самолета: звук просто не догонит его. Для гидролокации (звуколокации в воде) дело обстоит лучше: скорость звука в воде равна примерно 1500 *м/с*, а скорость перемещения «цели» под водой гораздо меньше (порядка 10 *м/с*). Кроме того, в пользу гидролокации говорит еще одно важное соображение: электромагнитные волны очень плохо распространяются в воде (сильно затухают, так как вода, особенно морская, довольно хороший проводник). Поэтому без звука в воде не обойтись.

Что же касается живой природы, то не только в воде, но и в воздухе скорость звука вполне обеспечивает успех эхолокации. Вот почему «живые локаторы» используют звуковые волны (точнее, ультразвук). Напомним, что слышимые человеком звуки охватывают диапазон частот колебаний от 20 до 20 000 *гц*. Звуки более высокой частоты, чем 20 000 *гц*, и называются ультразвуками.

Одни из самых совершенных «живых локаторов» — летучие мыши — используют для локации ультразвуковые волны в воздухе, соответствующие частотам примерно от 50 *кгц* до 100 *кгц*. А дельфины, использующие ультразвуки в воде, «работают» на еще более высоких частотах.

Собака бежит наперерез

М. Л. Гервер

Помните, в «Кванте» № 2 за 1973 год была заметка «Про лису и собаку»? Лиса бежала по прямой l с постоянной скоростью, а собака с той же скоростью бежала *прямо на лису* из некоторой точки C_0. Спрашивалось, при каких C_0 собака догонит лису.

В заметке было доказано, что лиса всегда убегает от собаки, кроме единственного случая, когда C_0 расположена на прямой l, перед лисой.

«Ну ладно,— мог сказать читатель, прочтя заметку,— все это хорошо, только уж очень глупа собака! Бежала бы наперерез...»

§ 1. Постановка задачи

Ладно, пусть собака может бежать как угодно, не обязательно прямо на лису. Но только пусть тогда уж и лиса бежит не по прямой, а тоже, как захочет. Про скорости лисы и собаки по-прежнему предполагается, что они равны по величине. И еще нужно предположить, что все происходит на огороженном участке *).

Если изменить так условия, то мы придем к известной задаче о погоне, придуманной Р. Радо. Только в задаче Радо вместо лисы и собаки фигурировали *лев* и *человек*. В книге английского математика Дж. Литлвуда «Математическая смесь» эта задача формулируется так: «Лев и человек, находящиеся на огороженной круглой арене, имеют одинаковую максимальную скорость. Какой стратегии должен придерживаться лев, чтобы быть уверенным в своей трапезе?» Остроумная, но уж слишком кровожадная формулировка — так что будем называть участников погони, как прежде, собакой и лисой.

На первый взгляд кажется, что лисе не спастись, если собака выберет следующую стратегию. Сначала она занимает место в центре круга O, а затем бежит так, чтобы все время находиться на радиусе $OЛ$, стараясь при этом максимально (насколько позволяет скорость) приблизиться к лисе. Лисе как будто ничего не остается, как бежать по окружности (не идти же ей самой на сближение с собакой!). Что получится в этом случае, видно из рисунка 1.

Когда собака заняла центр O, лиса находилась в точке $Л_0$. Обозначим через $Л_1$ такую точку на окружности, что угол $Л_0OЛ_1 = \pi/2$. На отрезке $OЛ_1$ построим, как на диаметре, вспомогательную окружность s. Исходную (вдвое бо́льшую) окружность обозначим через S. Пусть лиса побежала из $Л_0$ в $Л_1$ по окружности S, и пусть $Л$ — произвольная точка на дуге $Л_0Л_1$, а C — точка пересечения радиуса $OЛ$ и окружности s. Тогда дуги $Л_0Л$ и OC имеют (проверьте это!) одинаковую длину. Таким образом, собака (руководствуясь выбранной стратегией) побежит из O в $Л_1$ по окружности s; в точке $Л_1$ она поймает лису.

Неожиданная смена направления на противоположное не поможет лисе: если лиса добежит до точки $Л$ (рис. 2), а потом бросится назад в точку $Л_2$, то собака (в соответствии со

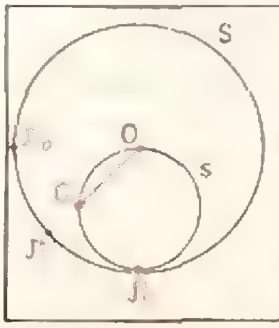


Рис. 1.

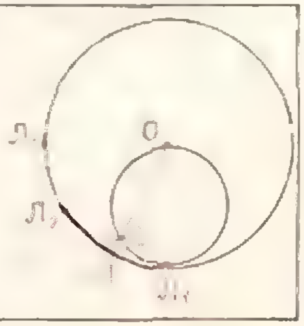


Рис. 2.

---

*) Иначе, если начальные положения лисы и собаки $Л_0$ и C_0, то лиса просто побежит по прямой $C_0Л_0$ от C_0.

своей стратегией) побежит из C в $Л_2$ по дуге, симметричной $СЛ_1$ относительно радиуса $ОЛ$.

Итак, единственный шанс на спасение для лисы — сойти с окружности S. Навстречу собаке? Это представляется бессмысленным, и долгое время считалось, что лисе не избежать поимки.

Сравнительно недавно профессор А. С. Безикович опроверг это заблуждение. Ниже мы приведем его решение сначала в случае, когда собака придерживается радиуса $ОЛ$, а потом в случае совершенно произвольного поведения собаки. Лисе в обоих случаях не нужно сразу убегать на окружность. Она должна отступать из некоторой внутренней точки круга очень постепенно, многократно меняя направление, по замысловатому спиралеобразному пути.

§ 2. Две суммы

При изложении решения мы будем строить ломаные, состоящие из бесконечного множества все более коротких звеньев. Нужно будет, чтобы эти ломаные имели бесконечную длину, но целиком помещались внутри круга. Чтобы потом не прерывать изложения, проведем заранее некоторые вычисления. Выпишем две суммы:

$$L_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \qquad (1)$$

$$K_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}. \qquad (2)$$

Как они ведут себя при увеличении n? Возрастают — это ясно (потому что добавляются все новые положительные слагаемые). Но возрастают безгранично или остаются меньше некоторого числа? Оказывается, первая сумма с ростом n растет неограниченно, а вторая при любом n меньше 1.

Доказательство

1. Воспользуемся неравенствами

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ и т. д.}$$

Отсюда $L_4 > 1$, $L_8 > \frac{3}{2}$, $L_{16} > 2$ и вообще для $n = 2^k$, $L_n > \frac{k}{2}$. Если k равно двум миллионам, то L_n больше миллиона. Если $k = 2 \cdot 10^9$, то L_n больше миллиарда и т. д. Вообще какое бы число N ни взять, найдется такое n, что $L_n > N$ (достаточно положить $n = 2^{2M}$, где M — натуральное число, большее N, при $m > n$ неравенство $L_m > N$ выполняется и подавно). Итак, L_n с ростом номера n неограниченно возрастает.

2. Докажем, что $K_n < 1$ при любом n.

Вычислим сумму $S_n = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$. Так как $\frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$, то $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получаем $S_n = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Так как $\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m(m-1)}$, то $K_n < S_n$. Итак, при любом n

$$K_n = \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Следствие. Пусть O — центр круга радиуса r. $Л_0$ — точка на расстоянии r_0 от центра, $r_0 < r$. Положим $a = \sqrt{r^2 - r_0^2}$ и построим ломаную L так (рис. 3): $Л_0Л_1 = \frac{a}{2}$, $Л_0Л_1 \perp OЛ_0$; $Л_1Л_2 = \frac{a}{3}$,

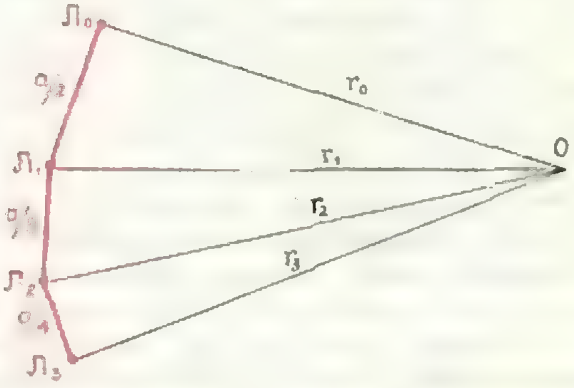


Рис. 3.

$Л_1Л_2 \perp OЛ_1$; вообще $Л_{n-1}Л_n = \dfrac{a}{n+1}$, $Л_{n-1}Л_n \perp OЛ_{n-1}$. Тогда ломаная L обладает следующими тремя свойствами.

1). Она не выходит за пределы круга. Действительно,

$$OЛ_n^2 = OЛ_{n-1}^2 + Л_{n-1}Л_n^2,$$

так что при любом n

$$OЛ_n^2 = r_0^2 + \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^2}{3^2} + \dots + \frac{a^2}{(n+1)^2} =$$

$$= r_0^2 + a^2K_{n+1} < r_0^2 + a^2 = r^2.$$

2). Вместе с тем, поскольку

$$Л_0Л_1 + Л_1Л_2 + \dots + Л_{n-1}Л_n =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \dots + \frac{a}{n+1} = aL_{n+1},$$

то (при достаточно больших n) сумма длин первых n звеньев сколь угодно велика. Другими словами, ломаная L имеет бесконечную длину.

3). Наконец, по построению каждое звено $Л_{n-1}Л_n$ ломаной L перпендикулярно радиусу $OЛ_{n-1}$.

§ 3. Собака придерживается радиуса

Пусть в начальный момент собака находится в центре круга O, а лиса — в точке $Л_0$ на расстоянии r_0 от центра, где r_0 меньше радиуса круга r.

Условимся, что собака побежит так, чтобы всегда быть на радиусе $OЛ$. Тогда лиса сумеет спастись, если будет бежать по ломаной L, построенной в § 2. Так как $Л_0Л_1 \perp OЛ_0$, то собака не может поймать лису, пока та находится на $Л_0Л_1$*). Обозначим через C_1 точку, в которую прибежит собака, когда лиса окажется в точке $Л_1$. Так как C_1 находится на $OЛ_1$, а $Л_1Л_2 \perp OЛ_1$, то $Л_1Л_2 \perp C_1Л_1$ и собака не может поймать лису, пока та находится на $Л_1Л_2$. Это продолжается на каждом последующем звене ломаной: $Л_nЛ_{n+1} \perp C_nЛ_n$ и собака не может поймать лису на отрезке $Л_nЛ_{n+1}$ (ни при каком n). Так как общая длина ломаной L бесконечна, то бесконечным будет и время, в течение которого лиса будет бежать по ней *). Значит, ни за какое конечное время собака не сможет поймать лису.

§ 4. Собака бежит, как хочет

Пусть, наконец, собака и лиса находятся в начальный момент в двух произвольных (разумеется, различных) точках C_0 и $Л_0$ внутри круга радиуса r.

Мы покажем сейчас, что, как бы ни вела себя собака, лиса сможет убежать от нее.

Прежде всего лиса «строит» описанную выше ломаную L, но бежит вдоль другой ломаной L', зависящей от того, что делает собака. Опишем построение ломаной L'.

Выбор точки $Л_1'$. Проведем через точку $Л_0$ прямую l_0, перпендикулярную $C_0Л_0$. Пусть M_0 — основание перпендикуляра, опущенного из O на l_0. Точка $Л_1'$ выбирается на продолжении $Л_0M_0$ так, чтобы выполнялось равенство $M_0Л_1' = Л_0Л_1$ (где $Л_0Л_1$ — первое звено ломаной L). Поэтому $Л_0Л_1' \geqslant Л_0Л_1$ и $(OЛ_1')^2 = OM_0^2 + (M_0Л_1')^2 \leqslant OЛ_0^2 + Л_0Л_1^2 = OЛ_1^2$.

Выбор точки $Л_{n+1}'$. Из точки $Л_0$ лиса бежит в $Л_1'$. Так как $Л_0Л_1' \perp C_0Л_0$, то, пока лиса находится на $Л_0Л_1'$, собака не может поймать ее. Обозначим через C_1 точку, в которую прибежит собака, когда лиса достигнет $Л_1'$. Из $Л_1'$ лиса должна бежать в $Л_2'$. Выбор этой точки опишем сразу в общем виде: пусть собака и лиса находятся в точках C_n и $Л_n'$; объясним, как тогда выбрать $Л_{n+1}'$ (см. рис. 4).

Проведем через $Л_n'$ прямую l_n, перпендикулярную $C_nЛ_n'$. Пусть M_n — основание перпендикуляра, опущенного из O на l_n. Точку $Л_{n+1}'$ выбе-

---

*) Допустив противное, мы нашли бы на $Л_0Л_1$ такую точку $Л$, что расстояние $Л_0Л$ больше расстояния $OЛ$. Этого, однако, не может быть: перпендикуляр $Л_0Л$ короче наклонной $OЛ$.

*) Это место в решении — важное: существенно именно то, что L бесконечной длины, а не то, что L состоит из бесконечного множества звеньев (сравните с известной историей про Ахиллеса, догоняющего черепаху).

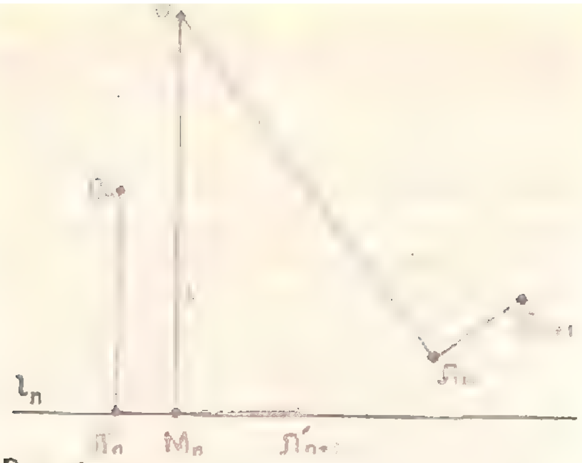


Рис. 4.

рем на продолжении $Л'_nM_n$ на расстоянии $Л_nЛ_{n+1}$ от точки M_n (где $Л_nЛ_{n+1}$ — $(n+1)$-е звено ломаной L). Таким образом, $Л'_nЛ'_{n+1} \geqslant M_nЛ'_{n+1} = Л_nЛ_{n+1}$. Теперь оценим $ОЛ'_{n+1}$. Допустим, что точку $Л'_n$ нам удалось выбрать так, что $ОЛ'_n \leqslant ОЛ_n$. Тогда поскольку $OM_n \leqslant ОЛ'_n$, выполняется неравенство

$$(ОЛ'_{n+1})^2 = OM_n^2 + (M_nЛ'_{n+1})^2 \leqslant$$
$$\leqslant ОЛ_n^2 + Л_nЛ_{n+1}^2 = ОЛ_{n+1}^2$$

и тем самым $ОЛ'_{n+1} \leqslant ОЛ_{n+1}$.

Итак, каждое звено ломаной L' не короче соответствующего звена L, а каждая вершина L' расположена не дальше от центра O, чем соответствующая вершина L: $Л'_nЛ'_{n+1} \geqslant \geqslant Л_nЛ_{n+1}$; $ОЛ'_n \leqslant ОЛ_n$. Иначе говоря, ломаная L' имеет бесконечную длину, но целиком помещается в круге радиуса r с центром O. По построению $C_nЛ'_n \perp Л'_nЛ'_{n+1}$ при любом n. Значит, собака по-прежнему не сможет поймать лису.

Таким образом, как бы ни вела себя собака, лиса сможет от нее убежать!

Задачи

1. Когда лиса $Л$ бежала по прямой, а собака C бежала прямо на нее (см. заметку «Про лису и собаку» в «Кванте» № 2 за 1973 г.), то расстояние $СЛ$ всегда оставалось больше некоторого положительного числа. Докажите, что как бы ни вела себя лиса в круге и как бы мало ни было положительное число p, собака может за конечное время приблизиться к лисе на расстояние, меньшее p. Достаточно ли для этого собаке всегда придерживаться радиуса $ОЛ$? Достигнет ли этого собака, если будет бежать прямо на лису?

2. Догонит ли собака лису, бегущую по окружности, если будет бежать все время прямо на нее?

3. Наши рассуждения были основаны на том, что сумма $L_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ с ростом n неограниченно возрастает, а сумма $K_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ при любом n меньше 1. Исследуйте, как ведут себя с ростом n суммы $S_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\Sigma_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ и $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{p_n}$ (p_n — n-е простое число).

4. И в заключение — три задачи, в которых преследователей несколько, причем действуют они согласованно. Скорости у спасающихся и догоняющих одинаковые, двигаться все могут, как хотят.

а) Может ли лиса на круглом отраженном участке убежать от двух собак?

б) Докажите, что муха, летающая внутри куба, может спастись от двух, но не может спастись от трех птиц.

в) Сколько времени понадобиться трем птицам, чтобы поймать муху внутри куба со стороной 1 (скорости тоже равны 1)?

Столкновение шариков

Г. Л. Коткин

Рассматривая упругое столкновение шариков, мы ограничимся лишь грубыми оценками, то есть при вычислении сил, действующих во время столкновения, и времени столкновения шариков нас не должна смущать ошибка в несколько раз.

Главное — правильно представить себе, что же происходит с шариками. Ясно, что после соприкосновения они деформируются. Но даже в момент остановки деформация сравнительно велика лишь вблизи площадки соприкосновения шариков. В результате деформации возникает сила, стремящаяся вернуть шарики в первоначальное состояние. Эта сила подобно силе упругости пружины отбрасывает шарики друг от друга.

Попытаемся определить силу упругости этой «пружины». Рассмотрим центральное соударение двух шариков *). Учтем, что область проникновения деформации невелика, и заменим сильно деформированную область шарика цилиндром, радиус которого равен радиусу r площадки соприкосновения шариков и высота (то есть глубина проникновения деформации) тоже равна r (рис. 1). Пусть смещение центра шарика за время от момента касания шариков до их остановки равно x. Сила упругости «пружины» определяется законом Гука:

$$F = ES\frac{\Delta l}{l},$$

где E—модуль Юнга, $S = \pi r^2$, $l = r$, $\Delta l = x$. Таким образом,

$$F \sim Erx.$$

(Здесь величина Er играет роль коэффициента упругости k). Знак $\sim$ означает равенство по порядку величины, то есть с возможной ошибкой в несколько раз.

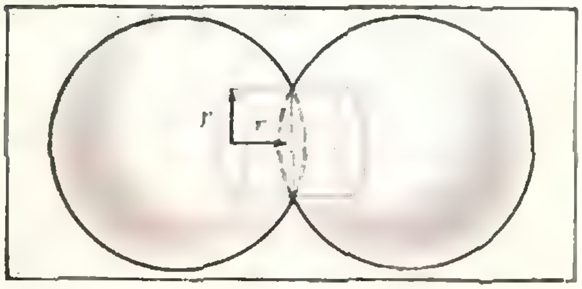


Рис. 1.

Выразим теперь r через x. Для этого предположим (опять приближенно), что шарик «прогнулся» только на участке ABC (рис. 2). Из подобия треугольников ABD и ADC следует соотношение

$$\frac{r}{x} = \frac{2R - x}{r},$$

где R — радиус шарика. Поскольку $x \ll R$ и множителем 2 мы можем пренебречь, получаем

$$r \sim \sqrt{Rx}. \qquad (1)$$

Подставляя (1) в выражение для силы F, находим

$$F \sim ER^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

Выразим величину x через известные константы и скорость v.

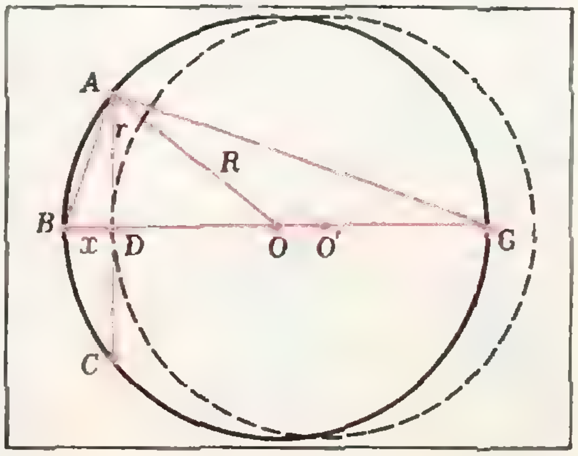


Рис. 2.

---

*) То есть такое, при котором центры шариков движутся вдоль прямой, соединяющей эти центры.

В момент остановки шарика вся его кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию деформации. Потенциальная энергия деформации равна работе силы упругости на пути x:

$$U \sim Fx \sim ER^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}.$$

Это означает, что $\frac{1}{2}mv^2 = U \sim ER^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$. Но масса шарика $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{2\pi}{3}R^3\rho v^2 \sim R^3\rho v^2.$$

Следовательно,

$$R^3\rho v^2 \sim ER^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}},$$

откуда

$$x \sim R\frac{\rho^{\frac{2}{5}}v^{\frac{4}{5}}}{E^{\frac{2}{5}}} = R\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^{\frac{2}{5}}.$$

Удобно обозначить $\frac{E}{\rho} = u^2$ *), тогда $x \sim R\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{4}{5}}$. Подставим найденное значение x в формулу (2):

$$F \sim ER^2\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{6}{5}}. \qquad (3)$$

Оценим время столкновения шариков:

$$t \sim \frac{x}{v} \sim \frac{R}{u}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{5}} \text{**)}. \qquad (4)$$

Пусть при скорости $v = 5$ *см/с* сталкиваются два стальных шарика радиуса $R = 1$ *см* (масса такого шарика ~ 30 *г*). По формулам (4) и (3) получаем

$$t \sim \frac{10^{-2}}{5\cdot 10^{-3}}\left(\frac{5\cdot 10^{3}}{5\cdot 10^{-2}}\right)^{\frac{1}{5}} \text{ с} \sim 2\cdot 10^{-5} \text{ с},$$

$$F \sim 2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}\left(\frac{5\cdot 10^{-2}}{5\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{6}{5}} \text{ н} \sim 20 \text{ н}.$$

Заметим, что чем больше скорость шариков, тем меньше время их соударения.

Провести оценку времени соударения можно и по-другому. Следуя аналогии с пружиной, будем считать, что время соударения шариков соответствует полупериоду колебаний шарика массы m на пружине жесткости $k \sim Er$, то есть

$$t \sim \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (5)$$

полупериод же тем меньше, чем больше жесткость *).

Сделанная нами оценка неприменима при слишком больших скоростях шариков. В этом случае деформации настолько велики, что перестает выполняться закон Гука. Для стали закон Гука справедлив при относительных деформациях $\frac{\Delta l}{l} \leqslant 10^{-2}$. Из этого условия можно определить максимальную скорость столкновения шариков. Наибольшая деформация шариков («пружины»)

$$\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{x}{r} \sim \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{5}} \leq 10^{-2}, \text{ откуда}$$

$$v \leq 10^{-5}u \sim 5\cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 5 \text{ см/с}.$$

Можно сделать подобную оценку времени и силы взаимодействия при столкновении торцами двух одинаковых цилиндров длины l и радиуса R. В этом случае область относительно большой деформации распространяется на объем каждого цилиндра це-

---

*) Введенная таким образом величина по порядку совпадает со скоростью звука в веществе шарика. Например, для стали $E = 2{,}1\cdot 10^{11}$ *н/м²*, $\rho = 7{,}8\cdot 10^3$ *кг/м³*, $u = 5{,}2\cdot 10^3$ *м/с*, скорость звука в стали около $6\cdot 10^3$ *м/с*.

**) Более точный, но гораздо более сложный расчет дает для t значение, примерно втрое большее, а для F — несколько меньшее, чем у нас.

*) Убедитесь самостоятельно, что при этом снова получается ответ (4).

ликом. Предоставляем выкладки (более простые, чем для шариков) читателям и приведем только результаты: $t_1 \sim \frac{l}{u}$, $F_1 \sim ER^2 \frac{v}{u}$. Сила взаимодействия при столкновении цилиндров оказывается больше, чем при столкновении шариков: $\frac{F_1}{F} \sim \left(\frac{u}{v}\right)^{1/5}$, а время при $l \sim R$ — меньше: $\frac{t_1}{t} \sim \left(\frac{v}{u}\right)^{1/5}$. Для стальных цилиндров, сталкивающихся со скоростью 5 *см/с*, $\left(\frac{u}{v}\right)^{1/5} = 10$. Пожалуй, самое интересное отличие этих результатов от оценок для шариков — это независимость времени t_1 от скорости движения цилиндров.

Нужно, однако, иметь в виду, что явления, происходящие при столкновении стержней, гораздо сложнее, чем при столкновении шариков. Деформированная область может расширяться в веществе не мгновенно, а со скоростью звука, по порядку величины равной u. Поэтому деформация полностью охватывает стержни за время $\sim \frac{l}{u}$, то есть, в течение всего времени соударения по стержням распространяются бегущие волны сжатия.

При столкновении шариков деформация распространяется на область «пружины» за время $\tau \sim \frac{r}{u} \sim \frac{R}{u}\left(\frac{v}{u}\right)^{2/5}$, гораздо меньшее времени соударения t: $\frac{\tau}{t} \sim \left(\frac{v}{u}\right)^{3/5} \ll 1$. Поэтому можно считать, что деформация распространяется на область «пружины» мгновенно (что мы и делали).

Упражнения

1. Оценить t и F для резиновых шариков радиуса $R = 1$ *см*, сталкивающихся со скоростью $v = 10$ *см/с*. Для резины
$E \sim 10^6$ *н/м²*, $\rho = 10^3$ *кг/м³*.

2. Оценить время удара о стенку хорошо надутого футбольного мяча.

3. Резиновый шарик со скоростью v_0 налетает на два соприкасающихся стальных шарика такой же массы. Центры всех шариков лежат на одной прямой. Какими будут скорости шариков после удара?

Звуковая ориентация у дельфинов

Завоеванию дельфинами Мирового океана в сильной степени способствовала их быстроходность и звуковая ориентация, появление у них превосходно развитого гидролокатора, который позволяет отлично ориентироваться в водной среде. Из органов чувств у китообразных лучше всего развивается слух. Звук для водных млекопитающих — важнейший источник информации, так как в воде звуковые колебания распространяются почти в 5 раз быстрее, чем в воздухе. Китообразные воспринимают не только звуки, но также инфразвуки и ультразвуки (до 170 *кгц*), лежащие далеко за пределами чувствительности человеческого уха.

Сигналы, издаваемые дельфинами, используются ими как для связи с сородичами, так и для ориентации по отраженным звукам (эхолокация).

По эхолокационным сигналам дельфины могут с большой точностью ориентироваться в пространстве, резвиться на минных полях, определять глубину дна и близость берега, разный характер грунта, величину и качество погруженных предметов. Действие гидролокатора у дельфинов хорошо изучено в океанариумах. Советский гидроакустик Н. А. Дубровский показал, что «ослепленная» афалина (со специальными наглазниками) надежно отличает свинцовый шар диаметром 5 *см* от стального шара такого же размера с расстояния 11 *м* и стальной шар от дюралевого с расстояния 8 *м*. Американские исследователи Эванс и Пауэлл доказали способность «ослепленного» дельфина различать две одинаковые пластины, состоящие из разных металлов, или из одного и того же металла, но разной толщины. «Ослепленные» дельфины в океанариумах могут свободно плавать в лабиринте из подвешенных металлических стержней, не касаясь их. Особенно высокая разрешающая способность локации у дельфинов в горизонтальном направлении. Но они также могут лоцировать объекты, расположенные на глубине.

Изучение эхолокации дельфинов должно помочь в создании ряда весьма портативных локационных устройств, малогабаритных гидролокаторов и эхолотов, маленьких приборов для ориентации слепых при их хождении по городским улицам и должно привести к реальной оценке возможностей использования дельфинов в будущей практике человека, в его морских исследованиях.

(Из статьи А. Г. Томилина «Дельфины и наука», помещенной в международном ежегоднике «Будущее науки» за 1972 г.)

Мнимые числа и геометрические задачи

Г. Д. Балк, М. Б. Балк

Какое отношение могут иметь квадратные корни из отрицательных чисел к задачам из области геометрии? Может ли человеку, решающему планиметрическую задачу, принести ощутимую пользу то обстоятельство, что в алгебре рассматриваются числа вида $a+b\sqrt{-1}$?

Ответ как будто очевиден: «Не может».

А между тем оказывается, что привлечение таких «мнимых» чисел нередко существенно облегчает решение трудной планиметрической задачи — даже если в условии такой задачи ни о каких «мнимостях» и речи нет. Об этом будет рассказано в данной статье *).

Предполагается, что начальные представления о комплексных числах и действиях с ними (в алгебраической форме) у читателя имеются — скажем, в объеме школьного учебника Е. С. и Е. С. Кочетковых «Алгебра и элементарные функции», ч. 2, М., «Просвещение», 1969, стр. 216—220.

Ниже мы приведем дополнительные сведения о комплексных числах и упражнения, а затем рассмотрим ряд геометрических задач.

Комплексные координаты точек и векторов

Возьмем на плоскости декартову систему координат xOy (рис. 1). Пусть Z — некоторая точка на плоскости. Ее положение определяется двумя действительными числами — ее декартовыми координатами (a, b). Сопоставим точке Z комплексное число $z=a+bi$. Это комплексное число назовем *комплексной координатой* точки Z.

Упражнение 1. *Каковы комплексные координаты точек O, P, Q, M, изображенных на рисунке 1?*

Каждому комплексному числу z соответствует на декартовой плоскости xOy вполне определенная точка Z, комплексной координатой которой является именно это число z *).

Возьмем теперь на координатной плоскости (рис. 1) *вектор* (направленный отрезок) **OZ** с началом в начале координат и концом в точке Z, имеющей координаты (a, b). Комплексное число $z=a+bi$ назовем также *комплексной координатой вектора* **OZ**.

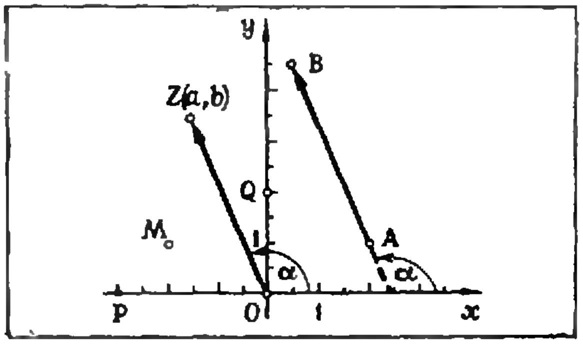


Рис. 1.

---

*) Эта статья написана по материалам занятий математико-механического кружка учащихся смоленской школы № 7 (апрель 1971 года).

*) Отметим, что на оси Oy мы откладываем коэффициент при i (действительное число), но отметке 1 на оси Oy соответствует число i.

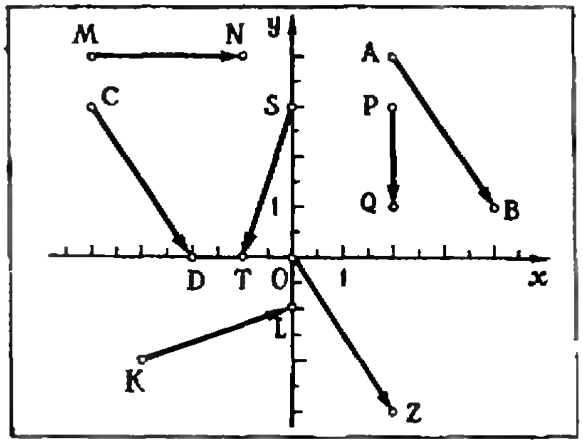


Рис. 2.

Рассмотрим затем любой другой вектор **AB**, равный вектору **OZ** *). Вектору **AB** сопоставим то же самое комплексное число z; будем это число называть *комплексной координатой вектора* **AB**. Так, например, на рисунке 2 векторы **AB**, **CD** и **OZ** имеют одну и ту же комплексную координату $2-3i$. Вообще можно сказать так: *если проекция некоторого вектора на ось Ox равна a, а его проекция на ось Oy равна b, то комплексной координатой вектора называется число $z=a+bi$.*

Упражнение 2. *Какие комплексные координаты имеют векторы* **KL**, **MN**, **PQ**, **ST**, *изображенные на рисунке 2?*

Упражнение 3. *Нарисуйте на координатной плоскости какие-либо векторы, начала которых не совпадают с началом координат и которые имеют такие комплексные координаты:* i, $3-i$, $-i-3$, -2, $^1/_2-{}^4/_3\,i$.

Упражнение 4. *Пусть векторы* **OA** и **AB** (рис. 3) *имеют комплексные координаты* z_1 и z_2, *а сумма этих векторов* (*вектор* **OB**) *имеет комплексную координату* z. *Как выражается число* z *через числа* z_1 и z_2?

Решение. Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$. Тогда проекции векторов **OA** и **AB** на ось Ox равны соответственно a_1 и a_2, а проекция их суммы **OB** на ось Ox равна a_1+a_2. Аналогично показывается, что проекция вектора **OB** на ось Oy равна b_1+b_2. Но тогда комплексная координата z вектора **OB** равна $(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$, то есть

$$z=z_1+z_2.$$

Итак, при сложении векторов их комплексные координаты складываются.

Упражнение 5. *Две точки* Z_1 и Z_2 *координатной плоскости* xOy (рис. 4) *имеют комплексные координаты* z_1 и z_2. *Какую комплексную координату имеет вектор* $\mathbf{Z_1Z_2}$?

Решение. Обозначим через z комплексную координату вектора $\mathbf{Z_1Z_2}$. Так как $\mathbf{OZ_2}=\mathbf{OZ_1}+\mathbf{Z_1Z_2}$, то $z_2=z_1+z$, откуда

$$z=z_2-z_1.$$

Итак, комплексная координата вектора равна разности между комплексной координатой его конца и комплексной координатой его начала.

Упражнение 6. *Концы отрезка* Z_1Z_2 (*рис.* 5) *имеют соответ-*

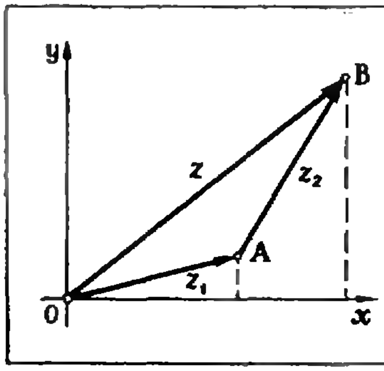


Рис. 3.

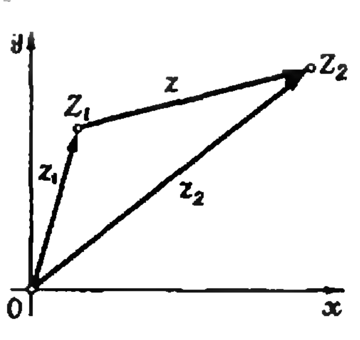


Рис. 4.

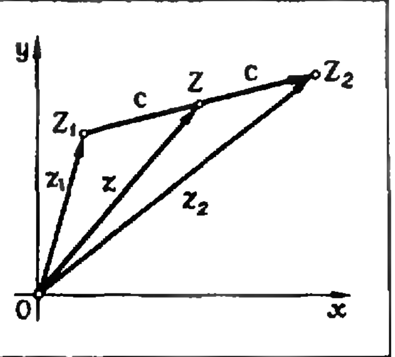


Рис. 5.

---

*) Это означает следующее: векторы **AB** и **OZ** равны по длине, лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых и одинаково направлены.

ственно комплексные координаты z_1 *и* z_2. *Какова комплексная координата* z *середины* Z *этого отрезка?*

Решение. Векторы $\mathbf{Z_1Z}$ и $\mathbf{ZZ_2}$ равны, и поэтому они имеют одну и ту же комплексную координату; обозначим ее через c. Так как $\mathbf{OZ} = \mathbf{OZ_1} + \mathbf{Z_1Z}$ и $\mathbf{OZ_2} = \mathbf{OZ} + \mathbf{ZZ_2}$, то $z = z_1 + c$, $z_2 = z + c$.

Исключая c, найдем

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Итак, комплексная координата середины отрезка равна полусумме комплексных координат его концов.

Упражнение 7. *Точки* A *и* B *на координатной плоскости имеют комплексные координаты* $\sqrt{3} - i$ *и* $-\sqrt{3} + 3i$. *Какую комплексную координату имеет вектор* $\mathbf{AB}$? *Какую комплексную координату имеет середина отрезка* AB?

Напомним понятие *модуля и аргумента* комплексного числа. Если число $z = a + bi$ — комплексная координата вектора $\mathbf{AB}$ (рис. 1), то длина r этого вектора называется *модулем* комплексного числа z (обозначается так: $|z|$). Ясно, что $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Угол α наклона вектора $\mathbf{AB}$ к оси Ox (отсчитываемый в положительном направлении, то есть против часовой стрелки) называется *аргументом* числа z (обозначается так: $\operatorname{Arg} z$). Понятно, что у каждого комплексного числа z имеется бесконечно много аргументов *). Из очевидных соотношений $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$ следует так называемая *тригонометрическая форма комплексного числа*: $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Упражнение 8. *Пусть* z_1 *и* z_2 — *два комплексных числа. Как геометрически истолковать число* $|z_2 - z_1|$?

Упражнение 9. *Может ли модуль суммы двух комплексных чисел быть больше суммы модулей этих чисел?*

Формула Эйлера и формула Муавра

Выражение вида $\cos\varphi + i\sin\varphi$ встречается в математике и ее приложениях весьма часто. Для него используются различные сокращенные обозначения. Например, в картографии его обозначают знаком 1_φ, а в работах по математике — через $\exp(i\varphi)$ или $e^{i\varphi}$. Таким образом, по определению

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1)$$

Упражнение 10. *Какие комплексные числа заданы выражениями:* $e^{i\cdot 0}$; $e^{i\frac{\pi}{2}}$; $e^{i\frac{\pi}{3}}$; $e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$?

Обозначение (1) оправдано сходством в свойствах выражений вида e^x (степень с вещественным показателем x) и выражений вида $e^{i\varphi}$. В самом деле, известно, что для вещественных x, x_1 и целых n верны такие формулы:

$$e^x \cdot e^{x_1} = e^{x + x_1} \qquad (2)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \qquad (3)$$

$$(e^x)^n = e^{nx}. \qquad (4)$$

Иными словами, при перемножении степеней с одним и тем же основанием показатели складываются; при возведении какой-либо степени в целую степень показатели перемножаются. Напишем для выражения вида $e^{i\varphi}$ аналогичные формулы (ниже φ, φ_1 — произвольные действительные числа, n — любое целое число *):

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi+\varphi_1)} \qquad (2')$$

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}, \qquad (3')$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}. \qquad (4')$$

Верны ли эти равенства? Оказывается, да. В этом можно убедиться, пользуясь формулами сложения тригонометрических функций. Справедливость формул (2′) — (4′) и оправдывает введение обозначения (1).

Докажем формулы (2′) — (4′).

(2′). $e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi_1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = (\cos\varphi\cdot\cos\varphi_1 - \sin\varphi\cdot\sin\varphi_1) + i(\sin\varphi\cdot\cos\varphi_1 + \cos\varphi\cdot\sin\varphi_1) = \cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1) = e^{i(\varphi+\varphi_1)}$.

---

*) Если $z \neq 0$, то аргументы z отличаются на кратное 2π, а $\operatorname{Arg} 0$ вообще произволен.

*) Записи вида $e^{-i\varphi}$, $e^{\varphi i}$, $e^{ni\varphi}$ следует, естественно, понимать как $e^{i(-\varphi)}$, $e^{i\varphi}$, $e^{i(n\varphi)}$.

(3'). Полагая в (2') $\varphi_1 = -\varphi$, получим $e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} = e^{i\cdot 0} = 1$, откуда следует (3').

(4'). Доказательство этой формулы для натуральных n проведем методом математической индукции. При $n = 1$ формула (4'), очевидно, верна. Пусть (4') справедлива для некоторого k:

$$(e^{i\varphi})^k = e^{i(k\varphi)}. \qquad (5)$$

Покажем, что в таком случае формула (4') верна и для следующего номера (то есть при $n = k+1$). Действительно, в силу формул (5) и (2') имеем

$$(e^{i\varphi})^{k+1} = (e^{i\varphi})^k\cdot e^{i\varphi} = e^{i(k\varphi)}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(k\varphi+\varphi)} = e^{i(k+1)\varphi}. \qquad (5')$$

Итак, из (5) следует (5'). Согласно принципу математической индукции формула (4') верна для всех натуральных n.

Пусть теперь n — целое отрицательное число; тогда $n = -m$, где m — натуральное число, и поэтому $(e^{i\varphi})^m = e^{im\varphi}$. Следовательно,

$$(e^{i\varphi})^n = (e^{i\varphi})^{-m} = \frac{1}{(e^{i\varphi})^m} = \frac{1}{e^{im\varphi}} = e^{-im\varphi} = e^{in\varphi},$$

то есть (4') верна и для всех целых отрицательных n (для $n = 0$, как обычно, $z^0 = 1$).

Формулы (2')—(4') позволяют производить преобразования с выражениями вида $\cos\varphi + i\sin\varphi$ так, как будто это обычные степени.

Формулу (1) называют формулой Эйлера, и формулу (4') — формулой Муавра *). Более распространена другая запись формулы (4'):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Формула Эйлера позволяет каждое комплексное число z записать компактно в виде $z = re^{i\varphi}$, где φ — аргумент числа z, а r — его модуль (*показательная* или *экспоненциальная* форма записи комплексного числа).

Упражнение 11. *Пользуясь показательной формой записи комплексных чисел, выясните, как выражается модуль и аргумент произведения двух комплексных чисел через модули и аргументы сомножителей.*

Решение. Пусть $z = z_1\cdot z_2$. Запишем каждый сомножитель в экспоненциальной форме:

$$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$z = r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2} = (r_1\cdot r_2)\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Отсюда видно, что число z имеет своим модулем число $r_1\cdot r_2$, а аргументом — число $\varphi_1+\varphi_2$. Можно это записать так:

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Итак, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Отметим еще два следствия из формулы Эйлера. Заменяя в (1) φ на $-\varphi$, имеем

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (6)$$

Из (1) и (6) следуют интересные следствия:

$$2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi},$$

$$2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi},$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Упражнение 12. *Пусть z_1 и z_2 — комплексные координаты двух точек, расположенных на окружности радиуса R с центром в нуле (начале координат)* (рис. 6); *α и β — аргументы чисел z_1 и z_2, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Проверьте справедливость следующего тождества:*

$$z_2 - z_1 = |z_2 - z_1|\cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot i. \qquad (7)$$

Решение. Так как $z_2 - z_1 = Re^{i\beta} - Re^{i\alpha}$, то

$$\frac{z_2 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{1}{i}R\left(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) =$$

$$= 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2} > 0. \qquad (8)$$

Отсюда

$$|z_2 - z_1| = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) следует (7).

Формула (7) будет нами в дальнейшем использована.

---

*) Леонард Эйлер (1707—1783) — один из величайших математиков мира, член Петербургской академии наук, родом из Швейцарии. Абрахам Муавр (1667—1754) — английский математик.

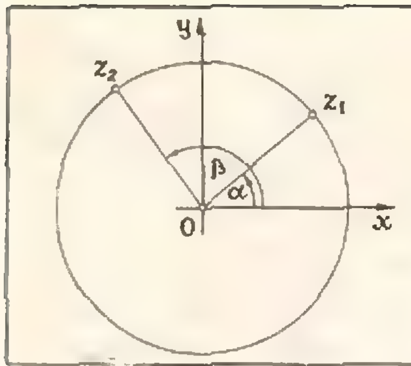


Рис. 6.

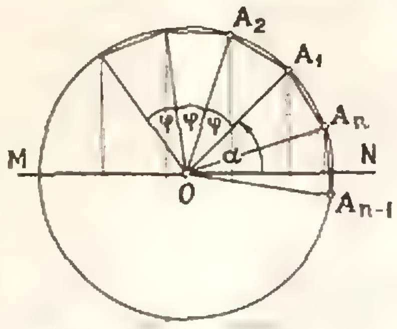


Рис. 7.

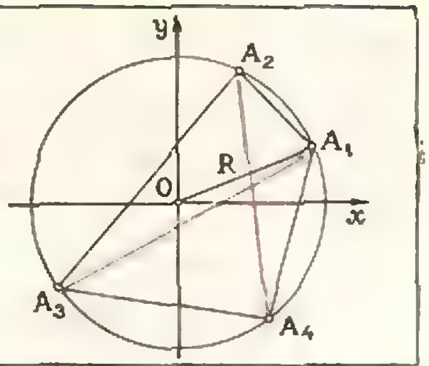


Рис. 8.

Одна геометрическая задача

Задача 1. *Через центр правильного n-угольника проведем произвольную прямую и подсчитаем сумму S квадратов расстояний от вершин многоугольника до этой прямой. Будет ли полученная сумма зависеть от выбора прямой?*

Решение. Пусть (рис. 7) $A_1A_2 \ldots A_n$ — данный многоугольник, R — радиус описанной около него окружности, O — ее центр, MN — прямая, проходящая через O. Пусть $\angle NOA_1 = \alpha$. Полагая $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, имеем

$$S = R^2 \{\sin^2 \alpha + \sin^2 (\alpha + \varphi) + \\ + \sin^2 (\alpha + 2\varphi) + \\ + \cdots + \sin^2 [\alpha + (n-1)\varphi]\}.$$

Требуется выяснить, зависит ли S от α. Ясно, что $S = \frac{1}{2} R^2 (n - T)$, где

$$T = \cos 2\alpha + \cos (2\alpha + 2\varphi) + \\ + \cos (2\alpha + 4\varphi) + \\ + \cdots + \cos [2\alpha + (2n-2)\varphi].$$

Вычислим сумму T. Из формулы Эйлера ясно, что T является действительной частью суммы

$$P = e^{i \cdot 2\alpha} + e^{i(2\alpha + 2\varphi)} + e^{i(2\alpha + 4\varphi)} + \\ + \cdots + e^{i[2\alpha + (2n-2)\varphi]}.$$

Сначала вычислим P, пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии:

$$P = e^{i \cdot 2\alpha} \frac{1 - e^{i2n\varphi}}{1 - e^{i2\varphi}}.$$

Но $2n\varphi = 2n \cdot \frac{2\pi}{n} = 4\pi$, а $e^{i \cdot 4\pi} = 1$, поэтому $P = 0$. Но тогда и $T = 0$, то есть $S = \frac{1}{2} R^2 n$.

Отсюда видно, что сумма S не зависит от выбора прямой MN.

Мнимые числа и задача Птолемея

Формула Эйлера и ее следствия позволяют найти новый способ для решения одной задачи, которую впервые решил во втором веке нашей эры древнегреческий геометр и астроном Клавдий Птолемей.

Задача 2. *Пусть в окружность вписан выпуклый четырехугольник* $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 8). *Требуется выразить сумму произведений противоположных сторон через диагонали четырехугольника.*

Решение. Будем считать, что центр окружности взят в качестве начала координат и что при обходе окружности против часовой стрелки мы последовательно встречаем вершины A_1, A_2, A_3, A_4. Их комплексные координаты обозначим через z_1, z_2, z_3, z_4. Пусть $z_k = Re^{i\alpha_k}$, где $k = 1, 2, 3, 4$.

Теперь мы воспользуемся ранее выведенными формулами (см. упр. 8, 12):

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 = \\ = |z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + \\ + |z_3 - z_2| \cdot |z_4 - z_1| = \\ = \frac{z_2 - z_1}{ie^{i\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}} \cdot \frac{z_4 - z_3}{ie^{i\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}}} +$$

$$+\frac{z_3-z_2}{ie^{i\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}}\cdot\frac{z_4-z_1}{ie^{i\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}}}=$$

$$=\frac{-z_1\cdot z_4-z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_4+z_1\cdot z_2}{i^2e^{i\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}}}=$$

$$=\frac{(z_4-z_2)(z_3-z_1)}{ie^{i\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}}\cdot ie^{i\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}}}=$$

$$=|z_4-z_2|\cdot|z_3-z_1|=A_2A_4\cdot A_1A_3.$$

Итак, в каждом вписанном выпуклом четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

Теорема Птолемея доказана.

Задача 3. *Может ли произведение диагоналей выпуклого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ быть больше, чем сумма произведений противоположных сторон?*

Решение. Мы уже пользовались тождеством, верным для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z_4:

$$(z_2-z_1)(z_4-z_3)+(z_3-z_2)(z_4-z_1)=$$
$$=(z_4-z_2)(z_3-z_1).$$

Опираясь на свойства модулей комплексных чисел, получим

$$|z_4-z_2|\cdot|z_3-z_1|\leqslant|z_2-z_1|\times$$
$$\times|z_4-z_3|+|z_3-z_2|\cdot|z_4-z_1|,$$

то есть всегда $A_1A_3\cdot A_2A_4\leqslant A_1A_2\times\times A_3A_4+A_2A_3\cdot A_1A_4$.

Мы доказали такое дополнение к теореме Птолемея: в каждом четырехугольнике произведение диагоналей не больше суммы произведений его противоположных сторон.

Комплексный множитель как оператор поворота и растяжения

Остановимся еще на одном важном геометрическом толковании комплексного числа.

Пусть на плоскости имеется вектор **OZ** (рис. 9), и пусть z — его комплексная координата. Повернем вектор **OZ** вокруг его начала O на угол

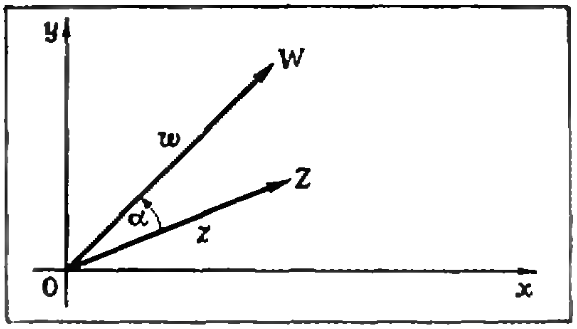


Рис. 9.

α (против часовой стрелки, если $\alpha>0$, и по часовой стрелке, если $\alpha<0$) и растянем этот вектор (не меняя его начала) с коэффициентом растяжения ρ. В результате мы получим новый вектор **OW**: его комплексную координату обозначим через w. Как выражается число w через z, α, ρ?

Пусть $z=re^{i\varphi}$. Ясно, что $|w|=\rho r$, $\operatorname{Arg} w=\alpha+\varphi$. Поэтому $w=(\rho r)\,e^{i(\alpha+\varphi)}=(\rho e^{i\alpha})(re^{i\varphi})$. Обозначим через c комплексное число $\rho e^{i\alpha}$. Тогда $w=c\cdot z$.

Таким образом, *если вектор* **OZ** *подвергнуть операциям поворота на угол* α *и растяжения с коэффициентом растяжения* ρ, *то его комплексная координата* z *умножится на комплексное число* $c=\rho e^{i\alpha}$. *Обратно, если комплексную координату* z *некоторого вектора* **OZ** *умножить на комплексное число* $c=\rho e^{i\alpha}$, *то новое число* $w=c\cdot z$ *представляет собой координату вектора* **OW**, *полученного из вектора* **OZ** *путем поворота на угол* α *и растяжения с коэффициентом* ρ.

Можно короче сказать так: *умножение на комплексное число* c *действует как оператор поворота на угол* $\alpha=\operatorname{Arg} c$ *и растяжения с коэффициентом растяжения, равным* $|c|$.

Понятно, что сделанный выше вывод легко обобщается на тот случай, когда началом вектора служит не начало координат. Например, если векторы **KL** и **MN** имеют комплексные координаты z и w, причем $w=-3i\cdot z$, то это означает, что после поворота вектора **KL** на угол $-\frac{\pi}{2}$ радиан $\left(\operatorname{Arg}(-3i)=-\frac{\pi}{2}\right)$ и растяжения с коэффициентом 3 (так

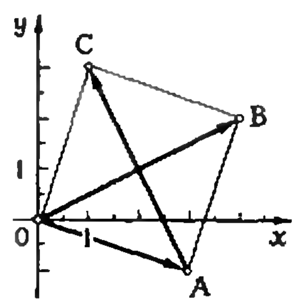


Рис. 10.

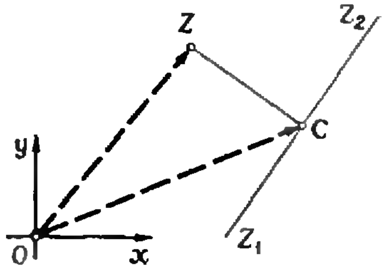


Рис. 11.

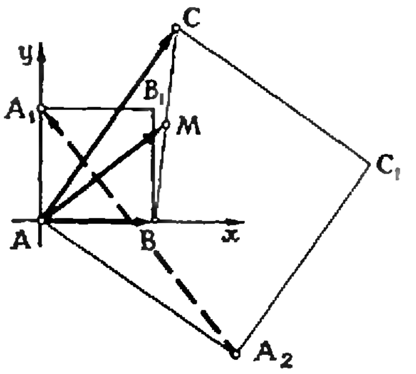


Рис. 12.

как $|-3i|=3$) получим вектор, равный вектору **MN**.

Особо отметим случай, когда $|c|=1$. Такому комплексному числу c (оно имеет вид $e^{i\alpha}$) соответствует оператор поворота. Например, комплексному числу i ($i=e^{i\frac{\pi}{2}}$) соответствует *оператор поворота* на угол 90° $\left(\frac{\pi}{2}\text{ радиан}\right)$ в положительном направлении.

Упражнение 13. *Дан квадрат $OABC$ (рис. 10). Вектор* **OA** *имеет комплексную координату $z=3-i$. Вычислите комплексные координаты векторов* **OB** (*обозначим ее через* w_1), **AC** (w_2).

Решение. Вектор **OB** получается из **OA** поворотом на угол $+\frac{\pi}{4}$ радиан и растяжением с коэффициентом растяжения $\sqrt{2}$. Поэтому

$$w_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot z=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(3-i)=$$

$$=(1+i)(3-i)=4+2i.$$

Если вектор **OB** повернуть на 90° в положительном направлении, то получим вектор, равный вектору **AC**. Поэтому $w_2=iw_1=i\cdot(4+2i)=-2+4i$.

Упражнение 14. *На рисунке 11 $Z_1C=CZ_2=CZ$, $CZ\perp Z_1Z_2$. Известны комплексные координаты z_1 и z_2 точек Z_1 и Z_2. Вычислите комплексную координату z точки Z.*

Решение. Вектор **OC** имеет комплексную координату $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$. Вектор **CZ** получается из вектора **CZ**$_2$ поворотом на $+\frac{\pi}{4}$ радиан. Но вектор **CZ**$_2$ имеет комплексную координату $\frac{1}{2}(z_2-z_1)$, поэтому комплексная координата вектора **CZ** равна $i\cdot\frac{1}{2}(z_2-z_1)$. Из равенства **OZ** = **OC** + **CZ** находим

$$z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)+\frac{1}{2}i(z_2-z_1).$$

Теперь покажем, как операторное толкование комплексного числа может быть использовано при решении планиметрических задач.

Задача 4. *На сторонах AB и AC треугольника ABC (рис. 12) построены квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2, перекрывающиеся с этим треугольником. Верно ли, что медиана AM перпендикулярна A_1A_2? Вычислите также отношение $A_1A_2:AM$.*

Решение. Рассмотрим на плоскости декартову систему координат xAy с началом в вершине A. Обозначим комплексные координаты векторов **AB**, **AC**, **AM** и **A**$_2$**A**$_1$ через b, c, m и w.

Тогда $m=\frac{1}{2}(b+c)$. Вектор **AA**$_1$ получается из вектора **AB** поворотом на $+\frac{\pi}{2}$ радиан. Поэтому **AA**$_1$ (а также точка A_1) имеет комплексную координату ib. Аналогично находим, что точка A_2 имеет комплекс-

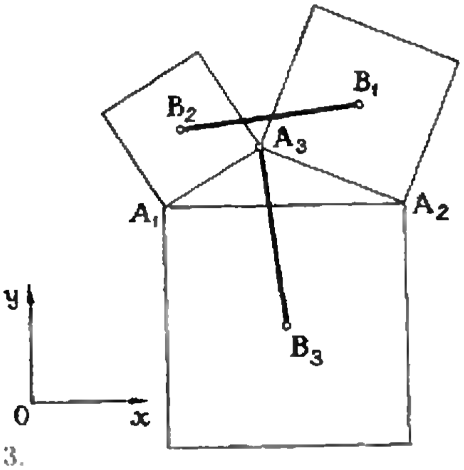


Рис. 13.

ную координату $-ic$. Поэтому $w = ib - (-ic) = i(b+c)$. Таким образом, $w = 2im$. А это значит, что $A_2A_1 \perp AM$ и $A_2A_1 : AM = 2$.

Задача 5. *На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 13) построили квадраты, не имеющие с треугольником общих внутренних точек; в квадратах отметили их центры B_1, B_2, B_3. Проверьте справедливость подсказываемых чертежом соотношений:* $B_1B_2 = A_3B_3$, $B_1B_2 \perp A_3B_3$.

Решение. Выберем в плоскости треугольника декартову систему координат xOy. Комплексные координаты точек A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3 и векторов $\mathbf{B_1B_2}$ и $\mathbf{A_3B_3}$ обозначим соответственно через a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, z и w. Выразим z и w через a_1, a_2, a_3. Имеем $z = b_2 - b_1$, $w = b_3 - a_3$. Найдем b_2 (как в упражнении 14):

$$b_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} + i\,\frac{a_3 - a_1}{2}.$$

Аналогично

$$b_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} + i\,\frac{a_1 - a_2}{2},$$

$$b_1 = \frac{a_2 + a_3}{2} + i\,\frac{a_2 - a_3}{2}.$$

Теперь нетрудно подсчитать, что

$$z = \frac{a_1 - a_2}{2} + i\,\frac{2a_3 - a_1 - a_2}{2},$$

$$w = \frac{a_2 + a_1 - 2a_3}{2} + i\,\frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Отсюда видно, что $w = iz$. Это означает, что при повороте вектора $\mathbf{B_1B_2}$ на 90° против часовой стрелки получим вектор, равный вектору $\mathbf{A_3B_3}$. Но в таком случае $A_3B_3 = B_1B_2$, $A_3B_3 \perp B_1B_2$.

Задача 6. *Вершины каждого из двух правильных треугольников на плоскости пронумерованы против часовой стрелки. Вершины с одинаковыми номерами соединены отрезками. Докажите, что середины этих отрезков являются вершинами правильного треугольника (который может выродиться в точку).*

Решение. Пусть $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ — данные треугольники, C_1, C_2, C_3 — середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и a_k, b_k, c_k (где $k = 1, 2, 3$) — комплексные координаты рассматриваемых девяти точек. Тогда вектор $\mathbf{A_1A_3}$ имеет комплексную координату $a_3 - a_1$, а вектор $\mathbf{A_1A_2}$ — комплексную координату $a_2 - a_1$. Так как треугольник $A_1A_2A_3$ — правильный, то вектор $\mathbf{A_1A_3}$ может быть получен из вектора $\mathbf{A_1A_2}$ поворотом на $\frac{\pi}{3}$ радиан против часовой стрелки, поэтому

$$a_3 - a_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(a_2 - a_1).$$

Аналогично

$$b_3 - b_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(b_2 - b_1).$$

Так как C_1 — середина отрезка A_1B_1, то

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1).$$

Аналогично

$$c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad c_3 = \frac{1}{2}(a_3 + b_3).$$

Из полученных соотношений следует, что $c_3 - c_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(c_2 - c_1)$. Но это означает, что вектор $\mathbf{C_1C_3}$ получается из вектора $\mathbf{C_1C_2}$ поворотом на угол $+\frac{\pi}{3}$ радиан, то есть $\triangle C_1C_2C_3$ — правильный.

Реальные применения мнимых чисел

Мнимые числа обязаны своим рождением одной вполне реальной математической задаче — решению уравнений третьей степени. Правда, с квадратными корнями из отрицательных чисел математики встречались и раньше, еще при решении квадратных уравнений. Решение наугад взятого уравнения вида

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (1)$$

где p, q — «обычные», то есть действительные числа, по общеизвестной формуле приводило иногда к числам вида $A + \sqrt{B}$, где B — отрицательное число. А что такое «квадратный корень из отрицательного числа», какой смысл следует придать такому выражению, никто не знал. Однако выход из такого затруднения был несложен: просто объявлялось, что выражение $\sqrt{-1}$ (или $\sqrt{B}$, где $B < 0$) не имеет смысла. И это представлялось вполне разумным: каждый раз удавалось показать, что при $B < 0$ корнем уравнения (1) не может быть ни положительное число, ни отрицательное, ни нуль. Когда же дело дошло до решения кубических уравнений (то есть уравнений третьей степени), то оказалось уже невозможным просто отмахнуться от квадратных корней из отрицательных чисел.

А дело было так. Более 400 лет назад несколько итальянских математиков научились решать уравнения третьей степени. Способ, изложенный в учебнике алгебры одного из них, Иеронима Кардано (1545 г.), сводится (в современных обозначениях) к следующему: корни уравнения вида

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

могут быть вычислены по формуле (ее теперь называют формулой Кардано)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \qquad (3)$$

где

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \qquad (4)$$

Увы, эта формула дает осечку в том случае, когда у уравнения (2) имеются три различных действительных корня! Например, легко проверить, что корнями уравнения $x^3 - x = 0$ служат числа 0, 1, -1. Но если бы мы попытались решить это уравнение по формуле Кардано, то получили бы

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Каким же образом можно из этой формулы извлечь числа 0, 1, —1? Чтобы ответить на подобные вопросы, математикам XVI — XVII веков необходимо было научиться обращаться с выражениями вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$, и, в частности, извлекать из таких выражений кубические корни.

Математики крайне неохотно шли на изучение таких выражений. Они называли их «мнимыми» числами, несуществующими, невозможными, «чисто софистическими» числами, «потайными решениями уравнений». Считалось очевидным, что они не имеют никакого реального содержания.

Один из величайших математиков мира Г. В. Лейбниц (1646—1716), относившийся к мнимым числам с восхищением, в то же время называл их «выродком мира идей», «почти двойственным существом, находящимся между «быть» и «не быть»; говорят, что он даже завещал начертать на своей могиле знак $\sqrt{-1}$ как символ перехода от «мира реального» в «мир потусторонний».

А между тем эти «невозможные», «мнимые», «несуществующие» числа все настойчивее стучались в двери математической науки. Еще в XVII—XVIII веках было обнаружено, что многие сложные и громоздкие выражения, встречающиеся в элементарной и высшей математике, легко вычислить, если воспользоваться мнимыми числами. Но недоверие к этим числам было настолько велико, что нередко математики поступали так: сначала вычисляли то или иное сложное выражение с помощью мнимых чисел, а затем доказывали полученную таким образом формулу «строго», без привлечения этих чисел, другими средствами.

В течение последних 200 лет комплексные числа (так предложил называть мнимые числа знаменитый немецкий математик К. Ф. Гаусс) нашли многочисленные и совершенно неожиданные применения. Так, например, с помощью комплексных чисел Гаусс (в 1796 году) сумел найти ответ на чисто геометрический вопрос: *при каких натуральных номерах n можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник* *)?

Широкое применение нашли комплексные числа в картографии, в электротехнике, в гидродинамике, в теории фильтрации почв, в теоретической физике. Уже в нашем столетии комплексные числа и комплексные функции (то есть такие функции, у которых и значения аргумента и значения функции — комплексные числа) успешно применялись советскими математиками и механиками Н. Е. Жуковским, С. А. Чаплыгиным, В. В. Голубевым, М. В. Келдышем в теории самолета. Советские математики Г. В. Колосов, Н. И. Мусхелишвили впервые стали применять комплексные функции к расчетам различных конструкций на прочность.

Если учесть важность аппарата комплексных переменных для механики и физики, то становится ясным, почему наши известные ученые-механики академики М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Седов и другие одновременно являются видными специалистами по теории функций комплексного переменного. С применениями комплексных переменных в теоретической физике связаны исследования советских академиков Н. Н. Боголюбова и В. С. Владимирова.

Значительное применение нашли комплексные числа при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Приведем пример. Одна из важных задач, вставшая при подготовке запусков первых искусственных спутников, состояла в следующем: как будет двигаться спутник под влиянием силы притяжения к «сплюснутому сфероиду» (как известно, именно такую форму имеет земной «шар»: этот «шар» несколько сплюснут у полюсов, его полярный диаметр примерно на 43 километра меньше экваториального диаметра). Было предложено несколько способов решения этой задачи, и одним из самых эффективных оказался способ, использующий комплексные переменные и принадлежащий советским ученым, лауреатам Государственной премии Е. П. Аксенову, Е. А. Гребеникову и В. Г. Демину.

---

*) Подробно об этом рассказывалось в статье С. Г. Гиндикина «Дебют Гаусса», «Квант» № 1, 1972 г.

Победители конкурса «Кванта»

Мы уже сообщали (см. «Квант» № 1 за 1972 г.), что школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад. За прошлый, 1972 год редакция получила более шести тысяч писем с решениями задач. Мы отобрали авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже публикуется список школьников, — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в областных, краевых и республиканских (в АССР и союзных республиках без областного деления) олимпиадах.

К участию в математической олимпиаде допущены

Р. Али-заде — пос. Джебраиль АзССР, с. ш. им. А. М. Горького
С. Асасян — Камо Арм. ССР, с. ш. № 3
А. Асташов — Львов, с. ш. № 5
А. Бараов, КБАССР, с. Ст. Урух Урванского р-на
О. Бегларян — пос. Сисиан Арм. ССР, с. ш. № 1
С. Белолипецкий — Киржач Владимирской обл., с. ш. № 5
А. Блох — Харьков, с. ш. № 27
А. Вальков — Ташкент, с. ш. № 110
Г. Высоцкая — Красноярск, с. ш. № 10
Л. Генгринович — Ташкент, с. ш. № 103
Л. Готман — Арзамас, с. ш. № 1
И. Готман — Арзамас, с. ш. № 1
А. Григорян — Баку, с. ш. № 211
С. Григорян — Ереван, ф. м. ш. при ЕГУ
Е. Гурвич — Ташкент, с. ш. № 103
Е. Гусев — Павлоград Днепропетровской обл., с. ш. № 18
К. Данильченко — Волгоград, с. ш. № 35
Р. Егорян — Раздан, ф. м. ш. при ЕГУ
А. Жданов — Славянск-на-Кубани, с. ш. № 6
В. Зарубин — пос. Летний отдых Московской обл. Захаровская с. ш.
А. Заславский — Калинин, с. ш. № 20
С. Зенович — Ташкент, с. ш. № 50
М. Кауль — Фрунзе, с. ш. № 61

В. Ковтунец — с. Шостаков Ровенской обл., с. ш. № 12
В. Колосов — Киев, с. ш. № 173
С. Конягин — Саратов, с. ш. № 19
М. Левин — Витебск, с. ш. № 2
А. Литовченко — с. Белокоровичи Житомирской обл., с. ш. № 3
Г. Лутингер — Черновцы, с. ш. № 14
А. Макаричев — Львов, с. ш. № 14
Б. Марьяновский — Винница, с. ш. № 32
Б. Палатник — Баку, с. ш. № 134
В. Панарин — Красноярск, с. ш. № 99
А. Разгуляев — Клин Московской обл. с. ш. № 10
С. Родионов — Саратов, с. ш. № 13
Р. Рожков — Рязань, с. ш. № 50
Л. Рудицер — Харьков, с. ш. № 80
М. Сапир — Свердловск, с. ш. № 130
В. Сац — Киев, с. ш. № 173
Р. Сирота — Харьков, с. ш. № 27
С. Скоков — д. Соковки, г. Слободской Кировской обл. с. ш. № 10
А. Слесаренко — Рубцовск Алтайского края, с. ш. № 11
Я. Сойбельман — Киев, с. ш. № 173
П. Сухов — Саратов, с. ш. № 8
А. Тагиев — Баку, с. ш. № 134
Я. Тепер — Ташкент, с. ш. № 103
С. Цанава — с. Ачигвари Абх. АССР, с. ш. № 2
Н. Чернов — Кривой Рог, с. ш. № 95
А. Шерстюк — Николаев, с. ш. № 2
Ю. Шмелев — Ярославль, с. ш. № 20
Н. Щербина — Днепропетровск, с. ш. № 80

К участию в физической олимпиаде допущены

Л. Брагинский — Фрунзе, с. ш. № 61
А. Бузулуцков — Новосибирск, с. ш. № 130
Т. Вайнтрауб — Кишинев, с. ш. № 37
С. Галахваридзе — Тбилиси, ф. м. ш. при ТГУ
Б. Герасимов — Сарапул Удм. АССР, с. ш. № 24
А. Григорян — Баку, с. ш. № 211
В. Игнатьев — Волгоград, с. ш. № 16
С. Карпенко — Киев, с. ш. № 145
В. Карпинский — Свердловск, с. ш. № 5
Л. Коган — Черновцы, с. ш. № 35
С. Корнилов — Грозный, с. ш. № 2
Г. Лутингер — Черновцы, с. ш. № 14
Ю. Лурье — Грозный, с. ш. № 2
С. Мазуренко — Минск, с. ш. № 50
В. Муханов — г. Канаш, Чувашской АССР, с. ш. № 62
Ю. Полонский — Зеленодольск, с. ш. № 3
М. Ригмант — Магнитогорск, с. ш. № 53
В. Рекрут — Киев, с. ш. № 41
Л. Рудицер — Харьков, с. ш. № 80
С. Слепнев — Горький, с. ш. № 40
Ф. Тахватулин — Ташкент, с. ш. № 110
Б. Трейгер — Кировоград, с. ш. № 11
О. Трунов — Джалал-Абад, Кирг. ССР, с. ш. № 5
С. Хоменко — Подольск Московской обл., с. ш. № 5
Д. Фушман — Черновцы, с. ш. № 35
А. Шерстюк — Николаев, с. ш. № 2
В. Шифрин — Ростов-на-Дону, с. ш. № 5
С. Щукин — Днепропетровск, с. ш. № 23
Р. Ямолдинов — Глазов, Удм. АССР, с. ш. № 3

Борный люминофор

В. В. Майер

Некоторые вещества обладают удивительным свойством. Если их подержать на свету, а потом поместить в темную комнату, то некоторое время они будут светиться. Такие вещества называются люминофорами.

Чтобы приготовить борный люминофор, вам понадобятся хвойный концентрат и порошок борной кислоты. И то и другое можно приобрести в любой аптеке.

1 *г* хвойного концентрата растворите в 50 *мл* воды. Навесьте несколько одинаковых порций борной кислоты (по 2 — 3 *г*).

Если у вас нет весов и мензурки, то равные по объему порции борной кислоты можно отмерить, например, чайной ложкой. А для получения нужного раствора хвойного концентрата постепенно добавляйте концентрат в воду до тех пор, пока зеленоватый раствор не примет отчетливо выраженный желтый оттенок.

Одну порцию борной кислоты насыпьте на алюминиевую пластинку и капните в нее 10 капель приготовленного раствора хвойного концентрата. Перемешайте все это до получения однородной массы. Получившуюся массу разровняйте на пластинке так, чтобы получился слой толщиной 2 — 4 *мм*. Положите пластинку на включенную электроплитку. По мере нагревания из массы вначале выпаривается вода, масса затвердевает, затем начинает плавиться. Образующиеся при этом пузыри следует прокалывать заостренной палочкой. Как только вся масса расплавится, удалите расплав с плитки и дайте ему полностью охладиться. Борный люминофор готов.

Поднесите люминофор к горящей лампе. Через некоторое время выключите лампу. В темноте вы можете несколько секунд видеть яркое синеватое или зеленоватое свечение.

Яркость и окраска свечения меняются в зависимости от количества раствора хвойного концентрата, которое вы влили в борную кислоту перед приготовлением люминофора. Поэтому в остальные навески вливайте разное количество хвойного концентрата (например, 20, 30, 40 капель). Приготовьте люминофоры и определите лучшее соотношение. После этого можно пропорционально увеличить составные части и изготовить достаточное количество люминофора.

Теперь с помощью полученного люминофора поставьте опыт, иллюстрирующий важный физический закон. Люминофор на алюминиевой пластинке обычно получается в виде «лепешки». Прикройте половину этой «лепешки» красным светофильтром и, облучив люминофор, выключите свет. Что получилось?

Замените красный светофильтр последовательно желтым, зеленым, синим и фиолетовым светофильтрами. Что вы при этом наблюдаете?

При освещении красным, желтым и зеленым светом послесвечение борного люминофора отсутствует. На обложке нашего журнала помещена фотография статуи «Менада» греческого скульптора Скопаса. Статуя была покрыта люминофором, освещена, а затем сфотографирована в темной комнате. Справа вы видите послесвечение объекта. Слева — та же статуя, освещенная через красный светофильтр: послесвечение отсутствует.

Если же люминофор возбудить синим или фиолетовым светом, то в темноте он испускает зеленый или синий свет. Это наблюдение иллюстрирует закон Стокса, согласно которому длина волны света люминесценции больше длины волны света, вызывающего люминесценцию.

Задачник «Кванта»

Задачи

М191—М195, Ф203—Ф207

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 апреля по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М191, М192» или «. . . Ф203». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «. . . новая задача по математике»).

Звездочкой отмечены задачи повышенной трудности.

М191. На плоскости даны две точки A и B и прямая l, проходящая через точку A и не проходящая через точку B. Через точки A и B проводится произвольная окружность. Пусть O — ее центр, C — ее точка пересечения с прямой l, отличная от A. Найдите геометрическое место середины отрезков OC.

П. Парамонов, ученик 9 класса

М192. Даны числа 1, 2, 3, . . ., 1000. Найдите наибольшее m, обладающее таким свойством: какие бы m из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся $1000 - m$ чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

М193*. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон и диагоналями выпуклого пятиугольника (см. рис. 1), больше площади всего пятиугольника.

Н. Б. Васильев

М194. Даны два взаимно простых натуральных числа a и b. Известно, что всякое целое число можно представить в виде $ax + by$, где x и y — целые. Рассмотрим множество M целых чисел, которые представимы в виде $ax + by$, где x и y — целые неотрицательные числа.

а) Каково наибольшее число c, не принадлежащее множеству M?

б) Докажите, что из двух чисел n и $c - n$ (где n — любое целое) одно принадлежит M, а другое нет.

(На рисунке 2 для $a = 3$ и $b = 7$ целые точки, принадлежащие множеству M, — красные, не принадлежащие — голубые).

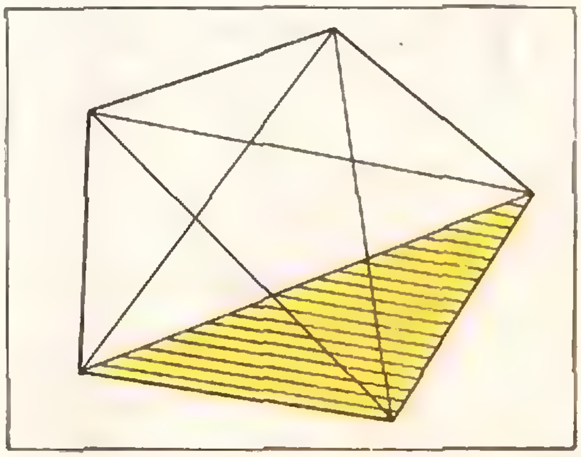


Рис. 1.

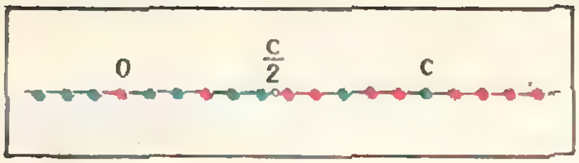


Рис. 2.

М195*. Дан треугольник *ABC*. Сколько существует таких точек *D*, что периметры четырехугольников *ADBC*, *ABDC* и *ABCD* одинаковы?

М. Л. Гервер

Ф203. В электронном генераторе использован триод, в котором расстояние между катодом и анодом равно 1 *мм*. Оценить максимальную частоту колебаний, которые можно получить, используя этот генератор, если анодное напряжение составляет 200 *в*.

Ф204. Космический корабль подлетает к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. В момент максимального сближения с Луной на короткое время включается тормозной двигатель, и корабль переходит на круговую орбиту спутника Луны. Определить изменение скорости корабля при торможении. Радиус Луны $R_л = 1740$ *км*, ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_л = 1{,}7$ *м/с²*.

Примечание. На параболической траектории полная энергия корабля равна нулю.

С. М. Козел

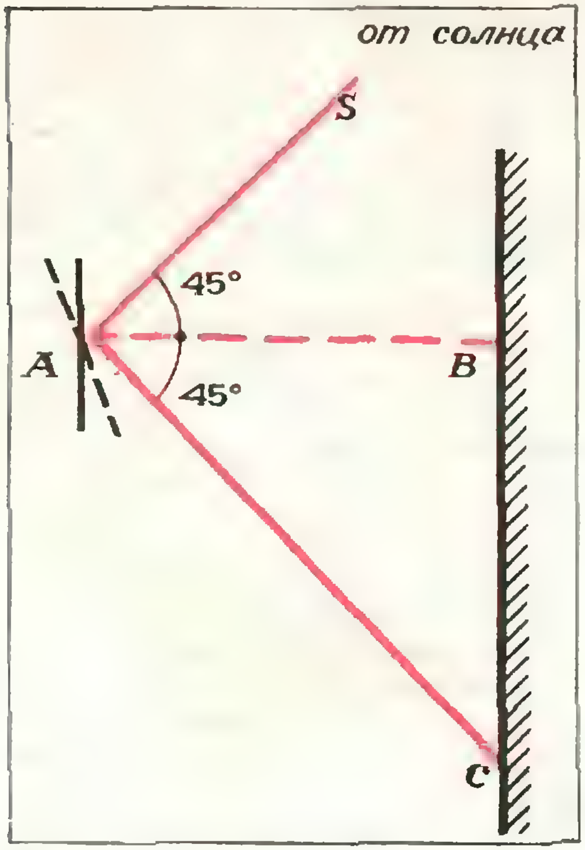


Рис. 3.

Ф205. Осколком стекла *A* неправильной формы на вертикальную стенку пускают солнечный зайчик: один раз в точку *B*, другой раз в точку *C* (рис. 3). Зайчик в точке *B* оказывается круглым, а освещенность его в центре втрое больше, чем на участках, освещенных только рассеянным светом. Какова освещенность в центре зайчика в точке *C*?

Лучи *SA*, *AB* и *AC* лежат в одной вертикальной плоскости, луч *AB* горизонтален, $\angle SAB = \angle BAC = 45°$.

Ф206.* Оцените, до какой максимальной температуры может нагреться из-за трения о воздух поверхность самолета, который летит со скоростью, близкой к скорости звука. Для оценки считать, что воздух состоит из двухатомных молекул азота, энергия которых равна $\frac{5}{2}kT$, где k — постоянная Больцмана и T — абсолютная температура. Температуру окружающего воздуха считать равной $-10°$ С.

П. Л. Капица

Ф207. На поверхности масла, налитого в цилиндрический сосуд, плавает кусочек водяного льда. Температура всей системы равна 0° С. Как изменится уровень масла и давление на дно сосуда, когда лед растает, а образовавшаяся вода опустится на дно сосуда?

Решения задач

М151—М154; Ф170—Ф175

М151. *Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Доказать, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.*

Если прямая пересекает две смежные стороны квадрата, то, очевидно, она разрезает квадрат на треугольник и пятиугольник. Но по условию каждая из 9 прямых разрезает квадрат на четырехугольники. Следовательно, такая прямая пересекает две противоположные стороны квадрата, то есть разбивает квадрат на две трапеции (или два прямоугольника), основания которых лежат на сторонах квадрата, и высоты равны стороне квадрата. Ясно, что прямая делит «среднюю линию» квадрата в отношении 2 : 3 (рис. 1), поскольку отношения площадей этих трапеций равно отношению их средних линий (лежащих на средней линии квадрата).

На средней линии квадрата имеется две точки, делящие ее в отношении 2 : 3. Рассмотрев две другие противоположные стороны квадрата, мы найдем еще две точки на параллельной им средней линии.

В результате мы получаем, что каждая из 9 данных прямых проходит через одну из 4 указанных точек (рис. 2).

Безусловно, через одну из этих точек проходит не менее трех прямых. Действительно, если бы через каждую точку проходило не больше двух прямых, то всего было бы не больше $2 \cdot 4 = 8$ прямых, что противоречит условию.

Читатели указывают естественное обобщение задачи: вместо квадрата рассматривается $2n$-угольник, у которого противоположные стороны параллельны, и прямые, каждая из которых делит этот $2n$-угольник на два $(n+2)$-угольника фиксированной площади.

Заметим, что если две стороны многоугольника не параллельны, то прямые, каждая из которых пересекает эти стороны и отсекает данную площадь, уже не будут проходить через одну точку (докажите это!), а будут касаться некоторой гиперболы.

Б. М. Ивлев

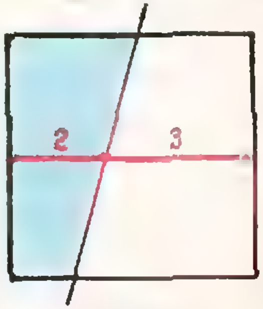


Рис. 1.

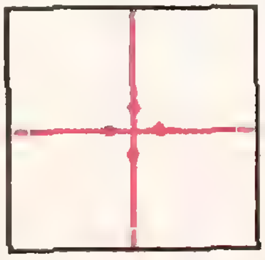


Рис. 2.

М152. *Пусть a, b, m, n — натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a>1$. Доказать, что если a^m+b^m делится на a^n+b^n, то m делится на n.*

Оказывается, что утверждение задачи можно заменить более точным. Мы докажем не только то, что m делится на n, то есть $m = kn$, где k — некоторое целое число, но и то, что это k — обязательно нечетное число. Мы разобьем доказательство на три части.

1°. Пусть $m = kn$, где k — нечетное число. Тогда $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$.

2°. Пусть $m = kn + r$, где k нечетное число, а $0 < r < n$. Тогда $a^m + b^m$ не делится на $a^n + b^n$.

3°. Пусть $m = ln + r$, где l — четное число, а $0 \leqslant r < n$. Тогда $a^m + b^m$ не делится на $a^n + b^n$.

Заметим, что, доказав 1°, 2°, 3°, мы докажем еще больше, чем обещали, а именно: *для того чтобы $a^m + b^m$ делилось на $a^n + b^n$, необходимо и достаточно*, чтобы *m равнялось kn, где k нечетно*. При доказательстве 2° и 3° мы будем использовать то, что a и b взаимно просты, а при доказательстве 1° — нет.

Доказательство 1°. Пусть c и d — произвольные целые числа. Тогда $c^k + d^k$, где $k > 0$ нечетно, делится на $c + d$. (Отсюда при $c = a^n$ и $d = b^n$ получится 1°.) Действительно, как легко видеть, при нечетном k

$$c^k + d^k = (c + d)(c^{k-1} - c^{k-2}d + \ldots - cd^{k-2} + d^{k-1}).$$

Доказательство 2°. Запишем $a^m + b^m$ в виде

$$a^{kn+r} + b^{kn+r} = a^r(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn}(b^r - a^r).$$

Согласно 1° первое слагаемое делится на $a^n + b^n$, второе же слагаемое не делится на $a^n + b^n$, так как b^{kn} взаимно просто с $a^n + b^n$ и $0 < |b^r - a^r| < a^n + b^n$. Следовательно, сумма не делится на $a^n + b^n$.

Доказательство 3°. Если l — четное число, то $k = l - 1$ нечетно. Запишем $a^m + b^m$ в виде

$$a^{ln+r} + b^{ln+r} = a^{kn}a^{n+r} + b^{kn}b^{n+r} = a^{n+r}(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn+r}(b^n + a^n) - b^{kn}a^n(b^r + a^r).$$

Первые два слагаемых делятся на $a^n + b^n$, а последнее, как и выше, не делится. В самом деле, $b^{kn}a^n$ взаимно просто с $a^n + b^n$ и $0 < b^r + a^r < a^n + b^n$.

Приведите самостоятельно примеры, показывающие, что без предположения о взаимной простоте a и b утверждения 2° и 3° неверны.

В. Л. Гутенмахер

М153. *Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее, по своему усмотрению, вместо одной из звездочек в следующей разности:*

$$\begin{array}{r} * * * * \\ - \\ * * * * \end{array}$$

Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Доказать, что
а) второй может расставлять цифры так, чтобы получившаяся при этом разность стала не больше 4000, независимо от того, какие цифры называл первый;
б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000, независимо от того, куда расставляет цифры второй.

Приведем решение для общего случая, когда в каждой строчке не 4, а n звездочек. Докажем, что при наилучшей игре противников разность окажется равной $4\cdot10^{n-1}$.

а) Стратегия второго игрока.

Если первая цифра, названная первым игроком, 4 или меньше, второй игрок ставит ее вместо старшего разряда уменьшаемого. После этого, как только первый игрок назовет цифру, отличную от 0, второй заполняет ею старший разряд вычитаемого. Разность окажется не большей чем $\underbrace{499\ldots9}_{n} - \underbrace{100\ldots0}_{n} < 4\cdot10^{n-1}$. Если первый игрок, начиная со второго хода, каждый раз называет 0, то разность также будет меньше, или равна $4\cdot10^{n-1}$.

Если первый игрок начинает с цифр 5, 6, 7, 8 или 9, второй ставит ее на место старшего разряда вычитаемого, а затем занимает старший разряд уменьшаемого первой же названной цифрой, отличной от 9. Даже если все последующие цифры — девятки, то также получится разность, не превосходящая $4\cdot10^{n-1}$.

б) Стратегия первого игрока.

До тех пор пока остаются свободными старшие разряды уменьшаемого и вычитаемого, первый игрок называет цифры 4 и 5. Начиная с момента, когда второй игрок заполнит один из двух старших разрядов, и до конца игры первый игрок называет 0, если раньше оказался заполненным старший разряд уменьшаемого, и 9 — в противном случае. Остается уточнить, в каких случаях первый игрок называет цифру 4, а в каких — цифру 5.

Перед очередным своим ходом первый игрок мысленно проставляет нули во всех незаполненных разрядах. Если после этого разность оказывается неотрицательной, он объявляет цифру 4, если же разность отрицательна — цифру 5.

Докажем, что описанная стратегия первого игрока позволяет ему сделать разность не меньшей $4\cdot10^{n-1}$.

Если старший разряд вычитаемого займет цифра 4, то в старшем разряде уменьшаемого окажется цифра 9:

$$\underbrace{900\ldots0}_{n} - \underbrace{499\ldots9}_{n} > 4\cdot10^{n-1}.$$

Если старший разряд уменьшаемого заполнит цифра 5, то старший разряд вычитаемого займет цифра 0, и

$$\underbrace{500\ldots0}_{n} - \underbrace{099\ldots9}_{n} > 4\cdot10^{n-1}.$$

Предположим, что первый игрок назвал цифру 4, а второй заполнил ею старший разряд уменьшаемого. Перед этим ходом разность была неотрицательной, после хода она увеличилась на $4\cdot10^{n-1}$ и больше не изменялась, так как при всех следующих ходах первый игрок называл 0.

Осталось рассмотреть случай, когда первый игрок назвал цифру 5, а второй заполнил ею старший разряд вычитаемого. Разобьем цифры, называемые первым игроком, на серии, объединяя в серию одинаковые цифры, идущие подряд. Будем считать, что второй игрок не ставит друг под другом одинаковые цифры, в противном случае их можно было бы перечеркнуть и не рассматривать при дальнейших рассуждениях. Докажем теперь, что каждая серия из четверок кончается так:

$$\begin{array}{l} * \ldots * * \, a_m a_{m+1} \ldots a_n \\ * \ldots * \, 4 \, b_m b_{m+1} \ldots b_n. \end{array}$$

То, что первая серия кончается так, очевидно. Пусть s-ая серия из четверок кончается таким образом. Покажем, что и $s+1$-ая серия закончится так же. После s-ой серии четверок пойдет серия из пятерок. Рассмотрим самую левую пятерку из этой серии (напомним, что перечеркнутых цифр мы не рассматриваем!). Ясно, что она попадет в уменьшаемое в разряд с номером, меньшим m, а под ней стоит либо звездочка, либо, если она попала в m — 1-ый разряд, четверка. Эта пятерка — последняя в своей серии. Действительно, после того, как она поставлена, разность становится положительной и первый начнет объявлять четверки. Если рассмотреть теперь самую левую четверку из $s+1$-ой серии, то, с помощью таких же рассуждений можно убедиться, что она стоит в вычитаемом в разряде, более близком к первому, чем последняя пятерка из предыдущей серии, над ней стоит звездочка и что она — последняя в своей серии.

Поэтому после того, как названа последняя четверка, возникнет следующая ситуация

$$\begin{array}{l} *\,*\,*\,\ldots\,*\,*\,a'_{k+1}\ldots a'_n \\ *\,*\,*\,\ldots\,*\,4\,b'_{k+1}\ldots b'_n. \end{array}$$

После этого первый игрок один или несколько раз назвал цифру 5 и, так как после каждого его хода уменьшаемое оставалось меньше вычитаемого (при мысленной замене звездочек нулями), то перед объявлением девяток возникло следующее положение

$$\begin{array}{l} *\,a_2a_3\ldots a_{k-1}a_k\,a'_{k+1}\ldots a'_n \\ 5\,a'_2a'_3\ldots a'_{k-1}4\,\,b'_{k+1}\ldots b'_n \end{array}$$

где для каждого $i = 2, 3, \ldots, k-1$ либо $a_i = a'_i$, либо $a'_i = 5$ и a_i — звездочка, причем разность чисел

$$\begin{array}{l} a_2a_3\ldots a_{k-1}\,a_k \\ a'_2a'_3\ldots a'_{k-1}\,4 \end{array}$$

отрицательна. Действительно, если бы она была положительна, то перед объявлением девяток первый игрок объявил бы четверку, а нулем она быть не может, поскольку a_k либо звездочка, либо пятерка. С другой стороны, ясно, что если при $i < k$ a_i и a'_i — не звездочки, то $a_i = a'_i$; действительно, они совпадали в момент объявления последней четверки. Поэтому для некоторого $j \leqslant k$ a_j — звездочка, и под ней стоит четверка или пятерка. Но тогда ясно, что окончательная разность не меньше $4\cdot10^{n-1} + 3\cdot10^{n-j} > 4\cdot10^{n-1}$. Задача решена.

Ю. И. Ионин

М154. *На прямой дано 50 отрезков. Доказать, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:*

а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;

б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

Вероятно, можно привести много различных теорем, частным случаем или следствием которых является утверждение этой задачи. Мы здесь укажем только одну из них.

Теорема. *Пусть на прямой задана произвольная система отрезков. Обозначим через M наименьшее количество точек на прямой таких, что каждый из отрезков системы содержит одну из этих точек; через m — наибольшее количество попарно непересекающихся отрезков, которые можно выбрать из нашей системы. Тогда $M = m$.*

Неравенство $M \geqslant m$ очевидно: ясно, что если в системе есть m попарно непересекающихся отрезков, то не может существовать меньше чем m точек, одну из которых содержал бы каждый из отрезков системы (даже на m выбранных отрезков нужно поместить по крайней мере m точек). Осталось доказать неравенство $M \leqslant m$.

Для этого достаточно доказать, что из системы *всегда можно выбрать некоторое количество k непересекающихся отрезков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и в каждом из них выбрать по точке $A_1, A_2, \ldots, A_k$ так, чтобы каждый из отрезков системы содержал одну из этих k точек.*

Если мы сумеем найти такие k отрезков, то, очевидно, $M \leqslant k$ и $k \leqslant m$, откуда $M \leqslant m$. (На самом деле тогда обязательно $M = k = m$ — ведь неравенство $M < m$, как мы видели, невозможно.)

Покажем, как можно выбрать такие отрезки и точки.

Представим себе, что прямая расположена перед нами горизонтально. Выберем такой отрезок α_1, левый конец которого A_1 расположен правее, чем левые концы всех других отрезков. Выбросим из системы все отрезки, содержащие точку A_1 (в частности, α_1) *).

Ясно, что каждый из оставшихся отрезков (если такие есть) расположен целиком левее точки A_1 и заведомо не пересекается с отрезком α_1. К оставшимся отрезкам снова применим процедуру, описанную в предыдущем абзаце — получим отрезок α_2 и точку A_2, затем — отрезок α_3 и A_3 и так далее до тех пор, пока слева от левого конца A_k отрезка α_k вообще не останется ни одного отрезка нашей системы. Отрезки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и точки $A_1, A_2, \ldots, A_k$ удовлетворяют всем нашим требованиям. Теорема доказана.

Решим теперь задачу М154. Докажем, что из $(pq+1)$ отрезков на прямой всегда можно выбрать либо $(p+1)$ отрезков, имеющих общую точку, либо $(q+1)$ попарно не пересекающихся отрезков. (При $p = q = 7$ это и есть утверждение задачи М154.)

Действительно, если для заданной системы из $(pq+1)$ отрезков величина $M = m$, о которой идет речь в теореме, больше q, то можно выбрать $m \geqslant q+1$ непересекающихся отрезков, и если эта величина не больше q, то можно выбрать множество из $M \leqslant q$ точек, имеющее общую точку с каждым из $(pq+1)$ отрезков. Тогда, безусловно, какую-то одну из этих M точек должны содержать по крайней мере $(p+1)$ отрезков: если бы каждую точку содержало бы не больше p отрезков, то всего отрезков было бы не больше $Mp \leqslant pq$.

---

*) Мы считаем, что отрезки, о которых идет речь в задаче, «замкнутые», то есть содержат свои концевые точки. Впрочем, утверждения, как легко убедиться, остаются верными и для «открытых» интервалов-отрезков, которые не содержат своих концов.

Н. Б. Васильев

Ф170. *В однородной плазме с плотностью (числом зарядов каждого знака в единице объема) n все электроны, первоначально находившиеся в слое толщиной x, смещаются по нормали к этому слою на расстояние x. Найти электрическое поле E в сечении SS (рис. 3).*

Рассмотрим два тонких слоя толщиной Δx, расположенных на одинаковых расстояниях по разные стороны от сечения SS. Эти слои можно рассматривать как обкладки плоского конденсатора с одинаковыми по величине, но разноименными зарядами. Напряженность поля этих зарядов можно вычислить по формуле

$$E = \frac{Q_{\Delta x}}{\varepsilon_0 s},$$

где $Q_{\Delta x}$ — заряд каждой обкладки, s — ее площадь.

Таким образом, напряженность поля зарядов выделенных слоев не зависит от расстояния между слоями. Она определяется только величиной заряда слоя.

В сечении SS напряженность поля равна сумме напряженностей полей подобных пар тонких слоев, то есть равна

$$E_{SS} = \sum \frac{Q_{\Delta x}}{\varepsilon_0 s} = \frac{1}{\varepsilon_0 s} \sum Q_{\Delta x}.$$

Так как $\sum Q_{\Delta x}$ — это заряд слоя плазмы толщиной x, то

$$\sum Q_{\Delta x} = enxs$$

и

$$E_{SS} = \frac{enxs}{\varepsilon_0 s} = \frac{enx}{\varepsilon_0}.$$

Ф171. *На гладкий горизонтальный стол поставили вертикально гантельку, состоящую из невесомого стержня с двумя одинаковыми маленькими шариками на концах (рис. 4). Верхнему шарику ударом сообщают скорость v в горизонтальном направлении. При какой максимальной длине гантельки l нижний шарик сразу оторвется от стола?*

Когда верхнему шарику сообщают горизонтальную скорость v, шарики начинают вращаться вокруг центра масс системы, который в свою очередь приобретает горизонтальную скорость $\frac{v}{2}$. Если нижний шарик сразу же отрывается от стола, то на систему в целом действует только одна сила — сила тяжести. Она сообщает системе, а значит, и нижнему шарику ускорение g. Поэтому, чтобы шарик оторвался от стола, необходимо, чтобы его центростремительное ускорение было больше g.

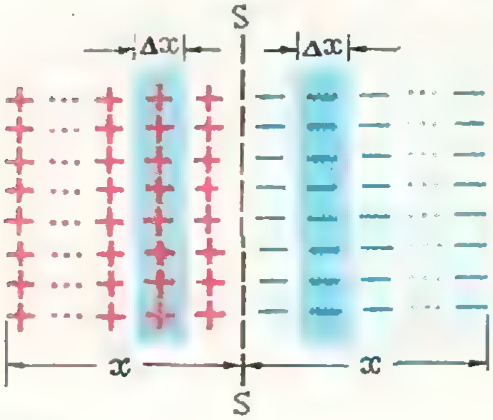


Рис. 3.

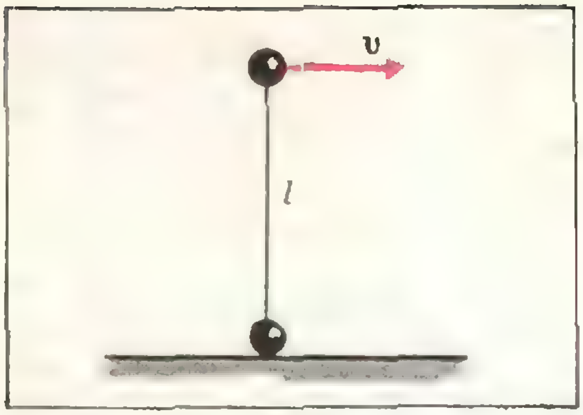


Рис. 4.

В системе координат, связанной с центром масс, скорости шариков равны по абсолютной величине $\frac{v}{2}$, и центростремительное ускорение

$$a_ц = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{\frac{l}{2}} = \frac{v^2}{2l}.$$

Шарик оторвется от стола, если

$$\frac{v^2}{2l} > g,$$

то есть

$$l < \frac{v^2}{2g}$$

и

$$l_{max} = \frac{v^2}{2g}.$$

И. Ш. Слободецкий

Ф172. *Проводящий стержень подвешен горизонтально на двух легких проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 1$ тл (рис. 5). Длина стержня $l = 0{,}2$ м, масса $m = 10$ г, длина проводов $l_1 = 0{,}1$ м. К точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкостью $C = 100$ мкф, заряженный до напряжения $U = 100$ в.*

а) Определить максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после разряда конденсатора, считая, что разряд происходит за очень малое время.

б) Определить емкость конденсатора C_1,

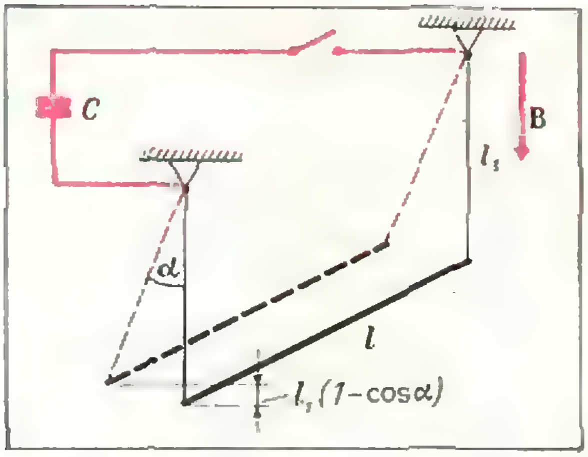


Рис. 5.

при разряде которого система отклонится на угол $\alpha_1 = 3^\circ$, если при разряде заряженного до такого же напряжения конденсатора емкостью $C_0 = 10$ мкф угол отклонения равен $\alpha_0 = 2^\circ$.

а) При подключении конденсатора по стержню начинает идти ток i, благодаря чему на стержень будет действовать сила

$$F = Bli,$$

направленная перпендикулярно стержню и вектору **B**.

Величина тока со временем плавно уменьшается от максимального значения до нуля, поэтому сила зависит от времени.

Так как время Δt разряда конденсатора мало, то можно считать, что за это время мало и смещение стержня от положения равновесия и стержень получит в горизонтальном направлении некоторый импульс P.

Разбив время Δt на малые промежутки, в течение которых силу можно считать постоянной, запишем

$$P = \Sigma F\Delta t = Bl\Sigma i\Delta t = Blq$$

и

$$v = \frac{P}{m} = \frac{Bl}{m}q,$$

где q — заряд, прошедший по стержню. При полном разряде конденсатора

$$q = CU.$$

Поэтому

$$v = \frac{BlCU}{m}.$$

Угол отклонения системы от положения равновесия найдем из закона сохранения энергии. Приравняем выражения для полной энергии стержня в положении равновесия и при его максимальном отклонении (будем считать подводящие провода жесткими):

$$\frac{mv^2}{2} = mgl_1(1-\cos\alpha),$$

откуда

$$1-\cos\alpha = \frac{v^2}{2gl_1} = \frac{B^2C^2U^2l^2}{2gl_1m^2},$$

но

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

и

$$\alpha = 2\arcsin\frac{BCUl}{2m\sqrt{gl_1}} = 2\arcsin 0,1 \approx 12^\circ.$$

б) Так как

$$\sin\frac{\alpha_0}{2} = C_0\frac{BUl}{2m\sqrt{gl_1}}$$

и

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} = C_1\frac{BUl}{2m\sqrt{gl_1}},$$

то

$$C_1 = C_0\frac{\sin\frac{\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\alpha_0}{2}}.$$

Углы α_0 и α_1 малы, поэтому

$$\sin\frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2} \text{ и } \sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_1}{2}.$$

В результате получим

$$C_1 = C_0\frac{\frac{\alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0}{2}} = C_0\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = 15 \text{ мкф}.$$

В. В. Светозаров

Ф173. *В однородном заряженном шаре радиуса R имеется сферическая полость радиуса r, центр которой находится на расстоянии a от центра шара (рис. 6). Найти напряженность электрического поля в различных точках полости, если плотность заряда равна σ.*

Будем считать, что сначала шар равномерно заряжен по всему объему, а потом часть его заряда, находящуюся внутри полости, удаляют.

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в любой точке однородного заряженного шара равна векторной сумме напряженности поля шара с полостью и напряженности поля заряда, удаленного из полости.

Рассмотрим произвольную точку A внутри полости. Ее расстояние от центра сферы обозначим x, а от центра полости — y. Напряженность $\mathbf{E}_0$ поля, созданного сплошным шаром, в этой точке направлена вдоль радиуса шара и равна по величине

$$E_0 = \frac{4}{3}\pi x\sigma.$$

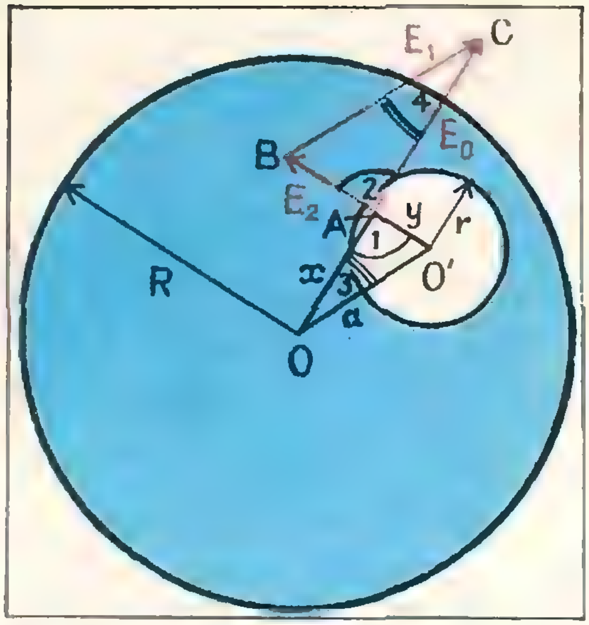


Рис. 6.

(См. статью Л. П. Баканиной и С. М. Козела «Принцип суперпозиции в электростатике», стр. 50).

Аналогично напряженность $\mathbf{E}_2$ поля, созданного зарядом, находившимся раньше в полости, направлена по радиусу полости и равна по величине

$$E_2 = \frac{4}{3}\pi y\sigma.$$

Тогда напряженность $\mathbf{E}_1$ истинного поля, созданного шаром с полостью, из принципа суперпозиции равна

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_2.$$

Рассмотрим треугольники AOO' и ABC.

Углы 1 и 2 равны как накрестлежащие, и отношения прилежащих к ним сторон одинаковы:

$$\frac{E_2}{y} = \frac{4}{3}\pi\sigma = \frac{E_0}{x}.$$

Следовательно, треугольники подобны, из чего следует, что

$$\frac{E_1}{a} = \frac{E_0}{x},$$

отсюда

$$E_1 = E_0\frac{a}{x} = \frac{4}{3}\pi x\sigma\frac{a}{x} = \frac{4}{3}\pi a\sigma.$$

Из подобия треугольников следует также, что $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$. Это означает, что вектор $\mathbf{E}_1$ направлен параллельно отрезку OO'.

Таким образом, мы нашли, что вектор напряженности поля в точке A полости направлен параллельно отрезку OO', соединяющему центры сферы и полости. Абсолютная величина напряженности

$$E_1 = \frac{4}{3}\pi a\sigma$$

не зависит от того, где именно в полости находится точка A. Это означает, что электрическое поле в полости однородно.

Ф174. *Найти молярную теплоемкость идеального газа в процессе, при котором температура газа а) пропорциональна квадрату его объема, б) обратно пропорциональна его объему. Теплоемкость 1 моля газа при постоянном объеме равна C_V.*

Согласно первому закону термодинамики тепло Q, которое сообщается газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа ΔU и совершенной газом работы A:

$$Q = \Delta U + A.$$

Но, с другой стороны, величина Q равна произведению молярной теплоемкости газа на изменение его температуры

$$Q = C\Delta T.$$

Следовательно,

$$C\Delta T = \Delta U + A. \qquad (*)$$

Изменение внутренней энергии газа при любом процессе определяется только разностью температур газа и при всех процессах равно

$$\Delta U = C_V\Delta T.$$

Работа газа, как известно, численно равна площади фигуры под графиком зависимости давления газа от объема. Построим такие графики для обоих случаев. Для этого найдем, как зависит P от V. Запишем уравнение газового состояния для 1 моля газа:

$$PV = RT.$$

В случае а) $T \sim V^2$, то есть

$$T = \alpha V^2,$$

где α — некоторая постоянная. Следовательно,

$$PV = \alpha R V^2 \text{ и } P = \alpha R V.$$

Зависимость между P и V — линейная (рис. 7). Это означает, что работа, совер-

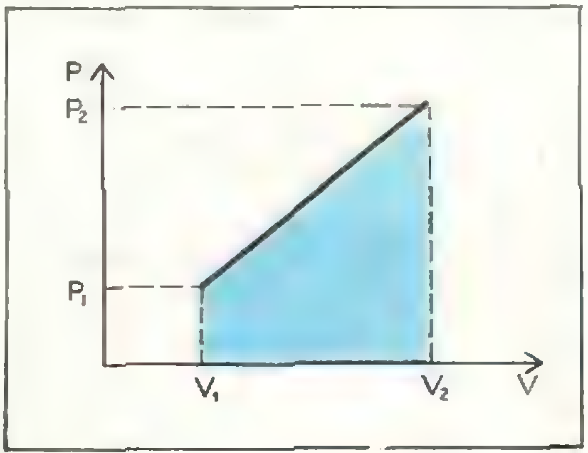


Рис. 7.

шенная газом, равна

$$A = P_{\text{ср}}\,\Delta V = \frac{P_1+P_2}{2}(V_2-V_1) = \frac{\alpha R}{2}(V_2+V_1)(V_2-V_1) = \frac{1}{2}R(T_2-T_1) = \frac{1}{2}R\Delta T.$$

Подставив выражение для ΔU и A в формулу (*), получим

$$C\Delta T = C_V\Delta T + \frac{1}{2}R\Delta T.$$

Отсюда $C = C_V + \frac{1}{2}R.$

Интересно отметить, что если $T \sim V^n$, то $C = C_V + \frac{1}{n}R$. Те, кто умеют интегрировать, легко это докажут.

В случае б) $T = \frac{\beta}{V}$ (β — некоторая постоянная). Поэтому

$$PV = RT = \beta\frac{R}{V} \quad \text{и} \quad P = \beta\frac{R}{V^2},$$

то есть давление газа обратно пропорционально квадрату его объема. Для того чтобы найти работу, совершенную газом, разобьем интервал изменения его объема на участки такие, что на них давление можно считать постоянным. На каждом из таких участков газ совершает работу, численно равную площади прямоугольника со сторонами P_i и $\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$ (рис. 8). Очевидно, что полная работа газа приближенно равна сумме площадей таких прямоугольников:

$$A = \sum \frac{\beta R}{V_i^2}\Delta V_i,$$

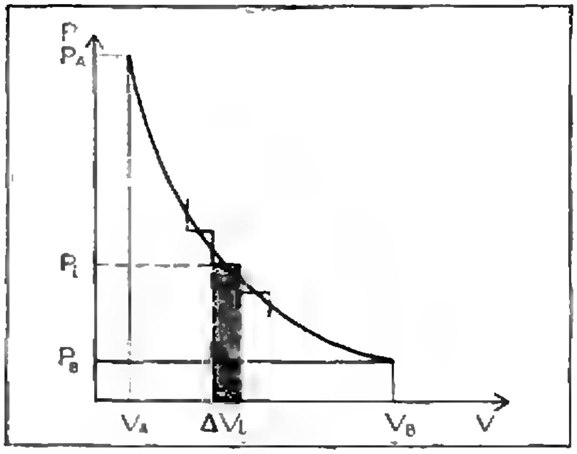


Рис. 8.

причем, чем меньше участки ΔV_i, тем точнее написанная сумма соответствует величине работы, совершенной газом.

Так как ΔV_i мало и $V_i \approx V_{i+1}$, то можно считать, что $V_i^2 \approx V_i V_{i+1}$. Тогда

$$A = \sum \frac{\beta R}{V_i V_{i+1}}(V_{i+1} - V_i) = \beta R \Sigma\left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_{i+1}}\right) = \beta R\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \cdots - \frac{1}{V_B}\right) = \beta R\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B}\right) = \beta R\cdot\frac{1}{\beta}(T_A - T_B) = -R(T_B - T_A) = -R\Delta T.$$

Подставив это выражение в формулу (*), найдем, что

$$C = C_V - R.$$

Замечание.

Для определения работы, совершаемой газом, можно воспользоваться методом аналогий.

Рассмотрим работу по перемещению заряда в электростатическом поле точечного заряда. Сила, действующая на заряд в этом поле, равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

При бесконечно малом перемещении Δr (когда силу можно считать постоянной) элементарная работа равна

$$\Delta A = F\Delta r.$$

Полная работа на участке $(r_2 - r_1)$ равна

$$A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Давление газа в случае б) равно

$$P = \frac{\beta R}{V^2},$$

то есть обратно пропорционально квадрату объема.

Элементарная работа по расширению газа на участке ΔV (где давление можно считать постоянным) равна

$$\Delta A = P\Delta V.$$

По аналогии с работой в электрическом поле полная работа по расширению газа от объема V_1 до объема V_2 равна

$$A = \beta R\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Ф175. *Решение этой задачи содержится в статье Г. Л. Коткина «Столкновение шариков» (стр. 19—21).*

И. Ш. Слободецкий

Против шаблона

Л. М. Лоповок

Наблюдая за устными и письменными экзаменами по математике, нельзя не заметить, как абитуриенты, не обременяя себя глубоким анализом условий задачи, стараются побыстрее составить уравнения и перейти к их решению. При этом и введение обозначений, и схема решения соответствуют определенному шаблону, одной и той же схеме.

На вопросы, почему не думали над другими возможностями решения, почему не пытались отойти от шаблона, обычно довольно уверенно заявляют, что шаблон тем и хорош, что не требует сложных (и не обязательно успешных) поисков; шаблон обязательно приведет к результату.

С такой точкой зрения нельзя соглашаться. Как правило, решение задачи по шаблону ведет к значительному увеличению объема работы. Часто решение усложняется, увеличиваются шансы появления ошибок.

Убедиться в этом можно на многочисленных примерах. Приведем некоторые из них.

Пример 1. *Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу один другому и встретились в 70 км от A. Продолжая движение с теми же скоростями, они достигли конечных пунктов и, отдохнув равное время, вернулись назад. Вторая встреча произошла в 90 км от B. Найти расстояние от A до B.*

Стандартное решение очевидно. Обозначим через x (*км*) расстояние от A до B. Тогда до первой встречи велосипедисты проехали соответственно 70 *км* и $(x-70)$ *км*, а до второй встречи (считая от начала движения) — $(x+90)$ *км* и $(2x-90)$ *км*. Поскольку длительность движения обоих велосипедистов совпадает, то названные расстояния пропорциональны скоростям. Поэтому можно составить уравнение

$$\frac{70}{x-70}=\frac{x+90}{2x-90}.$$

Заметим, что если через x обозначить путь, который проехал второй велосипедист от пункта B до первой встречи, то получится еще более сложное уравнение.

А что если не спешить с составлением уравнения?

Из простейшего рисунка легко увидеть, что от начала движения до первой встречи оба велосипедиста проехали вместе расстояние, равное AB, а к моменту второй встречи проехали вместе втрое большее расстояние. Таким образом, каждый из них до второй встречи проехал втрое больше, чем до первой. Первый велосипедист сперва проехал 70 *км*; следовательно, до второй встречи он проехал $70 \times 3 = 210$ (*км*). Поэтому расстояние от A до B равно $210 - 90 = 120$ (*км*).

При таком подходе задачу смогут решить даже учащиеся 4 — 5 классов.

Пример 2. *Лестница стоит на улице и может прислониться верхним концом или в здание на левой стороне на высоте* 9 *м или в здание на правой стороне на высоте* 12 *м. Определить длину лестницы и ширину улицы, зная, что эти два положения взаимно перпендикулярны* (рис. 1).

Эта задача, как сообщал польский журнал «*Matematyka*», была пред-

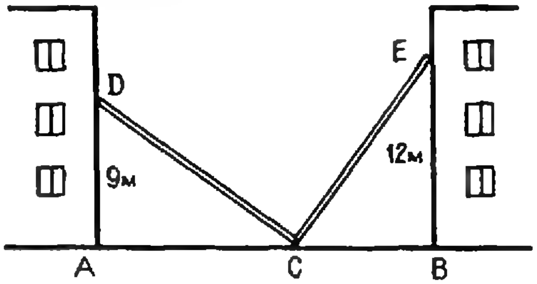


Рис. 1.

ложена на выпускном письменном экзамене в гимназии г. Торуня. Поскольку экзамен был по алгебре, учащиеся свели дело либо к решению иррационального уравнения

$$\sqrt{2x^2-9}=\sqrt{x^2-81}+\sqrt{x^2-144},$$

либо к решению системы уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2-y^2=81, \\ x^2-z^2=144, \\ 2x^2-(y+z)^2=9. \end{cases}$$

Легко убедиться, что оба пути требуют значительного объема выкладок.

Если же присмотреться к рисунку, то обнаружится, что прямоугольные треугольники ACD и BCE имеют равные гипотенузы, острые углы ACD и BEC равны, так как их стороны соответственно перпендикулярны. Таким образом, эти треугольники равны. Следовательно, соответственно равны и их катеты. Поэтому ширина улицы $AB=12+9=21$ (*м*), а длина лестницы определится по теореме Пифагора.

Разница в степени сложности решений ощутима!

Одним из проявлений стремления решать задачи по шаблону является вычисление всех величин, которые могли бы быть использованы для нахождения неизвестного. При этом совершенно игнорируется тот факт, что не все из вычисленных величин входят в конечное выражение.

Пример 3. *Стороны основания треугольной пирамиды равны* 15 *см*, 16 *см и* 17 *см*. *Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углами по* 45°. *Найти объем пирамиды.*

Как правило, учащиеся называют формулу, по которой вычисляют объем пирамиды, и вычисляют площадь основания:

$$S=\sqrt{24\times9\times8\times7}=24\sqrt{21}\ (см^2).$$

Затем обосновывают, что перпендикуляр MO к плоскости основания проходит через центр окружности, описанной около основания (рис. 2). Отсюда следует, что высота пирамиды равна радиусу окружности, описанной около основания. По известной формуле $R=\frac{abc}{4S}$. Значит,

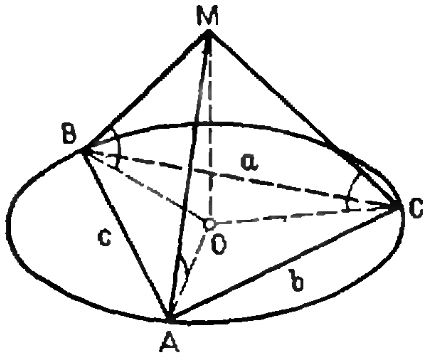


Рис. 2.

$$h=\frac{15\times16\times17}{4\times24\sqrt{21}}=\frac{85}{2\sqrt{21}}\ (см).$$

Окончательно,

$$V=\frac{1}{3}\times24\sqrt{21}\times\frac{85}{2\sqrt{21}}=340\ (см^3).$$

Но если не спешить с вычислениями, то получилось бы следующее:

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}SR=\frac{1}{3}S\cdot\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{12}.$$

Таким образом, вычисление S и H оказывается излишним.

После войны в наших школах был письменный экзамен, в ходе которого выпускники решали стереометрическую задачу с применением тригонометрии. Получив ответ в общем виде, учащиеся должны были выполнить некоторое исследование, а затем довести ответ «до числа» при указанных значениях параметров.

Впоследствии характер этого экзамена изменился, в частности, вычисления с помощью таблиц были исключены. Но шаблон остался: сперва решить задачу, а потом исследовать.

Тем, кто верит в незыблемость такого порядка работы, не мешает знать, что есть немало задач, у которых первым этапом решения является исследование. Напомним несколько таких задач.

Пример 4. *Две высоты треугольника разделили его на две пары равновеликих частей. Найти углы треугольника.*

Если в треугольнике ABC проведены высоты AK и BM, пересекающиеся в точке O, то треугольник разделился на 4 части: ABO, AMO, BKO и $MOKC$. Какие же из них равновелики? Здесь возможны три случая: 1) ABO и BKO; AMO и $MOKC$; 2) ABO и AMO; BKO и $MOKC$; 3) ABO и $MOKC$; AMO и BKO.

Решение начинается с изучения этих возможностей. Оказывается, что первые два случая исключаются. Только после этого следует приступить к решению задачи (доказывается, что треугольник ABC — равносторонний).

Пример 5. *Найти объем пирамиды, развертка которой — правильный пятиугольник со стороной a.*

Здесь сначала нужно выяснить форму основания пирамиды. Плоскими углами при вершине пирамиды оказываются углы правильного пятиугольника (каждый из них равен 108°), таких углов 3. Следовательно, данная пирамида — треугольная.

Следующий шаг состоит в том, что нужно установить положение линий сгиба на развертке. Оказывается, что одна из них — диагональ пятиугольника, две другие соединяют концы этой диагонали с серединой параллельной стороны. Только после этого можно начинать вычисления.

Таким образом, мы видим, что решение по шаблону затрудняет получение искомого результата.

Отходя от шаблона, можно получить изящные решения.

Здесь мы сталкиваемся с иной проблемой. Нередко абитуриенты соглашаются с тем, что представить рациональные решения заманчиво. Однако тут же они выдвигают возражения. По их мнению, чтобы отобрать хорошее решение, нужно предварительно решить задачу несколькими способами. А это в условии экзаменов требует такой затраты времени, которую абитуриент не может себе позволить.

Если бы дело обстояло именно так, вопрос о путях обнаружения рациональных решений рассматривать не следовало бы. К счастью, имеются возможности совершенно иного обнаружения этих путей.

Рациональное решение задачи должно основываться на индивидуальных особенностях условия. Решающую роль приобретают не те черты, на основании которых задача относится к некоторому классу упражнений, а те, которые выделяют ее из этого класса. Именно внимание к числовым значениям параметров, к особенностям конфигурации открывает путь простого решения.

Пример 6. *Упростить выражение*

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ.$$

Обычный путь — переход к синусам и косинусам. Он требует знания ряда формул (сумма тангенсов, сумма косинусов, разность косинусов), значений синуса и косинуса угла в 60°, а также умения выполнить не очень короткую цепочку преобразований.

Каковы особенности условия? В него входит только одна функция (тангенс) двух углов (20° и 40°), причем выражение содержит сумму и произведение тангенсов этих углов. Такая комбинация является составной частью формулы тангенса суммы двух углов. Если к этому прибавить, что тангенс суммы данных углов известен, станет ясно, что целесообразно использовать именно это соотношение. Такой подход приводит к следующему решению: $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \times \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ} (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \times \operatorname{tg} 40^\circ) + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3} \times (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ) + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3} (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \times \operatorname{tg} 40^\circ) = \sqrt{3}$.

Пример 7. *Найти четырехзначное число по следующим данным: сумма квадратов крайних цифр равна* 13, *сумма квадратов средних цифр равна* 85; *если из искомого числа вычесть* 1089, *то получится число, написанное теми же цифрами в обратном порядке.*

Обычно составляют три уравнения с четырьмя неизвестными. Вспомогательные неравенства позволяют установить, что разность крайних цифр равна 1. Затем задача сводится к решению двух систем уравнений (второй степени) с двумя неизвестными.

Однако если учесть, что цифры — неотрицательные целые числа, не превышающие 9, то окажется, что крайние цифры — это 2 и 3 (только $2^2+3^2=13$), а средние — 9 и 2 или 7 и 6. По условию цифра тысяч больше цифры единиц, а цифра сотен больше цифры десятков. Значит, искомое число 3922 или 3762. Непосредственная проверка показывает, что условию удовлетворяет только второе число.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}.$$

Если решать обычным путем, то после трехкратного возведения в квадрат сложных выражений получится уравнение 16-й степени:

$$x^{16}-50x^{14}-4375x^{12}+278\,800x^{10}+1\,670\,600x^{8}-364\,700\,000x^{6}+7\,641\,610\,000x^{4}-54\,468\,000\,000x^{2}+129\,600\,000\,000=0.$$

Такое уравнение едва ли окажется под силу абитуриенту. Мы уже не говорим о затрате времени на получение такого уравнения. Присмотримся к особенностям уравнения. Поскольку левая часть неотрицательна, то же самое верно и для правой части. Следовательно, $x>0$.

С увеличением x левая часть возрастает, а правая убывает. Следовательно, уравнение может иметь не более одного действительного корня. Подставив минимальное возможное значение $x=5$, убедимся, что обе части уравнения имеют равные значения. Значит, других действительных корней нет.

В некоторых случаях простое решение получается за счет использования более обширного объема знаний, чем предусмотрено программой. Экзаменаторы бывают придирчивы к таким решениям, нередко требуют на устном экзамене уточнения, откуда абитуриент знает использованную теорему или формулу, может ли ее доказать, и т. д.

Между тем ничего плохого в этом нет. Уже несколько лет в наших школах введены так называемые факультативные занятия. Посещая такие занятия, учащиеся узнают свойства и соотношения, выходящие за рамки обычной школьной программы. Обогащенные знаниями учащиеся могут находить на экзамене и неожиданные (с точки зрения экзаменатора) решения.

Пример 9. *Доказать, что*

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1.$$

Узнав на факультативных занятиях (без доказательства) так называемую основную теорему алгебры и следствия из нее, школьник может предложить такое рассуждение.

Если данное равенство не является тождеством, то оно является уравнением. Степень этого уравнения относительно x не может оказаться более трех. Значит, это уравнение не может иметь более трех корней. Но легко проверить, что $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$ превращают данное равенство в тождество, а это означает, что рассматриваемое равенство не является уравнением. Следовательно, это тождество. А это и требовалось доказать.

Точно так же может приводить к простому решению использование теоремы Птолемея, формул функций утроенного аргумента и т. п. Однако такой путь не может считаться основным.

Важным является изучение методов решения задач и ознакомление с условиями, при которых применение этих методов целесообразно.

Напомним некоторые из них.

а) Если в условии геометрической задачи данные и искомые величины разобщены, целесообразно выполнить геометрические преобразования для сближения этих элементов.

Пример 10. *На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC с суммой катетов m построен вне треугольника квадрат с центром O.* Найти расстояние AO.

Если повернуть треугольник ABO вокруг точки O на 90°, то этот треугольник займет положение MCO (рис. 3). Подсчет углов показывает, что точки A, C и M лежат на одной прямой. Следовательно, треугольник AOM — прямоугольный равнобедренный, его гипотенуза AM равна m. Отсюда находим искомое расстояние

$$AO = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

б) Если связать искомые и данные элементы путем геометрических преобразований не представляется возможным, то следует ввести вспомогательные величины, которые могут сыграть соответствующую роль.

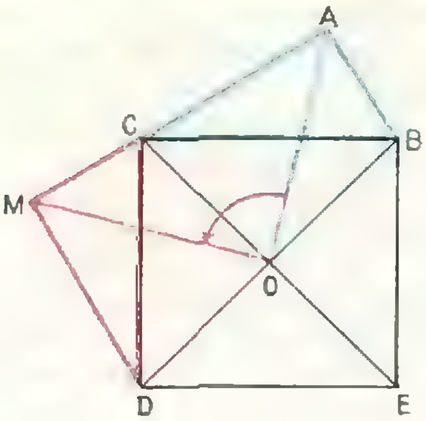


Рис. 3.

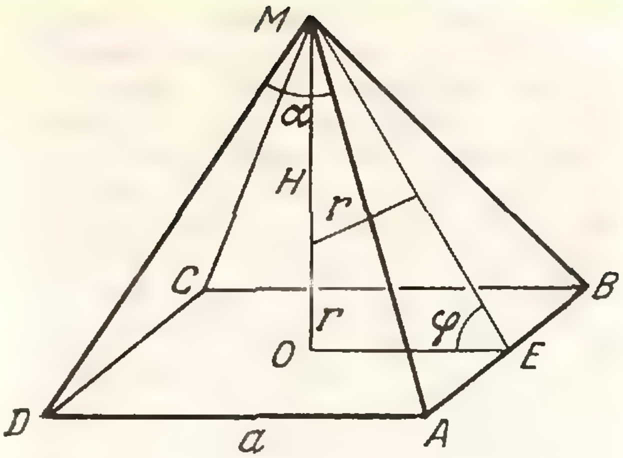


Рис. 4.

Пример 11. *Найти объем описанной около шара радиуса r правильной четырехугольной пирамиды с плоским углом α при вершине.*

Поскольку прямо связать величины V, r и α нелегко, введем в рассмотрение двугранный угол φ при основании пирамиды (рис. 4). Тогда

$$a = 2r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}; \quad H = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi;$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi =$$

$$= \frac{4}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi =$$

$$= \frac{8r^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Остается найти связь между функциями углов φ и α. Если MO — высота пирамиды, а ME — апофема, то $\cos \varphi = \frac{OE}{ME} = \frac{AE}{ME} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Дальнейшее уже просто.

Вместо вспомогательного угла можно было считать известной сторону основания пирамиды, и затем (найдя v) вычислить эту сторону через r и α.

в) В предвидении возможных упрощений задачу на вычисление часто целесообразно решать в общем виде, не вычисляя всех промежуточных величин.

Это в особенности относится к задачам о телах вращения.

г) В случае затруднений с поисками прямого доказательства следует подыскать вспомогательную теорему, которая доказывается легче рассматриваемой и в то же время могла бы послужить опорой для разыскиваемого доказательства.

Пример 12. *Доказать, что сумма расстояний от внутренней точки до сторон выпуклого равноугольного многоугольника (или их продолжений) постоянна.*

Заменим данный многоугольник сходным — правильным. В этом случае доказательство (вычислением площади многоугольника как суммы площадей треугольников с общей вершиной в данной точке) почти очевидно.

Поместим данный многоугольник внутри правильного многоугольника так, чтобы соответственные стороны многоугольников оказались параллельными. Тогда обнаружится, что сумма расстояний от данной точки M до сторон равноугольного многоугольника отличается от суммы расстояний до сторон правильного многоугольника на постоянную величину.

Теперь легко установить правильность доказываемой теоремы.

Шаблонность подхода к геометрическим задачам, в частности, нередко выражается в том, что учащиеся ограничиваются рассмотрением частных случаев, неполным анализом конфигурации.

Пример 13. *Из вершины ромба проведены две высоты. Расстояние между их концами вдвое меньше диагонали ромба. Определить углы ромба.*

Каждый раз школьники проводят высоты из вершины тупого угла ABC и считают, что расстояние между концами этих высот равно половине AC. Между тем по условию это расстояние может равняться и половине BD, да к тому же и высоты могут быть проведены из вершины острого угла ромба. Из четырех возможных случаев только один немедленно исключается, как противоречивый. В трех оставшихся вычисления благополучно доводятся до конца. Ответов оказывается два: 60° и 120° или 30° и 150°.

Многие задачи допускают решение не единственным путем. Порой эти решения мало отличаются по степени сложности, порой — значительно. Как правило, любой школьник может найти достаточно хорошее решение. Для этого нужно внимательно изучить условие, подумать над тем, какой подход к задаче наиболее соответствует особенностям ее условия.

Именно отход от шаблона, конкретный анализ условий является залогом успешного решения задачи.

Литература

1. Л. М. Лоповок. Рациональное решение задачи. «Народна просвета», София, 1968.

2. Д. Пойа. Математическое открытие. «Наука», М., 1970.

3. С. И. Туманов. Поиски решения задачи. «Просвещение», М., 1969.

Принцип суперпозиции в электростатике

Л. П. Баканина, С. М. Ко́зел

Один из основных законов электростатики — закон Кулона. Этот закон был открыт в 1785 году; с тех пор он подвергался многократной экспериментальной проверке со все возрастающей точностью. Английский ученый Кавендиш*), блестящий экспериментатор, проверил этот закон с точностью около 2% (для тех времен точность весьма высокая). В настоящее время такая проверка проведена с точностью не хуже 10^{-6} для громадного диапазона расстояний от 10^{-13} *см* (радиус протона) до нескольких километров.

Закон Кулона устанавливает силу взаимодействия точечных зарядов:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2},$$

где q_1 и q_2 — точечные заряды, R — расстояние между ними, ε_0 — электрическая постоянная.

Реальные тела имеют конечные размеры. Если расстояние между заряженными телами много больше их размеров, силу взаимодействия можно приближенно определить с помощью закона Кулона; причем, степень приближения тем выше, чем меньше отношение размеров тел к расстоянию между ними. Если закон Кулона непосредственно применить к телам, размер которых порядка или больше расстояния между ними, получится неверный результат. Нельзя, например, с помощью закона Кулона вычислить силу взаимодействия между пластинами плоского конденсатора. Подставив в закон Кулона заряд q пластин конденсатора и расстояние d между ними, мы получили бы выражение $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d^2}$, в то время как правильный расчет дает $F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$, где S — площадь пластин.

Границы применимости закона Кулона существенно расширяются, если принять во внимание принцип суперпозиции. Допустим, что нас интересует сила взаимодействия двух небольших заряженных тел в том случае, когда поблизости имеется третье заряженное тело. Можно ли использовать в этом случае закон Кулона? В самом законе Кулона не содержится никаких указаний на этот счет. Только опыт может ответить на поставленный вопрос. С аналогичным вопросом приходится сталкиваться в явном или неявном виде практически во всех задачах электростатики, поскольку речь, как правило, идет о протяженных заряженных телах, которые можно рассматривать как совокупность большого числа точечных зарядов. К этой же проблеме сводится и задача об определении силы взаимодействия между пластинами плоского конденсатора.

Анализ экспериментальных фактов приводит к выводу: сила взаимодействия двух зарядов не изменяется в присутствии третьего заряда. Это утверждение и лежит в основе принципа суперпозиции, который наряду с законом Кулона является фундаментальным законом электростатики.

---

*) Генри Кавендиш установил закон обратных квадратов $F \sim \frac{1}{R^2}$ для силы взаимодействия двух зарядов и выполнил проверку этого закона еще в 1772 году. Однако работа Кавендиша была неизвестна его современникам.

Принцип суперпозиции удобно сформулировать, рассматривая не силы взаимодействия, а электрические поля, создаваемые системой зарядов: напряженность электрического поля, создаваемого системой электрических зарядов в данной точке, является суперпозицией (то есть суммой) полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов. При этом нужно помнить, что напряженность поля — векторная величина; складывать напряженности полей надо геометрически, по правилу сложения векторов.

Использование этого принципа для вычисления полей, создаваемых несколькими точечными зарядами, обычно не вызывает никаких затруднений. Поэтому примеры такого рода мы здесь рассматривать не будем. А вот в случае протяженных зарядов (например, заряженная плоскость или несколько заряженных плоскостей) у многих школьников возникают затруднения. Часто эти затруднения связаны с весьма распространенным заблуждением, что всякая металлическая поверхность экранирует поле.

Рассмотрим сначала задачи с плоской геометрией (система параллельных заряженных плоскостей). Поле одиночной заряженной проводящей плоскости однородно (одинаково во всех точках) и равно $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, где σ — поверхностная плотность зарядов (то есть заряд, приходящийся на единицу площади), ε_0 — электрическая постоянная. Следует иметь в виду, что этот результат справедлив только для бесконечной плоскости. Для плоской пластины конечных размеров это верно лишь на расстояниях, малых по сравнению с линейными размерами пластины. На расстояниях, сравнимых с размерами пластины, поле становится неоднородным, и, наконец, на больших расстояниях поле неотличимо от поля точечного заряда. Мы ограничимся рассмотрением полей на расстояниях, малых по сравнению с размерами пластин.

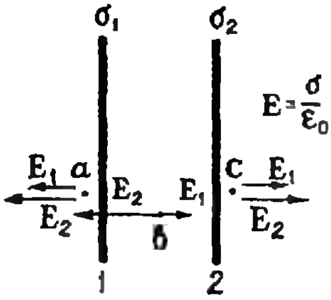


Рис. 1.

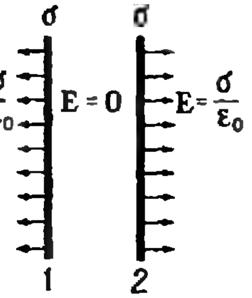


Рис. 2.

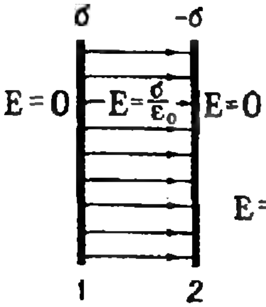
Задача 1. *Найти напряженность поля, создаваемого двумя параллельными заряженными плоскостями. Поверхностная плотность заряда на одной из плоскостей равна* σ_1, *на другой* σ_2.

Поле во всем пространстве является суперпозицией полей, создаваемых каждой плоскостью в отдельности. Поэтому в любой точке слева от плоскости *1* (рис. 1), например в точке *a*, напряженность поля равна $E_1 + E_2$ и силовые линии направлены влево (если обе плоскости заряжены положительно). Между плоскостями (например, в точке *b*) напряженность поля равна разности $E_1 - E_2$. Направление поля зависит от величины зарядов σ_1 и σ_2. Если $\sigma_2 > \sigma_1$, $E_2 > E_1$ и суммарное поле $E_b = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0}$ направлено влево. Справа от плоскости *2* напряженность поля тоже равна $E_1 + E_2$, как и в точке *a*, но силовые линии направлены вправо.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев:

1. Поверхностная плотность зарядов на обеих плоскостях одинакова: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. В этом случае $E_1 = E_2$ и суммарное поле между плоскостями равно нулю (рис. 2), а слева и справа от пластин поле равно $E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

2. Плотности зарядов на плоскостях одинаковы по величине, но имеют



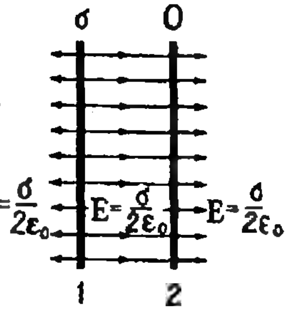

σ
0
$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
1
2

Рис. 3.

Рис. 4.

противоположные знаки: $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. Такую систему называют плоским конденсатором. Напряженность поля между обкладками конденсатора равна $E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, а снаружи поле равно нулю (для реальных конденсаторов это выполняется лишь приближенно). В этом случае электрическое поле сосредоточено в пространстве между плоскостями (рис. 3).

Заметим, что из выражения для поля плоского конденсатора легко получить выражение для емкости конденсатора. Пусть S — площадь пластин, d — расстояние между ними, q — заряд конденсатора и U — разность потенциалов между обкладками. Тогда

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}; \quad U = Ed = \frac{d}{\varepsilon_0 S} q.$$

Поскольку по определению емкость — это отношение заряда к разности потенциалов, имеем

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

3. Плоскость *2* не заряжена: $\sigma_2 = 0$ (рис. 4). В этом случае вторая плоскость поля не создает; электрическое поле создается только зарядами первой плоскости. Следует отметить, что этот вывод справедлив только при параллельном расположении плоскостей, когда незаряженная плоскость совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей поля первой плоскости.

Рассмотрим теперь с точки зрения принципа суперпозиции, что происходит внутри проводящих пластин.

Задача 2. *Две металлические пластины расположены параллельно (рис. 5). Пластине 1 сообщают заряд Q, пластина 2 не заряжена. Площади пластин одинаковы и равны S. Найти поверхностную плотность зарядов на обеих сторонах пластин.*

Обозначим поверхностную плотность зарядов на левой и правой сторонах первой пластины через σ_1' и σ_1'', а на второй — через σ_2' и σ_2'' соответственно.

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} (\sigma_1' + \sigma_1'')\, S &= Q, \\ (\sigma_2' + \sigma_2'')\, S &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Согласно принципу суперпозиции поле в любой точке (в том числе и внутри пластины) получается суммированием полей, создаваемых четырьмя заряженными плоскостями с поверхностными плотностями зарядов σ_1', σ_1'', σ_2' и σ_2''. Напряженность поля в точке a (см. рис. 5):

$$E_a = \frac{\sigma_1'}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1''}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2''}{2\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

а в точке b:

$$E_b = \frac{\sigma_1'}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1''}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2''}{2\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

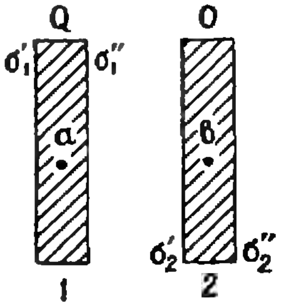
Электростатическое поле в проводниках равно нулю, поэтому

$$E_a = E_b = 0. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (1), (2), (3), (4), находим, что

$$\sigma_1' = \sigma_1'' = \frac{Q}{2S},$$

$$\sigma_2' = -\sigma_2'' = -\frac{Q}{2S}.$$



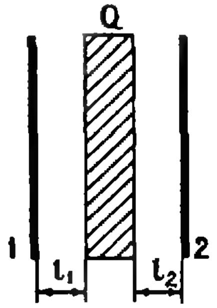


Рис. 5.

Рис. 6.

Таким образом, незаряженная пластина 2 представляет собой как бы плоский конденсатор: все поле, создаваемое индуцированными зарядами разных знаков σ_2 и σ_2, сосредоточено внутри пластины. Всюду вне пластины 2 поле такое же, как и без нее, то есть создается только заряженной пластиной 1.

Задача 3. *В пространство между пластинами незаряженного плоского конденсатора вносится металлическая пластина, имеющая заряд Q, так что между пластиной и обкладками конденсатора остаются зазоры l_1 и l_2 (рис. 6). Площади всех пластин одинаковы и равны S. Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора.*

Так как пластины конденсатора не заряжены и на них появляется только индуцированный заряд, они не создают поля снаружи. Поле в зазорах создает только заряженная пластина. Напряженность этого поля

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между этой пластиной и левой обкладкой конденсатора равна

$$\varphi_{01} = El_1,$$

а между пластиной и правой обкладкой —

$$\varphi_{02} = El_2.$$

Таким образом, разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_{12} = E(l_1 - l_2) = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}(l_1 - l_2).$$

Теперь рассмотрим несколько задач с полями, имеющими уже не плоскую, а сферическую геометрию.

Задача 4. *Опыт Кавендиша, о котором упоминалось в начале статьи, заключался в измерении электрического поля внутри заряженной металлической сферы. Покажите, пользуясь законом Кулона и принципом суперпозиции, что напряженность поля внутри заряженной металлической сферы равна нулю.*

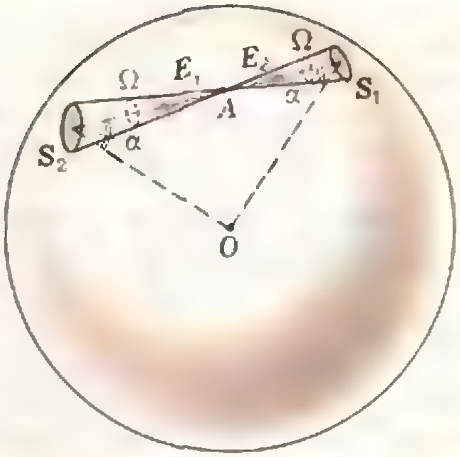


Рис. 7.

Возьмем произвольную точку A внутри сферы и разобьем поверхность сферы на маленькие элементы с помощью одинаковых телесных углов с вершиной в точке A (рис. 7). Рассмотрим пару таких элементов, находящихся на расстояниях r_1 и r_2 от точки A. Если элементы достаточно малы, то создаваемое ими поле можно считать полем точечных зарядов и рассчитывать по закону Кулона. Пусть поверхностная плотность зарядов на сфере постоянна и равна σ. Тогда заряд $q_1 = \sigma S_1$ и создаваемое им в точке A поле

$$E_1 = \frac{\sigma S_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}.$$

Заряд $q_2 = \sigma S_2$ и

$$E_2 = \frac{\sigma S_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

Но $S_1 = \frac{\Omega r_1^2}{\cos\alpha}$, а $S_2 = \frac{\Omega r_2^2}{\cos\alpha}$ (см. рис. 7), поэтому

$$E_1 = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0\cos\alpha} \text{ и } E_2 = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0\cos\alpha}.$$

Таким образом, $E_1 = E_2$. Эти поля направлены в противоположные стороны, и, следовательно, их сумма равна нулю.

Так как всю поверхность сферы мы можем разбить из точки A на такие пары элементов и для каждой пары наш вывод будет справедлив, мы получаем, пользуясь принципом суперпозиции, что суммарное поле, создаваемое всей сферой в точке A, равно нулю. Но точка A была выбрана совершенно произвольно. Значит, поле в любой точке внутри равномерно заряженной сферы равно нулю.

Задача 5. *В центре металлической сферы помещен точечный заряд Q. Определить электрическое поле внутри и вне сферы в случае, если оболочка:* а) *не заряжена*; б) *заземлена*.

а) На внутренней и внешней поверхностях сферической оболочки наведутся по индукции заряды, одинаковые по величине и разные по знаку (сфера в целом не заряжена). Из соображений сферической симметрии ясно, что наведенные заряды равномерно распределяются по сферам. Эти заряды должны быть такими, чтобы суммарное поле в проводнике было равно нулю (рис. 8). В соответствии с принципом суперпозиции поле в любой точке оболочки (например, в точке a) создается точечным зарядом Q и зарядом внутренней сферы (наружная сфера, как следует из решения задачи 4, поля внутри себя не создаст). Поле равномерно заряженной сферы снаружи такое же, как поле точечного заряда, помещенного в центре; поэтому условие компенсации полей в точке a будет выполнено, если заряд внутренней сферы будет равен $-Q$. Поскольку оболочка в целом не заряжена, на ее внешней поверхности наведется заряд $+Q$. Теперь, пользуясь принципом суперпозиции, можно заключить, что поле внутри и вне оболочки равно полю точечного заряда Q, помещенного в ее центре.

б) При заземлении проводника его потенциал обращается в нуль. В нашем случае это означает, что обращается в нуль напряженность электрического поля снаружи оболочки. Для этого необходимо, чтобы исчез заряд с наружной поверхности (он уходит в землю). На внутренней поверхности по-прежнему индуцируется заряд $-Q$. Поле этого заряда компенсирует поле точечного заряда Q всюду, кроме области внутри оболочки. Таким образом, заземленная оболочка является электростатическим экраном.

Интересно отметить, что этот вывод справедлив при любой форме оболочки и любом расположении заряда внутри нее. В случае, например, заземленной сферической оболочки, но при несимметричном расположении точечного заряда поле снаружи по-прежнему равно нулю, а поле внутри уже не будет симметричным. Наведенный на внутренней поверхности заряд $-Q$ теперь уже не будет распределен равномерно.

Если убрать заземление и сообщить оболочке дополнительный заряд Q (при этом ее полный заряд станет равным нулю), то этот заряд должен так распределиться по оболочке, чтобы поле в проводнике осталось равным нулю. Это будет достигнуто только при равномерном распределении заряда Q по внешней поверхности сферической оболочки. Отсюда следует, что поле снаружи в случае

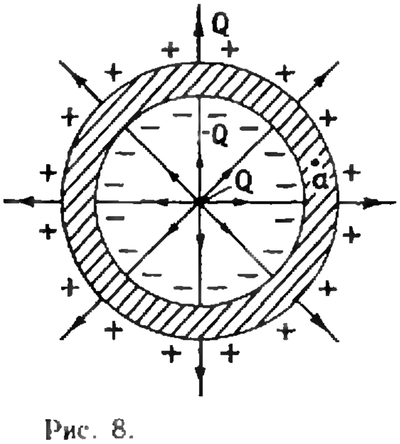


Рис. 8.

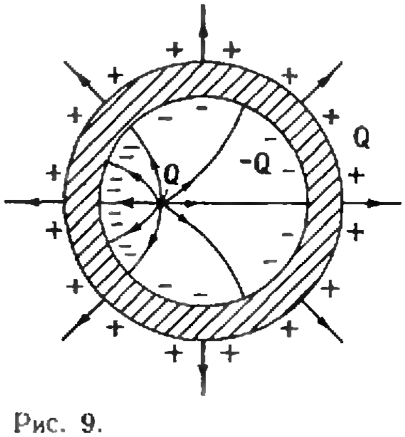


Рис. 9.

незаряженной сферической оболочки будет симметричным (кулоновским) независимо от расположения заряда внутри оболочки (рис. 9).

Рассмотренные здесь примеры иллюстрируют применение принципа суперпозиции при решении задач электростатики. Мы не рассматривали поля в диэлектриках. Следует напомнить, что и в случае диэлектриков электрическое поле является суперпозицией полей всех зарядов, в том числе и связанных (поляризационных) зарядов в диэлектриках.

В заключение предлагаем несколько упражнений для самостоятельного решения.

Упражнения

1. В плоском изолированном конденсаторе одна пластина имеет заряд Q_1, а другая Q_2. Внутрь конденсатора параллельно обкладкам помещают незаряженную металлическую пластину.

Какой заряд будет индуцирован на левой и правой поверхностях пластины?

2. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях d друг от друга. Площадь каждой из пластин равна S. Крайние пластины соединены между собой проводником, средние подсоединены к батарее с напряжением U.

Найти заряды средних пластин, считая расстояние d между пластинами малым по сравнению с размерами пластин.

3. Имеются два точечных заряда: отрицательный заряд $-q$ с массой m и положительный заряд Q с массой M.

На каком расстоянии d друг от друга должны быть расположены заряды, чтобы во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью E они двигались с одинаковым ускорением?

4. Используя результаты решения задачи 4, рассмотренной в статье, показать, что электрическое поле внутри шара, равномерно заряженного по объему, изменяется прямо пропорционально расстоянию r от центра.

5. Проводящий шар радиуса R концентрически окружен проводящей сферической оболочкой. Заряд шара Q, оболочка не заряжена. Внутренний радиус оболочки R_1, наружный R_2.

Определить напряженность поля во всем пространстве и потенциалы оболочки и шара (относительно бесконечности).

Почему море соленое?

Ответ на первый взгляд выглядит парадоксально: соль в море приносят пресные реки.

Определения «соленая» и «пресная» вода оказываются не совсем строгими, если доверяться только вкусовым ощущениям человека. Вода — прекрасный растворитель, и в природе практически нет вод, не содержащих некоторого количества растворенных солей. От состава этих солей и зависит вкус воды различных источников.

Нет ничего удивительного в том, что за столь длительный срок, как время существования Земли, пресные на наш вкус реки снесли в океан огромное количество соли. Если бы мы могли выпарить все океаны, дно их покрылось бы слоем соли толщиной в 60 метров!

Морская вода на вкус горьковато-соленая, пить ее неприятно. Соленый вкус морской воды определяет хлористый натрий (обычная пищевая соль) — 78% всех растворенных в морской воде веществ приходится на долю этой соли. Горьковатый вкус морской воде в основном придают соли магния.

В океанской воде, по долголетним наблюдениям, никакого изменения солевого состава не наблюдается. Основной причиной постоянства солевого состава океанской воды является то, что живущие в морях и океанах несметные массы животных потребляют для постройки своих раковин и скелетов карбонаты и другие соли, приносимые водами рек.

Итак, вода в океане соленая — это факт несомненный. А вот каков на вкус лед в океане — пресный или соленый?

Кусочек океанского льда, если в нем нет раковин, почти абсолютно пресный. Соленая вода замерзает несколько своеобразно: в лед превращается сама вода, а растворенная соль либо вымораживается на поверхности льда в виде затейливого узора «ледяных цветов», либо скапливается внутри полостей и раковин; при этом раковины заполнены крепким раствором соли. Объем раковин с понижением температуры уменьшается, а концентрация раствора увеличивается.

При таянии происходит обратный процесс, причем таяние начинается именно с этих раковин.

Л. В.

Московский государственный университет

(экономический факультет)

Задача экономической науки состоит в том, чтобы обобщать новые явления в экономической жизни общества, разрабатывать народнохозяйственные проблемы, решение которых способствует успешному строительству коммунизма. Внимание экономистов должно быть направлено на изыскание путей наиболее эффективного использования в народном хозяйстве материальных и трудовых ресурсов, наилучших методов планирования и организации промышленного и сельскохозяйственного производства, на разработку принципов размещения производительных сил и технико-экономических проблем строительства коммунизма. Этими задачами, поставленными перед экономической наукой на XXIV съезде КПСС, определяются значение и профиль подготовки экономистов в Московском университете.

Экономический факультет готовит кадры по специальностям: «политическая экономия» и «планирование народного хозяйства» — на дневном и вечернем отделениях; «экономическая кибернетика» — на дневном отделении.

Выпускники отделения «Политическая экономия» получают квалификацию «экономист, преподаватель политической экономии» и направляются на работу преподавателями в высшие и средние специальные учебные заведения, сотрудниками в научно-исследовательские экономические институты, экономистами на предприятия, в совхозы, плановые органы.

На дневное обучение отделения «Политическая экономия» принимаются, как правило, лица, имеющие стаж практической работы не менее двух лет. Часть мест приема предоставляется выпускникам средней школы, не имеющим стажа работы.

На отделении «Планирование и экономическая кибернетика» осуществляется подготовка по двум специальностям: «планирование народного хозяйства» и «экономическая кибернетика». Студенты наряду с обстоятельной и разносторонней экономической подготовкой получают глубокие знания по математике и математическим методам анализа экономики. Здесь в большом объеме изучаются математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей, математическое программирование, система экономической информации, теория массового обслуживания, исследование операций. После окончания выпускникам по специальности «планирование народного хозяйства» присваивается квалификация «экономист, плановик-синтетик», а выпускникам по специальности «экономическая кибернетика» — «экономист-математик», и они направляются на работу в плановые и статистические органы, вычислительные центры, научно-исследовательские организации, на крупные предприятия.

Ниже приводятся варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года на эти факультеты.

Отделение экономической кибернетики

1. Для конструкторского бюро строится комната в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из стен которого должна быть сделана из стекла, а остальные из обычного материала. Высота комнаты должна равняться 4 метрам, а площадь — 80 квадратным метрам. Квадратный метр стеклянной стены стоит 75 руб., а обычной — 50 руб. Какими должны быть длина и ширина комнаты, чтобы общая стоимость всех стен была наименьшей? Какова эта наименьшая стоимость?

2. Найти $\operatorname{tg} x$, если

$$\begin{cases} 2y\sin x + 5\cos x = 2y, \\ -5\sin x + y\cos x = 1. \end{cases}$$

3. Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (3x + 1)(x - 3y - 1) = 0, \\ (3x + 1)(6y - 2x + 1)(x + y) = 0. \end{cases}$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Доказать, что $CE = FA$.

Отделение политической экономии

1. Не пользуясь таблицами, определить, что больше: $\log_3 75$ или $\log_2 22$.

2. Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$$

3. Один учебник алгебры, два учебника геометрии и два учебника тригонометрии стоят вместе 2 руб. 10 коп., а три учебника алгебры, один учебник геометрии и один учебник тригонометрии стоят вместе 2 руб. 30 коп. Сколько стоят учебники геометрии и тригонометрии вместе?

4. Вне прямого угла с вершиной C на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{2}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 2. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

5. Решить неравенство

$$\frac{4x^2 + 8x - 5}{x + 1} < 0.$$

Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

На физическом отделении физико-математических курсов закончено изучение разделов «Электростатика» и «Электрический ток». Предлагаем читателям журнала решить несколько задач по этим разделам.

1. Четыре конденсатора и источник тока соединены в электрическую цепь так, как показано на рисунке 1. Определить разность потенциалов между точками A и B, если $C_1 = C_4 = 4{,}0$ *мкф*; $C_2 = C_3 = 2{,}0$ *мкф*; $E = 9{,}0$ *в*.

2. Шарик с массой $m = 1{,}0$ *г* и зарядом $q = +1{,}0 \cdot 10^{-6}$ *к*, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити, находится в однородном электрическом поле. Поле направлено слева направо, силовые линии его горизонтальны. Шарик был отведен влево так, что нить отклонилась на угол $\alpha = 45°$ от вертикали, и отпущен. Найти напряженность поля, если сила натяжения нити при прохождении шариком вертикального положения равна $T = 8{,}0 \cdot 10^{-2}$ *н*.

3. Конденсатор емкостью $C = 10$ *мкф* включен в цепь постоянного тока (рис. 2). Определить изменение заряда на конденсаторе после замыкания ключа K, если $R_1 = 2{,}0$ *ом*; $R_1 = R_2 = 1{,}0$ *ом*; $R_3 = 5{,}0$ *ом*; $E = 10$ *в*.

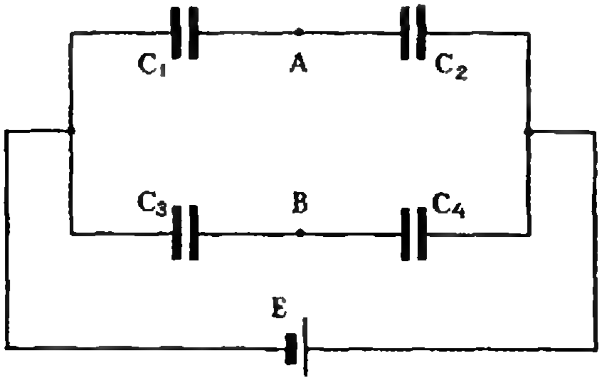


Рис. 1.

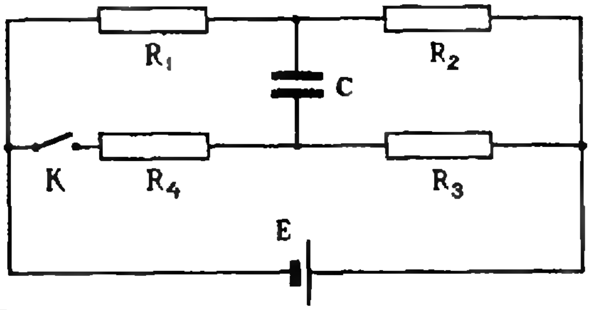


Рис. 2.

4. Подъемный кран начинает поднимать груз массой $m = 1500$ *кг* равноускоренно с ускорением $a = 0{,}30$ *м/с*^{2}. Электродвигатель крана питается от сети с напряжением $U = 380$ *в* и имеет к. п. д. $\eta = 60\%$. Определить скорость груза в тот момент, когда через обмотку двигателя течет ток $I = 120$ *а*.

5. Э. д. с. батареи $E = 20$ *в*. При подключении к батарее некоторого сопротивления падение напряжения на нем будет $U_1 = 18$ *в*. Если к батарее подключить другое сопротивление, то падение напряжения на на нем $U_2 = 16$ *в*. Определить падение напряжения на обоих сопротивлениях, соединенных параллельно.

В феврале и марте на телевизионных занятиях по математике рассматривалась тема «Уравнения и неравенства». Были обсуждены общие вопросы, связанные с понятиями уравнения, неравенства, и рассмотрены различные приемы решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств. Предлагаем читателям журнала контрольную работу № 3 по указанной теме.

Контрольная работа № 3

1. Пусть α и β — корни уравнения $x^2 + 7x - 4 = 0$. Не вычисляя α и β, найти значение выражения

$$\frac{1}{(2\alpha + 1)^2} + \frac{1}{(2\beta + 1)^2}.$$

Решить уравнения:

2. $$\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$$

3. $$\log_{12}(4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x\log_{12} 27;$$

4. $$\sin 2x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0;$$

5. $$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16.$$

Решить неравенства:

6. $$\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geqslant 2x;$$

7. $$\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3;$$

8. $$\frac{4\sin^2 x - 1}{\sqrt{3} - \sin x - \cos x} > 0;$$

9. $$(\log_2 x)^3 - \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{8}\right)^2 + 9\log_2 \frac{32}{x^3} < 4\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 15.$$

И. А. Дьяконов,
А. Г. Мордкович,
И. И. Несмузов

История числа π

Под таким названием вышла в 1971 году книга Ф. Кымпан (перевод с румынского М. Г. Миноле и Я. М. Френка под редакцией Б. А. Розенфельда и Б. В. Бирюкова, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы).

В этой книге в интересной, доступной и живой форме рассказывается о развитии представлений о числе π, начиная с эмпирического его применения в древние времена до раскрытия его подлинной математической природы в конце прошлого века.

Автор книги профессор Ясского университета Флорика Кымпан, известный в Румынии историк математики и писатель-популяризатор. Ее перу принадлежат статьи в специальных журналах, научно-исследовательские работы по истории математики, популярные книги на эту тему.

Книга рассчитана на широкую читательскую публику. Она доступна лицам, обладающим математическими знаниями в пределах программы средней школы. В то же время она представляет интерес и для читателей с более серьезной математической подготовкой.

Четверть содержания книги посвящена примечаниям, в которых автор книги достаточно подробно излагает факты из истории науки и истории математики, которые имеют неоспоримую познавательную ценность.

Впрочем, не будем пересказывать эту книгу, вы, вероятно, уже согласны с тем, что она достаточно интересна.

В заключение приведем несколько фрагментов из нее.

«Таким образом, былая погоня за десятичными знаками числа π с начала XVIII века превратилась в горячую скачку. Авраам Шарп вновь обращается к формуле Грегори и, беря для дуги x значение $\sqrt{\frac{1}{3}}$, находит ряд

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot3} + \frac{1}{3^2\cdot5} - \frac{1}{3^3\cdot7} + \dots\right).$$

Суммируя члены этого ряда, он получает 72 точных десятичных знака числа π. Семьдесят два десятичных знака! Это настоящее опьянение цифрами. Ведь для вычисления длины окружности, радиус которой равнялся бы расстоянию от Земли до самой отдаленной туманности, с погрешностью, меньшей 1 *мм*, достаточно первых 40 десятичных знаков числа π. Несмотря на это, астроном Джон Мачин после получения указанного результата вычислил 100 десятичных знаков, а затем Ланьи — 128 десятичных знаков числа π. Через короткий промежуток времени великий Эйлер, который был не только выдающимся математиком, но замечательным вычислителем, открыл другой ряд, применив его для проверки сделанного Ланьи вычисления 128 десятичных знаков числа π. Он выполнил эту проверку в рекордно короткое время — за 80 часов, обнаружив одновременно, что Ланьи допустил ошибку: 113-я цифра не 7, как было у него, а 8. Чтобы яснее представить рекордно короткое время вычисления, достигнутое Эйлером, предположим, что он беспрерывно занимался этим 8 часов в день; тогда, исходя из обычных темпов вычисления, для установления 128 десятичных знаков числа π ему понадобилось бы 10 дней. Получается, таким образом, что за час Эйлер выполнял ту же работу, на которую рядовому вычислителю требуется 3 часа. Значит, рекордно короткое время Эйлера соответствует в среднем месяцу вычислительной работы, что является огромным прогрессом по сравнению с результатами вычислителей XVI и XVII веков, трудившихся целые годы для определения только одной трети такого количества десятичных знаков» (стр. 113—115).

«А в это время погоня за десятичными знаками числа π не прекратилась. Так, Вега вычислил 140 десятичных знаков π, из которых точными оказались 136. В 1841 году Уильям Резерфорд сообщает 208 десятичных знаков, а через три года талантливый гамбургский вычислитель З. Дазе показал, что Резерфорд ошибся, начиная со 152-го десятичного знака, и после двух месяцев вычислений обнародовал 200 точных десятичных знаков π. Позже, в 1847 году Томас Клаузен из Дерпта (ныне г. Тарту) доводит число цифр до 250, из которых 248 были точны. В 1853 году тот же Дазе получает 440 точных цифр. Дазе перегнал Рихтера, сумевшего тогда же получить только 330 точных десятичных знаков из вычисленных им 334. Рекорд этого года устанавливает У. Шенкс. Он получает 607 десятичных знаков! В следующем году Рихтер, не догнав еще Дазе, вычисляет первые 400 десятичных знаков, подтверждая точность предыдущих вычислений, а годом позже доводит их число до 500. К 607 десятичным знакам, полученным Шенксом в 1853 году, он в 1873 году добавляет еще 100. Первая работа Шенкса появилась в XXI томе «Proceedings of the Royal Society of London» (стр. 319), но три десятичных знака оказались неверными, и их правильная величина была сообщена в том же 1873 году в XXII томе (стр. 45). Наконец, с помощью электронной вычислительной машины в 1958 году были получены 10 000 десятичных знаков числа π.

На вычисление первых 3000 десятичных знаков машина затратила всего 10 минут!» (стр. 139).

Е. И. Олерский

Для поступающих в институты и техникумы

(ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»)

Ежегодно множество юношей и девушек, заканчивающих средние школы, стремятся продолжить свое образование и поступить в высшее или среднее специальное учебное заведение. Но для этого, чтобы успешно сдать вступительные экзамены, необходимо хорошо подготовиться к ним, а времени на это остается очень мало — всего один месяц, за который надо восстановить в памяти весь пройденный за несколько лет учебный материал. Готовиться к поступлению следует уже с начала учебного года выпускного класса. Помочь в этом абитуриентам могут пособия, предназначенные специально для этой цели.

В издательстве «Высшая школа» в помощь оканчивающим средние школы выходят в 1973 году несколько таких пособий. О них и пойдет сейчас речь.

Так автор Гольдфарб Н. И. составил в соответствии с программой по физике для обучающихся на подготовительных отделениях и поступающих в вузы *«Сборник вопросов и задач по физике»*. В «Сборник» вошли задачи и вопросы по всем разделам программы курса физики; большое внимание уделено физической сущности явлений и приложению их в технике.

В основу положена Международная система единиц (СИ), а также используются единицы (внесистемные), часто встречающиеся в практике.

Книга хорошо иллюстрирована. Почти все задачи в сборнике снабжены подробными решениями или указаниями к решению. Объем книги 20 л., тираж 175000 экз., цена 55 коп.

«Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы» под редакцией М. И. Сканави в отличие от других подобных «Сборников» содержит лишь те задачи, которые могут быть даны на предстоящих конкурсных экзаменах. Несмотря на это, сборник поступает в свободную продажу и абитуриенты могут приобрести его, но надо иметь в виду, что никаких указаний, и тем более решений задач, в нем нет. «Сборник» содержит около 5000 конкурсных примеров и задач, в своей совокупности охватывающих всю программу вступительных экзаменов.

Решение этих задач не требует знаний, выходящих за рамки этой программы. Однако тому, кто недостаточно хорошо владеет элементарной математикой, пользоваться «Сборником» будет сложно. Поэтому приступать к решению содержащихся в «Сборнике» задач, целесообразно лишь после твердого усвоения учебного материала.

Создавался «Сборник» по предложению Научно-методического совета по математике МВ и ССО СССР.

Объем «Сборника» 30 л., тираж 300000 экз., цена 95 коп.

Эти книги выходит в первом квартале.

Книга В. В. Зорина *«Пособие по математике для поступающих в вузы»* разъясняет основные понятия элементарной математики. Вопросы программы чередуются с разъяснениями наиболее трудно воспринимаемых учащимися понятий элементарной математики и отдельным разбором соответствующих примеров и задач.

Задачи и упражнения подобраны в порядке возрастания их трудности, так что читатель может постепенно все глубже проникать в существо рассматриваемого понятия.

В конце книги полностью приведена новая программа вступительных экзаменов в вузы по математике.

Объем книги 12 л., тираж 75000 экз., цена 59 коп.

«Сборник вопросов и задач по математике» автора В. С. Соломоника предназначается для поступающих в средние специальные учебные заведения. В нем рассматриваются основные вопросы по арифметике, алгебре и геометрии, необходимые поступающим в техникумы. Некоторым разделам предшествуют краткие сведения из теорий, разбираются ошибки, допускаемые учащимися. В «Сборник» включены вопросы и задачи, предлагавшиеся на устных и письменных экзаменах в техникумы. На большую часть из них даны подробные решения и указания.

Для хорошо подготовленных учащихся включены более сложные задачи, отмеченные звездочкой.

Объем книги 15 л., тираж 50000 экз., цена 67 коп.

Эти книги выходят во втором квартале.

Л. Г. Кузнецова

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

1. Электропоезд длиною 18 *м* проезжает мимо километрового столба за 9 секунд. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать мост длиною 36 *м*?

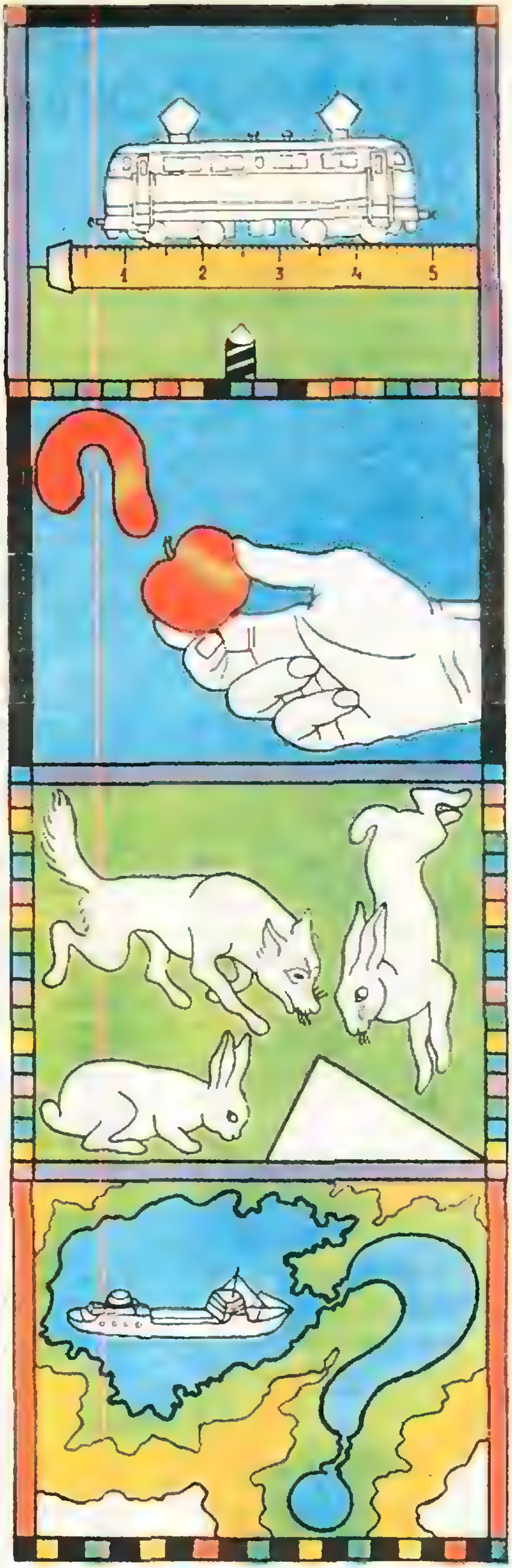
2. Продавали яблоки два продавца. Каждый имел по 30 яблок. Первый продавал 2 яблока за 1 руб., другой — 3 яблока за 1 руб. Во время торговли одного вызвали домой, и он попросил второго продавца продать его яблоки. Оставшиеся яблоки второй продавец продавал по 2 руб. за 5 яблок. Если бы они продавали порознь, то получили бы 10 руб. и 15 руб., то есть 25 руб., а продавая 5 яблок по 2 руб., они получили 24 руб. Куда делся 1 руб.?

3. Волк заметил зайчонка в двадцати метрах, когда тому до спасительного леса оставалось 250 *м*. Зайчиха-мать, желая отвлечь преследователя от детеныша, перебегает дорогу волку перед самым носом.

Волк остановился в нерешительности, не зная чему отдать предпочтение — количеству или качеству мяса. Лишь одна секунда понадобилась волку, чтобы принять правильное решение.

Какое решение должен был принять волк и какой вывод сделать, если скорость зайчонка 540 *м/мин*, волка 600 *м/мин*, а скорость зайчихи не меньше скорости волка?

4. Корабль переходит из реки в море. Изменится ли при этом его осадка?



Квадрат Пирсона

А. П. Азия, И. М. Вольпер

В «Занимательной алгебре» Я. И. Перельмана есть любопытная задача под названием «В парикмахерской». В этой задаче автор рассказывает, что, заглянув однажды в парикмахерскую, он увидел, как мастера пытались безуспешно приготовить 12-процентный раствор перекиси водорода из двух имевшихся в наличии растворов — трех- и тридцатипроцентного*).

Задача, описанная Перельманом, встречается не только в парикмахерских.

Например, для зарядки аккумуляторов бывает необходимо приготовить электролит, который должен содержать 24% серной кислоты из двух растворов с содержанием 92% и 10% серной кислоты. На консервных заводах возникает необходимость приготовления 6%-ного уксуса для маринада из двух партий уксуса разной крепости: 3% и 10%, и т. д.

Для решения подобных задач удобно пользоваться «квадратом Пирсона». Вот как это делается. Рисуют квадрат и проводят две диагонали (рис. 1). В левом верхнем углу проставляют больший показатель крепости исходных веществ (a), а в нижнем углу — второй показатель (b), а на пересечении диагоналей записывают требуемый показатель смеси (c). Затем производят вычитание по первой диагонали ($a - c$) и находят количество второй части смеси (y). Из центра производят вычитание по второй диагонали ($c - b$) и находят количество первой части смеси (x). Значения x и y записывают по одной линии с показателями. На x частей первого вещества надо взять y частей второго вещества, тогда получится смесь с показателем c.

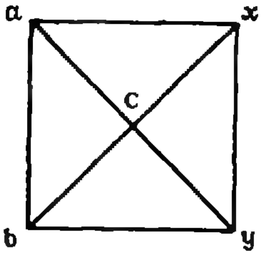


Рис. 1.

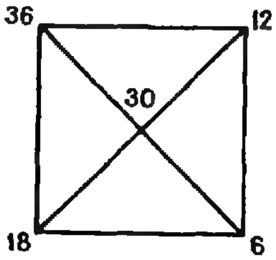


Рис. 2.

Пусть, например, имеются две партии сливок: одна содержит 36% жира, а другая — 18%. Требуется определить, сколько надо взять тех и других сливок, чтобы получить смесь с количеством жира 30%. Решаем по изложенному выше способу (рис. 2) и получаем

$$y = a - c = 36 - 30 = 6,$$
$$x = c - b = 30 - 18 = 12,$$

то есть на 6 массовых частей второй партии сливок надо взять 12 частей первой.

Этот способ основан на специфическом виде количества получаемой смеси, оно равно разности показателей исходных веществ. Такое допущение вполне возможно, так как нас интересуют не абсолютные величины, а относительные количества двух частей смеси.

В самом деле, мы получаем $x + y = (c - b) + (a + c) = a - b$ частей смеси. «Чистого» вещества в ней будет

$$\frac{x \cdot a}{100} + \frac{y \cdot b}{100} = \frac{(c-b)\,a + (a-c)\,b}{100} = \frac{ac - bc}{100}$$

частей, а крепость смеси будет равна $\frac{ac - bc}{100\,(a - b)} = \frac{c}{100}$, то есть c %.

---

*) Напомним, что содержанием вещества в растворе называется отношение массы этого вещества в «чистом виде» к массе раствора.

К статье «Столкновение шариков»

1. $t \sim 10^{-8}$ *с*, $F \sim 10^6$ *н*

2. Давление p внутри мяча почти не изменяется. Сила $F = \pi r^2 p = 2\pi Rxp$, то есть коэффициент жесткости $k = 2\pi Rp$. По формуле (5) $t = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2\pi Rp}} = \sqrt{\dfrac{\pi m}{2Rp}}$. Для футбольного мяча $m \approx 0{,}4$ *кг*, $R \approx 10$ *см*, $p = 1$ *атм*, так что $t \approx 10^{-2}$ *с*.

3. При столкновении стального и резинового шариков резиновый деформируется значительно сильнее. Время соударения резинового и стального шариков гораздо больше, чем время соударения стальных шариков при той же скорости. Поэтому стальные шарики после соударения движутся примерно так, как если бы мы осторожно толкнули их пальцем, то есть с одинаковыми скоростями. С помощью законов сохранения импульса и энергии

$$mv_0 = mv_1 + 2mv_2,$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mv_2^2,$$

где v_1 — скорость резинового шарика после соударения, v_2 — скорость стальных шариков, находим

$$v_1 = -\frac{1}{3}v_0, \quad v_2 = \frac{2}{3}v_0.$$

К статье «Мнимые числа и геометрические задачи»

1. 0; -3; $2i$; $-2+i$.

2. $3+i$; 3; $-2i$; $-1-3i$.

3. См. рис. 1.

7. $-2\sqrt{3}+4i$; i.

8. $|z_2 - z_1|$ — это расстояние между точками, имеющими комплексные координаты z_1 и z_2.

9. Нет. Действительно, пусть OZ_1 и Z_1Z_2 имеют комплексные координаты z_1 и z_2. Из $\triangle OZ_1Z_2$ ясно, что $OZ_2 \leqslant OZ_1 + Z_1Z_2$, то есть $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

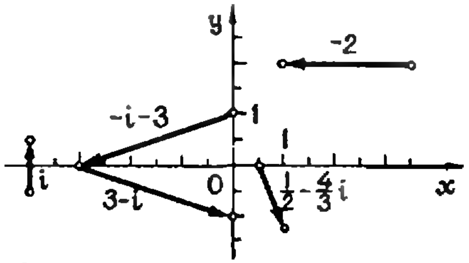


Рис. 1.

10. 1; i; $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

К статье «Принцип суперпозиции в электростатике»

1. $q_1 = -q_2 = \dfrac{Q_1 - Q_2}{2}$.

2. $q_2 = -q_3 = \dfrac{3\varepsilon_0 S}{2d}U$.

3. $d = \left[\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{(m+M)\,qQ}{E\,(mQ+Mq)}\right]^{1/2}$.

4. При $r \leqslant R$ $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r$, при $r \geqslant R$ $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}$ (R — радиус шара, ρ — объемная плотность заряда).

5. $E = 0$ при $r < R$ и $R_1 < r < R_2$, $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ при $R < r < R_1$ и $r > R_2$,

$$\varphi_{\text{оболочки}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2},$$

$$\varphi_{\text{шара}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

К статье «Экономический факультет МГУ»

Отделение экономической кибернетики

1. 10 *м*, 8 *м*, 8000 руб.

2. $\operatorname{tg} x = \pm\dfrac{3}{4}$.

3. Прямая $x = -\dfrac{1}{3}$ и точка с координатами $x = \dfrac{1}{4}$, $y = -\dfrac{1}{4}$.

4. Указание. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность с диаметром BD; проведите диаметр, перпендикулярный AC.

Отделение политической экономии

1. $\log_2 22 > 4 > \log_3 75$.

2. Ось абсцисс $y=0$, точки $x=0$, $y=-4$ и $x=5$, $y=-\frac{2}{3}$.

3. 80 коп.

4. $\frac{\pi}{3}-2\sqrt{2}\sin 15^\circ$.

5. $x<-2\frac{1}{2}$, $-1<x<\frac{1}{2}$.

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы»

(см. «Квант» № 2, 1973 г.)

Физика

1. $R_1=\frac{2q-\varphi C_2}{4\pi\varepsilon_0\varphi}=0{,}06$ *м*.

2. Тонкое кольцо радиуса R, равномерно заряженное с линейной плотностью зарядов $q=+10^{-7}$ *к/см* можно приближенно представить как большое число n элементарных зарядов $+q_i$, равномерно расположенных по окружности радиуса R. Тогда задача сводится к нахождению равнодействующей сил, действующих на заряд q_1 со стороны зарядов $+q_i$. Посмотрим, например, как направлены силы двух диаметрально противоположных зарядов q_i (рис. 2).

Если заряд q_1 отрицателен, то кулоновские силы F_{ki} будут направлены так, как показано на рисунке, а равнодействующая двух кулоновских сил F_i направлена в сторону, противоположную силе тяжести mg и равна по абсолютной величине

$$2F_{ki}\cdot\cos\alpha=\frac{2q_iq_1\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0\cdot(CB)^2}.$$

Учитывая, что $OB=R$, а $OC=h$,

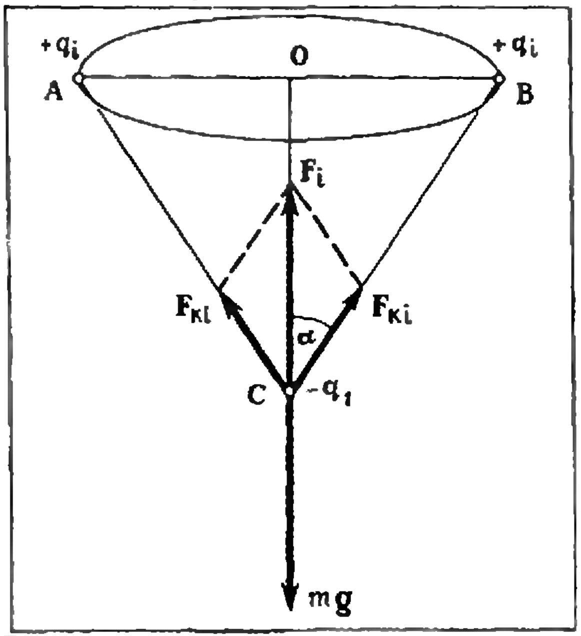


Рис. 2.

найдем

$$CB=\sqrt{h^2+R^2}\ \text{ и }\ \cos\alpha=\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}.$$

По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a}=m\mathbf{g}+\mathbf{F}_i,$$

или в скалярной форме с учетом направления действующих сил:

$$ma=mg-\frac{2q_iq_1\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(h^2+R^2)}.$$

Если мы учтем аналогичным образом действие всех зарядов $+q_i$, то последнее выражение примет вид:

$$ma=mg-\frac{nq_iq_1\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(h^2+R^2)}.$$

Но величина $nq_i=Q$ — это суммарный заряд всех элементарных зарядов $+q_i$. Возвращаясь к условию задачи, суммарный заряд кольца можно, очевидно, определить как $Q=q\cdot 2\pi R$. Таким образом, окончательно получим:

$$a=g-\frac{qq_1Rh}{2m\varepsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Если заряд q_1 положительный, то равнодействующая кулоновских сил будет направлена так же, как и сила тяжести mg, и, применив все вышеприведенные рассуждения, получим:

$$a=g+\frac{qq_1Rh}{2m\varepsilon_0(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Подставляя числовые значения, в первом случае получим $a\approx 8{,}4$ *м/с*^{2}, а во втором — $a\approx 11{,}2$ *м/с*^{2}.

Математика

Контрольная работа № 2

1. $\frac{a-b}{2}$, если $a>b$; $\frac{b-a}{2}$, если $b>a$. **Указание.** Предварительно докажите, что средняя линия трапеции и только она делит пополам всякий отрезок, заключенный между основаниями трапеции. Отсюда будет следовать, что интересующий нас отрезок лежит на средней линии.

2. Удвоив медиану BM, достройте треугольник ABC до параллелограмма $ABCH$. Из равенства треугольников BKE и BAH следует равенство отрезков KE и BH.

3. 4 *см*, 6 *см*, 8 *см*. **Указание.** По теореме о биссектрисе треугольника заключаем, что неизвестные стороны относятся как 1 : 2, то есть их можно обозначить через x и $2x$. Дважды воспользовавшись теоремой Пифагора, придем к уравнениям $\pm\sqrt{x^2-15}+\sqrt{4x^2-15}=6$, откуда $x=4$.

4. Отложите на AM отрезок MK, равный BM. Из равенства треугольников ABK и BCM следует, что $AK=CM$, значит, $AM=AK+KM=CM+BM$.

5. 15 *см*, 20 *см*. Указание. Пусть M — центр квадрата. В четырехугольнике $ABCM$ имеем $\angle B = \angle M = 90°$, то есть $\angle B + \angle M = 180°$, следовательно, около $ABCM$ можно описать окружность. С помощью окружности покажите, что BM — биссектриса угла ABC.

6. $(a+b)^2$. Указание. Покажите, что площади треугольников AOB и COD равны, а затем, сравнивая площади треугольников COD и BOC, воспользуйтесь тем, что у них общая высота и, следовательно, их площади относятся как $BO:OD$, то есть как $b:a$.

7. $ab\sqrt{3}$. Указание. Воспользовавшись формулой $S = pr$, получим $S = (a+b+r\sqrt{3})r$. С другой стороны, по формуле Герона $S = \sqrt{(a+b+r\sqrt{3})abr\sqrt{3}}$. Значит $(a+b+r\sqrt{3})r = \sqrt{(a+b+r\sqrt{3})abr\sqrt{3}}$, откуда после преобразований $(a+b+r\sqrt{3})r = ab\sqrt{3}$. Таким образом, $S = ab\sqrt{3}$.

8. 9,8.

9. $\frac{2a-2}{a-2}$. Указание. Перейдя в равенстве $a = \log_{14} 28$ к основанию 7, найдем, что $\log_7 2 = \frac{a-1}{2-a}$. Далее имеем $\log_{49} 16 = \log_7 4 = \frac{2a-2}{2-a}$.

10. График функции $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$ изображен на рисунке 3. При построении учтите, что $x \geqslant 0$, что $\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ (и, следовательно, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ — наибольшее значение функции), и что $y \to 0$ при $x \to \infty$.

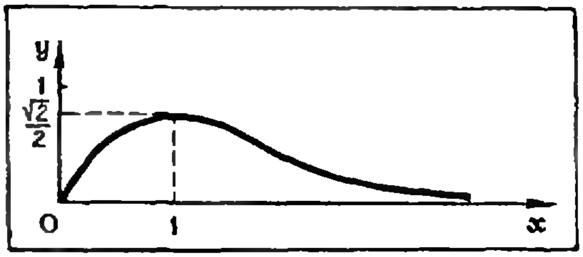


Рис. 3.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 2, стр. 68)

1. Нет, не догонит.

2. Сделайте на столбе отметку на высоте 1 *м* от земли. Отойдите от столба на такое расстояние, чтобы линейка, которую вы держите в вытянутой руке, «перекрывала» весь столб. Высота столба (в метрах) приблизительно будет равна отношению числа делений на шкале линейки к числу делений, приходящихся на 1 *м*.

3. $a = 256$, $b = 128$.

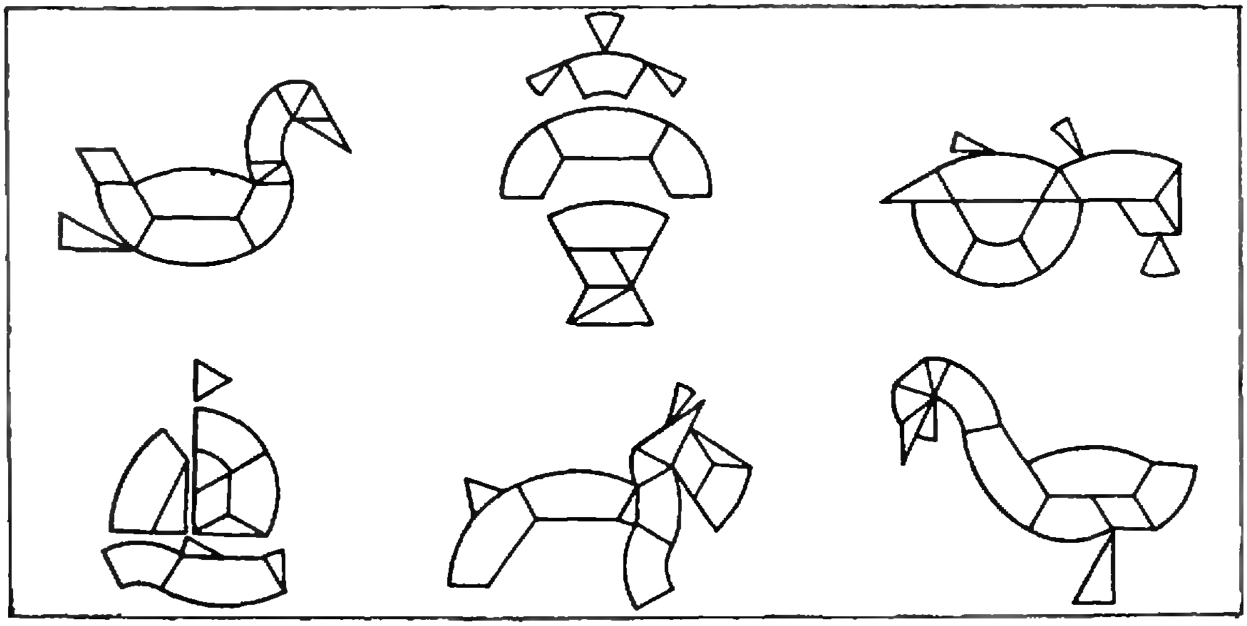
4. Давление на сваи при прохождении баржи не меняется. Чтобы убедиться в этом, представьте себе, что объем погруженной части баржи заменен водой.

5. В 11 раз.

6. Будем считать, что длина машины равна 5 *м*. Тогда на каждую машину «приходится» участок шоссе длиной 20 *м*. При уменьшении скорости до 15 *м/с* этот участок сократился бы до 3 *м* $(20 \cdot \frac{15}{100} = 3)$. Машины «не вошли» бы друг за другом. Образовалась бы пробка.

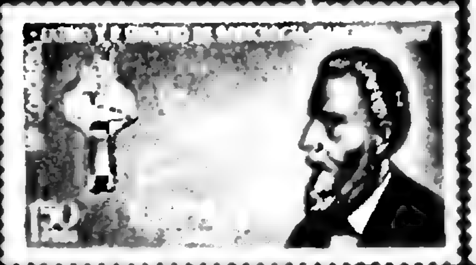
К задаче «Равносоставленные фигуры»

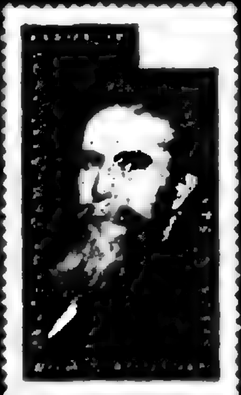
(см. «Квант» № 1, 1973, 4-ю стр. обл.)

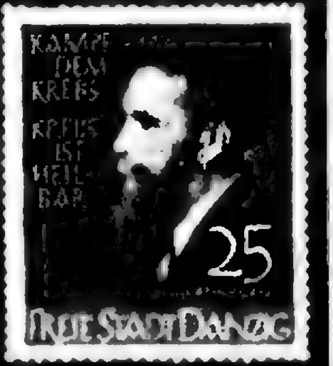


УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ РЕНТГЕНУ







10 февраля 1973 года исполнилось 50 лет со дня смерти выдающегося немецкого физика Вильгельма Конрада Рентгена (1845—1923). Он был одним из лучших экспериментаторов своего времени. До сих пор сохранили свое значение многие из произведенных им рекордных по точности измерений различных физических характеристик вещества.

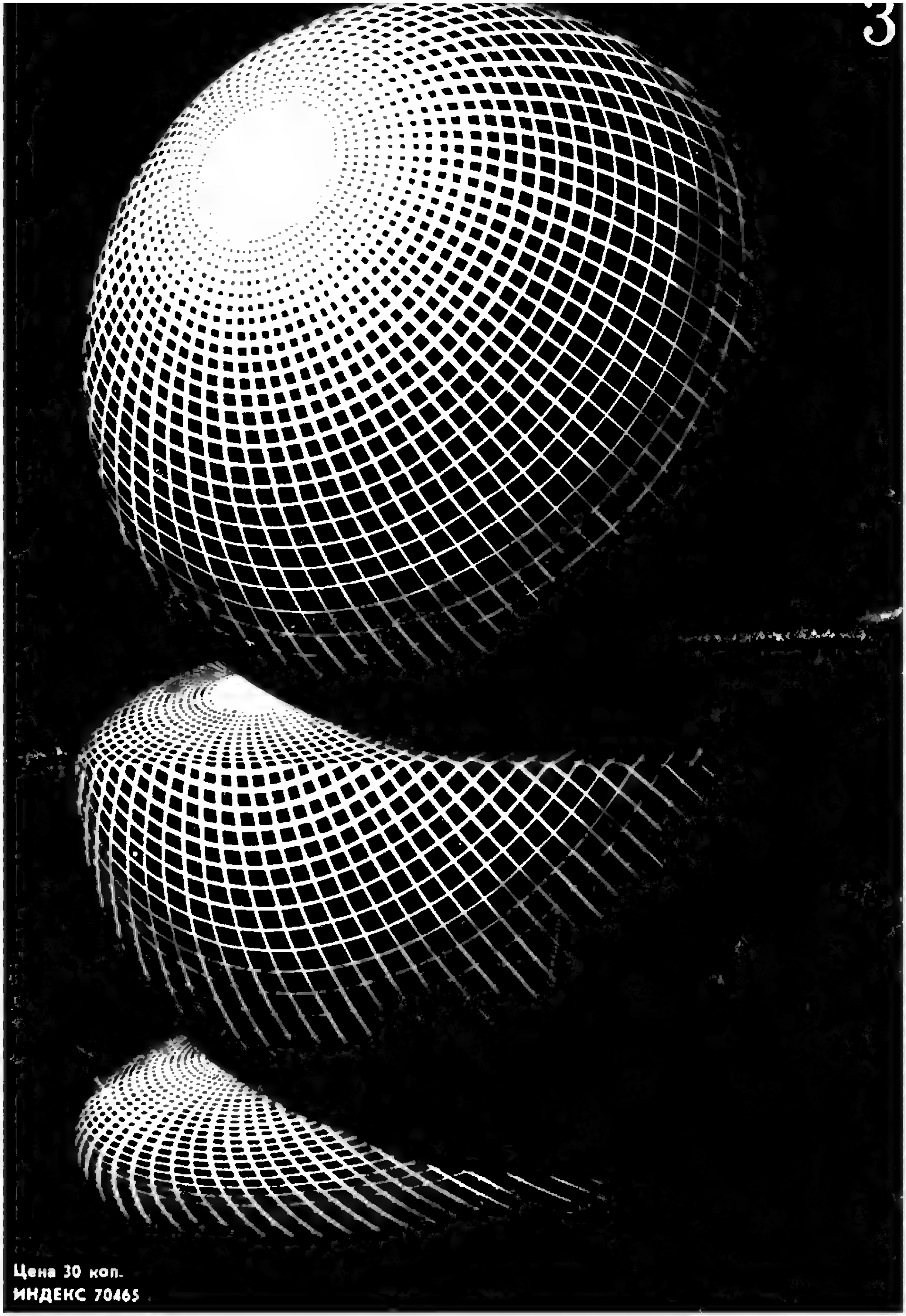
Рентгену принадлежат классические исследования удельной теплоемкости газов, сжимаемости и вязкости жидкостей, взаимосвязи электрических и оптических явлений в кристаллах. Но наибольшую славу принесло ему сделанное в 1895 году открытие невидимого коротковолнового электромагнитного излучения, которое называют рентгеновскими лучами. Вместе с явлением радиоактивности, открытым немного позже, рентгеновские лучи заложили фундамент атомной физики. Они нашли множество полезных применений в медицине, физике и технике. За это выдающееся открытие 10 декабря 1901 года Рентгену была вручена первая Нобелевская премия по физике.

Рентген был очень скромным человеком. Он не шел ни на какие сделки со своей совестью и умер в бедности, отказавшись от денег, которые мог нажить своим великим открытием. Он отверг также предложение о присуждении ему дворянского звания. Следует сказать, что первый памятник Рентгену был поставлен не на его родине, а у нас в Ленинграде еще при жизни ученого (в 1920 году).

Первую марку с портретом Рентгена выпустил в 1939 году вольный город Данциг. Эту марку вы видите на фото. Рядом с портретом надпись: «Борьба против рака. Рак излечим». Затем марки с портретом Рентгена выходили неоднократно. Так, в 1950 году Суринам (Голландская Гвиана) выпустил две почтовые марки с портретом Рентгена. Эти марки имели дополнительный номинал (в фонд средства борьбы с раком). В 1951 году, в связи с 50-летием получения Рентгеном Нобелевской премии, в ФРГ была выпущена марка с изображением бюста ученого. Рентгена мы видим на трех шведских марках среди ученых, получивших Нобелевскую премию в 1901 году (на фото приведена одна из них). На фото приведены также марки с портретом Рентгена, выпущенные в 1965 году в ГДР и в 1967 году в Испании (эта марка посвящена VII Европейскому рентгенологическому конгрессу в Барселоне).

А. В. Алтыкис

3



Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

НОМЕР
4

Основан в 1970 году

1973

4

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Московское математическое общество
Оргкомитет
московской
математической
олимпиады

Главный редактор —
академик
И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик
А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия
Л. А. Арцимович,
М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
И. Н. Бронштейн,
Н. Б. Васильев,
И. Ф. Гинзбург,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
А. И. Климанов
(*главный художник*),
С. М. Козел,
В. А. Лешковцев
(*зам. главного редактора*),
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
М. Д. Миллионщиков,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
М. Л. Смолянский
(*зам. главного редактора*),
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция
В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
Т. М. Макарова
(*художественный редактор*),
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
Л. В. Чернова
(*зав. редакцией*).

Корректор *А. Л. Ипатова*

117071, Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11

Сдано в набор 5/I 1973 г.
Подписано в печать 21/II—73 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,77.
Тираж 380 720 экз. Т-00706.
Цена 30 коп. Зак. 2516

Чеховский полиграфкомбинат
Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

В НОМЕРЕ:

2 *А. Г. Нетужилин.* К. Э. Циолковский в фотографиях
8 *М. Л. Смолянский.* Андрей Николаевич Колмогоров (к семидесятилетию со дня рождения)
12 *А. Н. Колмогоров.* О профессии математика
19 *В. И. Кузнецов.* Часы на миллиарды лет
24 *В. Г. Болтянский.* О вращении отрезка
30 *Л. С. Хренов.* Задача Потенота
35 *Н. Б. Васильев, Г. А. Гальперин.* Упаковка квадратов

Математический кружок

38 *Б. А. Кордемский.* Этому виду задач более 1600 лет

Лаборатория «Кванта»

42 *В. В. Майер, Р.-Э. Е. Шафир.* С какой скоростью движутся ионы?

Задачник «Кванта»

43 Задачи М196—М200; Ф208—Ф212
46 Решения задач М156—М159; Ф176—Ф177

Практикум абитуриента

52 *И. А. Столяров.* Переход от одной системы единиц к другой
57 *В. П. Лебедев.* Некоторые задачи на прогрессии
60 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
64 *В. Л. Клюшин.* Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Рецензии, библиография

65 *И. Зорич.* Симметрия в природе
66 *А. Макуха.* В издательстве «Вища школа»

Информация

67 *В. А. Лешковцев.* Государственные премии 1972 года

«Квант» для младших школьников

70 Задачи
71 *А. Д. Бендукидзе.* О простых числах
73 **Ответы, указания, решения**
80 **Уголок коллекционера**
В. А. Рудов. Марки, посвященные Ю. А. Гагарину
Смесь. (*стр. 11, 29, 34, 45, 56, 59, 63*)

Фотография, помещенная на второй странице обложки, сделана в горах Кавказа. Обнажившиеся слои горных пород позволяют судить об эволюции земной коры, отражают различные этапы ее образования. О радиоактивных методах определения абсолютного возраста Земли вы можете узнать, прочитав статью В. И. Кузнецова «Часы на миллиарды лет» (стр. 19). Фото Г. И. Анохина.

Константин Эдуардович Циолковский
(1857—1935)

К. Э. Циолковский в фотографиях

А. Г. Нетужилин

Мои юные друзья, читатели журнала «Квант»! Мне посчастливилось знать Константина Эдуардовича Циолковского, скромного учителя физики и математики средней школы в Калуге. На протяжении 1928—1934 годов мне довелось неоднократно бывать у Константина Эдуардовича, фотографировать его и его семью. Эти драгоценные для меня материалы я и предлагаю вашему вниманию.

«Человечество не останется вечно на Земле, но, в погоне за светом и пространством, сначала робко проникнет за пределы атмосферы, а затем завоюет себе все околосолнечное пространство»,— так представлял себе К. Э. Циолковский этапы завоевания космоса. Каждый раз, когда радио, телевидение и пресса сообщают нам о новых полетах в космос, многие люди нашей планеты вспоминают имя человека, стоявшего у колыбели космонавтики.

Имя Константина Эдуардовича Циолковского известно теперь во всем мире. Оно навсегда встало в один ряд с именами Архимеда, Леонардо да Винчи, Галилея, Коперника, Ньютона, Ломоносова, Менделеева.

Владимир Ильич Ленин высоко оценил научную деятельность Циолковского уже в первые годы существования Советского государства.

Необычайно широк был круг проблем науки, техники и общественной жизни, интересовавших К. Э. Циолковского. Об этом свидетельствуют свыше 200 его опубликованных работ.

Научное и техническое обоснование цельнометаллического аэростата (дирижабля), хорошо обтекаемого аэроплана и ракеты для межпланетных путешествий — вот основные направления научной деятельности Константина Эдуардовича. Впервые для увеличения прочности дирижабля им было предложено использовать тонкую металлическую гофрированную оболочку. Аэроплан, рассчитанный Циолковским, по своей конструкции предвосхитил самолет, появившийся лишь через 15 лет. В 1897 году ученый построил первую в России аэродинамическую трубу и разработал методику экспериментов в ней.

Полет ракеты, реактивное движение, преодоление земного тяготения давно привлекали внимание ученого. Понадобилось 20 лет, чтобы прийти от первых набросков в научном дневнике к расчетам двигателя, основанного на реакции истекающей струи, способного вырвать космический корабль из земного плена в манящее космическое пространство. Первая часть работы «Исследование мировых пространств реактивными приборами» была впервые опубликована К. Э. Циолковским в 1903 году в журнале «Научное обозрение»; а в 1911—1912 годах публикация была продолжена в журнале «Вестник воздухоплавания». (Полностью работа была издана в 1926 году.) Циолковский неустанно работал над дальнейшим развитием проблемы полетов в космос. В 1926—29 годах он создал теорию полета многоступенчатой ракеты, которую изложил в работе «Космические ракетные поезда».

Первый в мире космонавт Юрий Алексеевич Гагарин удивлялся научной проницательности, прозорливости и предвидению Циолковского, который в своих работах точно описал ход будущего космического полета и состояние космонавта в условиях невесомости.

Гипотеза Циолковского, задача Циолковского, число Циолковского, формулы Циолковского навсегда вошли в теорию ракетодинамики.

В Калугу, в скромный деревянный домик на берегу Оки, почтальон ежедневно приносил письма. Сюда приезжали многочисленные гости, среди которых, например, бывал будущий Главный конструктор С. П. Королев. Все посетители навсегда запомнили скромный кабинет ученого в мезонине, приветливость хозяина, его негромкий голос.

За несколько дней до смерти К. Э. Циолковский отправил письмо в ЦК ВКП(б), где писал: «Все мои труды по авиации, ракетоплаванию и межпланетным сообщениям передаю партии большевиков и Советской власти — подлинным руководителям прогресса человеческой культуры. Уверен, что они успешно закончат эти труды». Советская наука и техника, советские ученые успешно выполняют завещание Циолковского. В День космонавтики советский народ с глубокой благодарностью вспоминает великого русского ученого.

△

На снимке, сделанном в мае 1932 года, дом, где жил Константин Эдуардович почти 30 лет. Сейчас здесь мемориальный дом-музей К. Э. Циолковского.

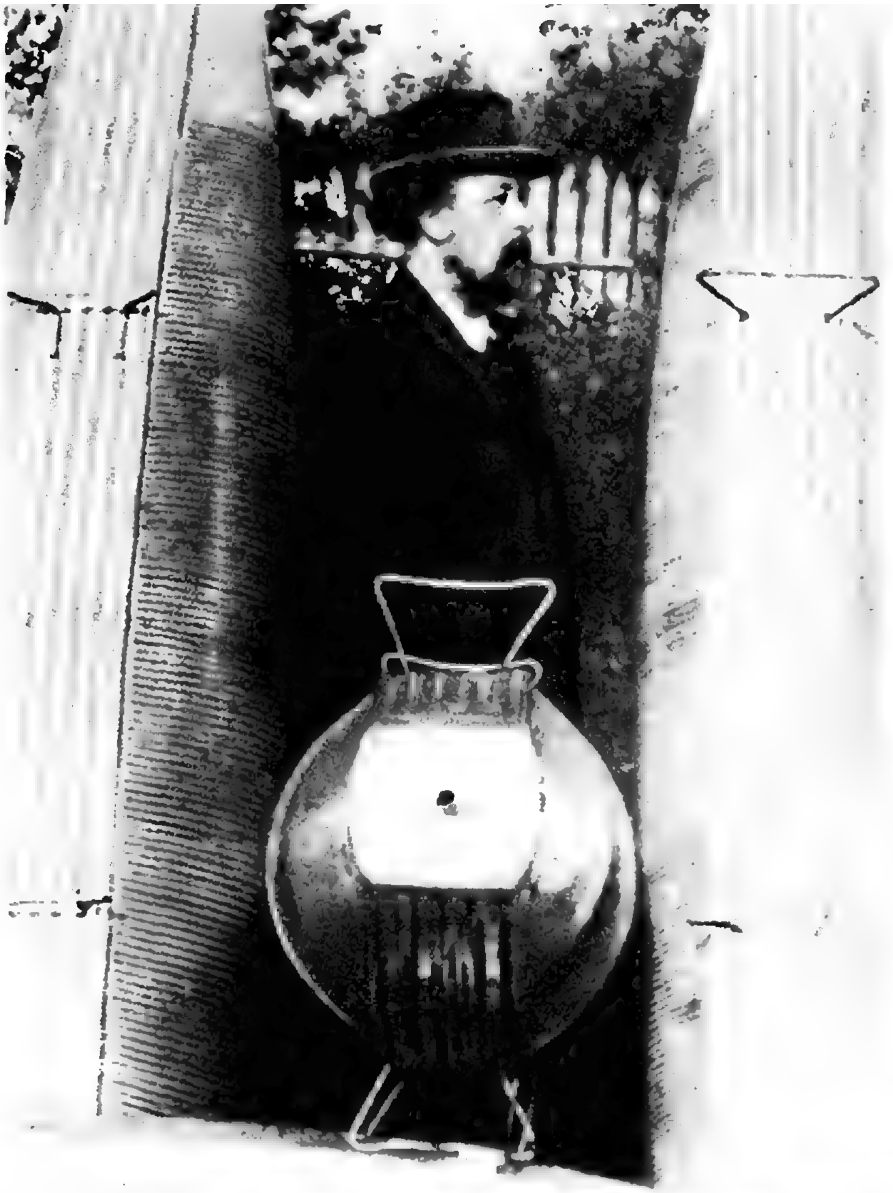
Константин Эдуардович в кругу своей семьи. Снимок сделан в мае 1932 года в саду дома К. Э. Циолковского в Калуге.

▷

К. Э. Циолковский в своем кабинете. Апрель 1930 года. (фото внизу справа).

К. Э. Циолковский в возрасте 5—6 лет.

▽



В 1887 году К. Э. Циолковский сделал доклад об основных принципах создания и полета цельнометаллического аэростата в Московском обществе любителей естествознания. Среди слушателей доклада были профессора Н. Е. Жуковский и А. Г. Столетов.

На снимке К. Э. Циолковский у моделей металлического дирижабля — одного из своих первых крупных изобретений. Этот снимок сделан летом 1914 года в саду дома Циолковского самим Константином Эдуардовичем.

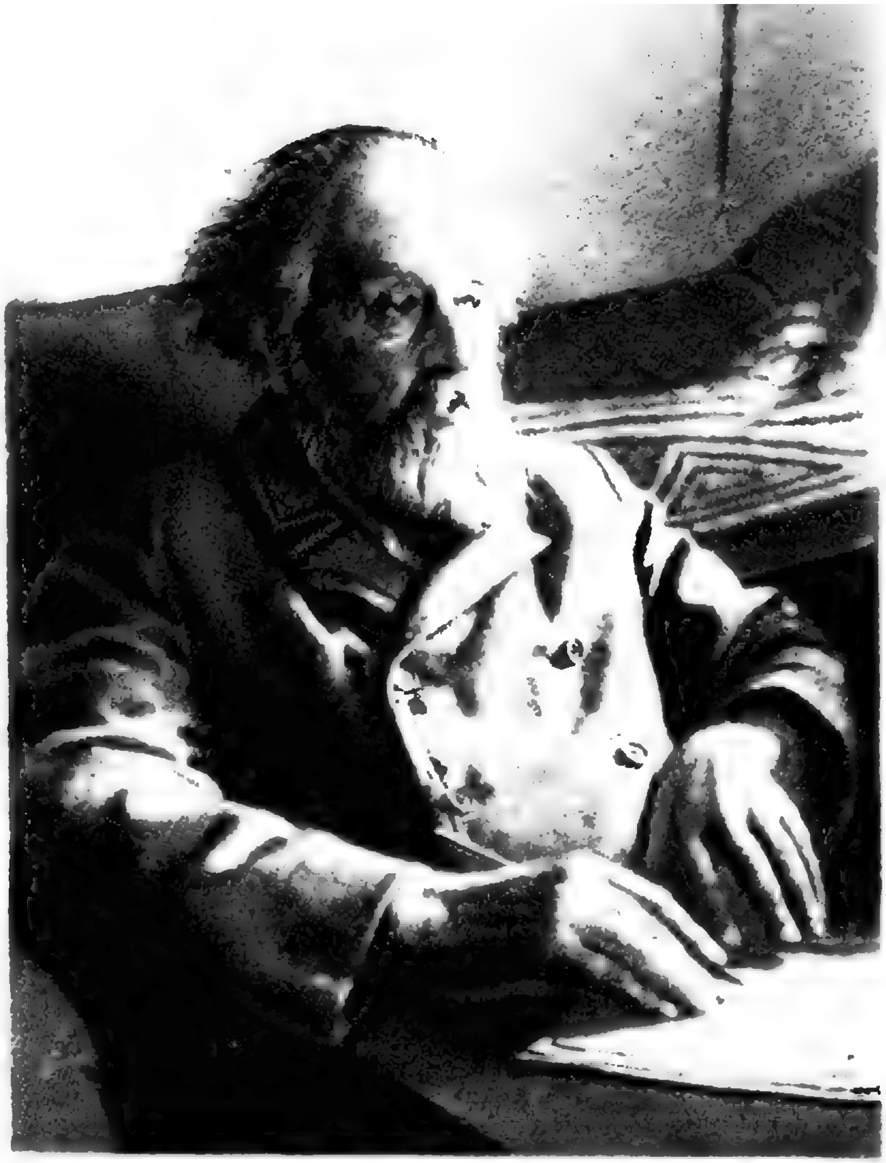
◁

К. Э. Циолковский вел широкую переписку. Его корреспондентами были и юные школьники, и маститые ученые, и знаменитые писатели. На снимке, сделанном в мае 1932 года, К. Э. Циолковский рассматривает журнал «Красная стрела», который прислал ему друг Маяковского, поэт и художник Д. Бурлюк. Этот прогрессивный журнал, издаваемый в 30-х годах в США Д. Бурлюком, правдиво освещал жизнь Советской России. В присланном номере журнала были помещены материалы о Циолковском.

▽

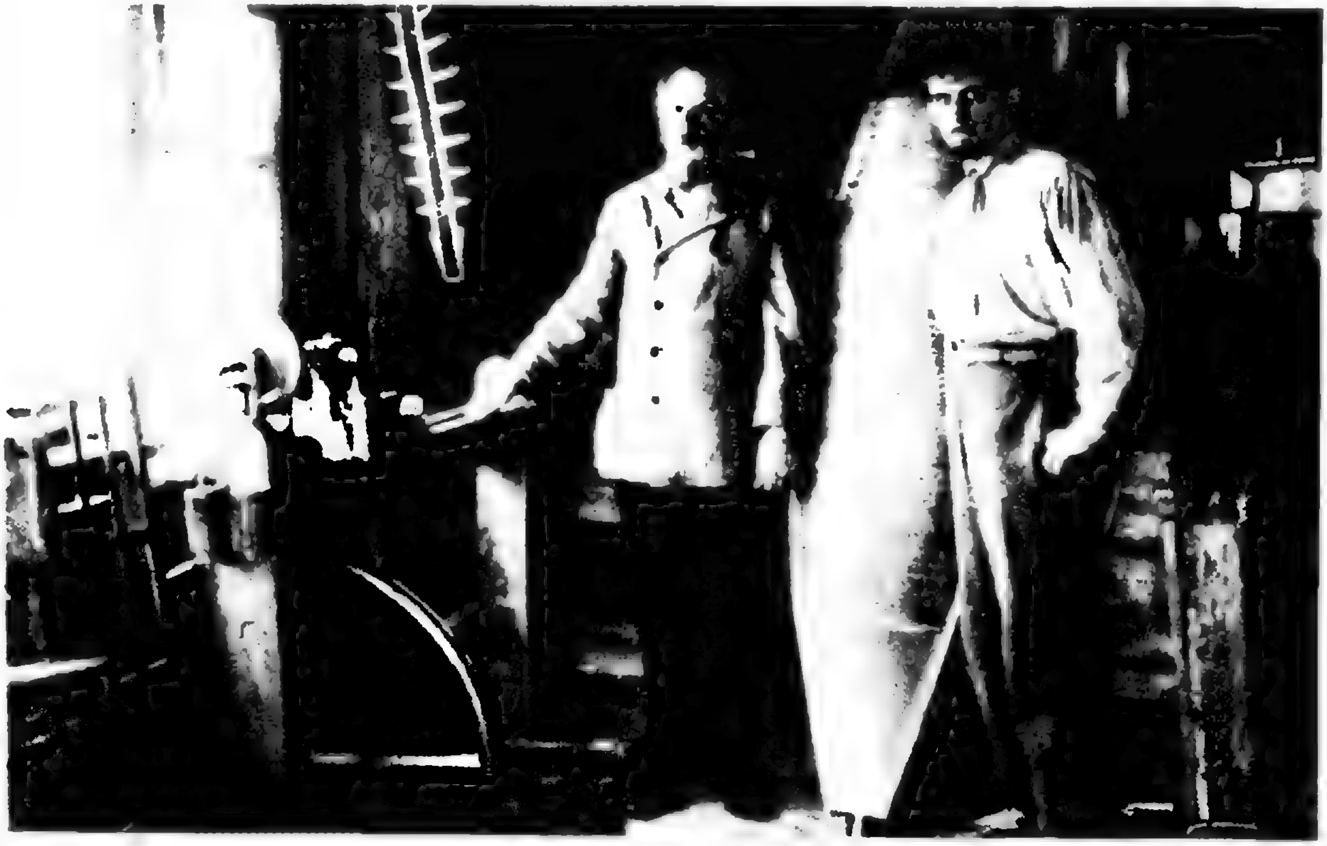
Константин Эдуардович любил работать, сидя в старом удобном кресле, пользуясь вместо стола небольшой дощечкой. Писал он простым черным карандашом обычно на школьных тетрадях. На стене — любимые карманные часы К. Э. Циолковского, служившие ему хронометром во время опытов.

▷



К. Э. Циолковский в своей мастерской, рядом с ним К. Н. Алтайский, секретарь редакции Калужской губернской газеты «Коммуна». Мастерская ученого находилась в его доме, рядом с кабинетом. У окна токарный станок с ножным приводом, на котором работал К. Э. Циолковский.

▽



К. Э. Циолковский в своем кабинете у стеллажа с рукописями и книгами.

▽

△

Еще в девятилетнем возрасте, в результате осложнения после скарлатины, К. Э. Циолковский потерял слух. С годами болезнь прогрессировала, и Константин Эдуардович вынужден был пользоваться собственноручно сделанной слуховой трубой. Принимая посетителей, он просил говорить, не повышая голоса, так как этот рупор хорошо усиливал звук.

На этом снимке — Константин Эдуардович Циолковский во время приема посетителей. На коленях дощечка с бумагой. Циолковский любил во время разговора пояснять сказанное рисунком, чертежом, расчетом. На заднем плане на полу видны связки брошюр Циолковского, полученные из типографии.

Вот названия некоторых его работ:

«Механика животного организма» (1885 г.),

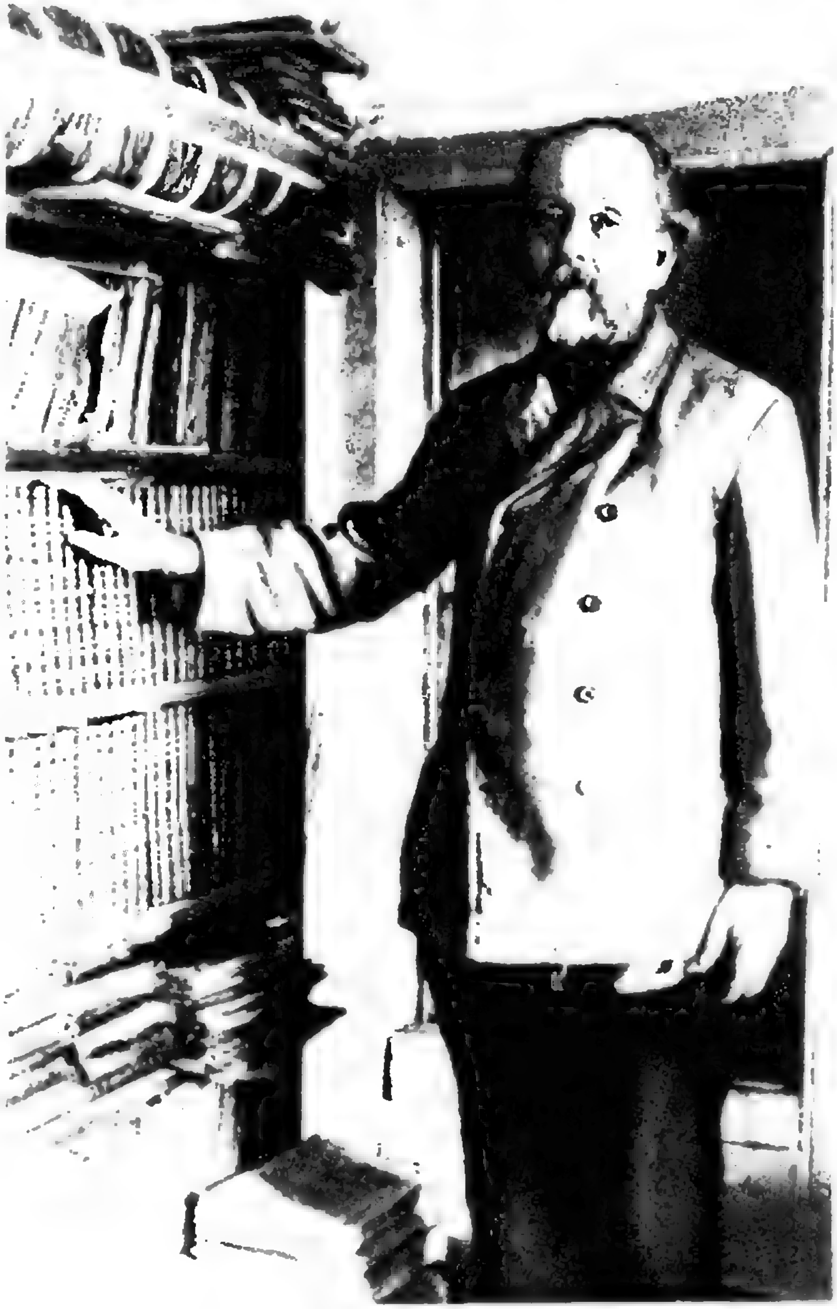
«Реактивный прибор как средство полета в пустоте и атмосфере» (1910 г.),

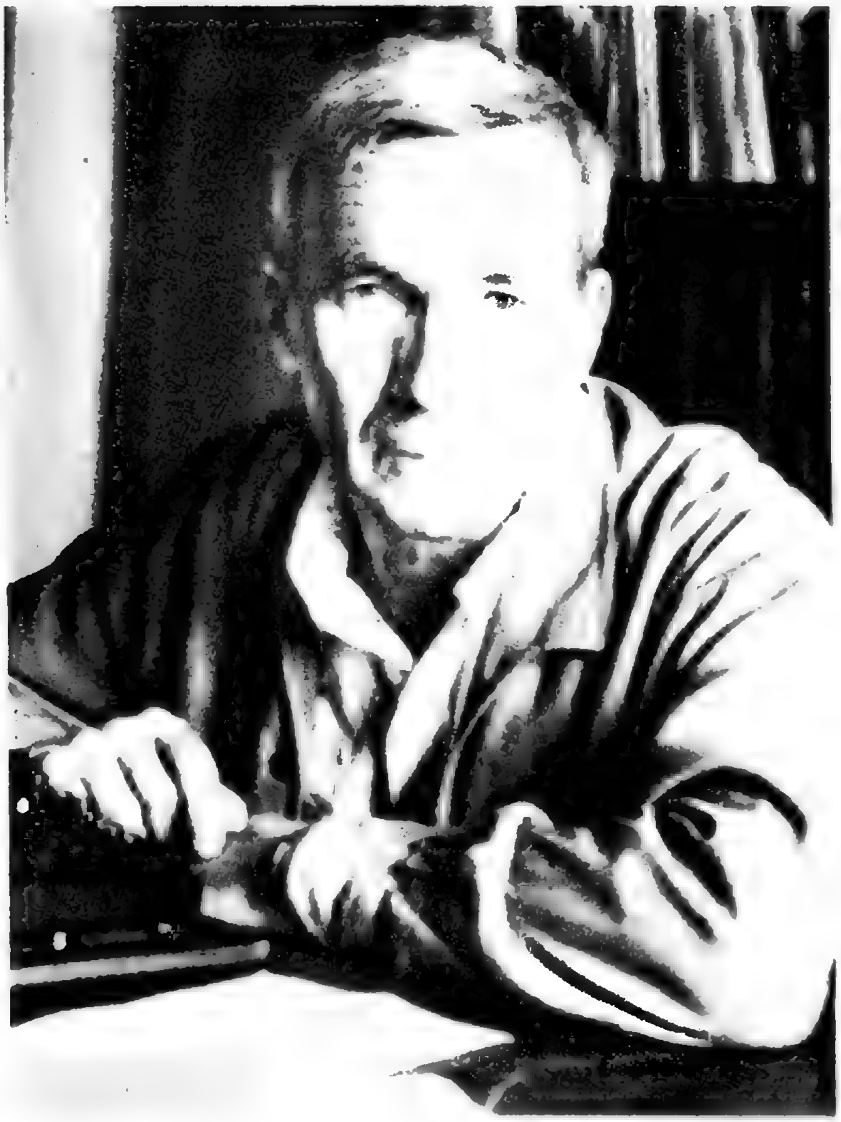
«Причина космоса» (1925 г.),

«Сопротивление воздуха и скорый поезд» (1927 г.),

«Давление на плоскость при ее нормальном движении в воздухе» (1929 г.),

«Стратоплан полуреактивный» (1932 г.).





Андрей Николаевич Колмогоров

(к семидесятилетию со дня рождения)

25 апреля 1973 года исполняется семьдесят лет одному из самых выдающихся современных математиков — Герою Социалистического Труда, академику Андрею Николаевичу Колмогорову.

Интерес к математике возник у А. Н. Колмогорова рано. Уже в пятилетнем возрасте он самостоятельно с изумлением обнаружил, что

$$1+3+5+7+\ldots+(2n+1)=n^2.$$

В старших классах средней школы у него преобладали другие интересы, в частности, к русской истории.

К математике он вернулся только в студенческие годы и уже на всю жизнь. Поступить в университет в 1920 году было легко, но заниматься — гораздо труднее. Это были голодные годы; лекции читались в аудиториях, где температура была ниже нуля. Большим благом считалось то, что, начиная со второго курса, каждый студент получал в месяц 16 кг хлеба и 1 кг масла.

Под влиянием лекций академика Н. Н. Лузина, А. Н. Колмогоров начал самостоятельную научную работу, построив в 1922 году весьма общую «теорию операций над множествами», не потерявшую значения и в наши дни. В студенческие же годы (1920—1925) А. Н. Колмогоров занимался теорией тригонометрических рядов и решил, в частности, весьма трудную проблему сходимости рядов, построив впервые пример всюду расходящегося ряда Фурье.

В 1922—1925 годах параллельно с занятиями в университете Андрей Николаевич преподавал в опытно-показательной школе Наркомпроса РСФСР в Потылихе, на теперешних Ленинских горах. Вначале он поступил в эту школу, чтобы заработать на жизнь, так как студенческой стипендии в те времена было недостаточно, но работа захватила его. Работая в школе, А. Н. Колмогоров был секретарем школьного совета, руководил биологическим кружком и даже был старшим в школьном пешем походе по Крыму. Жизнь в потылихинской школе имела для Колмогорова большое значение еще и потому, что там процветали физкультурные секции, а Андрей Николаевич до двадцати лет даже не умел плавать. Теперь он решил наверстать упущенное и достиг некоторых, хотя и скромных, успехов в плавании, ходьбе на лыжах, гребле.

Школа на всю жизнь привила А. Н. Колмогорову любовь к педагогической работе. Вероятно, этим и объясняется то, что в дальнейшем Колмогоров занялся составлением школьных учебников, организовал школу-интернат при МГУ и т. д.

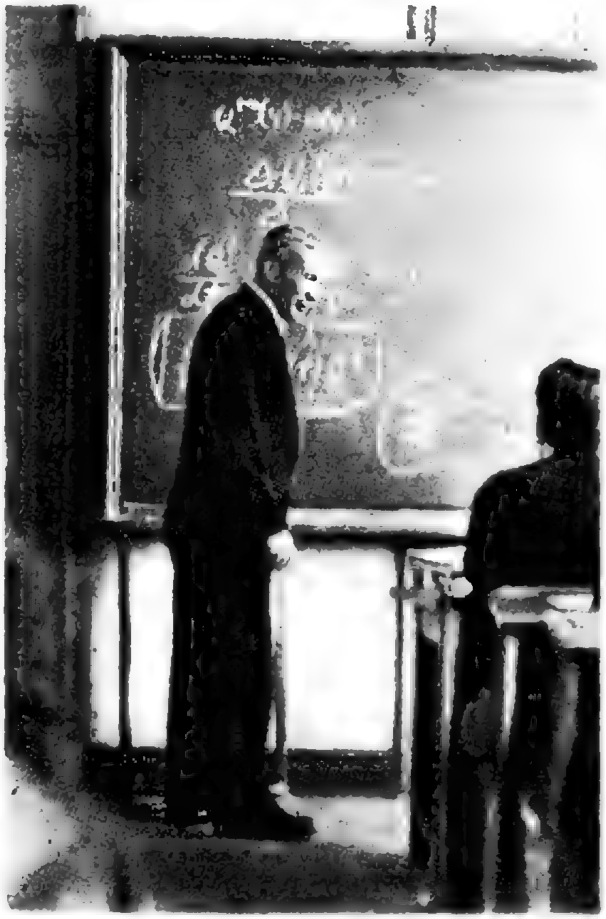
Поступление в аспирантуру в те годы для не обремененного семьей молодого человека означало полную свободу от поисков заработка. С 1925 года Колмогоров основные силы направляет на научную работу, соединяя ее с преподаванием в вузах, главным образом в Московском университете, где в 1931 году становится профессором.

Это были годы, положившие начало плодотворной научной работы, не ослабевшей и до наших дней. Именно в это время Андрей Николаевич создает свои основные работы в области теории вероятностей, топологии и механики.

Наши читатели, чувствующие себя способными хоть в некоторой степени разобраться в содержании работ Колмогорова, могут обратиться к юбилейным статьям, опубликованным в журнале «Успехи математических наук» в 1953 и 1963 годах *).

Наряду с большой плодотворной научной деятельностью Андрей Николаевич много времени уделяет работе со своими учениками.

Трудно в небольшой статье перечислить всех учеников А. Н. Колмогорова. Среди них А. И. Мальцев, вдохновленный А. Н. Колмогоровым к занятиям математической логикой, а потом ставший одним из крупнейших алгебраистов; М. Д. Миллионщиков, занимавшийся под руководством А. Н. Колмогорова турбулентным движением, а потом перешедший к другим вопросам механики и физики; А. М. Обухов, получивший известность созданием, совместно с Колмогоровым, новой концепции «локального» строения турбулентных потоков, а затем ставший ведущим советским специалистом в вопросах механики атмосферных движений; С. М. Никольский, начавший с работ по теории приближений функций одного переменного, примыкавших к исследованиям Колмогорова, а впоследствии — крупный специалист



---

*) Успехи математических наук, **VIII**, вып. 3 (1953), 177—200; **VIII**, вып. 5 (1963), 115—120.

по вопросам, связанным с функциями многих переменных; Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохоров, С. Х. Сираджинов — ведущие советские исследователи по теории вероятностей, основной специальности А. Н. Колмогорова в математике.

Занимающиеся научной работой математики сравнительно мало времени проводят в служебных кабинетах научных институтов, научное общение между ними происходит и дома, и на прогулках, и во время отпуска, и в туристических путешествиях. Много тысяч километров А. Н. Колмогоров проплыл на парусных и гребных лодках и байдарках со своим ближайшим другом, академиком П. С. Александровым, и с учениками разных поколений.

Проблемы педагогики занимают в жизни А. Н. Колмогорова весьма значительное место. Он не мыслит своего творчества в отрыве от подбора и воспитания учеников, от передачи им своих знаний и научных идей. Для него работа с молодежью, создание научных школ и направлений являются неотъемлемой и естественной частью его собственных научных исследований. Вопросы воспитания научной смены, выбор условий, при которых математические способности не подавлялись бы, а получали стимул к развитию, постоянно волнуют Андрея Николаевича, и этой важной проблеме он посвятил много устных и письменных выступлений. С этим связано его активное участие в проведении школьных математических олимпиад, выступления перед школьниками с рассказами об идеях и результатах математической науки. Об этом же рассказывает известная брошюра А. Н. Колмогорова для школьников и преподавателей «О профессии математика», выдержавшая несколько изданий и выпущенная тиражом во много тысяч экземпляров.

В наше время знание математики перестало служить лишь целям общего развития и приобретения навыков элементарных расчетов: для многих молодых людей, оканчивающих среднюю школу, математика стала одним из важнейших орудий повседневной работы. Вот почему Андрей Николаевич отстаивает тот тезис, что умелое применение математических сведений возможно лишь тогда, когда они не только закрепились в памяти, но усвоены творчески. Воплощение в жизнь этого замысла предъявляет определенные требования к тем, кто его будет осуществлять. Действительно хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку. Вероятно, многие учащиеся средней школы знают, насколько увлекательной, а, благодаря этому, легкой и доступной становится математика у таких преподавателей.

Воспитание математического стиля мышления необходимо не только тем, кто впоследствии станет математиком, но и тем, кто выберет для себя профессию физика, инженера, экономиста или какую-либо иную из многих других. Некоторые идеи по этому поводу были высказаны А. Н. Колмогоровым в статье «Поиск таланта» («Известия» № 83 (14246), 6.4.1963). Важнейший вопрос, стоящий перед современным преподаванием,— что и как преподавать — глубоко интересует А. Н. Колмогорова. Еще перед Великой Отечественной войной он выступил с рядом статей о преподавании алгебры в средней школе и написал совместно с П. С. Александровым первую часть учебника алгебры.

Ведущаяся в настоящее время перестройка школьного образования происходит под непосредственным руководством А. Н. Колмогорова. Им или под его редакцией выпущен ряд стабильных и пробных учебников для средних школ.

В последние девять лет заметное место в деятельности А. Н. Колмогорова занимает научное руководство школой-интернатом при Московском университете и преподавание в нем. Сейчас бывшие ученики этой школы уже кончают аспирантуру, защищают кандидатские диссертации и публикуют большое число отличных научных работ.

Советское Правительство высоко оценило большие заслуги А. Н. Колмогорова как ученого и общественного деятеля, присудив ему Ленинскую премию (совместно с его учеником В. И. Арнольдом), Государственную премию, наградило его четырьмя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени и медалями. В 1963 году Андрею Николаевичу Колмогорову было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

С 1970 года, со дня образования нашего журнала, Андрей Николаевич является бессменным руководителем математического отдела «Кванта». Коллектив редакции сердечно поздравляет замечательного ученого со славным юбилеем.

М. Л. Смолянский

Признаки делимости

На 61. Зачеркнем последнюю цифру данного числа и отнимем от полученного числа ушестеренную вычеркнутую цифру. Проделаем эту операцию несколько раз, при этом мы будем получать все меньшие числа. Если на некотором этапе получится нуль, то исходное число делится на 61, а если не получится, то не делится.

Пример. *Делится ли на 61 число* 7528864?

$$752886-6\times4=752862$$
$$75286-6\times2=75274$$
$$7527-6\times4=7503$$
$$750-6\times3=732$$
$$73-6\times2=61$$
$$6-6\times1=0.$$

Ответ: делится.

На 59. Зачеркнем последнюю цифру данного числа и прибавки к полученному числу ушестеренную вычеркнутую цифру. Проделаем эту операцию несколько раз, опять числа будут последовательно уменьшаться. Но теперь, если на некотором этапе получится 59, то исходное число делится на 59, а если не получится, то не делится.

Пример. *Делится ли на* 59 *число* 728355?

$$72835+6\times5=72865$$
$$7286+6\times5=7316$$
$$731+6\times6=767$$
$$76+6\times7=118$$
$$11+6\times8=59.$$

Ответ: делится.

Попробуйте доказать эти признаки делимости и обобщить их на другие простые двузначные (а может и многозначные) числа.

В. М. Розентуллер

О профессии математика

Ниже мы публикуем выдержки из широко известной брошюры А. Н. Колмогорова «О профессии математика»*)

Публикацию подготовили М. Смолянский и Т. Кисилева

1. Значение математических методов в таких науках, как механика, физика или астрономия, хорошо известно. Также всем известно и то, что математика необходима в практической работе инженеров и техников. Элементарные знания по геометрии, умение пользоваться буквенными формулами необходимо почти каждому мастеру или квалифицированному рабочему. Но менее ясным для многих является вопрос о том, что значит иметь специальность математика и заниматься самой математикой в качестве основной профессии.

Очень многие представляют себе дело так, что в учебниках и математических справочниках собрано уже вполне достаточно формул и правил для решения всевозможных встречающихся на практике математических задач. Даже очень образованные люди часто спрашивают с недоумением: разве в математике можно сделать что-либо новое?

Поэтому и математика иногда представляют себе как скучного человека, выучившего большое число формул и теорем, и считают, что его задача состоит в том, чтобы заученные, готовые знания передать другим.

Во всем этом верно только то, что математические сведения, сообщаемые в средней школе и на первых ступенях изучения математики в высшей школе, добыты человечеством давно. Но даже и эти простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно. От преподавателя математики и в высшей и в средней школе требуется не только твердое знание преподаваемой им науки. Хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую развивающуюся науку. Вероятно, многие учащиеся средней школы знают, насколько увлекательной и, благодаря этому, легкой и доступной становится математика у таких преподавателей.

Еще в большей степени самостоятельность и способность по-новому подойти к математической формулировке задачи необходимы тому, кто применяет математику в решении технических проблем. Это относится к работе каждого инженера. Но так как требующиеся при этом математические знания и способности имеются не у всех, то большинство наших научно-исследовательских технических институтов и даже некоторые крупные заводы стали усиленно привлекать специалистов-математиков для работы вместе с инженерами над техническими проблемами.

Ошибочным является представление о математике как о науке законченной, раз навсегда построенной в своих теоретических основах. В действительности математика обогащается совершенно новыми теориями и перестраивается в ответ на новые запросы механики (нелинейные колебания, механика сверхзвуковых скоростей), физики (математические методы квантовой физики) и других смежных наук. Кроме того, и в недрах самой математики после накопления большого числа разрозненных специальных задач, решенных частными приемами, создаются новые общие теории, освещающие эти задачи с иных точек зрения и позволяющие решать их однообразными методами. Например, методы возникающего на наших глазах «функционального анализа» относятся к математическому анализу (который был создан еще в XVII—XVIII вв. и преподается во всех высших технических заведениях) примерно так, как относится алгебра к арифметике. Так называемые «операторные методы» фукционального анализа уже нашли широкое применение в современной физике и технике.

---

*) А. Н. Колмогоров. О профессии математика. М., Издательство МГУ, 1959.

В настоящее время особенно не хватает математиков, способных руководить большими вычислительными работами.

Имеется много задач, в которых для получения числового результата требуются вычисления, превосходящие возможности одного человека. Расчет упругих напряжений в плотинах, фильтрация воды под плотинами, сопротивлений, испытываемых самолетами при полете, или траекторий снарядов — вот типичные примеры таких задач. Уже давно при научных институтах, проектных организациях и заводах, нуждающихся в решении подобных задач, стали возникать вычислительные бюро со многими десятками инженеров-вычислителей, оборудованные арифмометрами и вычислительными автоматами, требующими для выполнения арифметических действий над многозначными числами лишь набора их при помощи клавиш и нажатия соответствующей кнопки (+, —, ×, :). Однако современные наука и техника сталкиваются с такими задачами, которые при этом уровне организации вычислительных работ требуют многих месяцев, а иногда и лет работы десятков вычислителей. Такое положение вызвало бурное развитие современной «машинной математики».

Конструирование и обслуживание современных вычислительных машин превратились в широкие инженерные специальности, которые студенты получают на соответствующих отделениях технических вузов. Для работы в вычислительных бюро старого типа или для введения данных в современную вычислительную машину достаточно общего среднего образования и полугодичного производственного обучения. Для того чтобы довести решение математических задач до этапа, после которого они могут быть переданы в вычислительное бюро или на вычислительную машину для получения численных результатов, необходимо много людей с глубокими математическими знаниями.

Теория «вычислительных методов» математики развилась сейчас в большую науку, и потребность в специалистах, владеющих этими методами, с развитием «машинной математики» возрастает. Перед нами возникают своеобразные задачи «программирования», то есть приведения процесса вычислений к виду, допускающему полную автоматизацию решения задач определенного типа на машинах.

2. Как и всякая наука, математика требует прежде всего твердого знания того, что́ по исследуемому вопросу уже сделано. Но не следует думать, что в математике труднее, чем в других науках, добраться до возможности сделать что-либо новое. Опыт говорит скорее о другом: способные математики, как правило, начинают самостоятельные научные исследования в очень молодом возрасте. Если математические открытия, сделанные в 16- или 17-летнем возрасте, являются все же исключениями, собираемыми с особой тщательностью в популярных книгах по истории математики, то начало серьезной научной работы в 19—20 лет на средних курсах университетов достаточно ти-

пично для биографий многих наших ученых. Академик С. Л. Соболев в 1933 году в возрасте 25 лет был уже избран членом-корреспондентом АН СССР. В 1953 году членом-корреспондентом АН СССР стал 25-летний математик С. Н. Мергелян.

Конечно, широта постановки задач приходит обычно несколько позднее, но при решении отчетливо поставленных трудных конкретных задач совсем молодые люди часто с успехом соревнуются со сложившимися известными учеными.

В основе большинства математических открытий лежит какая-либо простая идея: наглядное геометрическое построение, новое элементарное неравенство и т. п. Нужно только применить надлежащим образом эту простую идею к решению задачи, которая с первого взгляда кажется недоступной. Поэтому вовсе не существует непроходимой стены между самыми новыми и трудными оригинальными математическими исследованиями и решением задач, доступных способному и достаточно упорному начинающему математику. Интересно с этой точки зрения прочитать некоторые главы из «Математической автобиографии» знаменитого советского алгебраиста Н. Г. Чеботарева*), где автор излагает историю своих научных поисков, начиная с первых опытов гимназиста до крупнейших открытий в алгебре.

Сейчас, когда сотрудничество между математиками и представителями смежных специальностей развивается особенно широко, можно определенно сказать, что наиболее успешным оно оказывается при условии, если математик не ограничивается ролью исполнителя сделанного ему «заказа», а старается проникнуть в существо естественно-научных и технических проблем. Специалисты по математической и теоретической физике, теоретической механике или теоретической геофизике могут подготавливаться двумя путями: начинать свое образование с изучения физики, механики или геофизики, или же сначала изучать математику на математических отделениях университетов, а потом основательно входить в ту или иную область применения математики.

Существует даже такая точка зрения, что второй путь дает лучшие результаты, то есть, что изучить на солидной математической основе аэромеханику, газовую динамику, сейсмологию или динамическую метеорологию легче, чем специалисту в какой-либо из этих областей восполнить недостаток математической подготовки. Такое мнение можно считать слишком крайним и заметить, например, что хорошее владение экспериментальной техникой встречается у математиков, перешедших на работу в какой-либо смежной области, лишь как редкое исключение. Но нельзя не признать, что из математиков по образованию вышло много крупнейших наших специалистов в смежных науках.

Трудно отделить математику от механики и сейсмологии в работах академиков М. А. Лаврентьева и С. Л. Соболева. В первую очередь как механики известны академики М. В. Келдыш, Л. И. Седов и чл.-кор. АН СССР Л. Н. Сретенский; как геофизики — члены-корреспонденты АН СССР А. Н. Тихонов и А. М. Обухов; как специалист по теоретической физике—академик Н. Н. Боголюбов. Между тем все они окончили университеты в качестве математиков.

Можно было бы указать много связанных с именами математиков конкретных достижений в естествознании и технике, которые оказались весьма существенными с непосредственно практической стороны.

3. Необходимость специальных способностей для изучения и понимания математики часто преувеличивают. Впечатление исключительной трудности математики иногда создается ее плохим, чрезмерно формаль-

---

*) Опубликовано в журнале «Успехи математических наук», т. III, вып. 3 (1948).

ным изложением на уроке. Обычных средних человеческих способностей вполне достаточно, чтобы при хорошем руководстве или по хорошим книгам не только усвоить математику в объеме средней школы, но и разобраться, например, в началах дифференциального и интегрального исчислений. Тем не менее, когда дело идет о выборе математики в качестве основной специальности, вполне естественно желание проверить «математическую одаренность». Ведь несомненно, что разные люди воспринимают математические рассуждения, решают математические задачи или — на более высокой ступени — приходят к новым математическим открытиям с разной скоростью, легкостью и успехом. И, конечно, следует стремиться к тому, чтобы из миллионов нашей молодежи специалистами-математиками становились именно те, кто в этой области будут работать наиболее успешно.

Поэтому содействие выдвижению математически одаренной молодежи является одной из важных задач школьных математических кружков, математических олимпиад и других мероприятий по пропаганде математических знаний и распространению интереса к самостоятельным занятиям математикой. Не следует спешить с чрезмерно ранним созданием для отдельных молодых людей репутаций «математических талантов». Но вовремя подтолкнуть способных математиков в сторону выбора математики в качестве своей дальнейшей работы советом или премированием на олимпиаде необходимо.

В чем же заключаются эти способности? Следует прежде всего подчеркнуть, что успех в математике меньше всего основан на механическом запоминании большого числа фактов, отдельных формул и т. п. Хорошая память в математике, как и во всяком другом деле, является полезной, но никакой особенной, выдающейся памятью большинство крупных ученых-математиков не обладало.

В частности, фокусники, запоминающие длинные ряды многозначных чисел и складывающие или перемножающие их в уме, совсем не могут служить примером людей с хорошими математическими способностями в серьезном смысле слова.

Способность производить алгебраические вычисления, то есть умелое преобразование сложных буквенных выражений, нахождение удачных путей для решения уравнений, не подходящих под стандартные правила и тому подобное, уже ближе соприкасается с теми способностями, которые часто требуются от математика в серьезной научной работе.

Принято даже думать, что исключительно большое развитие таких вычислительных или, как иногда говорят, «алгорифмических» способностей, является характерным для одного из нескольких основных типов математической одаренности. Такого рода способности требуются, чтобы преодолеть трудности школьной алгебры, и прежде всего — в разложении алгебраических выражений на множители.

Далее основной областью применения этого рода способностей становится решение уравнений. Однако везде, где это возможно, математики стремятся сделать изучаемые ими проблемы геометрически наглядными. В средней школе достаточно ясно видно, насколько полезны графики для изучения свойств функций. Поэтому читатель не удивится утверждению, что геометрическое воображение, или, как говорят, «геометрическая интуиция» играет большую роль при исследовательской работе почти во всех разделах математики, даже самых отвлеченных.

В школе обычно с большим трудом дается наглядное представление пространственных фигур. Надо, например, быть уже очень хорошим математиком, чтобы, закрыв глаза, без чертежа, ясно представить себе, какой вид имеет пересечение поверхности куба с плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной одной из его диагоналей. Искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения является также существенной стороной математических способностей.

В школе для развития этой способности служит систематический курс геометрии с ее определениями, теоремами и доказательствами. Но часто наибольшую трудность для школьников в отношении понимания точного смысла сложной логической конструкции представляет принцип математической индукции, изучаемой в конце курса алгебры. Многие не в состоянии ясно увидеть реальное содержание этого принципа за нагромождением слов «если» и «то».

Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима в математике.

Способность последовательно, логически рассуждать в незнакомой обстановке приобретается с трудом. На математических школьных олимпиадах самые неожиданные трудности возникают именно при решении задач, в которых не предполагается никаких предварительных знаний из школьного курса, но требуется правильно уловить смысл вопроса и рассуждать последовательно. Уже такой шуточный вопрос затрудняет многих десятиклассников: в хвойном лесу 800 000 елей и ни на одной из них не более 500 000 игл; доказать, что по крайней мере у двух елей число игл точно одинаково.

Различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях. Уже исключительное развитие одной из них иногда позволяет приходить к неожиданным и замечательным открытиям, хотя чрезмерная односторонность, конечно, опасна. Само собой разумеется, что никакие способности не помогут без увлечения своим делом, без систематической повседневной работы.

Математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения. Пробел в знаниях, возникающий в результате полного отрыва от математики в течение нескольких лет после средней школы, часто оказывается трудновосполнимым. Работа чертежника, лаборанта, обращение с машиностроительными деталями, сборка радиоаппаратуры и тому подобное, по-видимому, содержат в себе много элементов, родственных работе математика, например, в смысле развития пространственного воображения и функционального мышления. Соприкосновение на работе с современной техникой может побудить более сознательный интерес к приложениям математики. Но мы очень советуем молодым людям, проработавшим после школы несколько лет на производстве и намеревающимся поступить на математическое отделение университета, заранее заниматься математикой и не ограничиваться только подготовкой к вступительным экзаменам (для чего при всех университетах имеются специальные подготовительные курсы), но и участвовать в математических кружках и олимпиадах и самостоятельно изучать математическую литературу. Иначе никакие льготы для «производственников» при поступлении в вузы не помогут им во время работы в университете не отстать от своих товарищей, пришедших со свежими знаниями и увлечениями прямо из школы.

4. Преподавание в школе во время обязательных классных занятий рассчитано в основном на твердое усвоение математики всеми учащимися. Попробовать свои силы в решении более трудных задач, ближе познакомиться с тем, как наука справляется с решением более сложных математических проблем, и с тем, как математика применяется в естествознании и в технике, можно в математическом кружке. Такие кружки ведут преподаватели математики во многих школах. Силами университетов и педагогических институтов во многих городах организованы межшкольные математические кружки и систематическое чтение лекций для школьников по отдельным вопросам математики или ее истории.

Естественно, что все эти начинания, как и математические олимпиады, широко открыты и для работающей молодежи, интересующейся математикой.

Математические олимпиады, на которых предлагаются трудные задачи и победителям выдаются премии и похвальные отзывы, удаются там, где хорошо поставлена работа в кружках. Олимпиады должны проводиться для завершения работы, ведущейся в течение года, а не как изолированное праздничное мероприятие.

Задачи, предлагаемые в кружках и на олимпиадах, иногда носят искусственный и даже шуточный характер. В этом нет беды, если задачи подобраны так, что для их решения требуется серьезная работа мысли, похожая на ту, которая требуется от взрослого, самостоятельно работающего математика.

В докладах, читаемых в кружках их участниками, и в лекциях, читаемых учителями и преподавателями высшей школы, широко освещаются основные пути развития математической науки, значение математики для естествознания и техники. Конечно, очень хорошо, если удается в задачах, предлагаемых в кружках, дать принципиально важный или убедительный своей полезностью материал, но было бы напрасно требовать, чтобы таким условиям была подчинена вся та большая «тренировочная» работа молодого математика, которая достигается решением задач.

Независимо от участия в кружках можно заняться самостоятельным решением более трудных задач. Имеется несколько интересных сборников задач для любителей математики. Некоторые из них написаны так, что читатель, решая последовательно связанные друг с другом задачи, может живо представить себе пути развития довольно сложных математических теорий.

Занятия в кружках, слушание лекций и чтение дополнительной литературы не должны, конечно, отвлекать учащихся школ или подготовительных курсов от более элементарной обязательной учебной работы.

Для решения экзаменационных задач не требуется особой изобретательности. В большинстве случаев задачи решаются последовательным применением изучаемых в школе правил и приемов. Если же их решение и требует некоторой самостоятельности мысли, то дело ограничивается необходимостью систематически исследовать поставленный вопрос в самом естественном направлении.

5. Современная математическая теория дает средства, в принципе достаточные для решения самых разнообразных задач. Уже на первом курсе университета студенты знакомятся с методами нахождения с любой заданной точностью корней алгебраических уравнений какой угодно высокой степени. При изучении теории дифференциальных уравнений обнаруживается, что существуют общие методы нахождения их решений, хотя и приближенных, но тоже обладающих любой наперед заданной точностью.

Однако при практическом решении таких задач с целью получить определенный числовой результат обнаруживается, что обладать принципиальной схемой решения еще не достаточно. Например, при расчете траектории артиллерийского снаряда траектория разбивается на много десятков коротких отрезков, которые рассчитываются последовательно. Для расчета каждого следующего участка приходится проделать несколько десятков арифметических действий. Расчет одной траектории даже у вычислителя, пользующегося вспомогательными таблицами и арифмометром, занимает много часов, а иногда и несколько дней.

Кораблестроительные расчеты или расчеты, связанные с постройкой плотин больших электростанций, занимают месяцы и даже годы работы специальных вычислительных бюро. Такое положение естественно привело к необходимости усовершенствовать машинную вычислительную технику. Прежде всего, наряду с обычными арифмометрами, получили широкое распространение «малые вычислительные машины», автоматически выполняющие четыре арифметических действия над многозначными числами. Перемножение двух восьмизначных чисел занимает на такой машине сорок секунд.

При использовании этих машин вычислитель вынужден еще записывать результаты каждого действия, потом вновь вводить их в машину. За последние двадцать лет широко развернулась работа по созданию «больших вычислительных машин», которые без вмешательства человека выполняют длинные ряды арифметических действий.

Программа работы такой машины задается перфолентой. Машина сама выполняет в указанном порядке арифметические действия, фиксирует промежуточные результаты, использует их в дальнейших вычислениях и, наконец, выдает окончательный результат пробитым на ленте или карточках или даже отпечатанным.

Сначала в подобных сложных вычислительных машинах использовались механические элементы типа колесиков обычного арифмометра и электромагнитные реле, замыкающие и размыкающие ток, приводящий в движение элементы машины. Полный переворот в вычислительной технике произошел около десяти лет назад, когда было показано, что возможно обойтись совсем без механического перемещения элементов машины, заменив их электронными лампами (диодами, триодами и т. д.) и их комбинациями (триггерами и т. п.). Благодаря этому стало возможным производить, например, в одну секунду по несколько тысяч операций умножения многозначных чисел. Еще несколько позднее электронные лампы стали заменяться полупроводниковыми элементами, имеющими значительно меньшие размеры; для «запоминания» большого числа промежуточных данных (до нескольких сотен тысяч), были введены магнитные барабаны и т. д. Стало возможным делать вычисления, требующие, например, 20 миллионов операций для предсказания по данным метеорологических станций погоды на следующий день, вычислять траекторию снаряда за время, меньшее времени его полета, и т. д.

Большие вычислительные машины иногда специально строятся для какой-либо одной цели (например, для предсказания погоды), но чаще имеют универсальный характер, то есть предназначаются для решения самых разнообразных задач. В этом случае они размещаются в «вычислительных центрах», обслуживающих различные научные и технические учреждения, не имеющие собственных больших вычислительных машин. Часто вычислительные машины подключаются к приборам, управляющим автоматически тем или иным процессом.

Если управление быстро протекающим процессом требует сложных вычислений, основанных на данных, получаемых в ходе этого процесса, то без скоростных вычислительных машин подобная задача была бы вообще не осуществима. Сфера применения таких управляющих машин быстро растет.

Управляющие машины во многом походят на управляющие механизмы, возникшие естественным образом в ходе эволюции живых существ (нервная система, механизм сохранения и передачи по наследству признаков каждого вида животных и растений). Общие закономерности устройства управляющих систем изучаются недавно возникшими науками: теорией информации и кибернетикой, которые в значительной своей части являются математическими и предъявляют к чистой математике много новых запросов.

Часы на миллиарды лет

В. И. Кузнецов

В статье «Радиоактивная память» («Квант» № 2, 1972) рассказывалось о том, как по концентрации радиоактивного изотопа углерода ^{14}C ученые определяют время изготовления древних предметов. Но применение радиоуглеродного метода ограничено: в предметах, возраст которых больше 50—70 тысяч лет, концентрация изотопа ^{14}C слишком мала. Иногда нас интересуют события, значительно более отдаленные от нашей эпохи: ведь человек обитает на Земле уже около пятисот тысяч лет, а органическая жизнь на нашей планете возникла примерно миллиард лет назад.

Скелеты и отпечатки древних организмов на камнях рассказывают об эволюции жизни на Земле. По расположению земных пластов можно установить относительное время событий, но узнать абсолютное время весьма сложно, хотя примерные оценки иногда и удается сделать, скажем, по толщине осадочных пород. А как определить возраст горных пород и самой Земли?

Первые оценки возраста Земли были сделаны в предположении, что в момент своего образования Земля была нагрета так, как сегодня Солнце — примерно до 6000 К. Возраст Земли считался равным времени, за которое земное вещество охладилось и образовалась устойчивая земная кора, плюс возраст этой коры. Известный английский физик лорд Кельвин при решении задачи о возрасте Земли предполагал, что Земля первоначально имела температуру расплавленной горной породы и со временем постепенно охлаждалась, излучая тепло с поверхности в пространство. На основании своих расчетов Кельвин сделал вывод, что прошло не более чем 100 миллионов лет с тех пор, как поверхность Земли (по своей температуре) стала пригодной для жизни растений и животных.

Расчеты Кельвина были сделаны еще до открытия радиоактивности, и он не учитывал дополнительного тепла, выделяющегося в земном веществе при ядерных превращениях. Позднее ученые пришли к выводу, что «радиоактивное» тепло существенно замедляет охлаждение. Поэтому оценка времени, необходимого для образования земной коры, непрерывно повышалась — вначале до 200 миллионов лет, а затем и до 1,5 миллиардов лет.

Если узнать возраст земной коры и прибавить к нему потраченные на образование устойчивой земной оболочки 1,5 миллиарда лет, то сумма будет равна возрасту самой Земли. Как же определить промежуток времени, прошедший с момента образования самых древних земных минералов до наших дней и равный возрасту земной коры?

Для этой цели нужны часы, отсчитывающие сотни миллионов и миллиарды лет. Эти часы должны измерять «накопленное» время. Примером подобных часов может служить клепсидра — водяные часы, отсчитывающие время по количеству воды, вытекающей из сосуда. «У меня еще много воды», — говорил ответчик в римском суде, давая понять, что у него достаточный для защиты запас времени. Еще и сегодня применяются медицинские песочные часы.

Подобно римской клепсидре или песочным часам «накопленное» время измеряют и радиоактивные «часы». Чем большее количество атомов радиоактивного изотопа распалось, тем больше возраст минерала. Период полураспада $T_{1/2}$ вещества, пригод-

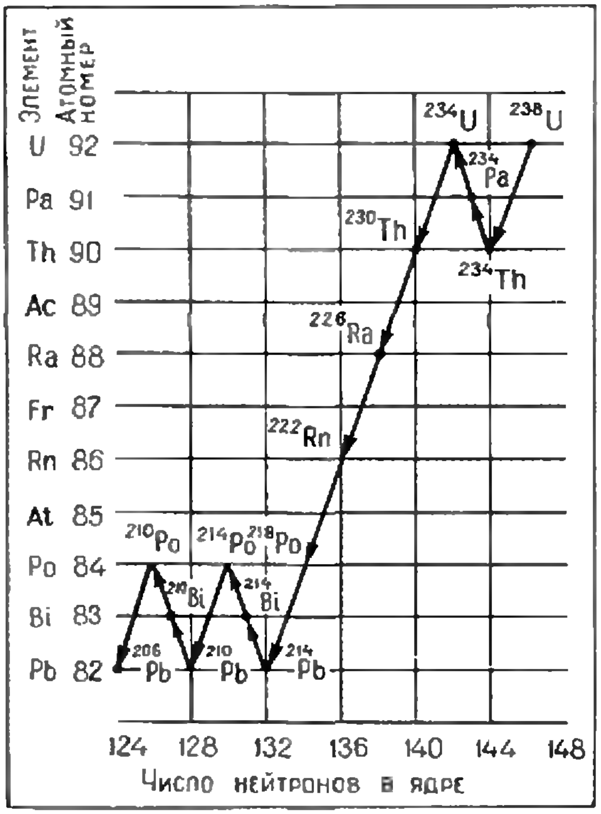


Рис. 1. Основная цепь радиоактивных превращений урана. По оси абсцисс отложено число нейтронов в ядре, а по оси ординат — число протонов (атомный номер элемента). Стрелки, направленные вниз, соответствуют процессу α-распада. В этом процессе атомное ядро испускает быстрое ядро гелия (α-частицу), теряя два протона и два нейтрона. Стрелки, направленные вверх, обозначают β-распад. В этом процессе ядерный нейтрон становится протоном и атомный номер увеличивается на единицу.

ного для измерения сроков порядка миллиардов лет, должен быть такого же порядка величины. Лишь при этом условии радиоактивные атомы сохраняются в минерале до наших дней.

Первый процесс радиоактивного распада, который был использован для определения возраста минералов, — превращение изотопов урана в свинец.

Природный уран состоит из трех сортов атомов разной массы — изотопов ^{238}U, ^{235}U и ^{234}U. Самый распространенный изотоп урана — ^{238}U. В уране, выделенном из любой горной породы, на его долю приходится 99,3%.

Проследим за цепью радиоактивных превращений изотопа ^{238}U (рис. 1). Атомы $^{238}_{92}U$ медленно превращаются в атомы свинца ($^{206}_{82}Pb$) и гелия ($^{4}_{2}He$). Требуется 4,5 миллиарда лет, чтобы половина первоначального количества ^{238}U перешла в свинец и гелий. При этом происходит 14 радиоактивных превращений, в результате которых каждый распавшийся атом урана дает один атом стабильного свинца и восемь атомов гелия:

$$^{238}_{92}U \rightarrow 8\,^{4}_{2}He + ^{206}_{82}Pb + 6\,^{0}_{-1}e.$$

Если кусок плотной породы, например, гранита, размолоть, получившийся порошок растворить в кислоте, выделить из раствора свинец и уран, а затем определить, сколько атомов изотопа ^{206}Pb приходится на один атом ^{238}U, то по этим данным можно определить возраст гранита. Обозначим буквой N число атомов урана, а N_1 — число атомов свинца ^{206}Pb, содержащихся в минерале в момент анализа. Тогда $N_0 = N + N_1$ — число атомов урана в момент образования гранита. (Мы считаем, что в граните весь свинец образовался из урана путем радиоактивного распада.) По закону радиоактивного распада

$$\frac{N}{N_0} = \frac{N}{N + N_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}},$$

где t — возраст гранита. Логарифмируя это равенство, получаем формулу для вычисления возраста минерала:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}. \qquad (1)$$

При расчетах предполагалось, что в образце нет постороннего свинца и обмен веществом с внешней средой исключен. Однако это не всегда так. Возникающий на пути превращений уран — свинец элемент радон принадлежит к группе благородных газов, и если изучаемый минерал недостаточно плотен, радон может улетучиться. Тогда количество атомов свинца в образце окажется меньше, чем количество атомов урана, распавшихся за время существования образца. При этом условии возраст минерала, вычисленный по формуле (1), будет меньше действительного. С другой стороны, в породе может находиться свинец, появившийся одновременно с другими элементами и попавший в минерал во время образования твердой земной коры. Такой свинец называют первичным. Наличие первичного свинца приводит к завышению возраста горной породы. Поэтому для правильного определения возраста необходимо убедиться в том, что из минерала не утекал радон, и уметь определить долю первичного свинца в породе.

Свинец радиоактивного происхождения (радиогенный свинец) накапливается не только после распада изотопа ^{238}U, но образуется и в результате радиоактивных превращений ^{235}U и ^{232}Th. Изотоп ^{206}Pb — потомок ^{238}U, а изотопы ^{207}Pb и ^{208}Pb замыкают цепь распада ^{235}U и ^{232}Th соответственно.

В природном свинце содержится также легкий изотоп ^{204}Pb, который не накапливается в цепях радиоактивных превращений ни одного из природных радиоактивных элементов. Откуда взялся «легкий» свинец? Ответ один — свинец с массовым числом 204 образовался одновременно с другими элементами на Земле.

Изотопный состав свинца без радиогенных примесей был определен при анализе железных метеоритов. В таких метеоритах нет урана и тория — источников радиогенного свинца. Метеоритный свинец на одну часть изотопа ^{204}Pb содержит 10 частей ^{206}Pb, 10 частей ^{207}Pb и 29 частей ^{208}Pb.

Изотопный анализ позволяет по количеству изотопа ^{204}Pb оценить количество первичного свинца в горной породе. Так, если в свинце отсутствует изотоп ^{204}Pb или содержится небольшая доля его, то практически весь свинец радиогенного происхождения.

Первые измерения возраста минералов и Земли радиоактивными методами дали значительно меньшие значения, чем принятые в наши дни. Ошибки, по-видимому, вкрадывались из-за диффузии радона.

В дальнейшем были получены более точные значения возраста не только благодаря совершенствованию свинцово-уранового метода, но и за счет развития других способов. Данные считаются вполне надежными, когда ответы, полученные разными путями, совпадают. К счастью, изотопы урана — не единственный набор атомных ядер с периодом полураспада, соизмеримым с длительностью геологических эр. В таблице приведены другие радиоактивные изотопы, позволяющие осуществлять взаимную проверку возраста минералов.

В природном калии в небольших количествах содержится радиоактивный изотоп ^{40}K с периодом полураспада 1,3 миллиарда лет. Обычно ядро ^{40}K испускает электрон и пре-

Таблица

Название метода (изотоп)	Измеряемый возраст (лет)	Период полураспада (лет)
Радиоуглеродный (^{14}C)	От 100 до 50 тысяч	5570
Калиево-аргонный (^{40}K)	Свыше 100 тысяч	$1{,}3 \cdot 10^9$
Рубидиево-стронциевый (^{87}Rb)	Свыше 5 миллионов	$5{,}0 \cdot 10^{10}$
Свинцово-урановый (^{238}U)	Свыше 200 миллионов	$4{,}5 \cdot 10^9$

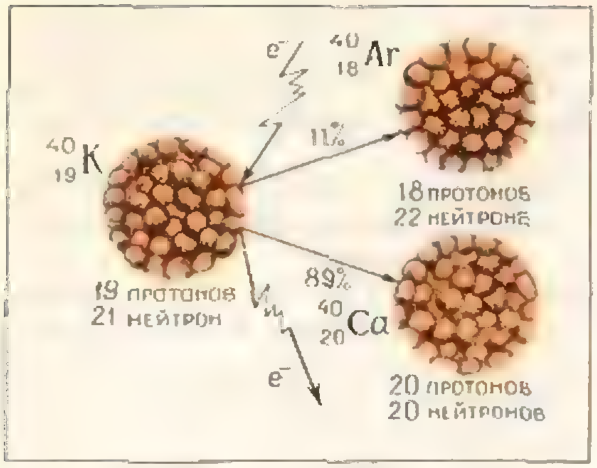


Рис. 2. Радиоактивный распад изотопа ^{40}K.

вращается в кальций. Отличить накопившийся в горных породах радиогенный кальций от первичного невозможно. Однако таким образом распадается 89% изотопа ^{40}K, а 11% распадается другим путем, испытывая, как говорят физики, *K*-захват. Процесс *K*-захвата состоит в том, что *атомное ядро захватывает орбитальный* электрон и становится ядром элемента, атомный номер которого на единицу меньше. Так, $^{40}_{19}$K переходит в изотоп аргона $^{40}_{18}$Ar (рис. 2).

Исследования минералов показали, что в некоторых породах, например в слюде, аргон сохраняется без потерь миллиарды лет. Первичный аргон при образовании земной коры «выкипел» в атмосферу, поэтому *в минералах содержится только* радиогенный аргон.

Таким образом, выделив аргон из слюды, содержащейся в граните, можно определить возраст гранита по распаду калия и проверить результат, полученный свинцово-урановым способом.

Период полураспада изотопа ^{40}K можно определить с помощью счетчика бета-частиц и обыкновенных часов, число атомов N — в результате химического анализа. Величина N_0 равна $N+N_р$, где $N_р$ — число атомов ^{40}K, распавшихся за время существования гранита. $N_р$ можно вычислить, если известно число ато*мов аргона, содержащихся в слюде.* Обозначим это число буквой A. Тогда $N_р=\frac{A}{0,11}$ (так как на долю превращений калий — аргон приходится 11% от полного числа распадов радиоактивного изотопа калия). Следовательно, $N_0=N+\frac{A}{0,11}$. Подставив *это выражение в формулу* (1), получим

$$t=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(1+\frac{A}{0,11N}\right). \qquad (2)$$

Большой интерес представляют также рубидиево-стронциевые радиоактивные часы. Изотоп рубидия ^{87}Rb радиоактивен и испускает бета-частицы, переходя при этом в изотоп стронция ^{87}Sr. В естественном рубидии *содержится 28% радиоактивного изотопа.* Принцип определения даты рождения минералов рубидиево-стронциевым методом очень прост. Химическим анализом определяется полное количество рубидия, а затем содержание изотопа ^{87}Sr. *После таких процедур* выполняются расчеты по формулам радиоактивного распада.

Все методы, о которых мы рассказали, отсчитывают возраст минералов с момента их кристаллизации. Только в твердых телах продукты радиоактивного распада остаются рядом с материнскими ядрами. В жидком расплаве атомы свободно перемешиваются, а поскольку химические *свойства вещества, состоящего из* дочерних ядер, отличаются от свойств материнского вещества, дочерние продукты концентрируются в других местах.

Как правило, древнейшие породы залегают под громадными толщами отложений. *Лишь* в некоторых районах они выходят близко к поверхности. На Кольском полуострове исследована гранитная плита, вещество которой затвердело 3,4 миллиарда лет назад. Это один из древнейших минералов Земли. Если к возрасту кольской плиты прибавить время, необходимое для образования на Земле твердой коры, то полный возраст Земли *получится близким к пяти* миллиардам лет. Недостаток такого метода определения возраста Земли в том, что время, затраченное на образование земной коры, определяется расчетным путем, причем исходные данные для расчетов не вполне надежны. В частности, очень сложно учесть тепло, выделяющееся при распаде радиоактивных ядер земного вещества. Однако есть способ определения возраста Земли и без сложных тепловых расчетов, основанный лишь на показаниях радиоактивных часов.

По современным представлениям метеориты и земная кора возникли из одного и того же вещества и конденсировались одновременно. Масса метеоритов мала, и они затвердели за промежуток времени, весьма малый по сравнению со временем, необходимым для охлаждения Земли. Можно считать, что метеоритные минералы кристаллизовались в момент «творения» Земли. По содержанию свинца и урана в метеоритах можно рассчитать их возраст. Если же считать, что метеориты и Земля образовались одновременно, то это и будет возраст Земли.

Когда измерили концентрацию и изотопный состав урана и свинца в каменных метеоритах (а такие метеориты, в отличие от железных, содержат уран), в их паспортах в графе «возраст» появилось число, близкое к пяти миллиардам лет. Данные были получены также методами калий — аргон и рубидий — стронций. Возраст каменных метеоритов, измеренный этими способами, лежит в интервале от 4,3 до 4,8 миллиардов лет. Ныне принято считать возраст Земли близким к пяти миллиардам лет.

С развитием космических исследований для радиоактивных методов измерения времени открываются новые перспективы. Космические корабли и автоматические станции доставят на Землю частицы грунта планет Солнечной системы. Тогда в руках ученых окажется вещество, которое может рассказать о возрасте далеких планет.

Уже изучены образцы лунного грунта. В них также содержатся радиоактивные изотопы. У минералов, добытых в различных районах Луны, возраст оказался разным. Это означает, что образование твердой лунной коры длилось заметное время по сравнению с возрастом Луны. Где-то лунное вещество затвердевало раньше, в других местах позднее. Еще непрочная лунная кора кое-где прорывалась, и потоки лавы заполняли впадины... И все же возраст лунных пород исключительно велик. Самые молодые из них прожили более трех миллиардов лет — срок, равный возрасту древнейших земных минералов. Это означает, что «внутренняя» геологическая жизнь Луны завершилась в начальные 1,5 миллиарда лет ее существования. С тех пор на Луне прекратилась вулканическая деятельность, и естественный спутник Земли более трех миллиардов лет назад стал пассивным небесным телом, изменяющимся только под внешними воздействиями, такими как «солнечный» ветер и метеоритная бомбардировка.

Измерения возраста планет Солнечной системы необходимы для изучения ее происхождения и истории. Вопрос об образовании вторичных тел вокруг первичного тела — один из основных для понимания процессов возникновения планетных систем — Урана, Юпитера, Сатурна. Считается, что изучение происхождения спутников планет — наиболее короткий путь к созданию общей теории образования небесных тел, вращающихся вокруг Солнца.

О вращении отрезка

В. Г. Болтянский

1. Ясно, что отрезок длины 1 может совершить полный оборот, все время находясь в фигуре площади $\pi/4$, а именно в круге диаметра 1 (рис. 1). А не может ли отрезок длины 1 совершить полный оборот, двигаясь в фигуре меньшей площади? На первый взгляд это кажется маловероятным: похоже, что круг диаметра 1 является наиболее «экономной» (в смысле площади) фигурой, в которой отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Однако это неверно!

В 1918 году А. С. Безикович доказал, что существует фигура сколь угодно малой площади, двигаясь в которой отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Точнее говоря, *если мы зададим любое положительное число* ε (например, $\varepsilon = 0{,}000001$), *то сможем построить фигуру площади* ε, *внутри которой может совершить полный оборот отрезок длины* 1. Безикович предложил простые геометрические идеи, с помощью которых можно доказать этот удивительный факт. Однако для того, чтобы превратить эти идеи в полное доказательство, ему пришлось провести довольно громоздкие вычисления, так что все рассуждение в целом оказалось сложным (доказательство, похожее на доказательство Безиковича, приведено на стр. 258—263 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры»).

Не так давно академик И. М. Виноградов рассказал мне короткое и элегантное доказательство этой теоремы. Это доказательство он придумал сразу же после того, как Безикович рассказал ему о своей теореме, однако печатать его на стал. С любезного согласия И. М. Виноградова я приведу здесь его доказательство.

2. Прежде всего рассмотрим геометрические идеи А. С. Безиковича.

Ясно, что достаточно построить фигуру маленькой площади, внутри которой отрезок длины 1 можно повернуть на угол 60°: прикладывая тогда друг к другу три такие фигуры, получим фигуру, внутри которой можно будет повернуть отрезок на угол 180°.

Поворот отрезка длины 1 на 60° можно совершить внутри равностороннего треугольника с высотой 1 (рис. 2). Разрежем теперь этот треугольник высотой на две части и наложим эти части друг на друга. Внутри получившейся фигуры (рис. 3) можно отрезок AB повернуть в положение AC; кроме того, отрезок DE, параллельный AC, можно повернуть в положение DF. Но переместить отрезок AB в положение DF в этой

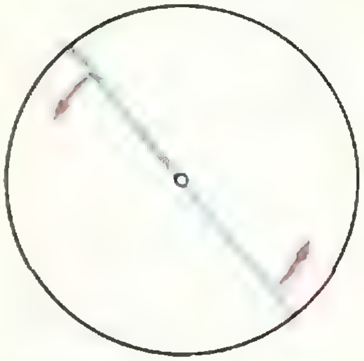


Рис. 1.

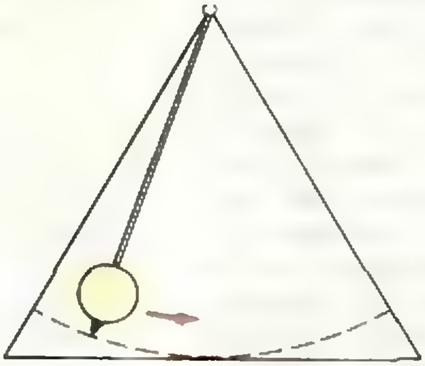


Рис. 2.

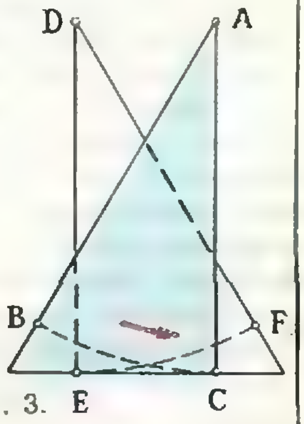


Рис. 3.

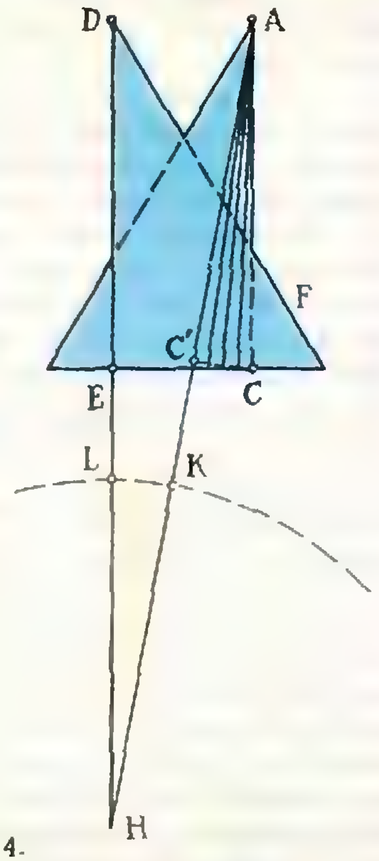


Рис. 4.

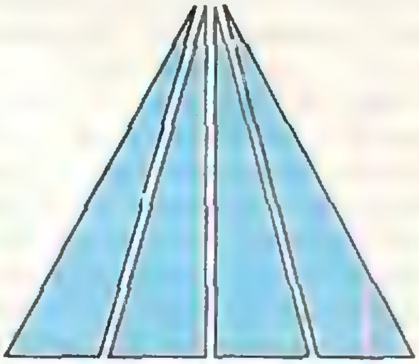


Рис. 5.

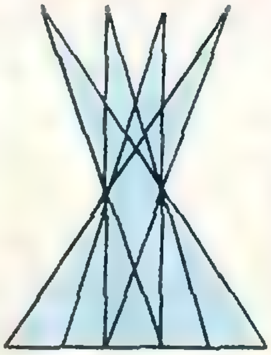


Рис. 6.

фигуре не удастся: можно повернуть отрезок в положение AC, а «перепрыгнуть» в положение DE нельзя! Однако можно поступить так. Добавим к фигуре, изображенной на рисунке 3, отрезки AH и DH и сектор радиуса 1 с центром H, как показано на рисунке 4. В получившейся фигуре уже можно будет повернуть отрезок из положения AB в положение DF: надо будет из положения AC' сдвинуть отрезок вдоль AH в положение HK, затем повернуть его внутри сектора в положение HL, а потом сдвинуть вдоль HD в положение DE.

Что же мы получили в результате? Площадь фигуры, изображенной на рисунке 3, существенно меньше площади первоначального равностороннего треугольника (так как две половинки этого треугольника перекрываются). При переходе же от рисунка 3 к рисунку 4 мы добавляем лишь отрезки AH, DH (они имеют нулевую площадь) и сектор с центром H, причем площадь этого сектора можно сделать как угодно малой (нужно лишь точку H взять далеко, чтобы угол AHD был маленьким).

А что если разрезать равносторонний треугольник не на две, а на четыре части (рис. 5)? Тогда, производя параллельные переносы этих частей (чтобы они перекрывались), мы получим фигуру (рис. 6), в которой можно отрезок длины 1 повернуть на угол 15°, затем, «перепрыгнув» в параллельное положение, повернуть еще на 15°, потом еще и еще на 15°. А так как «прыгать» нашему отрезку не разрешается, то придется, как и на рисунке 4, добавить отрезки и секторы (рис. 7). В фигуре, изображенной на рисунке 7, отрезок длины 1, непрерывно перемещаясь, может повернуться на угол 60°. При этом сумму площадей добавленных секторов можно сделать как угодно малой (надо лишь взять точки H_1, H_2, H_3 достаточно далеко). В то же время площадь фигуры, изображенной на рисунке 6, значительно меньше площади исходного равностороннего треугольника, поскольку четыре части, на которые разрезан этот треугольник, многократно перекрываются.

Теперь становится понятным общее направление доказательства: *надо*

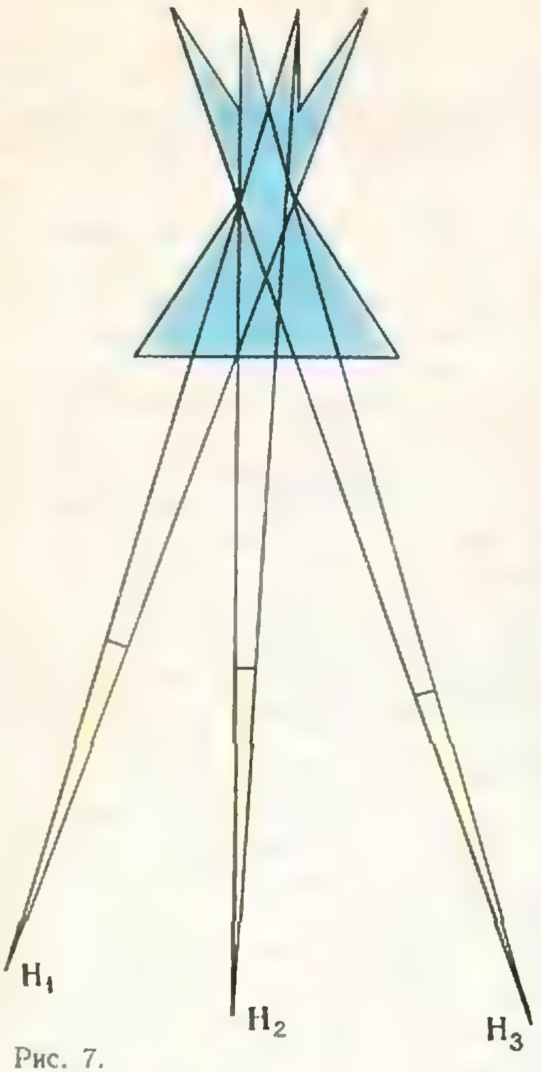


Рис. 7.

разрезать равносторонний треугольник на части отрезками, исходящими из вершины, и произвести параллельные переносы этих частей таким образом, чтобы фигура, покрываемая всеми этими частями, имела площадь, меньшую чем ε, где ε — данное положительное число.

3. Изложенные соображения, однако, вовсе еще не дают доказательства. Это только направление, в котором следует его искать. Самое трудное впереди: надо придумать, *как* следует сдвигать части, чтобы за счет многократных перекрытий получилась фигура достаточно малой площади. Способ сдвига частей и подсчета площади, предложенный И. М. Виноградовым, состоит в следующем.

Возьмем произвольное натуральное число m и разобьем основание равностороннего треугольника на 2^m равных частей. Соединив точки деления с вершиной, мы получим разбиение равностороннего треугольника на 2^m частей, которые условимся называть *клиньями*. Проведем, кроме того, прямые, параллельные основанию и разбивающие высоту треугольника на m равных частей; эти прямые обозначим, начиная от вершины, через $l_1, \ldots, l_{m-1}$ (рис. 8).

Рассмотрим два соседних клина. Прямая l_1 высекает в них одинаковые отрезки. Сдвинем эти клинья так, чтобы эти отрезки «перепрыгнули» друг через друга (рис. 9), и «склеим» теперь эти два клина, то есть фигуру, полученную из этих двух клиньев, будем рассматривать как единое целое при всех дальнейших параллельных переносах. Такое склеивание произведем для каждых двух соседних

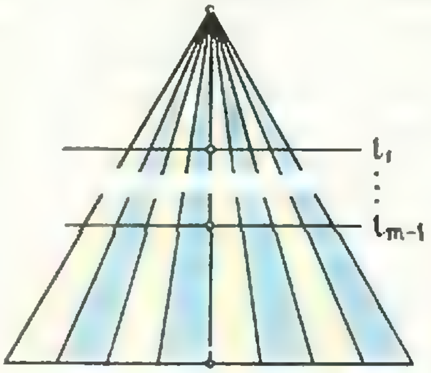


Рис. 8.

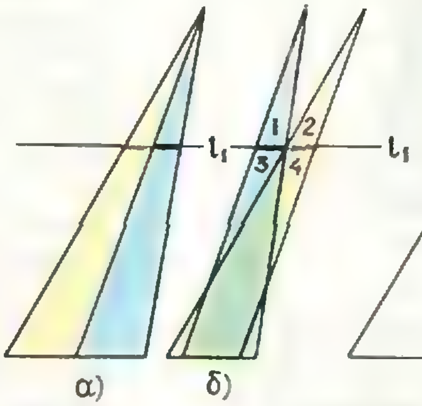


Рис. 9.

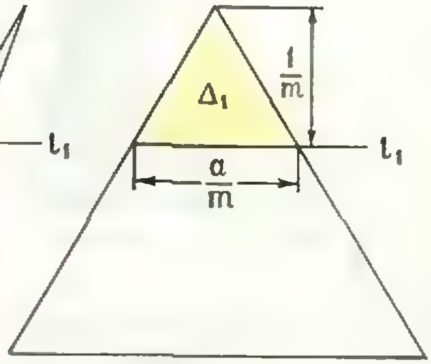


Рис. 10.

клиньев: 1-й склеим со 2-м, 3-й с 4-м, . . . , (2^m-1)-й с 2^m-м.

Фигуру, полученную склеиванием двух клиньев, разобьем на части следующим образом: выделим из нее треугольник с вершиной на прямой l_1 и четыре «хвостика». Каждый из «хвостиков» представляет собой треугольник с высотой $1/m$ (напомним, что высота исходного равностороннего треугольника равна 1). Основание же каждого «хвостика» равно $\frac{a}{m\cdot 2^m}$, где $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ — сторона исходного равностороннего треугольника. Следовательно, общая площадь всех четырех «хвостиков» равна $2\cdot\frac{a}{m^2\cdot 2^m}$, а так как всего имеется 2^{m-1} пар склеенных клиньев, то общая сумма площадей «хвостиков» равна a/m^2. Площадь S_1 равностороннего треугольника Δ_1, отсекаемого от исходного треугольника прямой l_1 (рис. 10), равна $\frac{a}{2m^2}$. Таким образом, общая сумма площадей всех «хвостиков» равна $2S_1$. Выбросим теперь все эти «хвостики» из рассмотрения, запомнив сумму их площадей. При всех дальнейших сдвигах сумма площадей отброшенных «хвостиков» может лишь уменьшиться (за счет перекрытий).

Треугольники, остающиеся после отбрасывания всех «хвостиков» (число этих треугольников равно 2^{m-1}), будем теперь рассматривать как новые клинья. Сдвинув их вместе, получим из этих 2^{m-1} новых клиньев равносторонний треугольник с высотой $1-\frac{1}{m}$ (рис. 11). Теперь уже не прямая l_1, а прямая l_2 отсекает от него маленький равносторонний треугольник Δ_2, причем он, очевидно, равен треугольнику Δ_1. Сдвигая и склеивая новые клинья так же, как и раньше, мы опять получим «хвостики», общая сумма площадей которых равна $2S_1$, и «совсем новые» клинья, вершины которых лежат на прямой l_2.

Из этих «совсем новых» клиньев, сдвигая их, получим равносторонний треугольник с высотой $1-\frac{2}{m}$, а склеивая «совсем новые» клинья попарно, опять получим «хвостики», сумма площадей которых равна $2S_1$, и т. д.

Проделаем все m шагов такого построения (на последнем m-м шаге получится просто равносторонний треугольник, равный Δ_1, так что ничего и сдвигать не надо). Мы видим, что от первоначальных клиньев после постепенного отрезания «хвостиков» ничего не осталось. Иначе говоря, площадь фигуры, получившейся из первоначальных клиньев после всех сдвигов и склеиваний, меньше общей суммы площадей всех «хвостиков», то

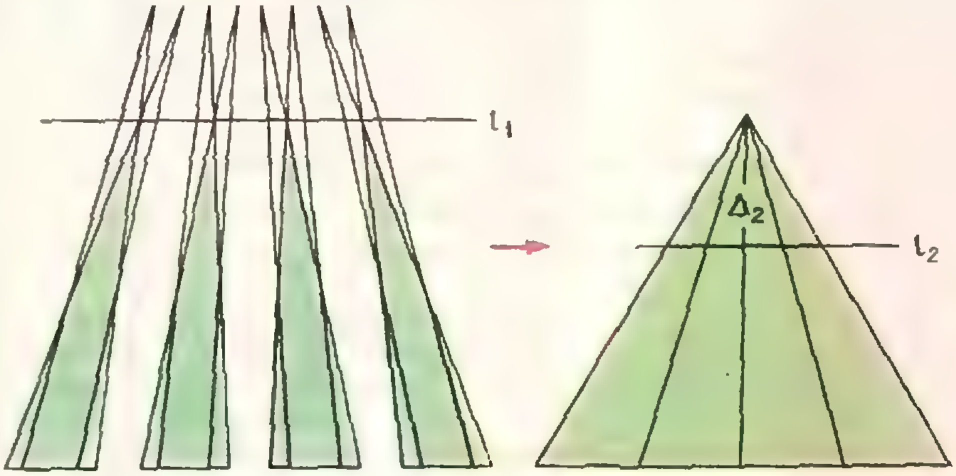


Рис. 11.

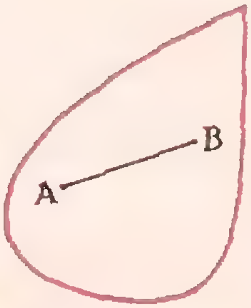


Рис. 12.

есть меньше, чем

$$m\cdot 2S_1 = 2m\cdot\frac{a}{2m^2} = \frac{a}{m} = \frac{2}{\sqrt{3}m} < \frac{2}{m}.$$

Теперь ясно, что, взяв m достаточно большим, мы сможем сделать эту площадь как угодно малой. Доказательство закончено!

4. И все же, может интуиция нас не обманывает? Может быть, круг диаметра 1 действительно является наименьшей по площади фигурой, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1, но только не среди любых фигур (как мы видели, это неверно), а среди всех выпуклых фигур? Ведь те фигуры достаточно малой площади, о которых шла речь выше (см. рис. 7), являются очень «рыхлыми», разбросанными и уж, во всяком случае, невыпуклыми. Напомним, что выпуклой называется такая фигура, которая вместе с каждыми двумя точками целиком содержит и соединяющий их отрезок (рис. 12). Так вот, верно ли, что среди всех выпуклых фигур, в которых отрезок длины 1 может совершить полный оборот, круг диаметра 1 имеет наименьшую площадь?

Оказывается, что и это неверно. Поясним, в чем здесь дело. Пусть F — фигура, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1. Возьмем какую-либо прямую l и проведем две *опорные прямые* l_1 и l_2 фигуры F, параллельные l, то есть две прямые, между которыми «зажата» фигура F (рис. 13). Так как отрезок, совершающий в фигуре F полный оборот, должен в какой-то момент занять положение, перпендикулярное прямой l, то расстояние между прямыми l_1 и l_2 (его называют *шириной* фигуры F в направлении, перпендикулярном l) не меньше 1. Итак, ширина фигуры F в любом направлении не меньше 1.

Кажется вполне естественным предположение, что у фигуры наименьшей *площади ширина во* всех направлениях должна быть равна 1 (иначе площадь, видимо, можно было бы уменьшить). Посмотрим, к чему приведет нас это предположение.

Прежде всего возникает вопрос, что собой представляет фигура, у которой во всех направлениях ширина равна 1? Нередко отвечают, что такой фигурой может быть только круг диаметра 1. Однако это неверно! Существует бесконечно много различных фигур, у которых ширина равна 1 во всех направлениях; их называют *фигурами постоянной ширины* 1. На рисунке 14 показаны две такие фигуры. Обе фигуры ограничены дугами окружностей радиуса 1. Из двух параллельных опорных прямых одна проходит через угловую точку, а другая касается дуги окружности, и расстояние между этими прямыми равно 1. Первая из изображенных на рисунке 14 фигур имеет специальное название: *треугольник Рело* (по имени механика, который впервые заинтересовался свойствами этой фигуры и пытался использовать ее при конструировании механизмов).

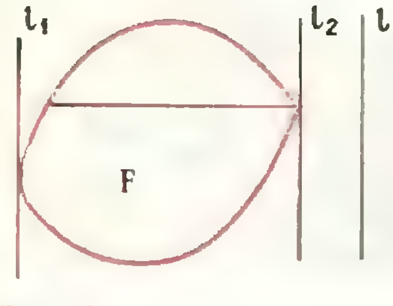


Рис. 13.

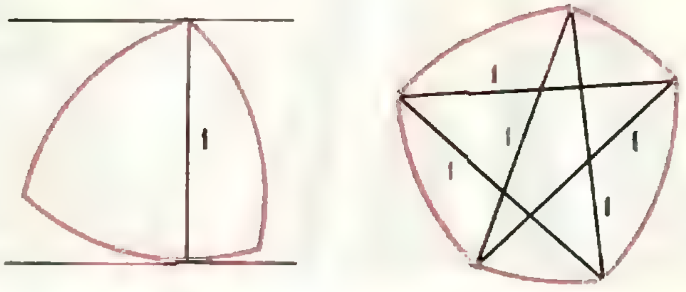


Рис. 14.

Фигуры постоянной ширины обладают многими замечательными свойствами. Например, длина кривой, ограничивающей любую фигуру постоянной ширины 1, равна π, то есть равна длине окружности диаметра 1 (теорема Барбье). Далее, из всех фигур постоянной ширины 1 наибольшую (а не наименьшую!) площадь имеет круг, а наименьшую площадь имеет треугольник Рело; во всяком случае, нетрудно проверить, что площадь треугольника Рело равна $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}7048$ — заметно меньше площади круга, равной $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$. Отметим еще, что две параллельные опорные прямые, проведенные к фигуре постоянной ширины 1, имеют с этой фигурой две общие точки, причем отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен опорным прямым (и, следовательно, имеет длину 1; рис. 14). Из этого следует, что во всякой фигуре постоянной ширины 1 отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Доказательство сформулированных здесь утверждений можно найти в упоминавшейся выше книге «Выпуклые фигуры» (см. также журнал «Квант» № 3, 1971 г., стр. 21).

Итак, если бы сделанное выше предположение было верно, то наименьшей (по площади) выпуклой фигурой, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1, был бы треугольник Рело (а вовсе не круг). Но, оказывается (как это на первый взгляд ни кажется странным), что и треугольник Рело не является наименьшей фигурой. Такой наименьшей фигурой служит *равносторонний треугольник с высотой* 1 (его площадь равна $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5773$, то есть намного меньше площади треугольника Рело). Доказательство этого факта можно найти на стр. 256—258 книги «Выпуклые фигуры».

О квадратах чисел

Вот несколько интересных фактов, характеризующих квадраты чисел. Если две последние цифры квадрата одинаковы, но не ноль, то это обязательно должны быть две четверки. Самый маленький такой квадрат — 144. На конце могут быть и три четверки — это число 1444. Но квадратов с четырьмя четверками на конце уже не существует. Не бывает многозначных квадратов со всеми одинаковыми цифрами и таких, у которых все цифры — нечетные. Попробуйте это доказать.

Среди двузначных чисел есть число, обладающее любопытными свойствами. Это число 13. Его квадрат — 169. Прочитав это число справа налево, получим 961 — число, квадратный корень из которого равен 31, то есть 13, прочитанное наоборот. И, наконец, сумма цифр 169 равна 16, а сумма цифр 13 равна 4, то есть корню квадратному из 16. Среди двузначных чисел есть еще только одно число с таким же набором свойств, попробуйте его найти.

Есть квадраты, которые содержат все цифры, причем каждую только один раз. Это вы, наверное, знаете. Но, оказывается, существуют два пятизначных числа: 57321 и 60984, содержащих вместе все десять цифр, а квадраты этих чисел: 3285697041 и 3719048256, сами состоят из десяти разных цифр.

В. И. Бахмин

Задача Потенота

Л. С. Хренов

Если на плоскости даны три точки A, B и C (то есть известно взаимное расположение этих точек), то для определения положения четвертой точки M обычно достаточно знать два угла: $\angle ABM = \alpha$ и $\angle BMC = \beta$. Такая задача известна под названием задачи Потенота. Она возникает, например, при определении местоположения корабля, с которого видны три маяка, координаты которых известны, а также во многих других случаях.

Геометрическое решение задачи Потенота

Задача Потенота сводится к построению дуги AB (рис. 1), из любой точки M которой отрезок AB виден под углом α, и дуги BC, из точек которой отрезок BC виден под углом β. Для этого достаточно от прямой AB отложить угол α и к полученной прямой AV восставить перпендикуляр AP, а к отрезку AB восставить перпендикуляр в его середине. Точка O_1 пересечения этих перпендикуляров будет центром окружности, проходящей через точки A, B и M, а линия AB будет хордой дуги, вмещающей угол α. Аналогично строится центр O_2 окружности, проходящей чрез точки B, C и M с дугой BC, вмещающей угол β.

Пересечение построенных таким образом двух окружностей и определит положение точки M, так как у них не может быть более двух общих точек. Одной из них, согласно построению, является точка B, второй будет искомая точка M. Следовательно, задача Потенота имеет вполне определенное и единственное решение, за исключением случая, когда обе окружности сливаются в одну, проходящую через точки A, B, C и M (рис. 2). В этом случае искомая точка M лежит на окружности, проходящей через точки A, B и C, и для определения положения точки M надо знать еще какие-либо расстояния.

Однако, несмотря на простоту геометрического решения задачи Потенота, на практике оно не применяется.

На практике для решения задачи Потенота применяют аналитические*) или графические способы с использованием мензулы, кипрегеля или алидады и буссоли.

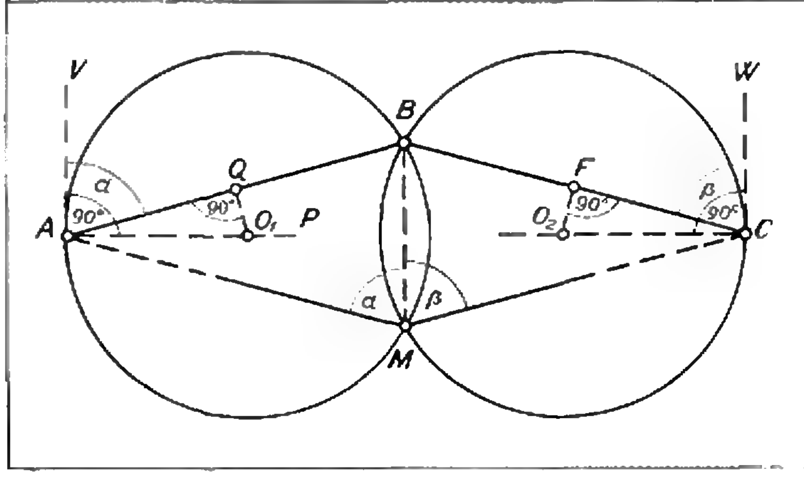


Рис. 1.

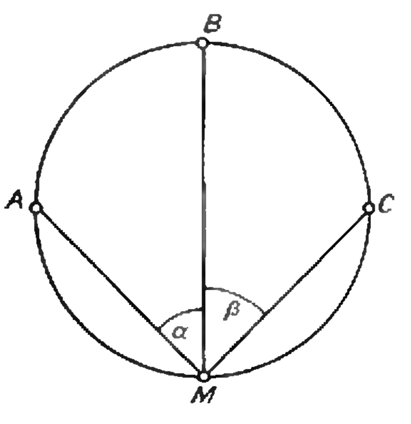


Рис. 2.

---

*) Первое аналитическое решение было предложено в 1616 году голландским астрономом и математиком В. Снеллиусом (1580—1626), позднее, в 1692 году французский математик Л. Потенот (1660—1732) предложил более удачное решение этой задачи, что и послужило основанием называть эту задачу его именем.

Мензула представляет собой столик для черчения плана. Она состоит из штатива и планшета — чертежной квадратной доски, которая укрепляется на подставке. Подставка имеет три подъемных винта, позволяющих приводить верхнюю плоскость планшета в горизонтальное положение, при этом используется накладной уровень или уровень на алидаде (кипрегеле, см. ниже). Подставка вместе с планшетом прикрепляется к штативу при помощи станового винта. Подставки могут быть деревянными или металлическими. Центрировочная вилка (см. рисунок) служит для центрирования точки на планшете над соответствующей точкой местности: к нижнему концу вилки подвешивается отвес, верхний конец вилки находится на одной вертикали с нижним.

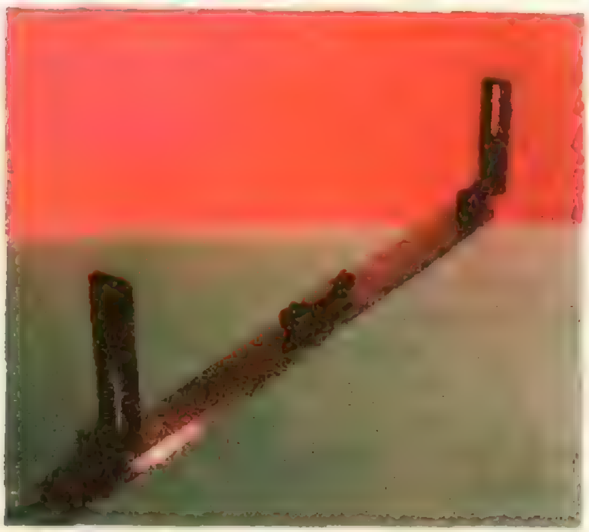
Алидада служила для визирования с точки мензулы на точку местности. Она состоит из линейки, на которой выгравирован поперечный масштаб, и двух диоптров со щелями и волосками; на линейке алидады обычно помещается цилиндрический уровень для приведения планшета мензулы в горизонтальное положение. Теперь вместо алидады с диоптрами используется кипрегель.

Кипрегель состоит из линейки с поперечным масшбатом и уровнем, и из зрительной трубы, вращающейся на оси колонки так, что плоскость, описываемая визирной осью трубы (коллимационная), проходит через скошенный край линейки кипрегеля. На мензуле должно получаться горизонтальное проложение местности, поэтому для измерения углов наклона изготовляются кипрегели с вертикальными кругами, с помощью которых углы наклона измеряются с точностью до 1′. Две дополнительные нити (дальномерные), расположенные симметрично относительно средней оси, видны в поле зрения трубы кипрегеля. Они служат для определения расстояний на местности.

Буссоль (усовершенствованный компас) применяется для ориентирования мензулы по странам света. Буссоль имеет вид круглой или прямоугольной коробки с градусными делениями, в центре вращается магнитная стрелка. Буссоль устроена всегда так, что линия, соединяющая деления 0°—0° или 0°—180° и проходящая через центр буссоли, параллельна внешним краям коробки.

Графическое решение задачи Потенота

При наличии трех точек на мензульном планшете, соответствующих трем точкам на местности (то есть при наличии, например, карты местности), можно определить положение четвертой точки, произведя наблюдения только в ней, то есть решить задачу Потенота.



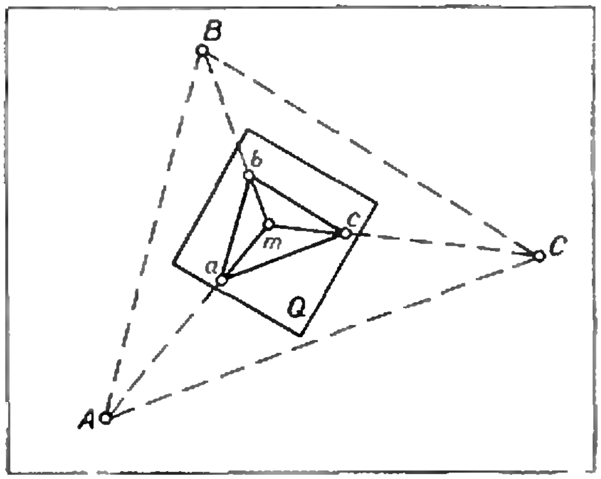


Рис. 3.

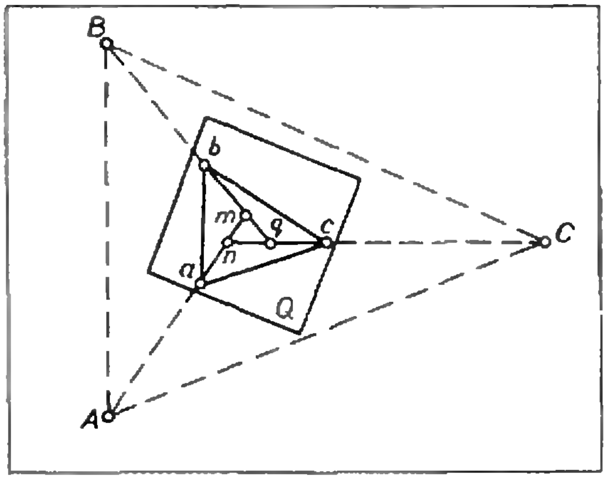


Рис. 4.

Для графического решения задачи Потенота предложено более 100 различных способов*). В их основе лежит ориентирование мензульного планшета. Пусть три точки *a*, *b* и *c* (рис. 3), составляющие на мензульном планшете *Q* треугольник *abc*, соответствуют трем точкам *A*, *B* и *C* на местности. Планшет *Q* ориентирован, если он расположен так, что $ab \parallel AB$, $ac \parallel AC$ и $bc \parallel BC$.

В этом случае направления, прочерченные через *a*, *b* и *c* при визировании на соответствующие точки местности, пересекутся в одной точке. Для доказательства построим точку *m* как точку пересечения прямых *Aa* и *Bb*. Подобно уменьшив ΔABC так, чтобы *AB* перешло в *ab*, мы получим $\Delta abc'$, но поскольку $ac \parallel AC \parallel ac'$ и $bc \parallel BC \parallel bc'$, точки c' и *c* обязаны совпасть, а прямые *Aa*, *Bb* и *Cc* пересекутся все в точке *m*, соответствующей на планшете точке *M*, из которой мы визируем на точки *A*, *B*, *C*.

Если же мензульный планшет, находящийся в точке *M*, ориентирован лишь приблизительно, то те же прочерченные три направления *aA*, *bB* и *cC* не пересекутся в одной точке, а образуют небольшой треугольник (рис. 4), называемый треугольником погрешностей. И чем точнее произведено ориентирование мензульного планшета, находящегося в определяемой точке, тем будут меньше размеры треугольника погрешностей. Это положение и использовал И. Леман (1765—1811) при графическом решении задачи Потенота, предложив способ приближений, используемый в практике мензульной съемки.

Способ И. Лемана. Мензулу устанавливают над искомой точкой *M*, приводят верхнюю плоскость планшета в горизонтальное положение и возможно точнее ориентируют планшет*) *Q* так, чтобы линии *ab*, *bc* и *ac* на планшете были параллельны линиям *AB*, *BC* и *AC* на местности. После этого через три данные точки на планшете визируют на соответствующие точки местности и прочерчивают по ребру линейки визирного прибора (кипрегель, алидада) линии (как на рисунке 3). Если ориентирование планшета произведено точно, то три направления, прочерченные через точки *a*, *b* и *c* при визировании на соответствующие точки местности, пересекутся в искомой точке *m*.

Если же планшет *Q*, находящийся в точке *M* местности, ориентирован неточно, то три прочерченных направления *aA*, *cC* и *bB* пересекутся на планшете не в одной точке, а образуют треугольник погрешностей.

---

*) Первый из них был предложен в 1592 году мексиканцем Cucunutti (The Canadian Surveyor, 1936).

*) Для более точного ориентирования планшета рекомендуется пользоваться буссолью.

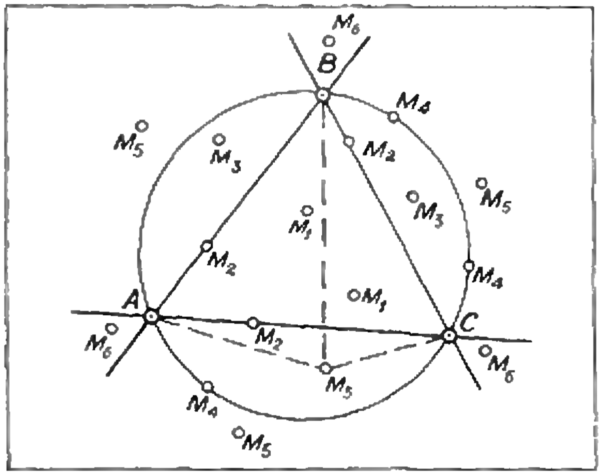


Рис. 5.

Точное положение точки m зависит от расположения на местности точки M относительно точек A, B и C.

Искомая точка M относительно трех известных A, B и C может занимать одно из следующих шести положений (рис. 5):

M_1 — внутри треугольника ABC;

M_2 — на одной из сторон треугольника ABC;

M_3 — между стороной треугольника ABC и окружностью, проведенной через точки A, B и C;

M_4 — на окружности, проходящей через точки A, B и C;

M_5 — за окружностью, проведенной через точки A, B и C, и за стороной треугольника ABC;

M_6 — за окружностью, но внутри угла, образованного продолжением двух сторон треугольника ABC.

При определении (на глаз) на планшете положения искомой точки следует учитывать следующее.

Если искомая точка m, соответствующая точке M местности, находится внутри данного треугольника ABC (например, M_1), то и на планшете она должна находиться внутри треугольника погрешностей.

Если искомая точка расположена за одной из сторон треугольника ABC (например, M_3) или между продолженными сторонами угла этого треугольника (например, M_6), то искомая точка на планшете и треугольник погрешностей будут находиться по разные стороны от средней линии визирования (из точки M, лежащей вне треугольника ABC, этот треугольник виден под углом, меньшим 180°, и тогда можно назвать направления визирования, образующие между собой наибольший угол, — крайними, а оставшееся — средним).

Если искомая точка занимает положение M_5, то искомая точка на планшете и треугольник погрешностей должны находиться по одну сторону от средней линии визирования.

Наметив на планшете на глаз положение искомой точки, уточняют ориентирование планшета: выбирают наиболее удаленную от m точку a, b или c (пусть это будет a) и поворачивают планшет так, чтобы точки m, a и A были на одной прямой.

После исправления ориентирования мензульного планшета вновь визируют через намеченную точку на три точки местности A, B и C и прочерчивают направления. Если при этом все три направления пересекутся

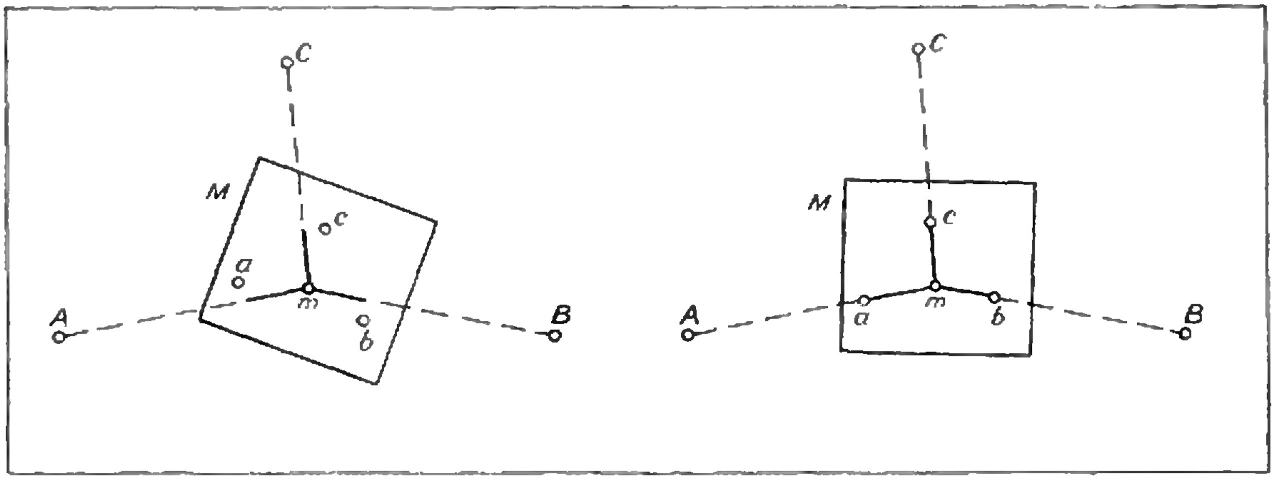


Рис. 6.

в одной точке, то назначенное положение точки будет соответствовать на планшете искомой точке; в противном случае опять получится треугольник погрешностей, но менее первого, относительно которого можно с большей точностью назначить на глаз положение искомой точки. Такие действия повторяют до тех пор, пока прочерчиваемые направления не пересекутся в одной точке.

Примечание. Получив второй треугольник погрешностей, можно соединить их одноименные вершины прямыми; в пересечении этих прямых и будет находиться искомая точка m на планшете. Полученную таким образом точку используют для нового ориентирования планшета и прочерчивания трех направлений.

Способ А. П. Болотова. Оригинальное решение задачи Потенота, не потерявшее своего практического значения и до сих пор, было предложено А. П. Болотовым (1803—1853) (этот способ особенно близок к описанному выше геометрическому решению).

При этом способе над точкой M местности устанавливают мензулу с нанесенными на ее планшете точками a, b и c, соответствующими на местности точкам A, B и C (рис. 6). Накрывают планшет восковкой (калькой) и на ней намечают точку m, расположенную примерно над искомой точкой M местности. Затем через точку m на восковке визируют последовательно на точки A, B и C местности и прочерчивают направления mA, mB и mC. После этого восковку перемещают по мензульному планшету так, чтобы прочерченные на ней направления mA, mB и mC прошли через точки a, b и c на планшете. Если теперь, придержав восковку в таком положении, проколоть ее в точке m, то на планшете получится истинное положение искомой точки.

Для контроля произведенных действий рекомендуется проверить ориентирование планшета по самой удаленной от него точке A, B или C.

В тихой гавани

Три пирата делят добычу, состоящую из 10 пиастров, 10 дублонов и бочки вина. Тара для разливания вина у них имеется, но, увы, у каждого пирата свое мнение о сравнительной ценности пиастров, дублонов и вина.

Все, однако, согласны с тем, что бочка вина стоит дороже четырех пиастров и дороже четырех дублонов.

Докажите, что пиратам удастся разделить добычу так, что каждый пират получит часть, сто́ящую, по его мнению, не меньше, чем часть каждого из остальных.

А. Тоом

Упаковка квадратов

Н. Б. Васильев, Г. А. Гальперин,

Эта заметка посвящена решению одной задачи из «Задачника «Кванта» (M155).

Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Доказать, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2.

Мы приведем два решения этой задачи, основанные на двух разных способах укладки квадратов, и обсудим некоторые ее обобщения. Итак, пусть нам дано несколько квадратов общей площадью 1. Занумеруем их в порядке убывания сторон, то есть так, чтобы сторона k-го по номеру квадрата была не меньше, чем сторона $(k+1)$-го $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Мы должны доказать, что все эти квадраты можно разместить в квадрате со стороной $\sqrt{2}$.

Первое решение. Проведем на плоскости горизонтальный отрезок длины $\sqrt{2}$, а из его концов — вертикальные лучи. В образовавшуюся «полуполосу» (рис. 1) мы будем упаковывать квадраты.

Способ упаковки очень прост. Положим первый, самый большой квадрат в левый нижний угол (сторону этого квадрата мы обозначим через x), рядом с ним справа — второй по величине квадрат и так далее до тех пор, пока очередной квадрат не перестанет умещаться в пределах полуполосы. Закончив «первый этаж», строим «перекрытие» — продолжаем верхнюю сторону левого квадрата на всю ширину полосы, на полученном отрезке точно так же строим «второй этаж», затем — третий и так далее, пока не кончатся все квадраты (рис. 2).

Теперь для того, чтобы доказать утверждение задачи, мы должны доказать, что высота h (см. рис. 2) не превосходит числа $\sqrt{2}$. (Прежде чем читать решение дальше, попробуйте провести это доказательство сами!).

Для этого, считая величины h и x заданными, оценим снизу сумму площадей квадратиков, упакованных в полуполосу. Перенесем мысленно каждый из квадратиков, прилежащих к левой «стене» (кроме самого нижнего квадрата $x \times x$), в конец предыдущего этажа, как показано на рисунке 3. Из способа построения этажей следует, что все эти квадраты вылезут за правую стену. Теперь продлим горизонтальные стороны каждого из этих новых квадратов влево вплоть до самого левого квадрата соответствующего этажа (при этом образуются прямоугольники, которые на рисунке 3 обведены красными линиями). Ясно, что сумма площадей всех квадратов (кроме $x \times x$) не меньше, чем сумма площадей полученных прямо-

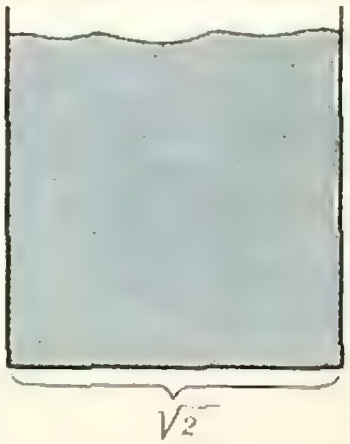


Рис. 1.

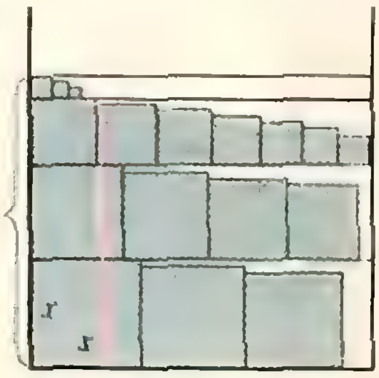


Рис. 2.

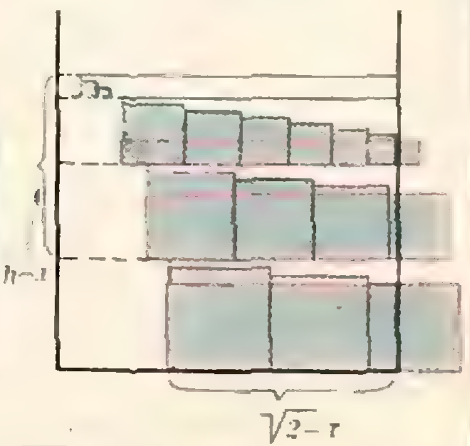


Рис. 3.

угольников. Поскольку горизонтальное основание каждого из прямоугольников не меньше $\sqrt{2}-x$, а сумма их высот равна $h - x$, то сумма площадей всех прямоугольников не меньше $(\sqrt{2}-x)(h-x)$, следовательно, сумма площадей всех квадратов не меньше $x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x)$.

Но по условию сумма их площадей равна 1. Итак,

$$x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x)\leqslant 1,$$

откуда

$$h\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1-x^2}{\sqrt{2}-x}+x=\sqrt{2}\left[3-\left(y+\frac{1}{y}\right)\right],$$

где

$$y=2-x\sqrt{2}.$$

Следовательно, поскольку величина $y+{}^1/y$, стоящая в круглых скобках, при любом y не меньше 2, $h\leqslant\sqrt{2}$.

Второе решение. Если в первом решении описать способ расстановки квадратов было очень легко, а основную трудность составляло доказательство нужной оценки, то во втором решении, наоборот, трудно описать способ упаковки (а оценка будет почти очевидной). Не вполне точные описания приводимой ниже упаковки предложили несколько читателей.

Мы опишем здесь способ упаковки совершенно формально. Описание «алгоритма» — предписания, согласно которому мы предлагаем упаковывать квадраты, — содержится в следующем абзаце. После того как описанная там операция проделана k раз, в квадрате $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ оказываются размещенными первые k квадратов (мы по-прежнему считаем, что они занумерованы в порядке убывания сторон), а остальная часть квадрата $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ разбита на $(k+1)$ прямоугольников, которым приписаны определенные номера (от 0 до k). Некоторые прямоугольники объявляются «закрытыми» (это означает, что больше в них не будут вставляться квадраты), а остальные — «открытыми» (в любой открытый прямоугольник помещается $(k+1)$-й квадрат). Вначале «прямоугольником № 0» объявляется весь квадрат $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$. Итак, алгоритм расстановки квадратов:

k-й шаг ($k=1, 2, 3, \ldots$). Выбираем из всех не закрытых прямоугольников тот, у которого наибольший номер. (Пусть этот номер — m). Размещаем в его углу k-й квадрат. Продолжаем сторону этого квадрата, параллельную меньшей стороне прямоугольника m (если стороны прямоугольника равны, выбираем любую из них) так, чтобы часть прямоугольника m, не занятая квадратом k, разбилась на два прямоугольника. Из этих двух прямоугольников мы присваиваем номер k тому, который составляет прямоугольник вместе с квадратом k, а номер m теперь сохраняем за оставшейся частью «бывшего» прямоугольника m (рис. 4). За всеми квадратами и прямоугольниками, кроме прямоугольников m и k, сохраняются старые номера. Если k-й квадрат, который мы разместили, — не последний, то проверим, помещается ли $(k+1)$-й квадрат в прямоугольник k и в прямоугольник m, и если нет, то объявляем соответствующий прямоугольник (или оба) закрытым.

(На рисунке 5 для примера показана возможная ситуация после 4-го шага. Для $k=5$ номер m бу-

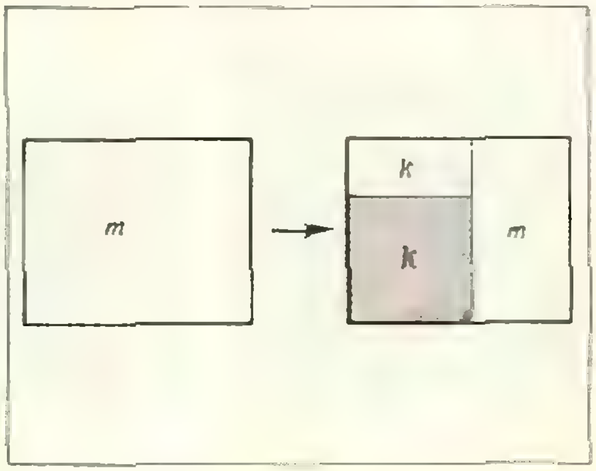


Рис. 4.

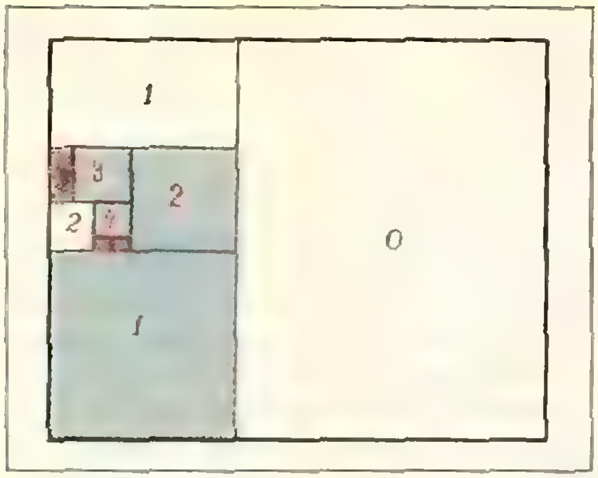


Рис. 5.

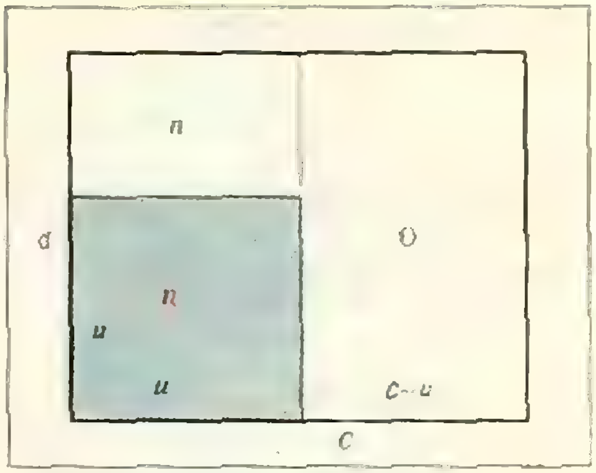


Рис. 6.

дет равен 2; бежевые прямоугольники закрыты).

Нужно еще доказать, что не может встретиться случай, когда окажутся закрытыми все прямоугольники, даже «номер 0». Прежде чем доказать это, заметим, что площадь закрытого прямоугольника номер k меньше, чем площадь квадрата номер k (это — основная идея нашего способа укладки!). Действительно, ясно, что до тех пор, пока меньшая сторона прямоугольника k равна стороне квадрата k, он еще не может быть закрыт (в него влезает даже k-й квадрат).

Теперь предположим, что на некотором n-м шаге прямоугольник 0, который имел до этого шага размеры $c \times d$ $(c \geqslant d)$, закрыт. Ясно, что на n-м шаге $m = 0$, то есть все прямоугольники с номерами $m > 0$ закрыты, и их площадь меньше площади соответствующих квадратов.

Пусть u и v — стороны квадратов с номерами n и $n+1$. Если квадрат $v \times v$ не помещается в прямоугольник $d \times (c-u)$ (рис. 6), то $v \geqslant c-u$, поэтому

$$2(u^2+v^2) \geqslant (u+v)^2 \geqslant c^2 \geqslant cd,$$

то есть сумма площадей n-го и $(n+1)$-го квадратов не меньше половины площади прямоугольника $c \times d$. Получается, что уже первые $(n+1)$ квадратов составляют больше половины площади квадрата $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Противоречие.

Предлагаем несколько задач, уточняющих и обобщающих утверждение задачи об упаковке квадратов.

1. Два равных квадрата со стороной a нельзя разместить без пересечения в квадрате, сторона которого меньше $2a$.

2. Квадраты, сумма площадей которых равна S и сторона наибольшего из которых равна x, можно упаковать в квадрат со стороной $x + \sqrt{S-x^2}$.

3. Эти квадраты можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, если $a \geqslant x$, $b \geqslant x$ и $ab \geqslant 2S$.

4. Если любую систему квадратов общей площадью 1 можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, где $a \geqslant b$, то верно по крайней мере одно из двух условий: 1) $a \geqslant \sqrt{3}$ и $b \geqslant 1$ 2) $a \geqslant \sqrt{2}$ и $b \geqslant 2/\sqrt{3}$.

Д. Клейтман и М. Кригер доказали, что в прямоугольнике $1 \times \sqrt{3}$ можно разместить любую систему квадратов общей площади 1. Правдоподобно, что аналогичное утверждение верно и для прямоугольника $\sqrt{2} \times 2/\sqrt{3}$.

5. Прямоугольники, сумма площадей которых равна S и наибольшая из сторон которых равна x, можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, если $a \geqslant x$ и $ab \geqslant 2S + a^2/8$.

6. Кубы общим объемом V можно упаковать в куб объема $4V$.

Этому виду задач более 1600 лет

Б. А. Кордемский

Менялась фабула и форма записи задачи, накапливались способы решения, но суть оставалась неизменной: *найти целые* (чаще натуральные) x *и* y, *удовлетворяющие уравнению*

$$ax+by=c \tag{1}$$

с заданными целыми коэффициентами a, b *и* c.

Может быть, c — это 1001 сказка Шехерезады, а нас интересует, сколько ночей потребуется Шехерезаде, чтобы рассказать все свои сказки, если x ночей она будет рассказывать по 5 сказок, а остальные сказки по 3 за y ночей.

Сказочнице, очевидно, потребуется $x+y$ ночей, где x и y — натуральные корни уравнения $5x+3y=1001$.

А может быть, c — это 10 *р.* 01 *к.*, которые некто израсходовал на x поездок автобусом (по 5 копеек за рейс) и y поездок трамваем (3 копейки за рейс). Ответ на вопрос, сколько всего совершено поездок, заложен в том же уравнении $5x+3y=1001$.

Корни этого уравнения рассказывают также и о тех точках на прямой $5x+3y=1001$ (см. рисунок), обе координаты которых — натуральные числа (или целые — в какой-нибудь другой задаче).

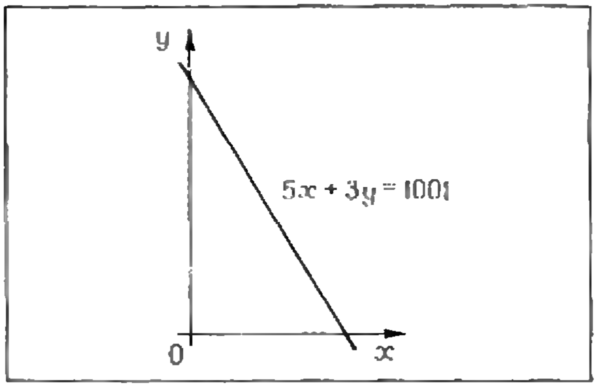


Рис. 1.

Уравнения, в которых из множества решений выделены только целочисленные значения неизвестных, часто называют диофантовыми в честь знаменитого математика II—III веков н. э. Диофанта из Александрии.

Вопросы теории, связанные с условием существования целочисленных, в частности, натуральных решений уравнения вида $ax+by=c$, рассмотрены в статье В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики» («Квант» № 6, 1972). Мы этой теорией заниматься не будем, а приступим к решению конкретного уравнения $5x+3y=1001$, чтобы показать на этом примере разнообразные приемы, помогающие отыскать целочисленные решения уравнений *).

Решение способом «изобретательного школьника»

Делим обе части уравнения $5x+3y=1001$ на меньший коэффициент: $\frac{5}{3}x+y=\frac{1001}{3}$; справа и слева выделяем целые части: $x+\frac{2}{3}x+y=333+\frac{2}{3}$;

$$x+y+\frac{2(x-1)}{3}=333. \tag{2}$$

Так как x и y целые, то должно быть целым и $\frac{x-1}{3}$; полагаем $\frac{x-1}{3}=t$; тогда $x=3t+1$. Подставляя в (2), получаем

$$3t+1+y+2t=333;\quad y=332-5t.$$

В упомянутой статье В. Н. Вагутена доказывается, что полученные для x и y выражения являются «общими решениями», то есть содержат в себе все целочисленные решения данного уравнения.

---

*) Напомним только, что существование целочисленных решений уравнения (1) гарантируется условием НОД $(a,\ b)=1$, так что уравнение $5x+3y=1001$ имеет решения в целых числах.

Придавая параметру t значения $t = 0, 1, 2, \ldots, 66$, найдем 67 пар возможных натуральных корней данного уравнения.

Теперь предположим дополнительно, что Шехерезада хотела бы распределить свою тысячу и одну сказку между как можно бо́льшим числом ночей *). Этому требованию удовлетворяет $\max(x + y)$ — наибольшая из сумм пар корней уравнения. Имеем $x + y = 333 - 2t$; очевидно, $\max(x + y)$ достигается при $t = 0$.

Итак, Шехерезада расскажет свои сказки самое большее за 333 ночи, если 332 ночи будет рассказывать по 3 сказки и только одну ночь — 5 сказок. Она может сократить срок своей «работы» и довести его до 201 ночи, если только 2 раза (при максимально возможном $t = 66$) будет рассказывать по 3 сказки и 199 раз — по 5 сказок.

Дополнительный вопрос для размышлений

Предположим, что, отыскивая целочисленные решения некоторого уравнения «способом изобретательного школьника», вы получили $x + y + \frac{4y - 1}{3} = 77$. Как теперь надо рассуждать и действовать, чтобы подходящим образом выразить сначала y, а затем x через целое t?

Решение способом «изобретательного математика» **)

Для уравнения $ax + by = c$ порядок действий таков: найти остаток m от деления a на b (пусть $a > b$) и остаток n от деления c на b; если $n = 0$, то получаем сразу $x = bt$, $y = \frac{c}{b} - at$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; если $n \neq 0$, то умножить m последовательно на $1, 2, \ldots, (b - 1)$ и выписать последовательность остатков от деления этих произведений на b. В полученной последовательности будет число n (если его не будет, то и целочисленных решений уравнения не будет). Номер места, занимаемого числом n в последовательности остатков, и есть одно из возможных значений x.

Применим этот способ к уравнению $5x + 3y = 1001$. Имеем: $m = 2$, $n = 2$, умножаем $m = 2$ на каждый член последовательности $\{1;\ 2\}$, получаем $\{2;\ 4\}$; делим на 3 и выписываем остатки: $\{2;\ 1\}$. Замечаем, что число $n = 2$ занимает в этой последовательности остатков первое место, следовательно, $x = 1$. Этим определяется и соответствующее значение $y = 332$.

Легкий и вполне общий способ решения в целых числах линейных неопределенных уравнений с двумя неизвестными!

Но «способ изобретательного математика», в отличие от предыдущего приема, дал нам всего лишь одну пару корней: (1; 332). Дефект способа? Отнюдь нет. Рассмотрите формулы «общего решения» задачи, полученные «способом школьника»: $x = 1 + 3t$, $y = 332 - 5t$.

«Частные решения» $x_0 = 1$, $y_0 = 332$ одинаковы в обоих способах, а коэффициенты при t (3 и 5) определяются коэффициентами решаемого уравнения: $3 = b$; $-5 = -a$. И это не случайное совпадение, а закономерность: если (x_0, y_0) — какое-либо целое решение уравнения $ax + by = c$, причем a и b взаимно просты, то все его целые решения определяются формулами: $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Решение «способом сравнений по модулю»

Это приятный и часто самый быстрый способ отыскания целочисленных решений уравнения $ax + by = c$.

Для нашей цели достаточно напомнить, что утверждение $a \equiv b \pmod{m}$

---

*) Разумеется, при условии, что каждую ночь она рассказывает либо три, либо пять сказок.

**) Изобретатель способа Taylor L. F., «Numbers», London, 1970 не дал ему названия.

эквивалентно тому, что $a-b$ делится на m, или $a = b + km$ (a, b и k — целые, m — натуральное).

Далее, если $a \equiv b \pmod{m}$, то верно, что $a \equiv b + km \pmod{m}$, где k — любое целое число *). Пусть, например, $3x \equiv 2 \pmod 5$, тогда

$$3x \equiv 2 + 2\cdot 5 \pmod 5,\quad 3x \equiv 12 \pmod 5 \quad \text{и} \quad x \equiv 4 \pmod 5.$$

Заметим, что деление обеих частей сравнения по модулю m на общий множитель q допустимо лишь в том случае, когда q и m — взаимно простые числа.

Предварительный пример. Пусть требуется решить сравнение $11x \equiv 2 \pmod{23}$. Непрактично прибавлять к правой части по 23 до получения числа, кратного 11. Надо искать более изящный путь. Пригоден, например, такой: написать, что $22x \equiv 4 \pmod{23}$, затем из левой части вычесть $23x$; получим $-x \equiv 4 \pmod{23}$, $x \equiv -4 \pmod{23}$ и, наконец, $x \equiv 19 \pmod{23}$.

Для решения уравнения $5x + 3y = 1001$ «способом сравнений по модулю» действовать надо так: $3y = 1001 - 5x$; $3y \equiv 1001 \pmod 5$. Так как $1001 = 200\cdot 5 + 1$, то $3y \equiv 1 \pmod 5$, или $3y \equiv 6 \pmod 5$; $y \equiv 2 \pmod 5$, следовательно, $y = 2 + 5k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Легко видеть, что это решение эквивалентно ранее полученному

$$y = 332 - 5t \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Решение «способом цепной дроби»

Этот способ отыскания целочисленных решений уравнения $ax + by = c$ предполагает умение превратить дробь $\frac{a}{b}$, составленную из коэффициентов уравнения, в «цепную»:

$$\frac{a}{b} = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n],$$

вычислить числитель и знаменатель предпоследней «подходящей» дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ непосредственно или пользуясь рекуррентными формулами

$$P_{k+1} = P_k\cdot a_{k+1} + P_{k-1};$$
$$Q_{k+1} = Q_k\cdot a_{k+1} + Q_{k-1},$$

где $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$ и $P_1 = a_0\cdot a_1 + 1$ и $Q_1 = a_1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Решение задачи завершается применением готовых формул *), представляющих общее решение данного уравнения

$$\begin{cases} x = (-1)^{n-1}\cdot c\cdot Q_{n-1} + b\cdot t, \\ y = (-1)^{n}\cdot c\cdot P_{n-1} - a\cdot t, \\ t = 0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ \ldots \end{cases} \qquad (3)$$

Обратимся к уравнению $5x + 3y = 1001$ в последний раз. Проделаем подробно превращение числа $\frac{5}{3}$ в цепную дробь:

$$\begin{array}{rr|l} & 5 & 3 \\ - & 3 & \overline{1} \quad \ldots\ a_0 = 1, \\ \hline & 3 & 2 \\ - & 2 & \overline{1} \quad \ldots\ a_1 = 1, \\ \hline & 2 & 1 \\ & & \overline{2} \quad \ldots\ a_2 = 2, \end{array}$$

откуда $\frac{5}{3} = [1;\ 1,\ 2]$. Составим «подходящие» дроби

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1} = 1;\quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{1};$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{5}{3}$$

(последняя подходящая дробь не нужна, кроме того, она всегда равна дан-

---

*) Много полезных сведений о сравнении целых чисел по модулю приведено в статьях А. А. Егорова «Сравнения по модулю и арифметика остатков» («Квант» № 5, 1970), М. И. Башмакова «Нравится ли вам возиться с целыми числами» («Квант» № 3, 1971) и в упомянутой выше статье В. Н. Вагутена.

*) Вывод этих формул можно найти в специальных пособиях, или, например, в книге «Энциклопедия элементарной математики», книга первая, 1951 (статья А. Я. Хинчина «Элементы теории чисел»). О цепных дробях рассказано также в статье Н. М. Бескина «Цепные дроби» («Квант» № 1, 1970).

ной дроби; мы выполнили вычисление только для напоминания способа непосредственного составления «подходящих» дробей).

Так как здесь $n = 2$, то числитель P_{n-1} и знаменатель Q_{n-1} предпоследней «подходящей» дроби равны соответственно

$$P_{n-1} = P_1 = 2; \quad Q_{n-1} = Q_1 = 1.$$

Все готово к применению формул (3): $x = -1 \cdot 1001 \cdot 1 + 3t$, $y = 1 \cdot 1001 \cdot 2 - 5t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Окончательно, $x = -1001 + 3t$, $y = 2002 - 5t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

По виду решения как будто опять получился иной результат, не схожий с предыдущими, но легко обнаружить его эквивалентность всем предыдущим записям общего решения рассматриваемого уравнения. Так, $x = 1$ и $y = 332$ получаются отсюда при $t = 334$. Теперь решим еще одну задачу.

После кораблекрушения

Пять моряков высадились на остров и к вечеру собрали кучу кокосовых орехов. Дележ отложили на утро. Один из них, проснувшись ночью, пересчитал добычу, угостил одним орехом мартышку, а из остальных орехов взял себе точно $\frac{1}{5}$ часть, после чего вновь лег спать и быстро уснул. За ночь так же поступили один за другим и остальные моряки; при этом каждый не знал о действиях своих предшественников. Наутро они поделили оставшиеся орехи поровну, но для мартышки в этот раз лишнего ореха не осталось. Сколько орехов собрали моряки?

Решение. Обозначим искомое число орехов через x. Выражая последовательные действия моряков уравнениями, получаем $x = 5a + 1$; $4a = 5b + 1$; $4b = 5c + 1$; $4c = 5d + 1$; $4d = 25y + 1$ (обдумайте смысл предлагаемых уравнений).

Эта система сводится к одному неопределенному уравнению

$$256x = 2101 + 15625\,y.$$

Быстрое решение в целых числах этого громоздкого уравнения будет приятной наградой за терпеливое ознакомление с предложенными четырьмя способами — можно выбрать из них наиболее эффективный для данной задачи. Ответ в этой задаче таков: $x = 3121$ — наименьшее из возможных натуральных значений x.

Замечание. В книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» («Мир», 1971), в которой есть эта задача, написано, что она «принадлежит к числу наиболее часто решаемых, но наименее поддающихся решению диофантовых головоломок» (стр. 234). Когда эта задача в 1926 году появилась в одной газете (без решения и ответа), то 20 лет после этого не прекращался поток писем в газету либо с просьбой сообщить ответ, либо с вариантами собственных решений.

Упражнения

1. Найти целые решения уравнения $10x + 21y = 23$ каждым из описанных способов.

2. Найти двузначное число, у которого увосьмеренное число единиц на 13 меньше утроенного числа десятков.

3. Некоторое число экскурсантов, разместившихся поровну в 5 автобусах (каждый автобус вмещает не более 54 человек), были доставлены на вокзал. Там к ним присоединились еще 7 человек, и все экскурсанты распределились поровну в 14 вагонах. Сколько всего было экскурсантов?

4. Имеются ли на прямой $13x - 5y + 96 = 0$ точки с целыми координатами, не превосходящими по абсолютной величине число 10?

5. Пусть n — натуральное число. Найти целые решения уравнения

$$nx + (n + 1)\,y = 2n + 1.$$

6. Надо разлить 15 л жидкости в бутыли емкостью в 0,5 л и 0,8 л так, чтобы все использованные бутыли были полными. Сколько потребуется бутылей той и другой емкости?

7. Доказать, что при любом нечетном x выполняется сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, то есть квадрат любого нечетного целого числа при делении на восемь дает в остатке единицу.

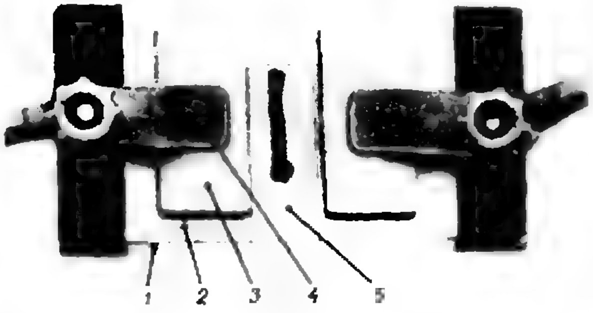
С какой скоростью движутся ионы

В. В. Майер, Р.-Э. Е. Шафир

Чтобы ответить на вопрос, с какой скоростью движутся ионы, можно поставить опыт, в котором непосредственно видно движение носителей заряда. Простой прибор для проведения подобного опыта был предложен в 1948 году С. А. Арцыбышевым и И. А. Бильдзюкевичем.

На стеклянную пластинку (*1*) размером 50 × 60 *мм* положите вырезанную из плотной бумаги рамку (*2*) с окном размером примерно 25×40 *мм* (см. рисунок). На рамку параллельно друг другу на расстоянии около 15 *мм* наложите два алюминиевых электрода (*3*) размером 20×40 *мм*. Электроды прижмите пружинящими контактами (*4*). Между электродами поместите несколько капель водного раствора поваренной соли и наложите на бумажную рамку стеклянную полоску (*5*) так, чтобы получился тонкий слой электролита. Пластинка должна быть такой ширины, чтобы между ее краем и катодом оставался промежуток примерно в 1 *мм*.

Если теперь подать на электроды напряжение, то через раствор электролита NaCl пойдет ток. При этом ионы Na^+ и Cl^- будут перемещаться в растворе, но наблюдать их движение мы не можем. Поэтому нужно поступить так.



Разведите в пробирке с водой марганцевокислый калий так, чтобы жидкость получилась темно-красной. Наберите раствор пипеткой, а затем осторожно поместите 1—2 капли между стеклянной пластинкой и катодом.

Подайте на электроды постоянное напряжение порядка 20 *в*. Такое напряжение нетрудно получить, например, соединив последовательно несколько батареек карманного фонаря или батарей типа «Крона». Знак «минус» батареи нужно подсоединить к тому электроду, вблизи которого находится раствор $KMnO_4$.

После включения батареи ионы MnO_4^- начинают перемещаться от катода к аноду. Как только граница ионного облачка сместится на 2—4 *мм*, выключите напряжение и пипеткой аккуратно введите в промежуток между катодом и стеклянной пластинкой раствор поваренной соли.

Так мы получим полоску раствора марганцевокислого калия, за движением которой можно наблюдать.

Теперь при включении напряжения видно, как в пространстве между электродами перемещается окрашенная полоска, состоящая, очевидно, из ионов MnO_4^-. Вы можете передвинуть эту полоску от одного электрода до другого, а поменяв полярность, вернуть обратно.

Опыт получится удачным, если экспериментально правильно подобрать концентрацию раствора поваренной соли в воде. Концентрация должна быть такой, чтобы не происходило заметного электролиза (на электродах не должны выделяться пузырьки газа).

Скорость передвижения окрашенной полоски ионов меняется в зависимости от условий опыта. На нее влияет и концентрация раствора, и напряжение, подаваемое на электроды, и многие другие причины. Попробуйте, немного изменяя условия опыта, установить, с какой же скоростью могут двигаться ионы.

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 31 мая 1973 года по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», **М196, М198** *или «...Ф210». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.*

Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М196-М200; Ф208-Ф212

М196. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk.

А. Т. Колотов

М197. В прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов записаны mn произвольных положительных чисел. Найдем произведение чисел в каждом столбце и затем сумму S всех n таких произведений. Докажите, что если переставить числа в каждой строке в порядке возрастания, то сумма S для новой таблицы будет не меньше, чем в первоначальной. (На рисунке 1 приведен один пример ситуации, описанной в задаче; здесь $m = 3$, $n = 4$.)

Решите эту задачу:

а) для $m = n = 2$ (для таблицы 2×2);

б) для $m = 2$ и произвольного n (для таблицы из двух строк);

в)* для любых натуральных m и n.

1	5	6	2
4	3	7	2
1	2	1	2
4	30	42	8

S = 84

1	2	5	6
2	3	4	7
1	1	2	2
2	6	40	84

S = 132

Рис. 1.

М198. Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых AB и BC выбраны точки соответственно H и K так, что треугольники KAB и HCB равнобедренные ($KA = AB$ и $HC = CB$; рис. 2). Докажите, что треугольник KDH — тоже равнобедренный.

В. Л. Гутенмахер

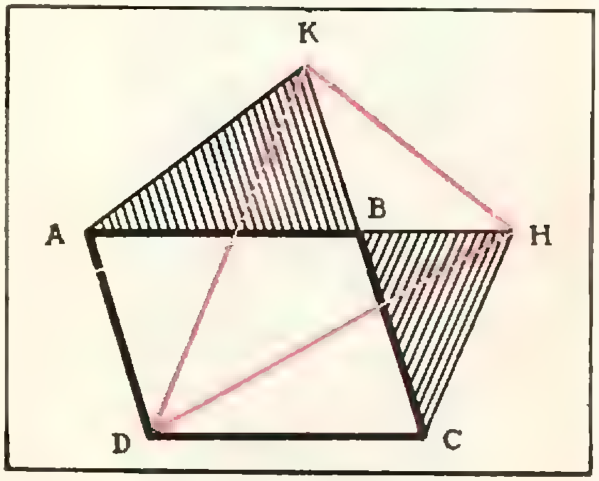


Рис. 2.

М199. а) Докажите, что сумма

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \cdots + + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \cdots$$

(сумма берется по всем целым i, $0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$) равна $\frac{n+1}{2^n}$.

б)* Докажите, что если p и q — различные числа и $p + q = 1$, то сумма

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2 q^2 - \cdots + + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \cdots,$$

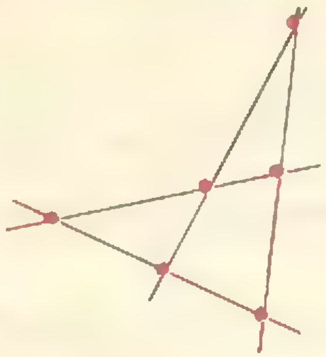


Рис. 3.

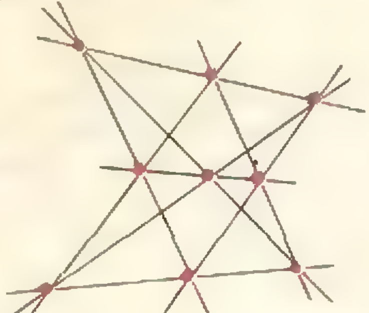


Рис. 4.

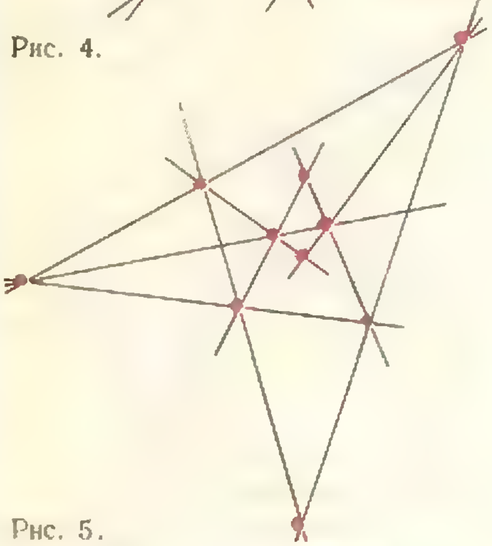


Рис. 5.

аналогичная предыдущей, равна

$$\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$$

при произвольном n.

Здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты, то есть $C_n^0=1$ и $C_n^k=$ $=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$. (О числах C_n^k рассказывалось в «Кванте» № 2 за этот год.)

Д. А. Фридкин

М200. а) На рисунке 3 изображены шесть точек, которые лежат по три на четырех прямых. Докажите, что можно 24 разными способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отображались в три точки, также лежащие на одной прямой.

б) На рисунке 4 девять точек лежат по три на девяти прямых, причем через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отображалась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображенной на рисунке 5.

А. Н. Колмогоров

Ф208. У автомобиля, участвующего в гонке, лопается шина. Оценить, с какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы шина не сминалась.

П. Л. Капица

Ф209*. Смоделировать траекторию заряженной частицы в магнитном поле можно, поместив в однородное магнитное поле закрепленный на концах гибкий проводник, по которому пропускается ток. Каким будет натяжение такого провода при токе 1 *а*, если он имитирует

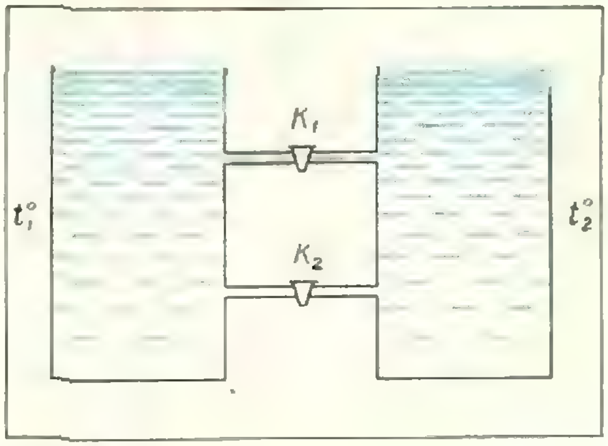


Рис. 6.

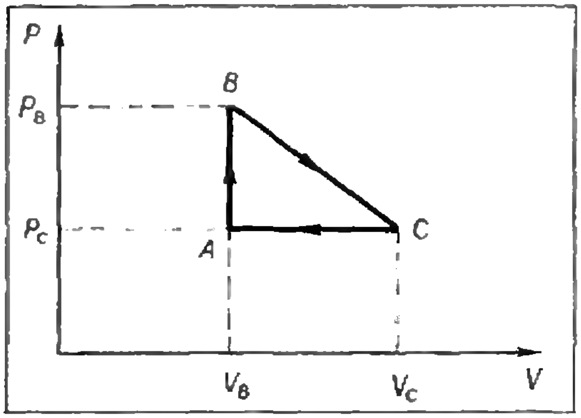


Рис. 7.

траекторию движения протона с энергией 1 *Мэв*, влетающего в магнитное поле перпендикулярно магнитным силовым линиям?

Ф210. Два одинаковых открытых сосуда соединены двумя одинаковыми трубками и доверху заполнены водой. Трубки закрыты кранами K_1 и K_2 (рис. 6). Температура воды в сосудах поддерживается постоянной, причем $t_1^\circ > t_2^\circ > 4^\circ$ С. Что будет происходить с водой в сосудах, если сначала открыть кран K_2, а затем (при открытом кране K_2) открыть кран K_1?

Ф211. С идеальным одноатомным газом проводится замкнутый процесс (цикл), показанный на рисунке 7. В точке C газ имел объем V_C и давление P_C, а в точке B — $V_B = \frac{1}{2} V_C$ и $P_B = 2P_C$. Найдите к. п. д. этого цикла и сравните его с максимальным теоретическим к. п. д. цикла, у которого температуры нагревателя и холодильника равны соответственно максимальной и минимальной температурам рассматриваемого цикла.

М. Е. Маринчук

Ф212. От сползающего в океан по крутому склону ледника на глубине 1 *км* откалывается глыба льда — айсберг (его высота меньше 1 *км*). Какая часть айсберга может расплавиться при всплывании? Температура льда и воды равна 0° С.

ЗАДАЧА

В четырех урнах лежат шары. Двое играющих поочередно берут шары из урн. За каждый ход играющий выбирает две урны и берет из них любое количество шаров, причем хотя бы один шар должен быть взят. Выигрывает тот, кто возьмет последний шар. При каких числах шаров в урнах начинающий выигрывает и как он должен играть, чтобы выиграть? Попробуйте обобщить эту игру.

Г. И. Подольный

В «Кванте» № 3 по недосмотру редакции в списке школьников 7—10 классов, получивших право участия в областных, краевых и республиканских олимпиадах по физике, оказались пропущены:

И. Братовская — г. Усолье-Сибирское, с. ш. 2;

В. Кууск—г. Ржев, с. ш. 4;

Г. Левин — г. Куйбышев, с. ш. 135.

Редакция приносит свои глубокие извинения.

Решения задач

М156-М159; Ф176-Ф177

М156. *В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка DC за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Доказать, что $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$.*

Задача имеет много простых геометрических решений. Вот одно из них.

Пусть O — центр прямоугольника (см. рис. 1) (точка пересечения MN и AC). K — точка пересечения QN с перпендикуляром, восставленным к отрезку MN в его середине O. Тогда, как легко видеть, $QM/MP = QO/OC = QK/KN$, и, следовательно, $MK \| PN$. Но треугольник MKN равнобедренный: в нем по построению KO — и высота, и медиана. Поэтому $\sphericalangle QNM = \sphericalangle KMN = \sphericalangle MNP$.

Нетрудно решить задачу и с помощью вычислений. Например, можно воспользоваться методом координат. Если ввести систему координат так, как показано на рисунке 2, то координаты (x_0, y_0) точки Q удовлетворяют двум уравнениям: $(p-2b)x - ay = -2ab$ (уравнение прямой MP) и $bx + ay = ab$ (уравнение прямой CA).

Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым. Получим (для $x = x_0$, $y = y_0$) $px_0 + ay_0 = 0$. Таким образом, угловой коэффициент прямой NQ равен $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{p}{a}$, то есть с точностью до знака равен угловому коэффициенту $\frac{p}{a}$ прямой NP. Поэтому $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$.

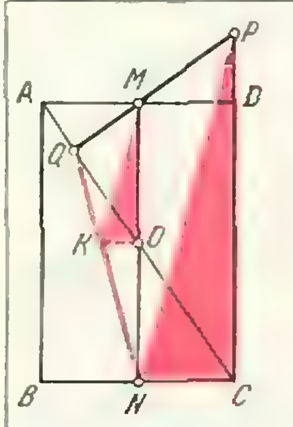


Рис. 1.

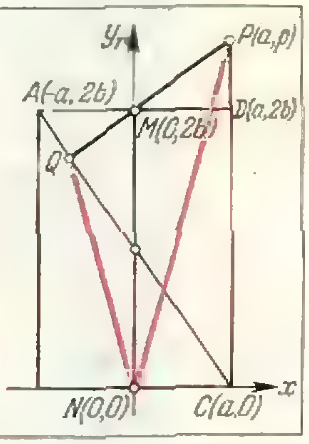


Рис. 2.

Н. Б. Васильев

М157. *Сумма n положительных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ равна 1. Пусть S — наибольшее из чисел*

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \quad \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots$$
$$\ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Найти наименьшее возможное значение S. При каких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оно достигается?

Предположим, что положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ и

$$\frac{a_1}{1+a_1} = \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \ldots =$$
$$= \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

(Ниже мы увидим, что такой набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ действительно существует.) Покажем, что при $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ величина S принимает наименьшее возможное значение. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — другой набор положительных чисел; сумма которых равна 1. Заметим, что если x_k увеличить, и все предыдущие ($x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$) не увеличивать, то величина

$$\frac{x_k}{1+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k} =$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{x_k} + \frac{x_1}{x_k} + \ldots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + 1} =$$
$$= \frac{1}{\frac{1+x_1+\ldots+x_{k-1}}{x_k} + 1}$$

увеличится.

Поэтому, если $b_1 > a_1$, то $\frac{b_1}{1+b_1} > \frac{a_1}{1+a_1}$; если $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 > a_2$, то $\frac{b_2}{1+b_1+b_2} > \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \frac{a_1}{1+a_1}$; если $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2$, $b_3 > a_3$, то $\frac{b_3}{1+b_1+b_2+b_3} > \frac{a_3}{1+a_1+a_2+a_3} = \frac{a_1}{1+a_1}$ и т. д. Поскольку набор чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отличается от набора $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а сумма чисел в обоих наборах одна и та же, то $b_k > a_k$ для некоторого k. Пусть k — наименьший индекс с таким свойством, то есть $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2, \ldots$ $\ldots, b_{k-1} \leqslant a_{k-1}$, $b_k > a_k$, тогда

$$\frac{b_k}{1+a_1+\ldots+a_k} > \frac{a_k}{1+a_1+\ldots+a_k} = \frac{a_1}{1+a_1}.$$

Таким образом, наибольшее из чисел

$$\frac{b_1}{1+b_1}, \quad \frac{b_2}{1+b_1+b_2}, \ldots$$

$$\ldots, \frac{b_n}{1+b_1+\ldots+b_n} \text{ больше } \frac{a_1}{1+a_1}$$

$\Bigl($наибольшего из чисел $\dfrac{a_1}{1+a_1}$,

$$\frac{a_2}{1+a_1+a_2}, \ldots, \frac{a_n}{1+a_1+\ldots+a_n}\Bigr).$$

Остается решить в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \\ \dfrac{x_1}{1+x_1} = \dfrac{x_2}{1+x_1+x_2} = \ldots \\ \ldots = \dfrac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}. \end{cases}$$

Уравнение $\dfrac{x_1}{1+x_1} = \dfrac{x_k}{1+x_1+\ldots+x_k}$ (для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_k$) преобразуется к виду $x_k = (1+x_1+\ldots$ $\ldots+x_{k-1})\,x_1$, так что данная система эквивалентна системе

$$\begin{gathered} x_2 = (1+x_1)\,x_1, \\ x_3 = (1+x_1+x_2)\,x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (1+x_1+\ldots+x_{n-1})\,x_1, \\ x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \end{gathered}$$

которая в свою очередь эквивалентна системе

$$\begin{gathered} x_2 = (1+x_1)\,x_1, \\ x_3 = (1+x_1)^2\,x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (1+x_1)^{n-1}\,x_1, \\ x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \end{gathered}$$

то есть числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+x_1)$ и суммой $(1+x_1)^n-1$.

1. Теперь легко находится решение системы:

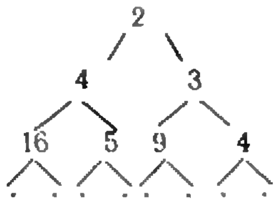
$$a_1 = \sqrt[n]{2}-1, \quad a_2 = \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right), \quad a_3 = \sqrt[n]{2^2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right), \ldots$$

$$\ldots, \quad a_n = \sqrt[n]{2^{n-1}}\left(\sqrt[n]{2}-1\right).$$

Искомое значение $\hat{S}$ равно

$$\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

M158. *Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число $a > 1$, а далее под каждым числом k слева пишется k^2, а справа — число $k+1$. Например, при $a=2$ получается таблица*



Доказать, что в каждой строчке таблицы все числа различны.

Предположим, что в некоторых строчках таблицы встречаются одинаковые числа. Пусть n — номер самой верхней из этих строк, p и q — равные числа в строке с номером n. Так как в предыдущей строке равных чисел нет, то p и q получены из чисел предыдущей строки разными действиями: одно — возведением в квадрат, другое — добавлением 1. Пусть $p = r^2$, $q = s+1$, так что $s = r^2 - 1$. Числа r и s расположены в $(n-1)$-й строке. Рассмотрим путь, на котором из числа a получилось число s. Предположим, что на этом пути встречались возведения в квадрат. Так как $s < r^2$, то самым большим числом, возводившимся в квадрат, могло быть $r-1$. Но $s-(r-1)^2 = 2r-2$. Это означает, что число s из числа $(r-1)^2$ могло быть получено только добавлением единиц, причем для этого требовалось $2r-2$ шага. Таким образом, число s получилось из числа a не менее чем за $2r-1$ шагов, так что $n-2 \geqslant 2r-1$. Но все числа, получающиеся из числа a за такое число шагов, не меньше, чем $a+2r-1 > r$, в то время как число r, расположенное в той же строке, что и s, получено из a за то же число шагов, что и s. Таким образом, при получении числа s из числа a не было ни одного возведения в квадрат. Это же можно сказать и про число $q = s+1$. Следовательно, q — наименьшее крайнее правое число в своей строчке, что противоречит равенству $q = p$.

Задачу можно обобщить следующим образом.

Пусть f — функция, определенная на множестве натуральных чисел и принимающая натуральные значения. Предположим, что $f(n+1) - f(n) > n+1$ для каждого натурального числа n. Построим теперь треугольную таблицу по той же схеме, что и в задаче, но применяя каждый раз

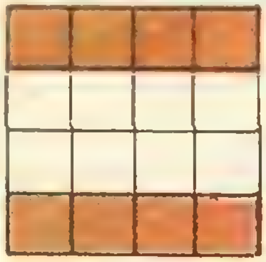


Рис. 3.

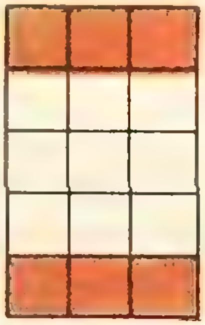


Рис. 4.

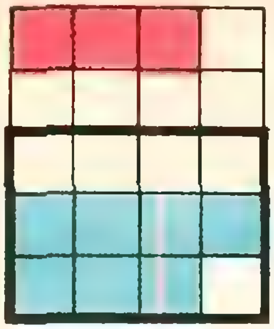


Рис. 5.

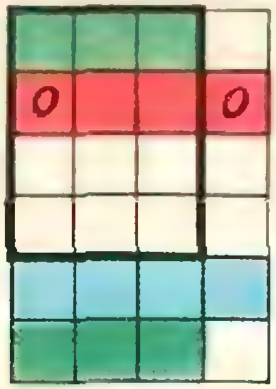
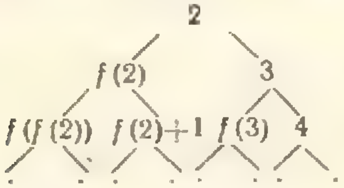


Рис. 6.

функцию f вместо возведения в квадрат:



Тогда в *каждой строке таблицы все числа различны.*

Приведем одно интересное следствие задачи **М158**.

Пусть бесконечная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что для каждого натурального числа n

$$a_n < a_{n+1} + a_{n^2},$$

так что $a_2 < a_3 + a_4$, $a_3 < a_4 + a_9$, $a_4 < a_5 + a_{16}$ и т. д. Тогда из этих чисел можно выбрать несколько, сумма которых больше 1000. Число 1000 здесь можно заменить любым другим числом. (Как говорят, ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*)

Условию (*) удовлетворяет, в частности, последовательность $a_n = 1/n$ так что из этого следствия можно получить еще одно доказательство знаменитой теоремы о расходимости гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$: *сумма различных чисел, обратных натуральным, может быть сколь угодно большой.*

М159. *Можно ли расставить цифры* 0, 1, 2 *в клетках листа клетчатой бумаги размером* 100×100 *таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике* 3×4, *стороны которого идут по сторонам клеток, оказалось бы три нуля, четыре единицы и пять двоек?*

Предположим, что нам удалось заполнить лист клетчатой бумаги требуемым образом. Заметим прежде всего что в двух закрашенных на рисунке 3 прямоугольниках поровну нулей, поровну единиц и поровну двоек, поскольку они дополняются одной и той же фигурой до прямоугольника 3×4. По той же причине поровну нулей, поровну единиц и поровну двоек в прямоугольниках, закрашенных на рисунке 4. Докажем теперь ряд утверждений о расположении нулей, единиц и двоек.

1. *В прямоугольнике* 1 × 3 *не более одного нуля.*

Действительно, если в красном прямоугольнике 1 × 3 на рисунке 5 более одного нуля, то более одного нуля в каждом из двух голубых прямоугольников 1 × 3 и 1 × 4. В то же время оба голубых прямоугольника входят в один прямоугольник 3 × 4, в котором должно быть три нуля.

2. *В прямоугольнике* 1 × 4 *не более одного нуля.*

Если в красном прямоугольнике 1 × 4 на рисунке 6 два нуля, то они расположены именно так, как показано на рисунке. Два нуля должно быть и в голубом прямоугольнике и, следовательно, по одному нулю в каждом из зеленых прямоугольников. Но тогда в двух прямоугольниках 1 × 4, расположенных между красным и голубым прямоугольниками, нулей нет (иначе нашелся бы прямоугольник 3 × 4 более чем с тремя нулями). Следовательно, в обведенном прямоугольнике 3 × 4 лишь два нуля.

3. *В прямоугольнике* 1 × 4 *не менее одного нуля.*

Если в красном прямоугольнике 1 × 4 на рисунке 7 нет нулей, то нет их в голубом прямоугольнике. Следовательно, в двух прямоугольниках 1 × 4 между ними должно быть три нуля. В то же время в каждом из этих прямоугольников не более одного нуля.

Таким образом, в каждом прямоугольнике 1 × 4 ровно один нуль.

4. *В прямоугольнике* 1 × 4 *не более двух единиц.*

Если в красном прямоугольнике 1 × 4 на рисунке 8 более двух единиц, то более двух единиц в голубом прямоугольнике 1 × 4 и не менее двух — в зеленом прямоугольнике 1 × 3. Но тогда найдется прямоугольник 3 × 4, содержащий больше четырех единиц.

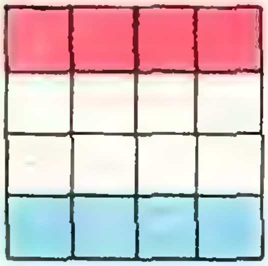


Рис. 7.

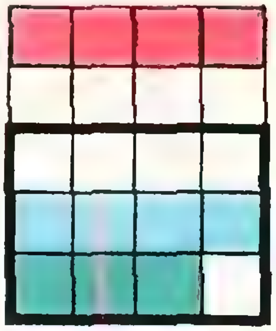


Рис. 8.

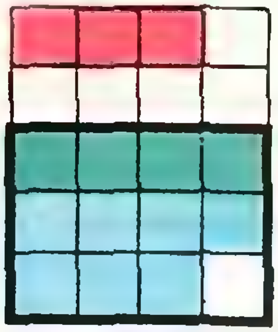


Рис. 9.

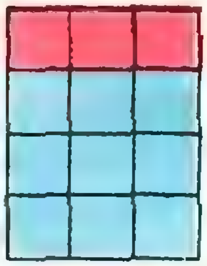


Рис. 10

5. *В прямоугольнике* 1×4 *не более двух двоек.*

Если в красном прямоугольнике 1×4 на рисунке 8 больше двух двоек, то больше двух двоек в голубом и не менее двух — в зеленом прямоугольнике. В прямоугольнике 1×4, расположенном над голубым прямоугольником, есть хотя бы одна двойка, так как в нем не более двух единиц и один нуль. Следовательно, в обведенном прямоугольнике 3×4 больше пяти двоек.

6. *В прямоугольнике* 1×3 *не более одной единицы.*

Если в красном прямоугольнике 1×3 на рисунке 9 две единицы, то по две единицы в голубых прямоугольниках 1×4 и 1×3. Так как в зеленом прямоугольнике есть единица (в нем не более двух двоек и один нуль), то в обведенном прямоугольнике 3×4 больше четырех единиц.

7. *В прямоугольнике* 1×3 *не менее одной единицы.*

Если в красном прямоугольнике 1×3 на рисунке 10 нет ни одной единицы, то поскольку в каждом из голубых прямоугольников не более одной единицы, в прямоугольнике 3×4 оказывается лишь три единицы.

Таким образом, в каждом прямоугольнике 1×3 ровно одна единица.

Возьмем какой-нибудь нуль. Рядом с ним есть единица, так как в противном случае нашелся бы прямоугольник 1×3 без единиц. Так как в прямоугольнике 1×4 должен быть один нуль, а в прямоугольнике 1×3 — одна единица, то две следующие клетки занимают двойки: | 0 | 1 | 2 | 2 |. В следующей за двойками клетке должен находиться как нуль, так и единица, так как иначе найдется соответственно или прямоугольник 1×4 без нулей, или прямоугольник 1×3 без единиц.

Мы, наконец, получили требуемое противоречие.

Все проведенные рассуждения справедливы, если красный прямоугольник, с которого мы каждый раз начинали, расположен не слишком близко к границе клетчатого листа. Но размеры листа (100×100) вполне достаточны для этого. Попробуйте выяснить, для какого наименьшего квадратного листа верно утверждение задачи.

Ю. И. Ионин

Правильные решения некоторых из задач **М151—М159** прислали (после фамилий указана последняя цифра номеров решенных задач): *С. Абрамов* (Москва) 1; *О. Аганина* (Москва) 2; *А. Бараов* (Урванский р-н КБАССР) 3; *О. Бегларян* (Сисиан Арм. ССР) 1, 6; *О. Белолипецкий* (Киржач) 1; *В. Бенхан* (Калинин) 1; *А. Блинов* (Москва) 6; *А. Блох* (Харьков) 1—4, 6, 7; *А. Вальков* (Ташкент) 1, 6; *С. Васильев* (Уфа) 1, 6; *Г. Высоцкая* (Красноярск) 1; *Л.* и *И. Готман* (Арзамас) 6; *А. Григорян* (Баку) 1—4, 6, 7; *С. Григорян* (Ереван) 1, 2; *Е. Гурвич* (Ташкент) 6; *Е. Гусев* (Павлоград Днепропетровской обл.) 1, 4, 6; *К. Данильченко* (Волгоград) 1, 6; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) 1; *Р. Егорян* (Раздан) 1; *А. Жданов* (Славянск-на-Кубани) 1; *В. Зарубин* (Летний Отдых Московской обл.) 1, 6; *Э. Зейфман* (Оргеев МАССР) 1; *Л. Зеликов* (Одесса) 1, 2; *С. Зенович* (Ташкент) 1, 6; *А. Израилевич* (Свердловск) 1; *В. Карасев* (Ярославль) 1; *В. Квасницын* (п. Коркино Челябинской обл.) 6; *В. Ковтунец* (с. Шостаков Ровенской обл.) 1, 7; *В. Колосов* (Киев) 6; *И. Комолев* (Фирсановка Московской обл.) 6; *М. Левин* (Витебск) 6; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) 1; *М. Ломакин* (с. Керш-Борки Тамбовской обл.) 1, 6; *Г. Лутингер* (Черновцы) 1; *Е. Мазур* (Дербент) 1; *А. Макаричев* (Львов) 1, 2, 4, 6, 7; *П. Манелов* (Тбилиси) 6; *Б. Марьяновский* (Винница) 1, 2, 4; *И. Меджибовский* (Москва) 1; *Е. Метт* (Ленинград) 1; *О. Мясникова* (Умань) 1; *Г. Надирян* (Ереван) 1; *С. Нужный* (Куйбышев) 1; *А. Округ* (п. Донецкий, г. Кировск) 6; *Б. Палатник* (Баку) 6, 8; *В. Панарин* (Красноярск) 1; *П. Парамонов* (Москва) 1—4; *А. Разгуляев* (Клин) 1, 3, 8; *А. Резников* (Киев) 1; *И. Ривилис* (Тирасполь) 6; *Р. Рожков* (Рязань) 6; *Л. Рудицер* (Харьков) 1; *М. Сапир* (Свердловск) 1, 2, 4; *В. Сац* (Киев) 1; *Я. Симкин* (Москва) 1, 6; *Р. Сирота* (Харьков) 1, 2, 6; *С. Скоков* (д. Соковки, г. Слободской) 1;

А. Слинкин (Москва) 1, 6, 7; *В. Смирнов* (Болохово Тульской обл.) 6; *В. Спиридонов* (Мартыновка Николаевской обл.) 1, 6; *П. Сухов* (Саратов) 1, 6; *А. Ткач* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.) 1; *А. Тужилин* (Москва) 1, 2; *Э. Туркевич* (Черновцы) 1—3, 6—9; *А. Усанов* (Степногорск) 1; *К. Хачатурян* (Москва) 1, 8, 9; *А. Федорченко* (Богуслав Киевской обл.) 1; *А. Фельдман* (Ленинград) 1, 2, 4; *С. Цанава* (Ачжвари Абхазской АССР) 4, 6; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 6; *Н. Чернов* (Кривой Рог) 1; *В. Чистяков* (Буй) 1; *П. Чумаченко* (Гагра Абхазской АССР) 6; *Л. Шахнабатова* (Ставрополь) 1; *А. Шерстюк* (Николаев) 1, 2, 4, 5, 9; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 1; *Г. Шуляк* (Ленинград) 1; *Б. Шуфер* (Ташкумыр Киргизской ССР) 1, 2.

Ю. П. Лысов

Ф176. *Почему легче проткнуть шилом дыру, если шило вращается? Почему нужно вращать гвоздь, чтобы вытащить его из стены? Почему, когда вы режете хлеб или мясо, вы двигаете нож взад-вперед, а когда режете сыр, то только давите на нож?*

Предположим, что мы хотим вытащить гвоздь, например, с помощью плоскогубцев. Для того чтобы гвоздь начал двигаться поступательно, на него надо подействовать силой F, большей максимальной силы трения покоя $F_{тр}$ (рис. 11). А чтобы гвоздь вращался, к плоскогубцам необходимо приложить силу F_1 такую, чтобы ее момент относительно оси гвоздя был больше момента силы трения:

$$F_1R > F_{тр}r,$$

где R — «радиус» рукоятки плоскогубцев, r — радиус гвоздя (рис. 12). (Сила трения, действующая на гвоздь, по величине такая же, как в первом случае, но направлена не вдоль оси гвоздя, а перпендикулярно ей.) Таким образом,

$$F_1 > \frac{r}{R}F_{тр}.$$

Так как $R \gg r$ (скажем, в 10 раз), то сила F_1 по абсолютной величине может быть во много раз меньше силы F.

Нетрудно показать, что если гвоздь вращается, то вытащить его из стены можно сколь угодно малой силой F_2, параллельной оси гвоздя.

Действительно, пусть линейная скорость вращения гвоздя равна v_1, и под действием силы F_2 возникает поступательное движение с малой скоростью v_2 (рис. 13). Тогда результирующая скорость v равна векторной сумме скоростей v_1 и v_2. Сила трения $F_{тр}$, действующая на гвоздь, изменит свое направление, так как она всегда направлена противоположно скорости, а по величине останется прежней. Из подобия треугольников сил и скоростей с учетом того, что $v_2 \ll v$, следует

$$\frac{F''_{тр}}{F_{тр}} = \frac{v_2}{v_1} \text{ или } F_2 = F''_{тр} = \frac{v_2}{v_1}F_{тр}.$$

Таким образом сила трения $F_{тр}$, препятствующая «вытаскиванию» гвоздя, оказывается пропорциональной скорости v_2 и может быть сколь угодно малой (при малой скорости вытаскивания гвоздя). Следовательно, вытащить гвоздь из стены можно, приложив к плоскогубцам силу $F_1 > \frac{r}{R}F_{тр}$ и сколь угодно малую силу F_2, что в сумме меньше силы трения $F_{тр}$.

Теперь рассмотрим вопрос, почему когда вы режете большинство продуктов, то двигаете нож взад-вперед. Это связано с тем, что чем острее нож, тем легче им резать. Когда на нож просто давят, то его режущим сечением является сечение, перпендикулярное ножу (рис. 14). Когда нож движется, его режущее сечение наклонено и более острое —

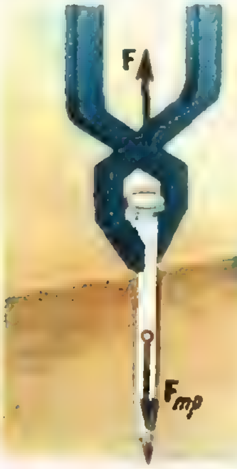


Рис. 11.

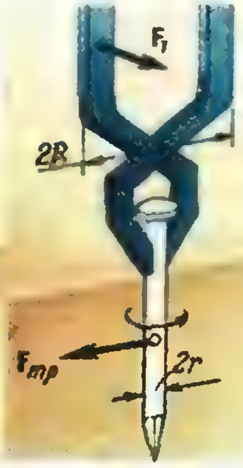


Рис. 12.

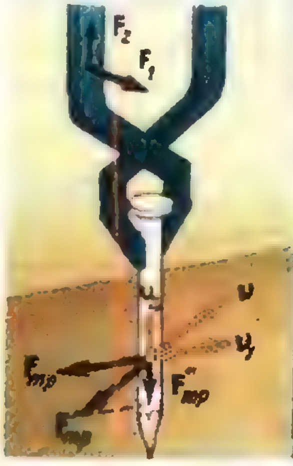


Рис. 13.

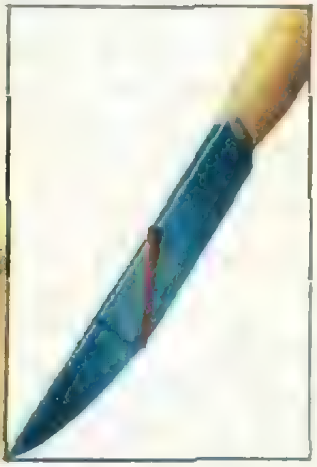


Рис. 14.

оно показано на рисунке красным. Тем не менее, чтобы резать сыр или другие вязкие продукты, на нож приходится просто давить. Сила трения между сыром и ножом велика, поэтому нож двигать трудно.

Ф177. *Частота колебаний струны зависит от ее длины, натяжения и от погонной плотности — массы единицы длины струны. Определите вид этих зависимостей.*

Из физических соображений (по аналогии с колебаниями маятника) ясно, что зависимость частоты колебаний струны ν от ее длины l, силы натяжения F и погонной плотности ρ можно представить в таком виде:

$$\nu \sim l^{\alpha} F^{\beta} \rho^{\gamma},$$

где α, β и γ — безразмерные константы.

Для решения задачи воспользуемся методом размерностей*), согласно которому α, β и γ должны быть такими, чтобы выполнялось равенство

$$[\nu] = [l^{\alpha} F^{\beta} \rho^{\gamma}] = [l]^{\alpha} [F]^{\beta} [\rho]^{\gamma}.$$

В системе СИ

$$[\nu] = c^{-1}, \qquad [l] = м,$$

$$[F] = \frac{кг \cdot м}{c^2}, \qquad [\rho] = \frac{кг}{м}.$$

Тогда

$$c^{-1} = м^{\alpha} \left(\frac{кг \cdot м}{c^2}\right)^{\beta} \left(\frac{кг}{м}\right)^{\gamma}.$$

Соберем в правой части вместе одинаковые единицы:

$$c^{-1} = м^{\alpha+\beta-\gamma}\ кг^{\beta+\gamma}\ c^{-2\beta}.$$

Это выражение справедливо, если выполняются равенства

$$-2\beta = -1,$$

$$\beta + \gamma = 0,$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = -1, \quad \beta = \frac{1}{2} \text{ и } \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\nu \sim l^{-1} F^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}.$$

И. Ш. Слободецкий

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф171**, **Ф173** и **Ф177**, решили эти задачи правильно. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *С. Алехин* (Липецк) **2**; *Ш. Атакулов* (Фергана) **0**; *М. Азметов* (Уфа), **5**; *О. Аганина* (Москва) **4**, **5**; *М. Белкин* (Пинск БССР) **0**; *А. Боржиевский* (Оршино Хмельницкой обл.) **0**; *Л. Брагинский* (Фрунзе), **5**; *Л. Воронов* (Ленинград) **2**; *Н. Боловко* (Прохладный) **4**, **5**; *А. Гузертерман* (Черновцы УССР) **0**; *Р. Егорян* (Ереван) **6**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **2**, **5**; *Ю. Костиков* (Мытищи Московской обл.) **5**, **6**; *С. Кондратьев* (Сызрань) **2**; *Н. Кулешов* (Кременчуг) **2**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **4**; *Н. Кошолев* (Фирсановка Московской обл.) **0**; *С. Карпенко* (Киев) **0**; *А. Луговой* (Грозный) **4**; *Ю. Лурье* (Грозный) **6**; *Б. Лемберский* (Киев), **4**; *В. Меерсон* (Николаев) **5**; *А. Марков* (Орджоникидзе) **0**; *С. Мосунов* (Ирбит Свердловской обл.) **2**; *С. Молотков* (Златоуст) **0**, **4**; *Ю. Ништ* (Салават) **6**; *А. Николаев* (Москва) **4**, **6**; *А. Округ* (Кировск) **2**; *Г. Оганисян* (с. Арташат АССР) **4**; *Т. Погрошева* (Челябинск) **4**; *Н. Попов* (Ленинград) **0**; *И. Парнета* (Кременчуг) **0**, **2**; *А. Панин* (Гомель) **0**; *А. Ролихин* (Фрязино Московской обл.) **4**, **5**; *А. Резников* (Киев) **0**; *Л. Рудицер* (Харьков) **0**; *В. Рекрут* (Киев) **0**; *С. Соколов* (Владимир) **5**; *С. Смирнов* (Вычуга Ивановской обл.) **0**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **4**, **5**; *Л. Соколовский* (Коростень Житомирской обл.) **6**; *О. Трунов* (Джалал-Абад) **0**; *Н. Федин* (Омск) **4**, **5**, **6**; *С. Хоменко* (Подольск) **4**; *М. Хорошин* (Чернигов) **4**; *П. Цареградцев* (Барнаул) **4**, **5**; *В. Чертков* (Киев) **4**; *А. Шерстюк* (Николаев) **4**; *В. Шевчук* (Магнитогорск) **5**; *М. Шапиро* (Горький) **4**.

С. Г. Семенчинский

---

*) См., например, брошюру Б. Ю. Когана «Размерность физической величины», М., «Наука», 1968.

Переход от одной системы единиц к другой

И. А. Столяров

При решении задач по механике и молекулярной физике чаще всего пользуются системами единиц СИ и СГС, а при решении задач по электромагнетизму — системой СИ и так называемой гауссовой системой единиц, основанной на механических единицах системы СГС. (Для электрических единиц гауссова система единиц совпадает с системой СГСЭ.)

В механике переход от одной системы единиц к другой очень прост. Все уравнения механики записываются совершенно одинаково в той и другой системах единиц. Поэтому пока мы не подставляем в формулы численные значения величин, нет необходимости задумываться, какой системой единиц мы пользуемся при решении задачи. Чтобы те или иные величины, заданные в одной системе единиц, выразить в другой системе единиц, нужно знать только соотношения между основными единицами, данными в таблице 1.

Таблица 1

Основные единицы	в СИ	в СГС	Связь между единицами СИ и СГС
Масса	*кг* (килограмм)	*г* (грамм)	$1\ кг =$ $= 10^3\ г$
Длина	*м* (метр)	*см* (сантиметр)	$1\ м =$ $= 10^2\ см$
Время	*с* (секунда)	*с* (секунда)	

Предположим, величина силы выражена в динах, а нам нужно выразить ее в ньютонах. Как это сделать?

Связь единиц силы с основными единицами (размерность силы) в системе СИ и в системе СГС одна и та же: $\frac{ML}{T^2}$. Здесь M означает единицу массы, L — единицу длины и T — единицу времени.

$$1\ дн = 1\ \frac{г\ см}{с^2},\ \text{а}\ 1\ н = 1\ \frac{кг\ м}{с^2}.$$

Так как $1\ г = 10^{-3}\ кг$, а $1\ см = 10^{-2}\ м$, то

$$1\ дн = 1\frac{10^{-3}\ кг\cdot 10^{-2}\ м}{с^2} = 10^{-5}\ н.$$

Другой пример. Найдем связь между джоулем и эргом.

$$1\ дж = 1\frac{кг\ м^2}{с^2},\ \text{а}\ 1\ эрг = 1\frac{г\ см^2}{с^2}.$$

Так как $1\ кг = 10^3\ г$, а $1\ м = 10^2\ см$, то

$$1\ дж = 1\frac{10^3\ г\cdot(10^2\ см)^2}{с^2} = 10^7\ эрг.$$

Ни в системе СИ, ни в системе СГС нет специальных «тепловых» величин, кроме температуры, которая в обеих системах измеряется одной и той же единицей. Поэтому переход от одной системы единиц к другой в молекулярной физике так же прост, как и в механике. Иногда, впрочем, количество тепла измеряют не в джоулях или эргах, а во внесистемных единицах — калориях или килокалориях:

$$1\ кал = 10^{-3}\ ккал = 4{,}18\ дж.$$

При решении фотометрических задач вообще не возникает никакой проблемы. Там всегда пользуются одной системой единиц — СИ. В ней сила света измеряется в канделах, освещенность — в люксах, световой поток — в люменах.

Намного сложнее переходы от одной системы к другой в электромагнитной теории. Здесь используются система СИ и так называемая гауссова система единиц, основанная на механических единицах системы СГС. Для электрических величин она совпадает с системой СГСЭ. В этих системах не только различны единицы измерения величин, но и большинство формул выглядит по-разному. В эти формулы входят различные численные множители (см. таблицу 2). Например, если вы пользуетесь при решении задачи гауссовой системой единиц, то закон Кулона записывается так:

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

а если пользуетесь системой СИ, то так:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Точно так же отличается запись и многих других формул. Поэтому при решении задач на электричество или магнетизм нужно с самого начала определить, в какой системе единиц будет решаться задача. Вот так выглядят различные формулы в двух системах единиц:

Таблица 2

	СИ	Гауссова
Закон Кулона	$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$	$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}$ (при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$)	$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$
Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$	$C = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Сила Лоренца	$F = qvB \sin\alpha$	$F = \frac{1}{c} qvB \sin\alpha$
Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле	$F = IlB \sin\alpha$	$F = \frac{1}{c} IlB \sin\alpha$
Индукция магнитного поля в центре кругового тока	$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2r}$	$B = \frac{1}{c} 2\pi\mu \frac{I}{r}$
Закон электромагнитной индукции	$E_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$	$E_{инд} = -\frac{1}{c}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$
Индукция магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током	$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}$	$B = \frac{1}{c} 2\mu \frac{I}{r}$

Здесь $c \approx 2{,}997925\cdot 10^{8}$ *м/с* — скорость света в вакууме, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ *ф/м* — электрическая постоянная, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1{,}256\cdot 10^{-6}\ \frac{кгм}{а^2с^2}$, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{н}{а^2}$ — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость среды и ε — диэлектрическая проницаемость вещества.

Во всех формулах при переходе от гауссовой системы единиц к системе СИ диэлектрическая проницаемость ε заменяется на $4\pi\varepsilon_0\varepsilon$, а μ заменяется на $\frac{\mu\mu_0}{4\pi}$. Кроме того, во всех формулах для магнитного поля в гауссовой системе единиц появляется множитель $\frac{1}{c}$.

Иногда для магнитных единиц пользуются еще одной системой — СГСМ. При ее построении за единицу силы тока принята 1 единица силы тока СГСМ, равная 10 *а*. Все формулы в этой системе единиц выглядят точно так же, как и в гауссовой, только в них отсутствует множитель $\frac{1}{c}$.

В гауссовой системе единиц и в системе СИ различается не только вид формул, но и размерность единиц измерения величин. В гауссовой системе все единицы выражаются через основные механические единицы — грамм, сантиметр и секунду. В то же время в системе СИ введена еще одна основная единица — единица силы тока 1 *а*. Через нее выражаются все другие электрические и магнитные единицы измерения. Именно поэтому переход от одной системы единиц к другой здесь намного сложнее, чем в механике. Для того чтобы быстро перейти от одной системы к другой, полезно помнить соотношение между единицами (см. таблицу 3). Однако нет ничего страшного, если вы забыли связь между теми или иными единицами в разных системах и у вас нет под рукой таблицы. Соотношение единиц всегда можно найти. Для этого нужно помнить, как связаны основные механические единицы и единицы силы тока.

Выведем соотношение между кулоном и единицей заряда гауссовой системы единиц: 1 *к* = 1 *а*·1 *с*, а 1 ед. заряда СГСЭ = 1 ед. силы тока·1 *с*. Так как 1 *а* = 3·10⁹ ед. СГСЭ, то

$$1\ к = 3\cdot 10^{9}\ \text{ед. силы тока СГСЭ}\cdot 1\ с = 3\cdot 10^{9}\ \text{ед. заряда СГСЭ}.$$

Найти соотношения между единицами намного проще, если выразить данную величину через другие величины, для которых соотношение между единицами в разных системах единиц вы помните. Получим, например, соотношение между 1 *в* и 1 ед. потенциала СГСЭ. Эти единицы связаны с основными единицами систем СГСЭ и СИ сложным образом (см. таблицу 3), и все соотношения трудно запомнить. Поэтому воспользуемся тем, что произведение разности потенциалов на силу тока — это мощность тока

$$1\ в\cdot 1\ а = 1\ дж/с,$$

$$1\ \text{ед. потенциала СГСЭ}\cdot 1\ \text{ед. силы тока СГСЭ} = 1\ эрг/с.$$

Так как 1 *дж/с* = 10^{7} *эрг/с*, то 1 *в*·1 *а* = 10^{7}·1 ед. потенциала СГСЭ·1 ед. силы тока СГСЭ.

Отсюда следует, что

$$1\ \text{ед. потенциала СГСЭ} = \frac{1в\cdot 1а}{10^{7}\ \text{ед. силы тока СГСЭ}}.$$

Но 1 ед. силы тока СГСЭ = $\frac{1}{3}10^{-9}$ *а*, следовательно,

$$1\ \text{ед. потенциала СГСЭ} = \frac{1}{10^{7}}\ \frac{1в\cdot 1а}{\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\ а} = 300\ в.$$

Можно поступить и иначе, например, воспользоваться формулами для потенциала поля точечного заряда (см. таблицу 2):

в системе СИ $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q}{\varepsilon r}$,

в системе СГСЭ $\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$.

Таблица 3

Величина	СИ		Гауссова		Соотношение между единицами
	Единица	Связь с основными единицами	Единица	Связь с основными единицами	
Сила тока	1 *а* (ампер)	I (*а*)	1 ед. силы тока СГСЭ	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$ $(г^{1/2}см^{3/2}с^{-2})$	1 ед. силы тока СГСЭ $= \frac{1}{3}10^{-9}$ *а*
Заряд	1 *к* (кулон)	IT (*ас*)	1 ед. заряда СГСЭ	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ $(г^{1/2}см^{3/2}с^{-1})$	1 ед. заряда СГСЭ $= \frac{1}{3}10^{-9}$ *к*
Потенциал электрического поля	1 *в* (вольт)	$L^2MT^{-3}I^{-1}$ $(кгм^2с^{-3}а^{-1})$	1 ед. потенциала СГСЭ	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$ $(г^{1/2}см^{1/2}с^{-1})$	1 ед. потенциала СГСЭ = 300 *в*
Напряженность электрического поля	1 *в/м* (вольт на метр)	$LMT^{-3}I^{-1}$ $(кг\,м\,с^{-3}а^{-1})$	1 ед. напряженности электрического поля СГСЭ	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$ $(г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1})$	1 ед. напряженности электрического поля СГСЭ $= 3\cdot10^4$ *в/м*
Емкость	1 *ф* (фарада)	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$ $(с^4а^2м^{-2}кг^{-1})$	1 *см* (сантиметр)	L (*см*)	1*см* $= 1,1\cdot10^{-12}$ *ф*
Магнитный поток	1 *вб* (вебер)	$L^2MT^{-2}I^{-1}$ $(кг\,м^2\,с^{-2}а^{-1})$	1 *мкс* (максвелл)	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ $(г^{1/2}см^{3/2}с^{-1})$	1 *мкс* $= 10^{-8}$ *вб*
Напряженность магнитного поля	1 *а/м* (ампер на метр)	$L^{-1}I$ $(а\,м^{-1})$	1 *э* (эрстед)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$ $(г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1})$	1 *э* $= \frac{1}{4\pi}10^3$ *а/м*
Магнитная индукция	1 *тл* (тесла)	$MT^{-2}I$ $(кг\,а\,с^{-2})$	1 *гс* (гаусс)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$ $(г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1})$	1 *гс* $= 10^{-4}$ *тл*
Индуктивность	1 *гн* (генри)	$L^2MT^{-2}I^{-2}$ $(кг\,м^2\,с^{-2}\,а^{-2})$	1 *см* (сантиметр)	L (*см*)	1 *см* $= 10^{-9}$ *гн*
Сопротивление	1 *ом* (ом)	$L^2MT^{-3}I^{-2}$ $(кг\,м^2\,с^{-3}а^{-2})$	1 *с/см* (секунда на сантиметр)	$L^{-1}T$ $(с\,см^{-1})$	1 *с/см* $= 9\cdot10^{11}$ *ом*

Потенциал точечного заряда в 1 *к* на расстоянии 1 *м* от заряда в вакууме равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1\,к}{1\,м} = 9\cdot10^9\,\frac{нм^2к}{к^2м} = 9\cdot10^9\ в.$$

С другой стороны, так как

$1\ к = 3\cdot10^9$ ед. заряда СГСЭ, а
$1\ м = 10^2\ см$, то

$$\varphi = \frac{3\cdot10^9\ \text{ед. заряда СГСЭ}}{10^2\ см} = 3\cdot10^7\ \text{ед. потенциала СГСЭ}.$$

Отсюда

1 ед. потенциала СГСЭ = 300 *в*.

Еще одно полезное замечание. Часто энергию заряженных частиц измеряют в электронвольтах (*эв*). Это внесистемная единица. 1 *эв* равен энергии, которую приобретает электрон, ускоренный разностью потенциалов 1 *в*. Найдем связь между электронвольтом, эргом и джоулем.

Энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов U, равна

$$W = eU.$$

Подставив в эту формулу численное значение заряда электрона в системе СГСЭ $e = 4{,}8\cdot10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ и учитывая, что 1 *в* = 1/300 ед. потенциала СГСЭ, получим

$$1\ эв = 4{,}8\cdot10^{-10}\cdot\frac{1}{300}\,\frac{гсм^2}{с^2} = 1{,}6\cdot10^{-12}\ эрг = 1{,}6\cdot10^{-19}\ дж.$$

Упражнения

Предположим, что вы забыли связь между единицами в системах СИ и СГСЭ для
- а) заряда;
- б) напряженности электрического поля;
- в) емкости;
- г) напряженности магнитного поля;
- д) магнитной индукции;
- е) индуктивности;
- ж) сопротивления;

но у вас под рукой имеется таблица 2. Найдите соотношения между этими единицами.

Квадрат или не квадрат?

Представьте, что перед вами — многозначное число. Например, 28753892 или 98765432123456789. Сможете ли вы быстро доказать, что оба эти числа не являются квадратами целых чисел?

Оказывается, в данном случае доказать это не так сложно.

Расположим квадраты натуральных чисел в ряд в порядке возрастания: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196,...

Вы легко убедитесь, что все квадраты оканчиваются только на 0, 1, 4, 6, 9, 25. Более того, оказывается, что последние цифры квадратов чисел натурального ряда образует бесконечную последовательность, в которой периодически повторяется набор 1, 4, 9, 6, 25, 6, 9, 4, 1, чередуясь с нулем. Такой набор называют палиндромическим, так как числа в нем расположены симметрично. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что последняя цифра квадрата числа зависит только от последней цифры самого числа.

Теперь ясно, что квадраты не могут оканчиваться ни на какие другие цифры. Поэтому число 28753892 не может быть квадратом.

А как быть со вторым числом? Ведь оно оканчивается на 9. Тут нам на помощь придет другой тест (способ проверки).

Сложим цифры любого многозначного числа и затем будем вычитать из этой суммы девятки до тех пор, пока не останется однозначное чис-

(Продолжение см. на стр. 63)

Некоторые задачи на прогрессии

В. П. Лебедев

В этой статье приведены характерные теоремы и разобраны задачи на прогрессии, предлагаемые на вступительных экзаменах в вузы.

Два основных свойства прогрессий

I. *В арифметической прогрессии каждый ее член (кроме первого и последнего), умноженный на два, равен сумме рядом стоящих, то есть*

$$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}.$$

Верно и обратное утверждение: *если в последовательности чисел каждый ее член (кроме первого и последнего), умноженный на два, равен сумме рядом стоящих, то эта последовательность есть арифметическая прогрессия.*

Доказательство. По определению арифметической прогрессии $a_k = a_{k-1} + d$ и $a_k = a_{k+1} - d$, складывая эти выражения, получим $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$. Обратно, пусть $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, тогда $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$.

Подставляя в последнее равенство $k = 2, 3, \ldots$ и обозначая $a_2 - a_1$ через d, получаем

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \\ = a_4 - a_3 = \ldots = a_{k+1} - a_k = \ldots$$

По определению это и означает, что $a_1, a_2, \ldots$ — арифметическая прогрессия.

II. *В геометрической прогрессии квадрат любого ее члена (кроме первого и последнего) равен произведению его соседних членов, то есть*

$$b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}.$$

Обратно, *если в последовательности чисел квадрат каждого из них (кроме первого и последнего) равен произведению рядом стоящих, то эта последовательность есть геометрическая прогрессия.*

Доказательства этих утверждений проведите самостоятельно.

Задачи и их решения

Задача 1. *Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма первых n членов равна n^2.*

Решение. Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, получим, что при любом n должно выполняться равенство

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\right]n = n^2.$$

Отсюда

$$d = \frac{2(n - a_1)}{n-1}.$$

Это выражение не будет зависеть от n только при $a_1 = 1$. Значит, в искомой прогрессии $a_1 = 1$, $d = 2$ и прогрессия имеет вид 1, 3, 5, 7,...

Этот же результат можно получить иначе:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = \\ = 2n - 1.$$

Задача 2. *Могут ли числа* 1, $\sqrt{3}$, 3 *быть членами одной арифметической прогрессии?*

Решение. Допустим, что эти числа составляют арифметическую прогрессию, причем $1 = a_m$, $\sqrt{3} = a_n$ и $3 = a_p$. Тогда

$$1 = a_1 + (m-1)d,$$

$$\sqrt{3} = a_1 + (n-1)d,$$

$$3 = a_1 + (p-1)d.$$

Отсюда

$$a_1 = 1 - (m-1)d = \\ = \sqrt{3} - (n-1)d = 3 - (p-1)d,$$

$$\sqrt{3} = 1 + (n-m)d, \; 3 = 1 + (p-m)d.$$

Решая последние равенства относительно d, получим

$$\frac{n-m}{p-m}=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

что невозможно, так как слева стоит число рациональное, справа — иррациональное.

Задача 3. *При каком условии три числа a, b и c являются членами одной арифметической прогрессии?*

Решение. Пусть $\{a_i\}$ — искомая прогрессия, причем $a=a_m$, $b=a_k$ и $c=a_p$. Тогда $a=a_1+d(m-1)$, $b=a_1+d(k-1)$ и $c=a_1+d(p-1)$. Исключим из этих равенств a_1:

$$a-b=d(m-k)$$
$$b-c=d(k-p).$$

Разделив почленно эти равенства, получим

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{m-k}{k-p}.$$

Поскольку числа m, k и p целые, то $\frac{a-b}{b-c}$ должно быть рациональным числом.

Легко проверить, что если $\frac{a-b}{b-c}=\frac{s}{t}$, где s и t — целые, то можно подобрать арифметическую прогрессию с членами a, b, c (докажите!).

Задача 4. *Докажите, что между каждыми двумя последовательными членами геометрической прогрессии с положительными членами можно вставить по k чисел так, что вся последовательность составит геометрическую прогрессию.*

Решение. Обозначим члены прогрессии через a, b, c,..., n,... Определим знаменатель искомой прогрессии q по первому ее члену a и $(k+2)$-му b (k членов надо вставить):

$$b=aq^{k+1},$$

откуда $q=\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$. Последовательность будет иметь вид

$$a,\ a\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[k+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ \dots,\ b.$$

Между числами b и c вставляются тоже k членов так, что образуется геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[k+1]{\frac{c}{b}}$ и так далее.

По условию задачи

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b},$$

значит, вся последовательность составит геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q=\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[k+1]{\frac{c}{b}}=\dots$$

Задача 5. *Найти знаменатель геометрической прогрессии, в которой каждый член, начиная со второго, равен разности двух соседних (следующего и предыдущего).*

Решение. Пусть прогрессия имеет вид b_1, qb_1, q^2b_1,...

Из равенства

$$q^{n+2}b_1-q^nb_1=q^{n+1}b_1$$

находим

$$q^2-q-1=0,$$

откуда

$$q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 6. *Найти условия, при которых квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.*

Решение. Пусть a, $a+d$, $a+2d$ — три последовательных члена арифметической прогрессии. Если квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию, то

$$(a+d)^4=a^2(a+2d)^2,$$

откуда

$$(a+d)^2=\pm a(a+2d).$$

Если $(a+d)^2=a(a+2d)$, то $d=0$.

Если $(a+d)^2=-a(a+2d)$, то $d=a(-2\pm\sqrt{2})$.

Итак, либо $d=0$, либо $d=a(-2\pm\sqrt{2})$.

Задача 7. *Могут ли цифры трехзначного или четырехзначного простого числа образовывать арифметическую прогрессию с положительной разностью? Если могут, то найти все такие числа.*

Решение. Предположим, что цифры числа образуют арифметическую прогрессию.

Для трехзначного числа сумма цифр x, $x + d$, $x + 2d$ равна $S = x + (x + d) + (x + 2d) = 3x + 3d$ и делится на 3, то есть число, образованное этими цифрами, делится на 3 и не может быть простым.

Для четырехзначного числа сумма цифр x, $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d$ равна

$$x + x + d + x + 2d + x + 3d = 2(2x + 3d).$$

x не может быть равно 3, так как тогда получим число, делящееся на 3. Поскольку $x + 3d$ — цифра числа, то $x + 3d \leqslant 9$ и d может быть равно 2 или 1.

Пусть $d = 2$. Тогда $x \leqslant 3$; $x = 3$ не подходит; $x = 2$ тоже не подходит, так как получится четное число, при $x = 1$ получим составное число 1357.

Пусть $d = 1$. Рассматривая числа 1234, 2345,..., 6789, находим среди них одно простое число 4567.

Упражнения

1. Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то получим три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти исходные числа.

2. Доказать, что в арифметической прогрессии между каждыми двумя последовательными членами можно вставить по k чисел таких, что вся последовательность составит арифметическую прогрессию.

3. Могут ли числа $\sqrt{3}$, 2 и $\sqrt{8}$ быть членами арифметической прогрессии?

4. Найти сумму первых n членов последовательности

$$7,\ 77,\ 777,\ \ldots$$

5. Вычислить сумму

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{m-1} m^2.$$

6. При каких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$ и $\lg(2^x + 3)$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

Вероятностные задачи

1. В первом ящике 50 белых шаров, а во втором 10 белых и 10 черных. Некто берет наудачу один шар из любого ящика. Какова вероятность, что взятый им шар будет белым? Решая эту задачу, учащийся сказал: «Так как белых шаров 60, а черных 10, то искомая вероятность равна 6/7». Верно ли это?

2. (Задача Паскаля). Два одинаково искусных игрока играют в игру, не допускающую ничейного исхода. Они сделали равные ставки и условились, что тот, кто раньше наберет 10 выигранных партий, получит все деньги. Игра была прервана при счете 9 : 8 и не могла быть продолжена. Как должны они разделить деньги?

3. Про некоторую семью известно, что там двое детей, причем один из них — мальчик. Что более вероятно: что второй ребенок является мальчиком или девочкой?

4. Имеется неограниченное число шаров: один — с номером 1, другой — с номером 2, третий — с номером 3 и т. д. Игроки A и B берут наудачу по одному шару и смотрят их номера. Выигравшим считается тот, кому достался шар с меньшим номером.

Посмотрим, каковы шансы на выигрыш у игрока A. Предположим, что он вытащил шар с номером k. Так как номеров меньших, чем k, имеется конечное число, а номеров бо́льших, чем k, бесконечно много, то выигрыш игрока A значительно вероятней его проигрыша. Но так как то же самое рассуждение можно провести и относительно игрока B, то приходим к выводу, что каждый из игроков имеет значительные преимущества перед другим. Почему так получилось?

Б. Ю. Коган

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

(механико-математический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики, физический факультет)

Любителей математики и физики, конечно, интересуют факультеты Московского университета, готовящие специалистов по физике и математике. Это — механико-математический факультет, физический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики.

Механико-математический факультет имеет два отделения — математики и механики. Здесь ведется подготовка специалистов по разным направлениям теоретической и прикладной математики и современной механики.

На физическом факультете шесть отделений: экспериментальной и теоретической физики, физики твердого тела, ядерной физики, радиофизики и электроники, геофизики, астрономии. Факультет готовит физиков-исследователей широкого профиля для работы в научно-исследовательских институтах и различных отраслях народного хозяйства.

Молодой факультет вычислительной математики и кибернетики готовит специалистов, способных эффективно применять математические методы и современную вычислительную технику в различных областях науки и техники.

На факультетах имеются специальные кафедры, на которых работают ведущие ученые страны. Начиная с третьего курса студенты распределяются (по своему выбору) по кафедрам для углубленного изучения избранного ими более узкого раздела физики или математики. Все факультеты располагают необходимой материальной базой и специальными лабораториями, что дает возможность сочетать теоретическое образование с практической подготовкой.

В помощь поступающим работают подготовительное отделение для рабочей и сельской молодежи, вечерние и заочные подготовительные курсы.

Ниже приводятся образцы вариантов письменных приемных экзаменов по математике на указанные факультеты и билеты устных экзаменов по физике на физическом факультете.

Механико-математический факультет

Вариант I

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_8 (1+2x)} \leqslant \frac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}.$$

2. Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 *км* короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход, и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист.

Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через 2 часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 *км* от пункта B. (Скорости постоянны.)

3. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 20$ *м*, $AC = 24$ *м*. Известно, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности,

центр которой лежит на стороне AC. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60°. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 *м*. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB, и найти высоту пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2 - (a + b)x + 8 = 0$,
2) $x^2 - b(b + 1)x + c = 0$,
3) $x^4 - b(b + 1)x^2 + c = 0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b > 3$.

Вариант 2

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$(\log_9 x)^2 \geqslant \left(\log_3 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}\right)^2.$$

2. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 *км/ч* и через 22,5 минуты после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 *км* короче длины всего шоссе.

3. В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE = 3$ *м* и $EC = 2$ *м*. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK. Определить расстояние от точки E до стороны AB.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BSC = 90°$, $\angle ASC = \angle ASB = 60°$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на поверхности шара радиуса 3 *м*. Доказать, что ребро SA является диаметром этого шара, и найти объем пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2 + ax + ac = 0$,
2) $x^2 - bx + c^3 = 0$,
3) $x^4 - bx^2 + c^3 = 0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый из корней первого уравнения является корнем третьего уравнения и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$9^{1-(x+2)^2} - 2 \cdot 3^{2-(x+2)^2} + 7 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \geqslant \frac{|\operatorname{ctg} x - 1| + 1}{\operatorname{tg} x}.$$

3. В прямоугольном секторе AOB из точки B, как из центра, проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги OC, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

4. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S наклонены к плоскости основания ABC под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S. Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\operatorname{tg}^2\left(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}\right) - 4a\operatorname{tg}\left(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}\right) + 2 + 2a \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4^{1-(x-2)^2} - 2^{3-(x-2)^2} + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$1 + \cos 2x \geqslant \cos x\,(1 + |1 - 2\cos x|).$$

3. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB. Окружность S_1 с центром на биссектрисе сектора касается хорды AB и дуги AB. Окружность S_2 касается хорды AB, дуги AB и окружности S_1. Окружность S_3, отличная от S_1, касается хорды AB, дуги AB и окружности S_2. Найти отношение радиуса окружности S_2 к радиусу окружности S_3.

4. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается ребра SC. Через центр этого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плос-

кости к плоскости основания, если плоскость сечения перпендикулярна грани ASD.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\sqrt{2\pi - |x|}\,[\mathrm{ctg}^2(\sin x) - 2a\,\mathrm{ctg}(\sin x) - a] \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Физический факультет

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{100}(x^2) + \log_{10}^2 x < 2.$$

3. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляются смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1 : 3, то температура смеси будет 49°, а если 2 : 5, то температура смеси будет 48°. Найти температуру воды в каждом сосуде (считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры).

4. На сфере, радиус которой равен 2 *м*, расположены три окружности радиуса 1 *м*, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

5. В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN, как на диаметрах, построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}\,3x - \mathrm{tg}\,x = 4\sin x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2\log_9 7.$$

3. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу, первый — из пункта A, второй — из пункта B. К моменту встречи первый автомобиль проехал расстояние в 1,4 раза большее, чем второй. Если скорость первого автомобиля увеличить на 21 *км/ч*, то они встретятся в пункте C таком, что $AC = 2BC$. Найти скорости автомобилей.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ $(AA' \| BB' \| CC' \| DD')$. Ребро куба равно a. Точка E — середина ребра $A'D'$, точка F — середина ребра AA'. Найти радиус меньшей из двух сфер, проходящих через точки E и F и касающихся граней двугранного угла, образованного плоскостями $BB'C'C$ и $DD'C'C$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\pi/4$, угол D равен $\pi/3$. На диагоналях трапеции, как на диаметрах, построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найти отношение длин отрезков AE и ED.

Физика

Билет № 1

1. Законы Бойля—Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Объединенный закон Бойля—Мариотта — Гей-Люссака.

2. Магнитное поле. Магнитное взаимодействие проводников с током. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле.

3. К гладкой вертикальной стенке приставлена лестница весом P; лестница образует с горизонтальной шероховатой опорой угол α. Центр тяжести ее расположен в середине. Как направлена и чему равна сила, действующая на лестницу со стороны горизонтальной опоры?

Билет № 2

1. Явление термоэлектронной эмиссии. Электронные лампы диод и триод. Использование диода для выпрямления переменного тока.

2. Законы преломления и отражения света. Относительный и абсолютный показатели преломления. Полное внутреннее отражение. Предельный угол.

3. На горизонтальной поверхности находится неподвижная абсолютно гладкая полусфера радиуса $R = 180$ *см*. С верхней точки ее без начальной скорости соскальзывает малое тело (рис. 1). В некоторой точке оно оторвется от полусферы и полетит свободно. Определить время t свободного падения тела.

Билет № 3.

1. Электрическое поле заряда. Напряженность поля. Понятие о потенциале. Разность потенциалов (напряжение), единицы потенциала электрического поля. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

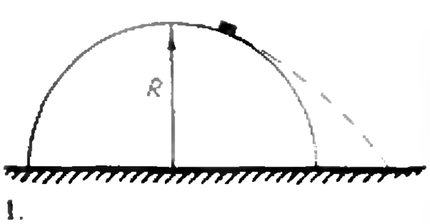


Рис. 1.

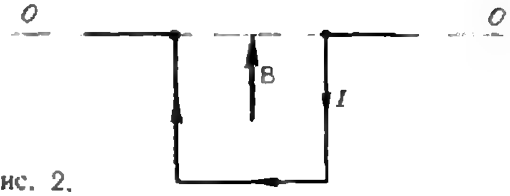


Рис. 2.

2. Ненасыщающие и насыщающие пары. Зависимость давления насыщающих паров от температуры. Абсолютная и относительная влажность.

3. Диск, имеющий диаметр $d = 80$ *см*, помещен на расстоянии $L = 80$ *м* от точечного источника света. Плоскость диска перпендикулярна линии, соединяющей источник и центр диска. Во сколько раз изменится световой поток, падающий на диск, если за источником поместить вогнутое зеркало так, чтобы источник оказался в его фокусе? Поперечный диаметр зеркала $d = 80$ *см*. Расстояние от источника до краев зеркала $R = 204$ *см*. (Боковая поверхность шарового сегмента $S = 2\pi rh$, где h — высота сегмента, r — радиус шара).

Билет № 4

1. Момент силы. Условия равновесия тела, имеющего ось вращения (правило моментов). Центр тяжести тела.

2. Световой поток. Сила света. Освещенность.

3. Медный провод плотности ρ, сечения S согнут в виде трех сторон квадрата и может свободно вращаться около горизонтальной оси OO (рис. 2). По проводу течет ток I, он находится в однородном вертикальном магнитном поле индукции $\mathbf{B}$. На какой угол α от вертикали отклонится провод?

Билет № 5

1. Собирающие и рассеивающие линзы; формула линзы. Построение изображения в линзах. Лупа.

2. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Связь между ними. Центростремительное ускорение. Центростремительная сила, точка ее приложения.

3. Плоский виток изолированного провода перегибают, придавая ему вид «восьмерки», а затем помещают в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Длина витка $l = 120$ *см*. Петли «восьмерки» можно считать окружностями с отношением радиусов 1 : 2. Какой ток потечет по проводу, если поле будет убывать с постоянной скоростью $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 100$ *гс/с*? Сопротивление витка $R = 1$ *ом*.

Билет № 6

1. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. Уравнение равнопеременного движения с начальной скоростью (вывод на основе графика скорости).

2. Электромагнитные колебания и волны. Колебательный контур. Превращение энергии в колебательном контуре. Электронная лампа как генератор.

3. На дне бассейна лежит предмет. На расстоянии $H = 20$ *см* от поверхности воды над предметом параллельно поверхности воды помещена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ *см*. На расстоянии $b = 12{,}5$ *см* от линзы находится изображение предмета. Определить глубину бассейна h, если показатель преломления воды $n = 4/3$ (углы считать малыми).

Квадрат или не квадрат?

(Окончание, начало см. на стр. 56)

ло. Назовем полученную цифру «цифровым корнем» числа. Оказывается, цифровые корни квадратов могут принимать только следующие значения: 1, 4, 7, 9. Причем они тоже образуют палиндромический набор: 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, на этот раз чередующийся с девяткой. (Попробуйте доказать это самостоятельно.)

С помощью такого теста легко проверить второе число. Найдем его цифровой корень: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 89$, $89 - 9 \cdot 9 = 8$.

Как мы видим, цифровой корень этого числа равен 8. Следовательно, мы можем сказать, что данное число — не квадрат. Поэтому можно не тратить времени на поиски его квадратного корня.

В. И. Бахмин

Разные задачи

1. Пусть $xy = 1971^{1972}$, где x и y — натуральные числа. Доказать, что $x + y$ не делится на 1972.

2. Для каких n число $63^n - 5^n$ делится на 1972?

3. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots$, все члены которой — натуральные числа. Известно, что a_{15}^{1972} — член этой арифметической прогрессии. Доказать, что тогда и a_{200}^{1972} — также член этой прогрессии.

4. Доказать равенство

$$\frac{1}{658} + \frac{1}{659} + \cdots + \frac{1}{1972} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{2}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots + \frac{2}{1970 \cdot 1971 \cdot 1972}.$$

Ф. Г. Шлейфер

Университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Университет дружбы народов отнесен к высшим учебным заведениям первой категории. В нем обучаются как иностранные, так и советские граждане.

Университет является членом Международной Ассоциации Университетов. Он сотрудничает со многими советскими и зарубежными высшими учебными заведениями, принимает участие в международных встречах и конференциях по вопросам науки и образования.

В Университете имеются следующие факультеты:

— инженерный со специальностями: «машиностроение», «энергомашиностроение», «строительство», «геология и разведка месторождений полезных ископаемых», «разработка месторождений полезных ископаемых;

— физико-математических и естественных наук со специальностями: «математика», «физика», «химия»;

— медицинский со специальностью «лечебное дело»;

— сельскохозяйственный со специальностью «агрономия»;

— экономики и права со специальностями: «экономика и планирование народного хозяйства» и «международное право»;

— историко-филологический со специальностями: «история» и «русский язык и литература».

Абитуриенты сдают приемные экзамены по следующим предметам:

по математике — избравшие специальности «машиностроение», «энергомашиностроение», «строительство», «геология и разведка месторождений полезных ископаемых», «разработка месторождений полезных ископаемых», «математика», «физика», «химия»;

по физике, химии, биологии — избравшие специальности «агрономия» и «лечебное дело»;

по истории, географии, литературе — избравшие специальности «история», «русский язык и литература», «экономика и планирование народного хозяйства», «международное право». Избравшие специальность «экономика и планирование народного хозяйства» вместо экзамена по литературе сдают экзамен по математике.

Ниже мы приводим типичные варианты экзамена по математике 1972 года.

1. факультет физико-математических и естественных наук

1. Соревнуются три бригады. Первая и вторая бригады изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья — в три раза больше, чем вторая. Кто победил в соревновании?

2. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x.$$

3. В основании пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$.

$$AB = CD = 1/2, \quad AD = \sqrt{2},$$
$$BC = \sqrt{2}/2, \quad SA = \sqrt{2}.$$

Определить высоту пирамиды, если известно, что грани SAB и SCD перпендикулярны основанию.

4. Решить уравнение

$$2^{2x} + 3^{2x} - 2\cdot 6^x + \sqrt{\log_3 (x+3)} = 0.$$

2. инженерный факультет

1. Три рабочих, работая вместе, выполняют работу за 6 часов. Первый и второй вместе выполнили бы эту работу за 9 часов, а первый и третий вместе — за 12 часов. Во сколько раз производительность второго рабочего больше, чем производительность третьего?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + 2^x - 2y = 1, \\ \log_{(2^x - y)} (x + y + 1) = 1. \end{cases}$$

3. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается поверхности шара, равен r. В точку на этой окружности проведены радиус окружности и радиус шара. Угол между этими радиусами равен 30°. Найти объем конуса.

4. Решить уравнение:

$$\frac{1 - \operatorname{ctg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 3x} = 4\cos^2 \frac{3x}{2} - 2.$$

3. факультет экономики и права

1. Два рабочих выполняют некоторую работу. Второй из них приступил к работе на 1 час позднее первого. Через 3 часа после того, как первый начал работу, им оставалось выполнить еще 45% работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За какое время каждый из них в отдельности выполнит всю работу?

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4}\,(x^2 - 2x - 15) \geqslant 0.$$

3. Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной окружности. Найти угол при основании трапеции.

4. Решить уравнение:

$$2\cos^2 x + \cos 5x - 1 = 0.$$

В. Л. Клюшин

Симметрия в природе

РЫДНИК
ДО
АНТИМИРА

Задумывались ли вы над вопросом, почему у лошади, зайца, ящерицы, рыбы есть правая и левая стороны, а у медузы или, скажем, у ромашки — нет? Или почему левое полушарие нашего мозга управляет правой стороной тела и наоборот? А для чего мраморные плитки, устилающие стены и пол на станциях метро, выложены в виде орнамента — однообразного, многократно повторяющегося рисунка? Всегда ли красиво симметричное здание? Если до сих пор эти и подобные вопросы не возникали в вашем сознании, то непременно возникнут, как только вы познакомитесь с первыми главами книги В. Рыдника «От ромашки до антимира» *). По мере же дальнейшего чтения книги вопросы станут все более глубокими и будут касаться таких сложных проблем, как понятия пространства и времени, строение молекул и атомов, систематика элементарных частиц, свойства мира и антимира и т. д.

Вместе со школьником-девятиклассником, от лица которого ведется повествование, и его друзьями, объединившимися в «Семинар по изучению симметрии», вы будете пытаться начертить квадрат, глядя в зеркало, определять характер симметрии рисунка на обоях вашей комнаты, восхищаться образцами кристаллов в геологическом музее и даже сочинять палиндромы — стихи-«перевертыши».

Этот эффект сопричастности читателя к тому, о чем рассказывается в книге,— огромное ее достоинство. Как удалось автору добиться такого эффекта? Прежде всего, выбранным методом изложения. Книга написана в стиле бесед, восходящем еще к античной научно-философской литературе, но не утратившем — при умелом пользовании — привлекательности и в наши дни. Беседы сводятся то к ответам отца, опытного физика-теоретика, на недоуменные вопросы сына, то к острому спору между друзьями, то к попыткам ребят изложить простыми, подчас наивными словами сведения, почерпнутые из книг. Живая речь, диалог, нетривиальные сравнения, авторские ремарки — все это позволяет неискушенному читателю, не переутомляя себя, приобщаться к сложным, иногда сухим и формальным разделам физики.

Книгу нельзя читать насквозь, что называется «взахлеб»; каждая глава требует внимания, осмысления, нередко работы с карандашом. Таковы, например, три главы под одним названием «О законах симметрии», а также заключительные разделы, знакомящие, к сожалению, слишком бегло, с некоторыми аспектами физики микромира. При чтении книги возникают вопросы, одни из которых разъясняются в последующих главах, другие так и остаются открытыми по той простой причине, что наука до сих пор не ответила на них, о чем откровенно сообщает автор. Его книга, в отличие от многих научно-популярных книг, не создает впечатления завершенности науки, наоборот, в ней акцентируется внимание на нерешенных проблемах (например, почему в нашем мире частиц несравнимо больше, чем античастиц, или почему в процессе эволюции на нашей планете выжили только «левые» аминокислоты) — в этом ее второе важное достоинство.

И третье. Книга дает ясное представление о единстве науки, о неразрывной связи всех ее областей: математики, физики, химии, биологии, геологии, гуманитарных дисциплин, вплоть до философии и эстетики. В самом деле, думал ли юный Эварист Галуа, создавая абстрактнейший раздел математики — теорию групп, что она понадобится геологам для изучения и описания кристаллов? Или попробуйте найти сейчас ретрограда-биолога, который отрицал бы необходимость использования в своей науке методов и представлений физики, химии, математики, в частности, той же теории симметрии.

Но смежные науки, такие как химия и биология, затрагиваются здесь лишь мимоходом — в основе своей книга физична, причем физика в ней представлена весьма широко. Взяв в качестве стержня теорию симметрии не в узком, «геометрическом», смысле, а в более широком и глубоком, «физическом» смысле, автор рассматривает разделы механики, электродинамики, теории относительности, атомной физики, физики элементарных частиц. И все это очень естественно, без натяжек. Дело в том, что законы

---

*) В. Рыдник, «От ромашки до антимира», М., «Детская литература», 1971, 160 стр., 50 коп.

симметрии тесно переплетаются с законами сохранения физических величин. Так, закон сохранения импульса отражает симметрию, однородность пространства; закон сохранения момента импульса — изотропность пространства, то есть независимость его свойств от направления; закон сохранения энергии — однородность времени. Так же обстоит дело с законами сохранения четности, электрического заряда и т. д., каждый из которых связан со своей симметрией.

Читатель, знакомый с физикой по стандартным школьным учебникам, сочтет такой подход неожиданным, даже искусственным, но постепенно должен освоиться с ним, что очень важно, ибо на этой концепции базируется вся современная физика. Ведь симметрия, как справедливо сказано в книге,— это не изобретение человека, даже самого гениального, а «изобретение» природы, нечто заложенное в самой ее основе, проявление какого-то важного и широкого закона.

По ходу повествования автор старается раскрыть перед читателем метод научного познания, привить ему уважение и любовь к науке (не преклонение перед ней, а именно уважение и любовь), показать то высочайшее наслаждение, которое дает занятие наукой. «Любознательность ведет ученого вперед, но когда она вознаграждается открытием — это святой час в его жизни. Ради этого часа стоит годами гнуть спину и тысячи раз умирать с каждой неудачей!..»

Оживляют повествование выразительные рисунки и фотографии. Особенно фотографии: выдающиеся творения архитектуры, животные и растения, рентгено- и электронограммы, наконец, знаменитые картины Эшера «День и ночь» и «Всадники»— образное изображение «мира и антимира».

К сожалению, в книге встречаются отдельные неточности, а иногда и не вполне верные утверждения. Укажем на некоторые из них, чтобы помочь читателю.

На страницах 8—9 неточно изложен опыт с вогнутым зеркалом — не сказано, что речь идет о двукратном отражении.

На странице 105 сказано, что на искривление пути светового луча, проходящего вблизи Солнца, впервые указал Эйнштейн. В действительности об этом эффекте знал еще Ньютон.

На странице 112 автор утверждает, что в северном полушарии у всех рек вода подмывает правый берег, но это справедливо только в отношении рек, текущих на юг.

Однако подобные неточности ни в какой мере не меняют положительной оценки книги. Можно не сомневаться, что книга В. Рыдника доставит удовольствие и принесет несомненную пользу читателям.

И. Зорич

В издательстве «Вища школа»

С 1972 года в Украинском республиканском издательстве «Вища школа» выходит новая серия «Библиотечка физико-математической школы».

Эта серия предназначена в первую очередь для учащихся физико-математических школ. Но книги этой серии будут понятны и учащимся старших классов средних школ.

Книги серии можно заказать в республиканском магазине «Книга — поштою» — 252117, Киев — 117, ул. Попудренко, 30, а также в издательстве «Вища школа» — 252054, Киев — 54, ул. Гоголевская, 7.

В 1972 году вышли (на украинском языке) следующие книги:

Вышенский В. А. *«Отношение и функции».*

Автор на большом числе удачно подобранных примеров подробно рассматривает такие основные понятия современной математики, как отношение, график отношения, обратное отношение, функция.

Дороговцев А. Я., Ядренко М. И. *«Метод координат».*

В книге рассказано о методе координат, его применениях к решению геометрических и теоретико-числовых задач, о свойствах кривых второго порядка, о задачах линейного программирования.

Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. *«Элементы комбинаторики».*

Основываясь на теоретико-множественных представлениях, авторы живо и популярно излагают основные понятия и методы комбинаторики. Большое количество задач, приведенных в книге, помогают усвоению материала.

Кованцов Н. И. *«Геометрические преобразования».*

В книге рассматриваются геометрические преобразования как в эвклидовом пространстве, так и в некоторых неэвклидовых пространствах.

Рыжов Ю. М. *«Пределы».*

В книге излагаются основные понятия теории пределов числовых последовательностей, функций и некоторые важные применения теории пределов.

Корсак К. В. *«Электростатика».*

Автор рассматривает такие фундаментальные физические понятия, как «заряд», «поле», «емкость» и так далее, а также явления электростатики и их применение в технике. Книга написана живым и доходчивым языком.

А. Макуха

Государственные премии 1972 года

В 1972 году ЦК КПСС и Совет Министров СССР за выдающиеся исследования в области науки и техники присудили 23 Государственные премии. Две из них были присуждены за работы в области физики.

Академик Академии наук Белорусской ССР Борис Иванович Степанов вместе со своими сотрудниками Анатолием Николаевичем Рубиновым и Василием Андреевичем Мостовниковым удостоены Государственной премии *«за цикл работ по исследованию явления оптической генерации в растворах сложных органических соединений и созданию на их основе нового типа лазеров с плавно перестраиваемой частотой излучения в широкой области спектра»*. Эти работы относятся к одной из самых молодых областей современной физики — квантовой электронике, подарившей человечеству принципиально новые источники электромагнитных излучений, так называемые лазеры.

Лазер отличается от всех прочих источников излучения тем, что он дает узкий, почти не расходящийся пучок лучей. При этом излучение лазера заключено в необычайно узком интервале длин волн. Поэтому его можно считать, как говорят физики, почти монохроматическим (что в переводе означает «одноцветным»). Концентрация энергии в лазерном луче оказывается исключительно высокой. Даже металл не может противостоять такому лучу. Так как расходимость лазерного пучка очень мала, такой пучок почти не ослабляется в прозрачных средах и может быть зарегистрирован на огромных расстояниях от источника.

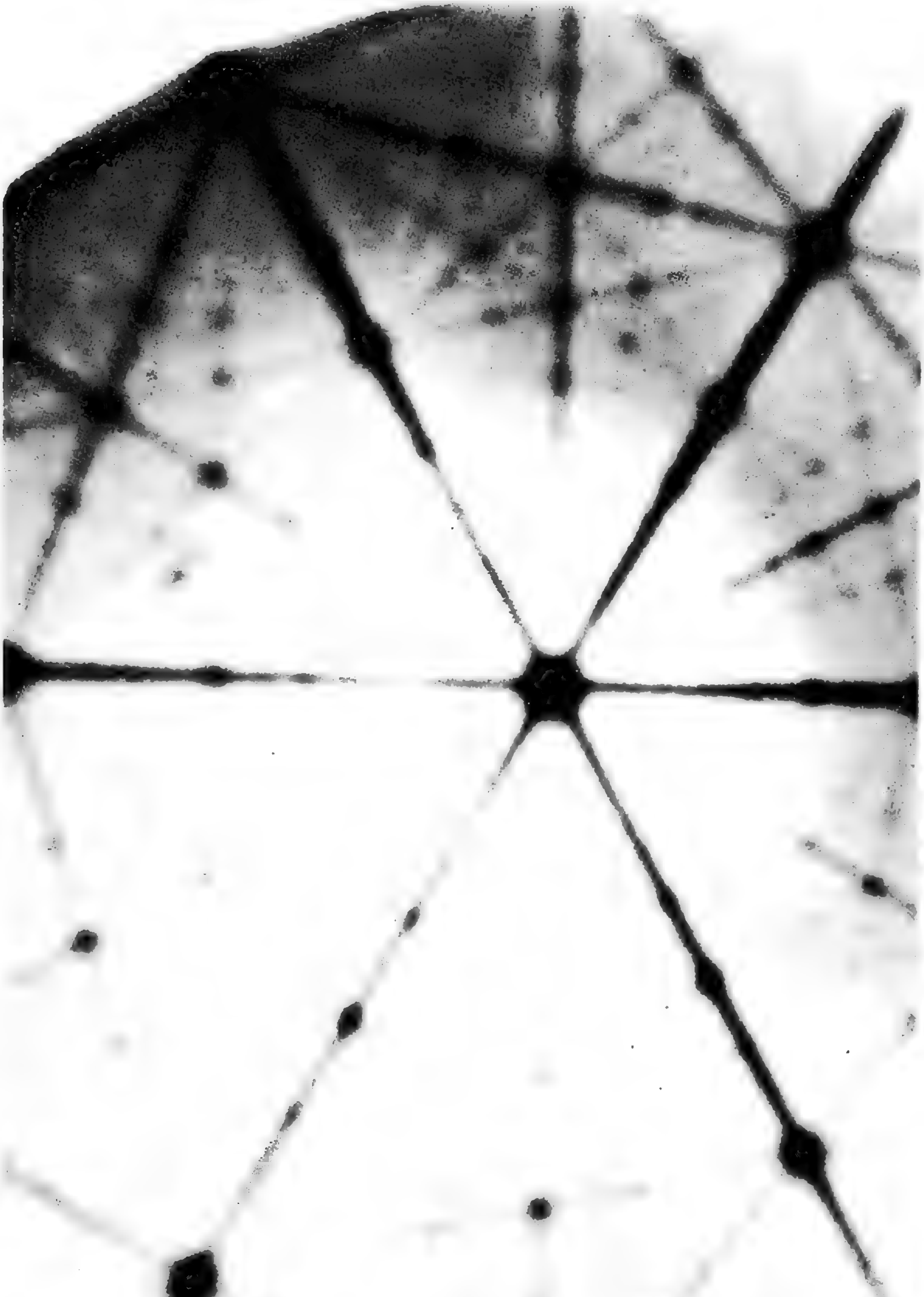
До недавних пор физики имели дело только с лазерами, в которых источником излучения служили атомы различных кристаллов (например, рубина) или атомы разных газов (например, углекислого газа или аргона). Однако еще в 1960 году, то есть до создания первых лазеров, были высказаны идеи, из которых следовала возможность усиления света сложными молекулами органических веществ. Развивая эти идеи в обширных теоретических исследованиях, академик Степанов в 1964 году показал, что источником лазерного излучения в жидких средах могут быть прежде всего растворы сложных органических красителей (родамина, криптоцианина и т. д.). В 1966 году Степанову и его сотрудникам удалось подтвердить свои выводы на опытах. Они впервые наблюдали лазерное излучение органических молекул красителей. В дальнейшем ими были сконструированы жидкостные лазеры «Радуга», экспонировавшиеся на Всесоюзной выставке достижений народного хозяйства в Москве и получившие высокую оценку.

Созданная Б. И. Степановым теория жидкостных лазеров позволила предсказывать, какие из множества различных типов органических красителей могут обладать свойствами, необходимыми для генерации лазерных пучков. Оказалось, что таких веществ довольно много и они позволяют получать лазерное излучение на любых длинах волн в области видимого света, а также невидимых инфракрасных и ультрафиолетовых лучей. Изменяя концентрацию красителя, температуру раствора или оптические характеристики лазерного устройства, можно плавно изменять длину излучаемых электромагнитных волн (как говорят, перестраивать частоту излучения жидкостного лазера).

Жидкостные лазеры обладают еще целым рядом важных преимуществ. Коэффициент полезного действия (то есть доля энергии, излучаемой лазерным пучком, по отношению к энергии возбуждающего излучения) у таких лазеров очень высок, порядка 30—40%; а в некоторых случаях он доходит до 60%. Энергия отдельного импульса может достигать 100 джоулей.

Жидкостные лазеры безусловно найдут множество полезных применений в спектроскопии, фотохимии, биологии, медицине и технике.

Вторая работа по физике, удостоенная Государственной премии, относится к области ядерной физики и физики твердого тела. Ее присудили большому коллективу исследователей во главе с профессором Московского государственного университета Анатолием Филипповичем Тулиновым. В состав этого коллектива входят Юрий Владимирович Меликов, Вацловас Станиславович Куликаускас, Григорий Аркадьевич Иферов, Григорий Павлович Похил, Арий Александрович Пузанов, Бэла



Габдулгалиевна Ахметова, Саркис Аршавирович Карамян — сотрудники Научно-исследовательского института ядерной физики МГУ, Уральского политехнического института, Казанского государственного университета и Объединенного института ядерных исследований. Премия присуждена им *за открытие и исследование совершенно нового интереснейшего физического явления — «эффекта теней» в ядерных реакциях на монокристаллах.*

Долгое время основным методом исследования внутреннего строения кристаллов был так называемый рентгеновский структурный анализ. Длины волн рентгеновских лучей очень малы и сравнимы с размерами атомов. Поэтому для рентгеновских лучей даже отдельные атомы являются заметным препятствием. На фотопластинке, помещенной на пути рентгеновских лучей, прошедших через кристалл или отраженных кристаллом, мы получаем сложную систему пятен. По расположению этих пятен можно определить и расположение атомов в кристалле.

Элементарные частицы вещества (электроны, протоны, нейтроны и т. д.) в определенных условиях также обладают волновыми свойствами. Причем длины волн, связанных с элементарными частицами, намного меньше даже длин волн рентгеновских лучей. Это позволяет использовать потоки элементарных частиц для анализа строения кристаллов. Так возникли в свое время новые области физики твердого тела — электронография и нейтронография, в которых место рентгеновских лучей заняли электроны и нейтроны.

Исследуя взаимодействие пучков быстрых протонов с монокристаллами различных веществ, А. Ф. Тулинов открыл в 1964 году так называемый «эффект теней». Оказалось, что распределение рассеянных кристаллом протонов в окружающем пространстве весьма неоднородно по различным направлениям. На фотографиях рассеянных протонов отчетливо видны тени, характеризующие расположение атомов внутри исследуемых кристаллов. Одна из таких фотографий, полученных А. Ф. Тулиновым и его сотрудниками, приведена на странице 68.

Исследование этого явления показало, что «эффект теней» обладает необычайно высокой чувствительностью к малейшим нарушениям нормального расположения атомов в кристаллической решетке. Ведь длина рассеиваемых волн намного меньше, чем у рентгеновских лучей. Поэтому «эффект теней» регистрирует ничтожные смещения отдельных атомных ядер, происходящие за время порядка 10^{-14} — 10^{-20} *сек*, то есть практически мгновенно. Это позволяет детально изучать поведение атомов в кристаллах в момент перестройки их структуры под влиянием температуры и давления, определять положение атомов примесей, регистрировать различные дефекты кристаллических решеток, недоступные для наблюдения с помощью рентгеновских лучей. Благодаря «эффекту теней» впервые оказалось возможным послойно исследовать структуру кристаллов на различных глубинах без разрушения испытуемых образцов. Удалось также использовать этот эффект для непосредственного определения времени, в течение которого происходят разнообразные ядерные реакции.

Новый высокочувствительный метод исследования твердых тел и ядерных процессов, по аналогии с рентгенографией, получил название протонографии или ядерной микроскопии кристаллов. В настоящее время у нас в стране и за рубежом работают десятки так называемых протонных микроскопов или протонографов, с помощью которых решаются сложнейшие физические и технические проблемы.

Работы Б. И. Степанова, А. Ф. Тулинова и остальных членов награжденных научных коллективов внесли крупный вклад в развитие советской физики.

Помимо них следует также сказать еще о нескольких отмеченных премиями работах, тематика которых может представлять интерес для наших читателей.

Доктор технических наук Владимир Тихонович Ренне награжден Государственной премией *за цикл работ по теории, расчету и конструированию электрических конденсаторов.*

Академик Академии наук Белорусской ССР Евгений Алексеевич Барбашин удостоен премии *за цикл работ по проблемам устойчивости систем автоматического регулирования.*

Академик Борис Николаевич Петров, члены-корреспонденты АН СССР Евгений Павлович Попов, Александр Михайлович Летов, Гермоген Сергеевич Поспелов, доктора технических наук Владимир Викторович Солодовников, Виктор Владимирович Семенов, Георгий Михайлович Уланов, Вильям Викторович Казакевич, Лев Тимофеевич Кузин, Вячеслав Вячеславович Петров, Юрий Иванович Топчиев и Александр Степанович Шаталов награждены Государственной премией *за создание четырехтомной серии инженерных монографий под общим названием «Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования».* Этот труд является своеобразной энциклопедией по всем основным проблемам и методам анализа и конструирования систем автоматического управления. Он широко используется при разработке автоматического управления летательными аппаратами, энергетическими установками, химическими реакторами, прокатными станами и другими автоматизированными устройствами.

В. А. Лешковцев

«Квант» для младших школьников

1. Найти наименьшие натуральные числа a и d, удовлетворяющие равенству

$$500a - 7d = 1.$$

2. Когда наливают сок из жестяной банки через отверстие в крышке, то делают два отверстия. Только тогда идет хорошая струя. Почему?

3. Мой дед старше моего отца на 32 года, а мой отец на столько же старше меня. Сколько сейчас лет каждому из нас, если три года тому назад нам всем вместе не было и ста лет?

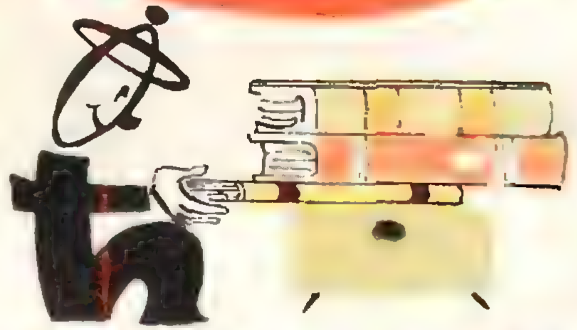
4. На столе лежит стопка книг. Что легче: вытянуть нижнюю книгу, придерживая (но не приподнимая!) остальные, или привести в движение всю стопку, потянув за нижнюю книжку?

5. Восстановить пример на умножение:

$$38{,}? \times ?6 = ???$$

(то есть заменить знаки ? на цифры, не равные нулю).

6. В цепи, содержащей электрическую лампочку, сопротивления подводящих проводов и нити лампы одинаковы, однако нить накаляется добела, а провода почти не нагреваются. Почему?



О простых числах

А. Д. Бендукидзе

В этой заметке рассказывается кое-что о простых числах. Этими числами люди заинтересовались еще в глубокой древности. Относительно простых чисел было поставлено множество интересных вопросов. Примечательно, что ответы на некоторые из них не известны и по сей день.

1. Возьмем ряд натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

В этом ряду нет наибольшего числа. Как это понимать? Это значит, что каким бы большим ни было натуральное число n, существует еще большее число. В самом деле, таким будет уже следующее натуральное число, — число $n+1$. Итак, натуральных чисел бесконечно много. Именно этот факт и подразумевают математики, когда говорят, что множество натуральных чисел бесконечно.

2. Наименьшим в ряду натуральных чисел является число 1. У него только один делитель — это 1. Следующее число — 2. У этого числа два делителя: 1 и 2. Далее идет 3. У него тоже два делителя: 1 и 3. Но уже у следующего числа, числа 4, три делителя: 1, 2, 4. У пяти два делителя, у шести — четыре и так далее. Число может иметь и много делителей. Например, у числа 60 — 12 делителей: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Число, у которого только два делителя: 1 и само это число, — называется простым; если же у числа более двух делителей, то оно называется составным. Так, например, числа 2, 3, 5, 7, 11 — простые, а 4, 6, 8, 9, 10 — составные. А как быть с числом 1? Ведь у него только один делитель! Это число не является ни простым, ни составным.

Таким образом, множество натуральных чисел естественным образом разбивается на три части или, как принято говорить, на три подмножества. Первое из этих подмножеств состоит из одного числа, а именно, из числа 1; второе содержит все простые числа, а третье — составные. Заметим, что каждое натуральное число попадает в одно и только одно из этих подмножеств, то есть, как обычно говорят, эти подмножества попарно не пересекаются.

3. Легко догадаться, что множество составных чисел бесконечно. В самом деле, уже чисел вида 2^n, где n принимает значения 2, 3, 4,..., бесконечно много, а ведь кроме этих существуют и другие составные числа!

Ну, а что можно сказать относительно простых чисел — конечно или бесконечно их множество? Известный древнегреческий математик Евклид, который жил в III веке нашей эры, доказал, что множество простых чисел бесконечно.

Посмотрите, как остроумно рассуждает Евклид при доказательстве этого факта.

Пусть p — некоторое простое число. Докажем, что существует простое число, большее p. В самом деле, перемножим все простые числа до p, включая само p, и к этому произведению добавим единицу. Получим следующее число:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Это число, которое явно больше p, будет или простым, или составным. Если оно простое, тем самым уже доказано, что существует простое число, большее чем p. Если же оно составное, то оно должно делиться на некоторое простое число; но ни на одно из простых чисел 2, 3, 5,..., p оно не делится — при делении на эти числа в остатке всегда будет получаться 1. Значит, оно должно делиться на простое число, большее чем p. Итак, и в этом случае мы вынуждены признать, что существует простое число, бо́льшее чем p. Но это и означает, что не существует наибольшего простого числа, откуда следует бесконечность множества простых чисел.

4. Таким образом, множество простых чисел бесконечно. При этом ясно, что множество простых чисел, не превосходящих некоторого n, конечно. Как найти эти числа? Проще всего это сделать методом, который был предложен современником Архимеда, греческим математиком Эратосфеном. Познакомимся с этим методом.

Пусть требуется найти все простые числа, не превосходящие n. Выпишем подряд числа от 1 до n:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n.$$

Первым стоит число 1. Оно, как мы уже знаем, не является простым. Поэтому вычеркнем его. Следующее число — 2. Оно простое. Оставляем это число и вычеркиваем все числа, кратные 2. Для этого достаточно вычеркнуть каждое второе число, начиная с 3. Идем дальше. Первое невычеркнутое число — 3. Оно простое. Оставляем его и вычеркиваем все числа, кратные ему, то есть каждое третье число, начиная с 4. (При счете следует учитывать и ранее вычеркнутые числа, поэтому некоторые числа вычеркиваются второй раз; такими будут 6, 12, 18,...). После этой операции первым невычеркнутым, а значит и простым, будет 5. Его оставляем и вычеркиваем все числа, кратные 5, то есть каждое пятое число, начиная с 6. Далее переходим к следующему невычеркнутому числу (таким будет 7) и так далее. Окончательно мы вычеркнем все составные числа, и у нас останутся только лишь простые. Вот, например, что у нас получится, если $n = 60$:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

По этой таблице мы находим все простые числа от 1 до 60. Их всего 17: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.

Применяя метод Эратосфена, мы как бы отсеяли, пропустили через решето все составные числа и оставили только простые. Этот метод называется «решетом Эратосфена».

В заключение заметим, что, пользуясь решетом Эратосфена, вычеркивание можно прекратить, как только мы дойдем до простого p, которое больше $\sqrt{n}$. К этому моменту все невычеркнутые числа будут простыми. (Постарайтесь доказать это сами.) Так, при $n = 60$ после того, как мы вычеркнули числа, кратные 7, дальнейшее вычеркивание можно не производить.

Предлагаем вашему вниманию одну простенькую задачу: докажите, что если p — простое число больше трех, то $p^2 - 1$ делится на 24.

К статье «Некоторые задачи на прогрессии»

1. 2; 6; 18 или 18; 6; 2.

2. Пусть $a, b, c, \ldots, n$ — члены арифметической прогрессии, k — число средних арифметических, вставленных между каждыми двумя последовательными членами этой прогрессии. Числа a и b вместе с k средними арифметическими, вставленными между a и b, образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{b-a}{k+1}$. Продолжите эти рассуждения для других членов по аналогии с решением задачи 3 в статье.

3. Не могут, см. задачу 2 статьи.

4. Записав сумму в виде $7\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\cdots+\frac{10^n-1}{9}\right)$, получим $\frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$.

5. Сгруппировав по два члена, получим сумму арифметической прогрессии $1+5+9+\ldots$

6. $x=\log_2 5$. Указание. Решите уравнение $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$, которое сводится к квадратному.

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $x>1$. Указание. Используя известные свойства логарифмов, преобразовать предложенное неравенство отдельно в каждом из двух случаев $0<x<1$ и $x>1$.

2. Скорость пешехода 3 *км/ч*, скорость велосипедиста 15 *км/ч*.

3. 12,5 *м*. Решение. Пусть ABC — данный треугольник (см. рис. 1), AK — биссектриса угла A, точка O — центр вписанного в треугольник ABC круга. По условию точки C, O и K лежат на одной окружности, центр Q которой лежит на стороне AC. Пусть L — вторая точка пересечения этой окружности со стороной (докажите, что эта окружность пересекается именно со стороной AC, а не с ее продолжением!), так что LC — диаметр этой окружности. Соединим отрезком точки O и C; тогда по свойству угла с вершиной на окружности

$$\smile OK=\smile LO=\measuredangle KCL,$$
$$\smile KC=\pi-2\measuredangle KCL$$

(дайте обоснования этих равенств!). Далее, поскольку угол KAC является углом с вершиной вне круга, можем записать

$$\frac{1}{2}\measuredangle BAC=\frac{1}{2}(\smile KC-\smile OL)=$$
$$=\frac{1}{2}(\pi-3\measuredangle KCL),$$

то есть $\measuredangle A=\pi-3\measuredangle C$, откуда $\measuredangle B=2\measuredangle C$. По теореме синусов из треугольника ABC имеем

$$\frac{AB}{\sin\measuredangle C}=\frac{AC}{\sin 2\measuredangle C},$$

откуда $\cos\measuredangle C=\frac{3}{5}$, и потому $\sin\measuredangle C=\frac{4}{5}$ (почему $\sin\measuredangle C>0$?). Остается воспользоваться формулой $R=\frac{AB}{2\sin\measuredangle C}$.

4. $\sqrt{3}$ *м*. Решение. Пусть SH — высота данной пирамиды $SABC$ (рис. 2), а a — длина ребра SC. Из треугольника SHC имеем $HC=a/2$,

$$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

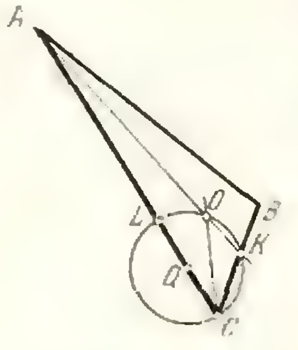


Рис. 1.

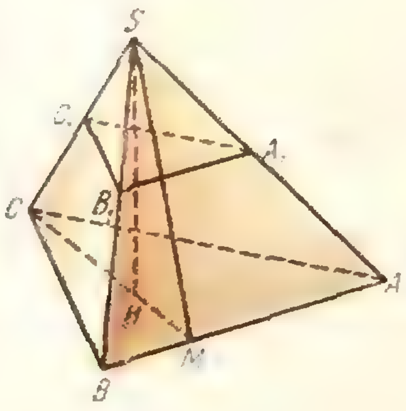


Рис. 2.

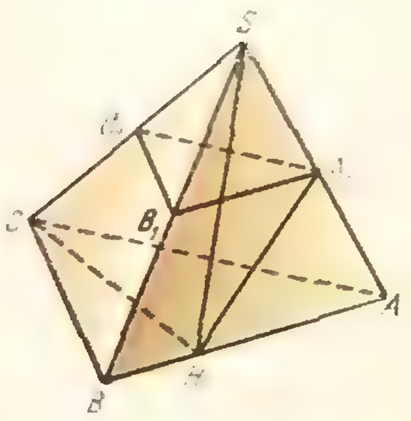


Рис. 3.

По условию точки $A_1B_1C_1$ — середины ребер SA, SB, SC — и вершины A, B, C лежат на одной сфере. Отсюда следует, что точки A, A_1, B_1, B лежат на одной окружности (почему?). Так как $A_1B_1 \parallel AB$ (почему?), то AA_1B_1B — равнобочная трапеция (докажите!). Проводя аналогичные рассуждения для четырехугольника BB_1C_1C, заключаем, что

$$SA = SB = SC = AB = a$$

(восстановите необходимые рассуждения!). Таким образом, треугольник ASB — правильный; апофема SM грани ASB легко вычисляется: $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Итак, длина высоты пирамиды SH равна длине апофемы SM. Поэтому высота пирамиды $SABC$ совпадает с апофемой боковой грани ASB (докажите!), то есть грани ASB и ABC взаимно перпендикулярны (рис. 3). Поскольку $HA = HB = HC = \frac{a}{2}$ (откуда это следует?), то центр сферы, о которой идет речь в условии задачи, лежит на высоте SH пирамиды (почему?). Центр этой сферы равноудален от точек A и A_1. Но $HA = \frac{a}{2}$ и $HA_1 = \frac{a}{2}$ (докажите!), а потому точка H, лежащая на ребре AB, как раз и является центром указанной в условии задачи сферы. Так как радиус этой сферы равен 1, то $a = 2$, и высота пирамиды определяется по формуле (1).

5. $a = 2$, $b = 4$, $c = 64$. Решение. Пусть числа a, b, c удовлетворяют условию задачи. Обозначим через x_0 общий действительный корень данных уравнений (заключите из условия задачи, что эти уравнения имеют по крайней мере один общий действительный корень!). Тогда число x_0^2 является корнем второго уравнения (докажите!). Так как $x_0 > 1$, то $x_0 \neq x_0^2$, и потому x_0 и x_0^2 — различные корни второго уравнения. По теореме Виета из этого уравнения получаем

$$b(b+1) = x_0 + x_0^2, \quad c = x_0^3. \qquad (1)$$

Первое из соотношений (1) как квадратное уравнение относительно b дает равенство $b = x_0$ (почему нужно отбросить второй корень этого уравнения?). Число x_0 есть корень первого уравнения; подставляя $x_0 = b$ в это уравнение, находим $a = \frac{8}{b}$. Вторым корнем первого уравнения является число $\frac{8}{b}$ (проверьте!). Так как $c = b^3$ (см. второе из соотношений (1)), то третье уравнение принимает вид

$$x^4 - b(b+1)x^2 + b^3 = 0$$

и имеет четыре корня:

$$x_1 = b,\ x_2 = -b,\ x_3 = \sqrt{b},\ x_4 = -\sqrt{b}. \qquad (2)$$

Так как корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения, то число $\frac{8}{b}$ должно совпадать с одним из чисел (2). Единственная возможность такого совпадения $\frac{8}{b} = \sqrt{b}$ (проверьте, что остальные случаи не подходят!) дает $b = 4$. Остается убедиться, что при значениях $a = 2$, $b = 4$, $c = 64$ условия задачи действительно выполнены; это устанавливается непосредственной проверкой (поясните, почему такая проверка — логически необходимая часть решения задачи).

Вариант 2.

1. $0 < x \leqslant \frac{4}{5}$, $x = 2$.
2. 21 км.
3. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ м.
4. $18\sqrt{2}$ $м^3$.
5. $a = -2$, $b = 20$, $c = 4$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. Заметим, что $0 < 3^{-(x+2)^2} \leqslant 1$ при всех x. С помощью подстановки $3^{-(x+2)^2} = t$ уравнение приводится к виду $9t^2 - 18t + 7 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $t_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $t_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$, из которых нам подходит лишь t_2. Следовательно, $3^{-(x+2)^2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$, откуда $x = -2 \pm \sqrt{-\log_3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)}$.

Большинство поступающих с решением этой задачи справилось. Некоторые абитуриенты не заметили, что $t \leqslant 1$.

2. Прежде всего заметим, что в область допустимых значений неизвестных входят те и только те x, при которых $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл и $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Исходное неравенство перепишем в виде

$$\operatorname{ctg}^2 x \geqslant [\,|\operatorname{ctg} x - 1| + 1\,] \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg} x \neq 0. \qquad (1)$$

Ясно, что при $\operatorname{ctg} x < 0$ условия (1) удовлетворяются и, следовательно, все точки x, для которых $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, являются решением.

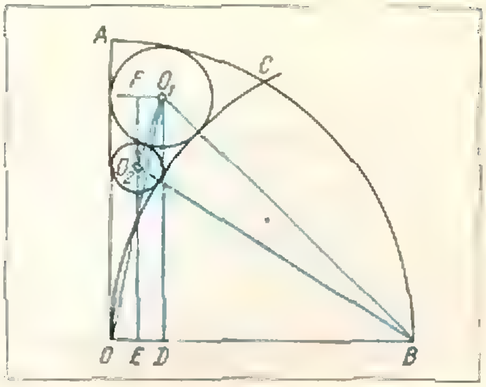


Рис. 4.

Остается рассмотреть случай $\operatorname{ctg} x > 0$. Тогда, поделив первое из неравенств (1) на $\operatorname{ctg} x > 0$, получим

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x - 1 \geqslant |\operatorname{ctg} x - 1|, \\ \operatorname{ctg} x > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Из $a \geqslant |a|$ следует $a \geqslant 0$, поэтому из (2) имеем $\operatorname{ctg} x - 1 \geqslant 0$, или $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$. Отсюда находим остальные решения задачи:

$$\pi m < x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi m \quad (m = 0, \ \pm 1. \ . \ . \ .).$$

Некоторые абитуриенты, получив в процессе решения (2) тождество $\operatorname{ctg} x - 1 = \operatorname{ctg} x - 1$, писали, что оно удовлетворяется при всех x, при которых $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл, забывая о том, что это тождество могло получиться лишь при $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$.

3. Обозначим радиус сектора через R. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, а r_1, r_2 — их радиусы (рис. 4). Выразим r_1, r_2 через R. Для этого проведем $O_1D \perp OB$, $O_2E \perp OB$, $O_1F \perp AO$. Из прямоугольных треугольников O_1BD и OO_1D имеем

$$(R + r_1)^2 = O_1D^2 + (R - r_1)^2,$$
$$(R - r_1)^2 = O_1D^2 + r_1^2.$$

Вычитая эти два равенства почленно, получим $r_1 = \frac{1}{6} R$. Тогда $O_1D = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Далее, из прямоугольного треугольника O_2BE найдем $(R + r_2)^2 = O_3E^2 + (R - r_2)^2$ или $O_2E = 2\sqrt{Rr_2}$. Аналогично, из треугольника O_1O_2F имеем $(r_1 + r_2)^2 = O_2F^2 + (r_1 - r_2)^2$, $O_2F = 2\sqrt{r_1r_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{Rr_2}$.

Подставим в равенство $O_2E + O_2F = O_1D$ выражения для O_2E, O_2F, O_1D и получим $2\sqrt{Rr_2} + \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{Rr_2} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Отсюда $r_2 = \frac{1}{7 + 2\sqrt{6}} R$. Искомое отношение равно $\frac{r_1}{r_2} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{6} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$.

4. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

5. Обозначьте $\operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2})$ через y и рассмотрите систему

$$\begin{cases} y^2 - 4ay + 2 + 2a \leqslant 0, \\ |y| \leqslant \operatorname{tg} 1. \end{cases}$$

Первое уравнение должно иметь либо единственное решение, либо решение $y \geqslant \operatorname{tg} 1$, либо $y \leqslant -\operatorname{tg} 1$.

Вариант 2

1. $x = 2 \pm \sqrt{\log_2(2(2 + \sqrt{3}))}$.

2. $2\pi n + \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$ или $2\pi n - \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ . \ . \ .)$.

3. $\frac{r_2}{r_3} = \frac{50 - 31\sqrt{2}}{4}$.

4. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

5. $a = \frac{\operatorname{ctg}^2 1}{1 + 2\operatorname{ctg} 1}$, тогда $x = \frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{3}{2}\pi$; $a = -1$, тогда $x = -\arcsin\frac{\pi}{4}$; $x = \pm\pi + \arcsin\frac{\pi}{4}$; $x = 2\pi - \arcsin\frac{\pi}{4}$.

Физический факультет

Математика

Вариант 1

1. $x = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n = 0, \ \pm 1, \ . \ . \ .)$.

2. $\frac{1}{100} < x < 10$.

3. Температура воды в первом сосуде — 28°, во втором — 56°.

4. $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. $\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $x = \pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ . \ . \ .)$.

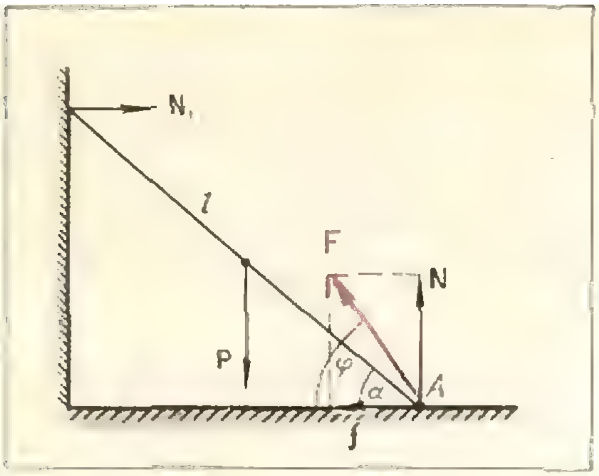


Рис. 5.

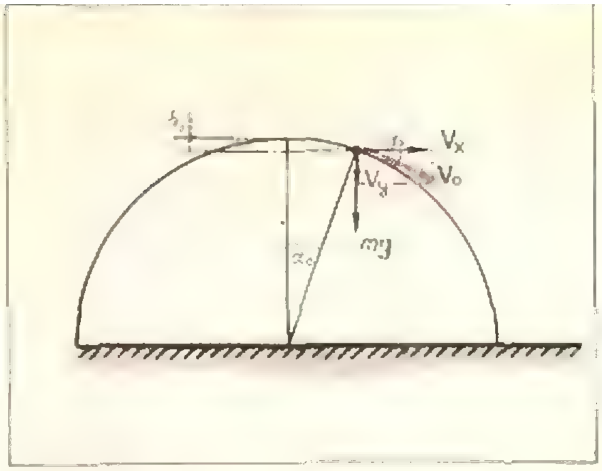


Рис. 6.

2. $x < \frac{1}{2}\log_3 4$.

3. 49 *км/ч*, 35 *км/ч*.

4. $\frac{5-\sqrt{7}}{4}a$.

5. $\sqrt{3}$.

Физика

Билет № 1

Запишем условия равновесия лестницы:

$$N - P = 0, \qquad (1)$$

$$f - N_1 = 0, \qquad (2)$$

$$N_1 l \sin\alpha - P\frac{l}{2}\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Здесь N — реакция горизонтальной опоры, N_1 — реакция гладкой стены, P — сила тяжести, f — сила трения (см. рис. 5). Из уравнений (1), (2) и (3) находим

$$N = P,\ N_1 = f = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Искомая сила F (полная реакция опоры) равна $F = \sqrt{f^2 + N^2}$.

Эта сила составляет с горизонталью угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{N}{f}$.

Таким образом,

$$F = \frac{P}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\alpha,\ \varphi = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha).$$

Билет № 2

Запишем уравнение движения тела до отрыва от сферы:

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{V^2}{R}. \qquad (1)$$

Здесь m — масса тела, V — скорость его в данной точке, α — угол между вертикалью и радиусом-вектором этой точки, N — сила реакции опоры. В момент отрыва (рис. 6)

$$N = 0, \qquad (2)$$

$$h_1 = R - R\cos\alpha_0, \qquad (3)$$

$$V_0^2 = 2gh_1. \qquad (4)$$

Подставив (2), (3), (4) в уравнение (1), найдем

$$\cos\alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

После отрыва тело с высоты $\frac{2}{3}R$ полетит свободно, обладая начальной скоростью V_0. Уравнение движения тела по вертикали:

$$\frac{2}{3}R = (V_0\sin\alpha_0)t + \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда

$$500t^2 + 260t - 120 = 0, \quad t \approx 0{,}3\text{с}.$$

Билет № 3

Световой поток связан с силой света источника и телесным углом, внутри которого этот поток распространяется, соотношением

$$\Phi = I\Omega.$$

В первом случае

$$\Phi_1 = I\Omega_1 \approx I\frac{\frac{\pi d^2}{4}}{L^2}$$

(так как $d \ll L$).

Во втором случае добавляется еще световой поток Φ_3, *отраженный от зеркала*, то есть $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$.

Так как источник находится в фокусе зеркала, лучи после отражения идут парал-

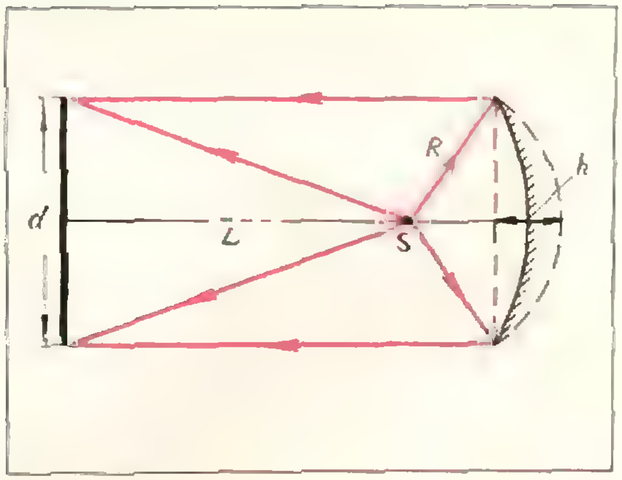


Рис. 7.

лельным пучком: следовательно, весь световой поток Φ_3, попавший на зеркало, после отражения попадает на диск (рис. 7) (так как поперечный диаметр зеркала равен диаметру диска). Но $\Phi_3 = I\Omega_3 = I\,\dfrac{2\pi Rh}{R^2}$,

где $h = R - \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2} \approx 4$ *см*.

Отношение световых потоков равно

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\Phi_1 + \Phi_3}{\Phi_1} = 1 + \frac{8hL^2}{Rd^2} \approx 1600.$$

Билет № 4

На рамку в поле действуют силы: T — натяжение, F_A — сила Ампера, mg — сила тяжести (рис. 8).

При равновесии отклоненной рамки сумма моментов всех сил, действующих на три стороны квадрата, относительно оси OO равна нулю.

Моменты сил тяжести равны

$$M_{OD} = M_{OC} = \rho lSg\,\frac{l}{2}\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$M_{DC} = \rho lSgl\sin\alpha, \qquad (2)$$

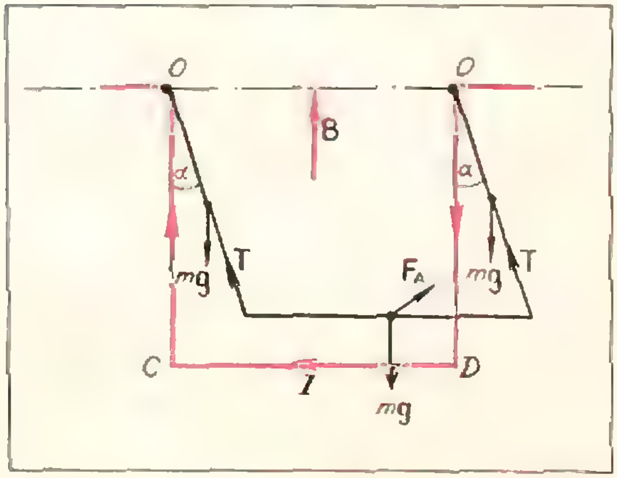


Рис. 8.

где l — длина стороны рамки, α — угол отклонения рамки от вертикали, g — ускорение свободного падения.

Моменты сил Ампера, действующих на боковые стороны рамки, равны по величине и противоположны по направлению. Эти силы составляют пару сил относительно вертикальной оси и не влияют на отклонение рамки от вертикали. Момент силы Ампера, действующей на нижнюю сторону рамки и вызывающей отклонение рамки от вертикали, равен

$$M_A = IBl\cos\alpha. \qquad (3)$$

Сила натяжения T проходит через ось, и ее момент равен нулю. Таким образом,

$$M_{OD} + M_{OC} + M_{DC} - M_A = 0. \qquad (4)$$

Подставив значения моментов сил в равенство (4), найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{IB}{2\rho Sg}.$$

Билет № 5

Меняющееся во времени магнитное поле, пронизывая виток, возбуждает в нем э. д. с. индукции, равную по величине

$$E = \frac{\Delta B}{\Delta t}\,S,$$

где S — площадь витка, перпендикулярного силовым линиям поля. При образовании «восьмерки» нормаль к поверхности одной петли изменила свое направление на противоположное. Полная площадь «восьмерки»

$$S = S_2 - S_1 = \pi\,(r_2^2 - r_1^2),$$

где r_1 и r_2 — радиусы петель «восьмерки». По условию $r_2 = 2r_1$. Тогда $l = 2\pi\cdot 3r_1$. Отсюда

$$r_1 = \frac{l}{6\pi}, \quad r_2 = \frac{l}{3\pi}, \quad S = \frac{l^2}{12\pi}.$$

Ток, текущий по проводнику, равен

$$I = \frac{E}{R} = \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{l^2}{12\pi R} =$$

$$= \frac{1{,}44\cdot 10^{-4}\cdot 10^2}{12\cdot 3{,}14\cdot 1}\ a \approx 0{,}4\ \textit{ма}.$$

Билет № 6

Построим ход двух лучей, вышедших из источника (рис. 9). После преломления на границе раздела вода—воздух лучи «встречаются» в точке S', отстоящей на расстоянии h_1 от поверхности воды. Из треугольников ASC и $AS'C$ с учетом малости углов α и β имеем

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}, \quad h_1 = \frac{h}{n}.$$

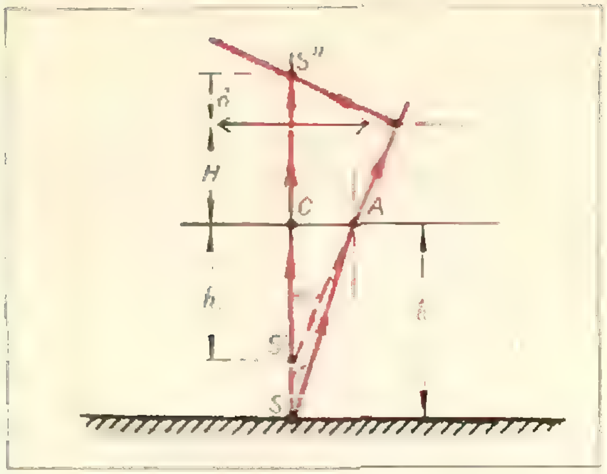


Рис. 9.

Для линзы точка S' является предметом, а S'' — его изображением. Воспользуемся формулой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F},$$

где

$$a=H+h_1=H+\frac{h}{n},$$

и найдем h:

$$h=n\left(\frac{Fb}{b-F}-H\right)=40\ см.$$

К разным задачам

(*см. стр. 63*)

1. x и y нечетны, поэтому

$$(1971^{1972}+1)+(x+y)=(xy+1)+$$
$$+(x+y)=(x+1)(y+1)$$

делится на 4. Показать, что $1971^{1972}+1$ не делится на 4, тогда и $x+y$ не делится на 4 и тем более на 1972.

2. При четных n.

3. Доказать, что $a_{200}^{1972}-a_{200}$ кратно d, представив a_{200} в виде $a_{15}+185d$.

4. Воспользоваться равенством

$$\frac{2}{(3k-1)\cdot 3k\cdot(3k+1)}=$$
$$=\frac{1}{3k-1}+\left(\frac{1}{3k}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{3k+1}.$$

К задачам «Квант» для младших школьников

(*см. «Квант» № 3, 1973*)

1. 27 секунд.

2. Получилось так, что второй продавец продал 6 яблок не по 1 руб. за 2 шт., а по 1 руб. за 3 шт.

3. «Кто за двумя зайцами погонится, тот ни одного не поймает».

4. Осадка корабля изменится, так как плотность соленой воды больше, чем пресной.

К задаче «В тихой гавани»

(*см. стр. 34*)

Сначала каждому дается по три пиастра и три дублона. Затем каждого спрашивают, в какую часть бочки вина он ценит один пиастр. Кто назовет наибольшую часть (по условию она не больше четверти), тот и получает оставшийся пиастр, а каждый из остальных — то количество вина, которое назвал получивший пиастр (на двоих — не больше половины бочки). Так же поступают и с дублоном. Оставшееся вино делят поровну.

К «Вероятностным задачам»

(*см. стр. 59*)

1. Неверно. Вообразим, что этот опыт проводился очень много раз. Тогда в половине случаев шар будет взят из первого ящика, то есть будет белым. В другой же половине случаев шар будет взят из второго ящика, причем в половине из этой половины случаев он будет белым. Следовательно, белый шар будет вытаскиваться в $^3/_4$ случаев, то есть искомая вероятность равна $^3/_4$.

2. Вообразим, что будет сыграна еще одна партия. Если первый игрок ее выиграет, то возьмет все деньги (так как счет будет 10 : 8), а если проиграет, то счет будет 9 : 9, после чего шансы игроков сравняются. Значит, половина денег принадлежит первому игроку, а вторую половину возьмет он или его противник в зависимости от исхода предполагаемой партии. Следовательно, вторую половину денег надо разделить пополам, то есть дать первому игроку $^3/_4$ всех денег, а второму — $^1/_4$.

3. Пусть в семье двое детей. Перечисляя их, будем сначала указывать старшего ребенка, а затем младшего (мы исключаем семьи с близнецами). Возможны четыре равновероятных случая:

ММ, МД, ДМ, ДД.

Следовательно, в семьях, где двое детей, среди которых есть мальчик, возможны три одинаково вероятных случая:

ММ, МД, ДМ.

Мы видим, что в двух из этих случаев второй ребенок является девочкой, а в одном — мальчиком. Значит, вдвое более вероятно, что второй ребенок является девочкой.

4. Потому, что число шаров бесконечно. В данном случае нельзя ставить вопрос о вероятности выигрыша A или B.

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы»

(см. «Квант» № 3, 1973 г.)

Физика

1. $U_{AB} = \dfrac{E(C_1C_4 - C_2C_3)}{(C_1+C_2)(C_3+C_4)} = 3{,}0$ *в*

2. $E = \dfrac{T - mg(3 - 2\cos\alpha)}{2q\sin\alpha} \approx$

$\approx 4{,}6\cdot 10^4$ *в/м*.

3. $\Delta q = q_2 - q_1 =$

$= -CE\dfrac{R_3}{R_3 + R_4} = -0{,}83\cdot 10^{-4}$ *к*.

4. $v = \dfrac{IU\eta}{m(a+g)} = 1{,}8$ *м/с*.

5. $U_3 = E\,\dfrac{U_1U_2}{E(U_1+U_2) - U_1U_2} = 14{,}7$ *в*.

Математика

1. $\dfrac{202}{841}$.

2. $0;\ -3;\ \dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$. Указание. Положить $y = x^2 + 3x$.

3. $x = 3$.

4. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Указание. Положить $y = \sin x + \cos x$ и учесть, что $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$.

5. $x = 3$. Указание. Положить $y = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$.

6. $x < 3$.

7. $x \leqslant 0;\ x > 4{,}5$. Указание. Задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x - 3 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9. \end{cases}$$

8. $\pi k + \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$. Указание. Учесть, что $\sin x + \cos x < \sqrt{3}$ при любых x.

9. $0 < x < 2^{6-\sqrt{57}};\ \ 2 < x < 2^{6+\sqrt{57}}$.

К статье «Университет Дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Вариант 1

1. Победила первая бригада.

2. $x = \dfrac{k\pi}{2}$.

3. 1.

4. Решений нет.

Вариант 2

1. В 1,5 раза.

2. $x = -1$,

$y = \dfrac{1}{4}$.

3. $\dfrac{8\pi r^3\sqrt{3}}{3}$.

4. $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}$.

Вариант 3

1. За 10 дней, за 8 дней.

2. $x \leqslant -3$,

$x \geqslant 5$.

3. $\arcsin\dfrac{2}{\pi}$.

4. $x_1 = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2k\pi}{7}$;

$x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ЮРИЮ ГАГАРИНУ

12 лет тому назад 12 апреля 1961 года произошло событие, поразившее весь мир—человек впервые поднялся в космическое пространство. Первым космонавтом стал советский человек коммунист Юрий Алексеевич Гагарин.

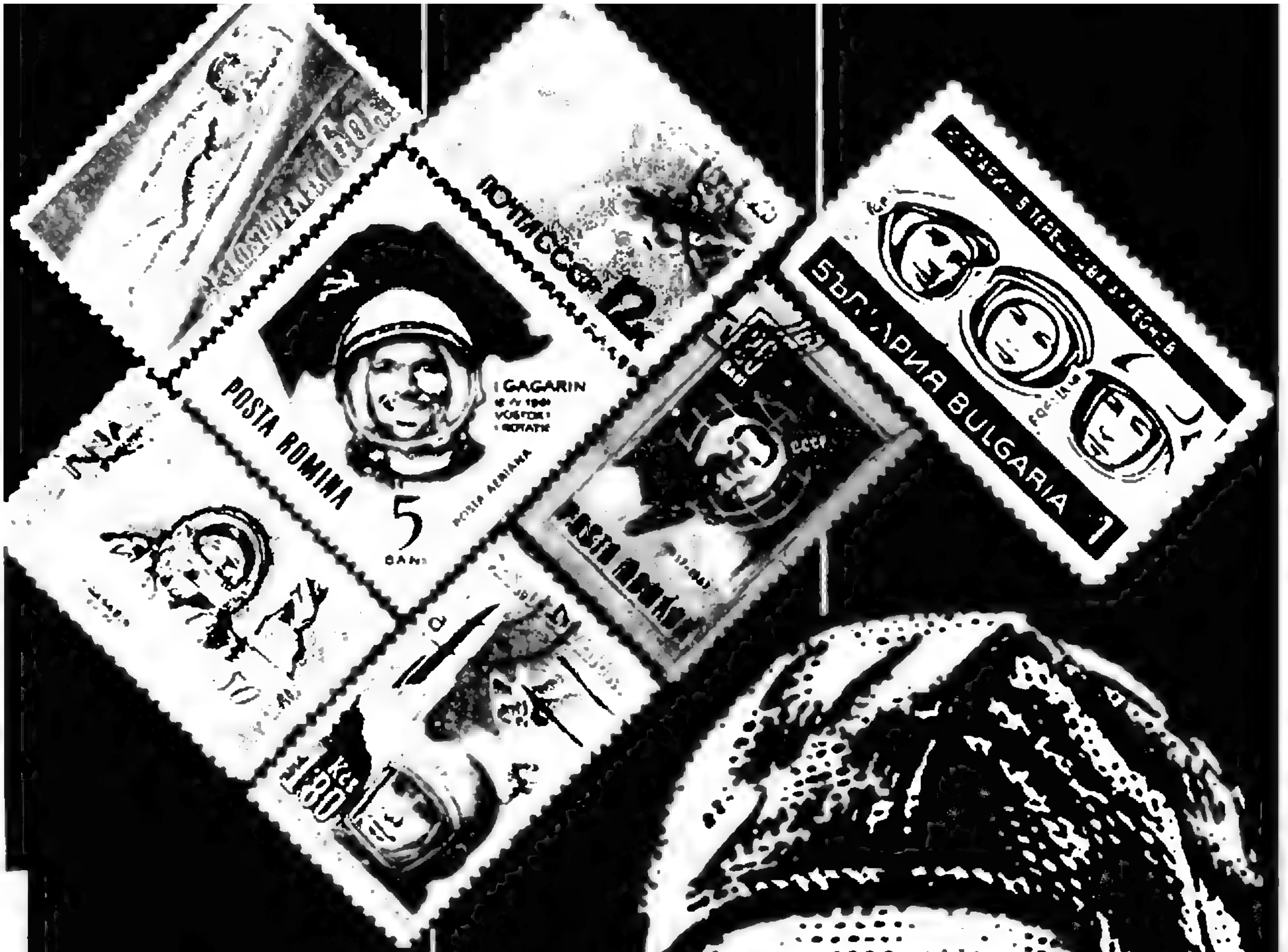
Подвигу первого космонавта посвящено немало марок, выпущенных в различных странах мира. Часть из них мы приводим на наших фотографиях.

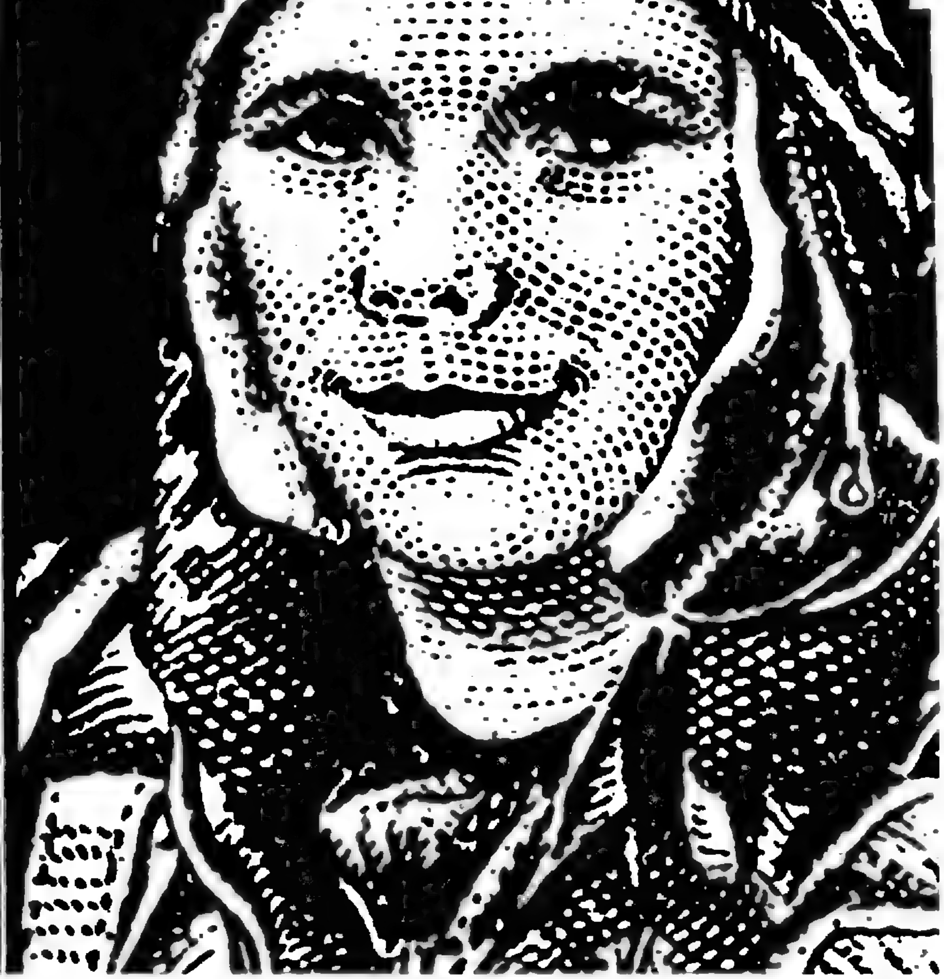
Первая марка с портретом Гагарина вышла в СССР в 1961 году. На ней указана дата полета, а вокруг портрета сделана надпись «Первый в мире космонавт Ю. А. Гагарин». Эту марку вы видите слева вверху. В этой же серии была выпущена вторая марка, на которой Гагарин изображен в космическом скафандре слева от ракеты, взлетающей на фоне Кремля. В 1964 году ко Дню Космонавтики в СССР вышла марка с изображением Гагарина и кабины космического корабля «Восток-1».

Запуску первого космонавта посвящена серия из двух марок, выпущенная в Польше в 1961 году. На одной из них вы видите портрет Гагарина в форме парашютиста. В такой же форме он изображен на кубинской марке 1963 года и болгарской марке 1966 года.

Чехословакия выпустила в 1961 году серию из трех марок, на которых Гагарин символически изображен стремительно летящим в космосе. В том же году, в связи с визитом Юрия Гагарина в Прагу, была выпущена марка с его портретом в скафандре.

В 1962 году в Венгрии в серии марок, посвященных


ПОЧТА СССР 12
POSTA ROMINA
I. GAGARIN
5 BANI
POSTA AERIANA
CCCP
POSTA ROMANA
БЪЛГАРИЯ BULGARIA 1
Kčs 1.80



Международному астронавтическому конгрессу, была выпущена марка с портретом Гагарина.

В 1963 году в Румынии вышла марка (в форме ромба) с портретом первого космонавта. Его изображение вы видите также на другой румынской марке, выпущенной в 1967 году в честь десятилетия со дня запуска первого искусственного спутника Земли.

На болгарской марке 1967 года Гагарин изображен вместе с Терешковой и Леоновым.

На фото приведены также марка Демократической республики Вьетнам (1965 г.) и марка Кубинской народной республики, на которой Гагарин изображен рядом с земным шаром, опоясанным траекториями космического полета.

В. А. Рудов

ИНДЕКС 70 465

27|1-42

В октябре 1957 года с запуском первого искусственного спутника Земли человечество приступило к систематическим исследованиям космического пространства. С тех пор прошло совсем немного времени, но как удивительно далеко вперед шагнули космические исследования! Советские автоматические станции исследовали Луну, Венеру и Марс. Наука узнала об этих небесных телах значительно больше, чем за все предыдущие столетия упорных наблюдений.

Успешно испытана первая пилотируемая орбитальная станция «Салют», предназначенная для проведения длительных научных исследований в Космосе. Разнообразные искусственные спутники Земли служат человеку, изучая метеорологические процессы в атмосфере, передвая информацию на огромные расстояния, исследуя водный режим нашей планеты.

К настоящему моменту в космос запущено более тысячи различных аппаратов, половина которых сделана руками советских ученых, инженеров, рабочих. В нашей космической программе отчетливо выделяются три основных направления исследований: систематические исследования в околоземном космическом пространстве, имеющие не только научное, но и большое практическое значение; изучение Луны и окололунного космического пространства; исследование планет Солнечной системы. В каждом из этих направлений достигнуты громадные успехи и открываются захватывающие перспективы.

НОМЕР
5

Основан в 1970 году

Квант

1973
5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор —
академик **И. К. Кикоин**
Первый заместитель главного редактора
академик **А. Н. Колмогоров**

Редакционная коллегия:

Л А Арцимович,
М И Башмаков,
С Т Беляев,
В Г Болтянский,
Н Н Бронштейн,
Н Б Васильев,
И Ф Гинзбург,
Ю Н Ефремов,
В Г Зубов,
П Л Капица,
В А Кириллин,
А И Климанов
(*главный художник*),
С М Козел,
В А Лешковцев
(*зам главного редактора*),
Л Г Макар Лиманов,
А И Маркушевич,
М Д Миллионщиков,
Н А Патрикеева,
И С Петраков,
Н Х Розов,
А П Савин,
И Ш Слободецкий,
М Л Смолянский
(*зам главного редактора*),
Я А Смородинский,
В А Фабрикант,
А Т Цветков,
М П Шаскольская,
С И Шварцбурд,
А И Ширшов

Редакция:

В Н Березин,
А Н Виленкин,
Т М Макарова
(*художественный редактор*),
И Б Мамулова,
Н А Минц,
Т С Петрова,
В А Тихомирова,
Л В Чернова
(*зав редакцией*)

Художник В. В Андреев

В НОМЕРЕ:

2 *К Р Коваленко, М Г Крейн* Баллистическая задача в космосе
7 *Я И Хургин* Кибернетик ищет подземные кладовые
15 *Б Тейлор, Д Лангенберг, У Паркер* Фундаментальные физические постоянные

Лаборатория «Кванта»

21 *В В Майер* Опыты с инфракрасным излучением

Математический кружок

22 *В С Абрамович* Суммы одинаковых степеней натуральных чисел
26 *В Н Березин* Правильные многогранники

Задачник «Кванта»

28 Задачи М201—М205, Ф213—Ф217
30 Решения задач М160—М164, Ф178—Ф182

Практикум абитуриента

38 *А А Рывкин* Периодические функции
43 *Л А Боровинский* Задачи на максимум и минимум
47 *А А Атавин, С Т Беляев, В А Цецохо* Новосибирский государственный университет

Рецензии, библиография

50 *М Л Смолянский* Новые книги

Информация

52 *А Я Халамайзер* Экзамены по математике в школах ГДР

«Квант» для младших школьников

55 Задачи
56 *А Д Бендукидзе* О распределении простых чисел
58 **Ответы, указания, решения**

Уголок коллекционера

А В Алтыкис Марки, посвященные метеослужбе
3 я страница обложки
Смесь (*стр 14, 37, 42 51, 57*)

К Г КОВАЛЕНКО
М Г КРЕЙН

БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В КОСМОСЕ

Представим себе, что с поверхности Земли взлетает космический корабль, и в момент остановки (в системе отсчета, связанной с центром масс Земли) из него выбрасываются с одной и той же по величине скоростью v_0 по разным направлениям одинаковые тела. Возникает вопрос: *в какую часть околоземного пространства могут попасть эти тела?*

Решению этой задачи и ряда связанных с ней задач посвящена настоящая статья. Спешим предупредить читателя, что в такой постановке задача была рассмотрена еще в прошлом столетии, а именно, в статье профессора Б. К. Млодзеевского «Об огибающей орбит при ньютоновском притяжении», опубликованной в 1886 году, а затем, с более простым выводом, в статье знаменитого русского механика Н. Е. Жуковского «Замечание по поводу статьи Б. К. Млодзеевского», опубликованной в том же году.

Ниже будет приведено еще более элементарное изложение этих вопросов, которое потребует от читателя знания простейших свойств эллипса, а также двух *законов сохранения* для движения под действием ньютоновской силы притяжения и первого закона Кеплера *).

---

*) Все эти сведения можно найти, например, в статье Я. А. Смородинского «Движение планет», «Квант» № 1, 1971.

1. Постановка задачи. Исходные предложения

При решении задачи мы будем пренебрегать сопротивлением атмосферы Земли; выбранную систему отсчета, связанную с Землей, будем считать инерциальной, тела — материальными точками массы m, а Землю — однородным шаром массы m_0.

Как известно, такой шар притягивает материальную точку с силой, направленной к его центру и равной $F = \gamma\frac{m_0 m}{r^2}$, где γ — гравитационная постоянная, а r — расстояние материальной точки до центра шара.

Поэтому рассматриваемая нами задача сводится к идеализированной задаче, изученной еще Ньютоном: *В неподвижном *) центре O сосредоточена масса m_0, которая притягивает материальную точку массы m* с силой $F = \gamma\frac{m_0 m}{r^2}$. *Требуется исследовать возможные движения этой материальной точки.*

При движении материальной точки под действием силы тяготения имеют место два закона сохранения: механической энергии и момента количества движения.

Закон сохранения полной механической энергии говорит о том, что энергия

$$E = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{m_0 m}{r}\ ^{**)} \qquad (1)$$

сохраняет постоянное значение, то есть в любой момент времени $E = E_0$, где E_0 — начальная энергия

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - \gamma\frac{m_0 m}{r_0}. \qquad (2)$$

В частности, отсюда следует, что

$$-\gamma\frac{m_0 m}{r} < E_0, \text{ или } \gamma\frac{m_0 m}{r} > -E_0.$$

Если $E_0 < 0$, то r остается ограниченным. Известно, что в этом и только в этом случае материальная точка описывает эллипс, причем один из его фокусов совпадает с центром O (первый закон Кеплера). Поэтому начальная скорость v_0, для которой $E_0 < 0$, называется эллиптической. Если $E_0 = 0$, точка движется по параболе, и соответствующая начальная скорость называется параболической. Если $E_0 > 0$, движение точки происходит по гиперболе, а скорость называется гиперболической.

Закон сохранения момента количества движения *) (момента импульса) заключается в том, что величина

$$L = mv\rho = mvr\sin\alpha \qquad (3)$$

(рис. 1) сохраняет постоянное значение.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач, относящихся к движению материальной точки по эллиптической траектории.

2. Независимость большой полуоси эллипса от направления начальной скорости

Изложенные предложения позволяют с помощью несложных выкладок

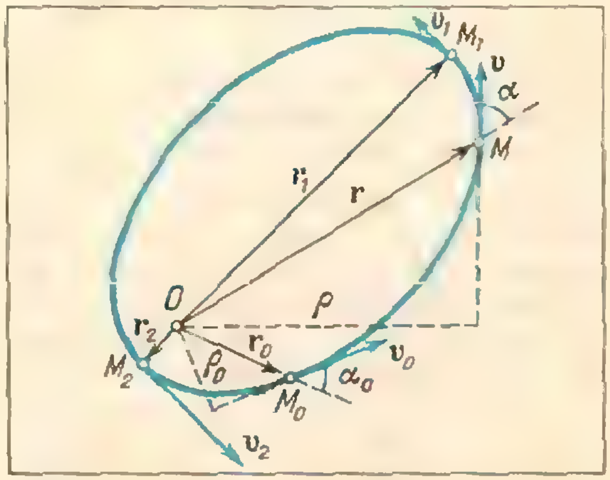


Рис. 1.

---

*) Строго говоря, в результате взаимного притяжения и материальная точка, и Земля будут двигаться относительно их общего центра масс. Но так как масса m пренебрежимо мала по сравнению с массой m_0, то Землю можно считать неподвижной.

**) О том, как подсчитать потенциальную энергию в поле тяготения, можно прочитать, например, в статье Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяготения», «Квант» № 6, 1972.

*) Как известно, этот закон сохранения связан со вторым законом Кеплера.

найти большую полуось эллипса. В самом деле, для тех моментов, когда материальная точка попадает в одну из вершин M_1 или M_2 эллипса, то есть проходит через апогей или перигей, равенство $E = E_0$ дает

$$\frac{v_{1,2}^2}{2} - \gamma \frac{m_0}{r_{1,2}} = \frac{v_0^2}{2} - \gamma \frac{m_0}{r_0}, \quad (4)$$

а равенство $L = L_0$ дает

$$m v_{1,2} r_{1,2} = m v_0 r_0 \sin \alpha_0. \quad (5)$$

Исключив $v_{1,2}$ из выражений (4) и (5), получаем квадратное уравнение относительно $r_{1,2}$:

$$\left(\frac{v_0^2}{2} - \gamma \frac{m_0}{r_0}\right) r_{1,2}^2 + \gamma m_0 r_{1,2} - \frac{v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2} = 0. \quad (6)$$

Два корня этого уравнения, r_1 и r_2, дают значения $r_{1,2}$ в апогее и перигее. Так как большая полуось эллипса $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, то по теореме Виета из (6) находим

$$a = -\frac{\gamma m_0}{2\left(\frac{v_0^2}{2} - \gamma \frac{m_0}{r_0}\right)} = \frac{\gamma m_0 r_0}{2\gamma m_0 - r_0 v_0^2}. \quad (7)$$

Таким образом, при фиксированной массе притягивающего центра большая полуось эллиптической траектории материальной точки определяется ее начальным положением (r_0) и величиной начальной скорости (v_0), а от направления этой скорости никак не зависит.

3. Попадание из начального положения в заданное. Эллипсоид «безопасности»

Решим следующую задачу.

Какое нужно сообщить направление начальной скорости при заданной величине v_0, чтобы материальная точка перешла из начального положения M_0 в заданное положение M?

Точка M должна лежать на эллипсе, поэтому найти направление начальной скорости — это значит найти направление касательной к эллипсу в точке M_0. Это можно сделать, *воспользовавшись оптическим свойством эллипса*, согласно которому начальная скорость должна быть *направлена (в ту или иную сторону)* по биссектрисе угла, смежного углу $\widehat{(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0')}$ (рис. 2), где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_0'$ — радиусы-векторы, проведенные из фокусов в точку M_0.

Один из фокусов эллипса известен (совпадает с точкой O), а другой надо определить. Очевидно, что расстояния r_0' и r' от точек M_0 и M до этого фокуса удовлетворяют условиям

$$r_0 + r_0' = 2a,$$
$$r + r' = 2a.$$

Отсюда следует, что

$$r_0' = 2a - r_0 \quad \text{и} \quad r' = 2a - r,$$

то есть r_0' и r' вполне определяются положением точек M_0 и M и величиной начальной скорости. Стало быть, искомый фокус лежит на пересечении двух окружностей с центрами в точках M_0 и M и с радиусами, равными соответственно r_0' и r'.

Если расстояние $M_0M > r_0' + r' = 4a - r_0 - r$, то задача не имеет решения, так как окружности не пересекаются.

Если $M_0M < r_0' + r'$, то указанные выше окружности будут иметь две точки пересечения F_1 и F_2, как показано на рисунке 2, и у задачи будет два решения.

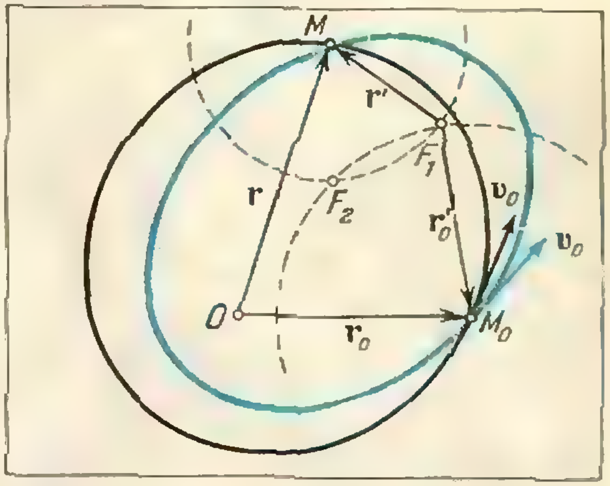


Рис. 2.

Если $M_0M = r_0' + r'$, то окружности касаются. В этом и только в этом случае будет существовать одно решение.

Выясним, где в пространстве должна находиться точка M, чтобы выполнялось последнее условие. Из рисунка 3 видно, что

$$OM + MM_0 = r + r' + r_0' = r + (4a - r_0 - r) = 4a - r_0 = \text{const}, \quad (8)$$

то есть заданная точка M лежит на эллипсоиде, полученном вращением эллипса с фокусами в точках O и M_0 и с большой осью, равной $4a - r_0$, вокруг прямой OM_0. Этот эллипсоид можно, не совсем, правда, естественно, назвать эллипсоидом «безопасности». На самом деле точки внутри эллипсоида являются опасными, а точки вне эллипсоида — безопасными.

После сказанного становится ясным следующее:

1. Если точка M лежит вне эллипсоида безопасности, то из заданной точки M_0 при заданной начальной скорости v_0 в нее попасть невозможно.

2. Если точка M лежит внутри эллипсоида безопасности, то в нее можно попасть по двум различным траекториям.

3. Если точка M лежит на эллипсоиде безопасности, то в нее можно попасть по единственной траектории.

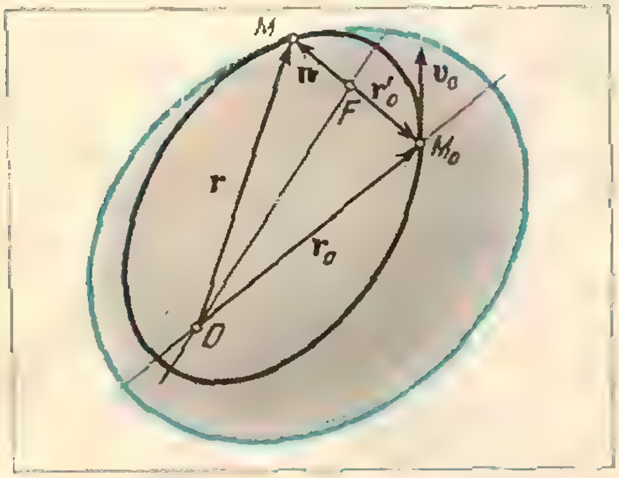


Рис. 3.

4. Перелет из начального положения M_0 в заданное M с минимальной начальной скоростью

Эллипсоид безопасности имеет определенные фокусы O и M_0, а большая ось эллипсоида безопасности, равная $4a - r_0$, согласно (7) увеличивается с увеличением начальной скорости v_0; при $v_0 \to \sqrt{2\gamma m_0 / r_0}$ эллипсоид безопасности неограниченно расширяется.

Если начальная скорость не определена, то в заданную точку M можно попасть разными способами. Наименьшее же значение начальной скорости, при котором возможен перелет из точки M_0 в точку M, соответствует тому, что точка M попадает на поверхность эллипсоида безопасности.

Тогда, согласно (8):

$$4a = r_0 + r + MM_0 = 2p, \quad (9)$$

где p — полупериметр треугольника с вершинами в точках O, M_0, M (см. рис. 3). Вспоминая зависимость (7) между a и v_0 и используя соотношение (9), получаем минимальную начальную скорость

$$v_{0\,\min} = \sqrt{2\gamma m_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}\right)}.$$

5. Попадание на земную поверхность

Для удобства будем считать, что точка M_0 находится над северным полю-

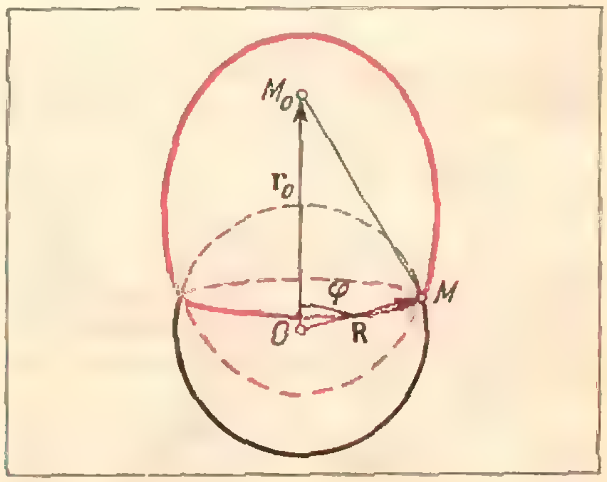


Рис. 4.

сом на продолжении земной оси (рис. 4).

При достаточно малых значениях v_0 эллипсоид безопасности будет пересекаться с земной поверхностью по некоторой параллели. Из рисунка 4 видно, что большая ось эллипсоида безопасности, равная $4a - r_0 = M_0M + R$, возрастает при возрастании угла φ. При $\varphi = 180^\circ$

$$4a - r_0 = r_0 + 2R,$$

то есть $a = \frac{1}{2}(r_0 + R)$.

Из равенства (7) находим соответствующее значение начальной скорости

$$\hat{v}_0 = \sqrt{\frac{2\gamma m_0 R}{r_0(r_0 + R)}},$$

или, учитывая, что $\gamma m_0 = gR^2$,

$$\hat{v}_0 = \sqrt{\frac{2gR^3}{r_0(r_0 + R)}}.$$

Это — наименьшая начальная скорость, позволяющая попасть в любую точку земной поверхности. В частности, если r_0 приближается к R, то $\hat{v}_0$ стремится к $\sqrt{gR}$, то есть к первой космической скорости, что вполне естественно. С увеличением r_0 скорость $\hat{v}_0$ убывает, что также вполне естественно. При $v_0 > \hat{v}_0$ можно будет попасть в любую точку Земли по двум различным траекториям, а при $v_0 = \hat{v}_0$ это же имеет место для всех точек земной поверхности, кроме Южного полюса.

Упражнения

1. При $v_0 = v_{\text{параб}}$ ($E_0 = 0$) расстояние от фокуса O параболической трактории до ее вершины A равно

$$h = r_0 \sin^2\alpha_0 = \frac{1}{2} r_0 (1 - \cos 2\alpha_0)$$

рис. 5).

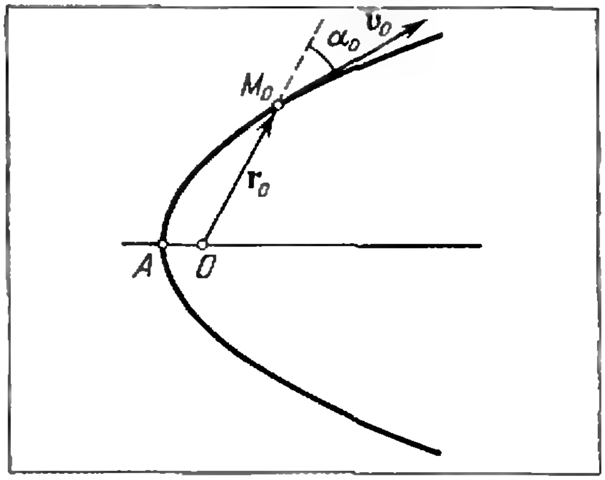


Рис 5.

Проверить, что эта формула непосредственно следует из «оптического» свойства параболы: плоский пучок лучей, направленный на параболическое зеркало параллельно его оси, после отражения от зеркала собирается в его фокусе.

Указание. При решении воспользоваться классическим определением параболы: парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

2. Показать, что для гиперболической скорости v_0 ($E_0 > 0$) действительная полуось a гиперболической орбиты равна

$$a = \frac{\gamma m_0 r_0}{r_0 v_0^2 - 2\gamma m_0}$$

и не зависит от направления начальной скорости v_0.

Указание. Воспользоваться определением гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, имеет одно и то же абсолютное значение.

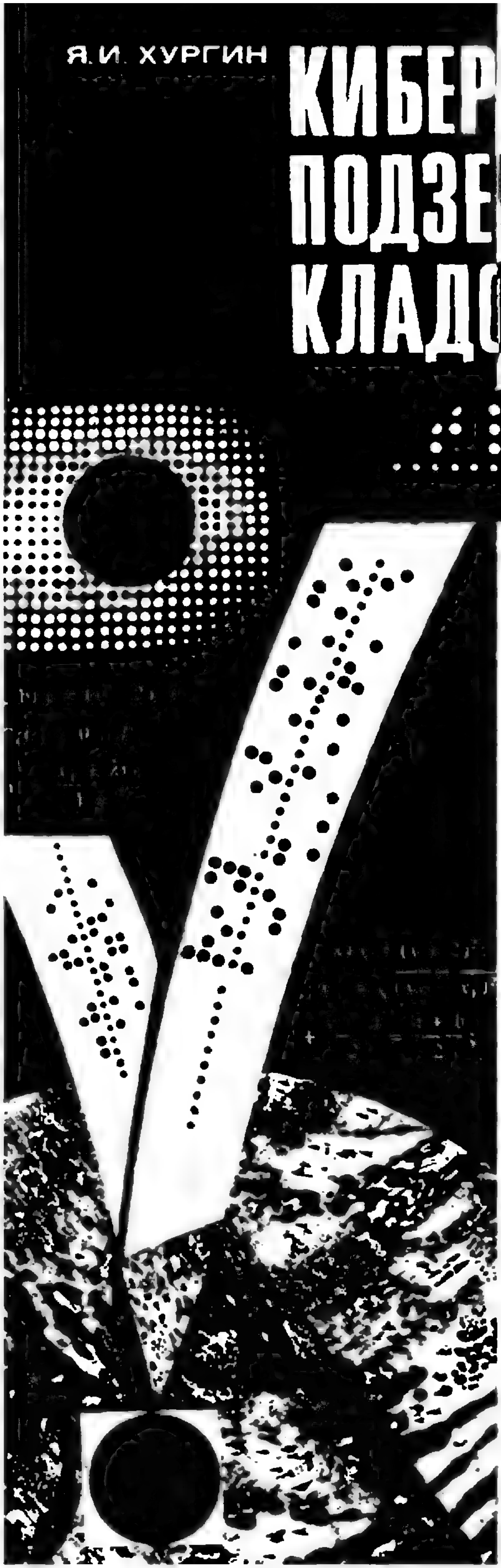
Подробнее о гиперболе можно прочитать, например, в статье Я. А. Смородинского «Движение комет и открытие атомного ядра», «Квант» № 12, 1971.

3. В поле положительно заряженного центра с зарядом Q с начальной скоростью v_0 движется материальная точка массы m с положительным зарядом q. Как известно, под действием кулоновской силы отталкивания $F = \frac{Qq}{r^2}$ материальная точка будет двигаться по гиперболе. Показать, что действительная полуось гиперболической орбиты находится по формуле:

$$a = \frac{Qqr_0}{mr_0v_0^2 + 2Qq}.$$

Я. И. ХУРГИН

КИБЕРНЕТИК ИЩЕТ ПОДЗЕМНЫЕ КЛАДОВЫЕ



Поиск

Труд поисково-геологических экспедиций овеян романтикой: костры и песни под гитару, заросли и болота, проявления лучших и худших черт человеческих, всплывающих на фоне трудностей… И нет зацепки для вмешательства «трезвого» математика.

Но это лишь на первый взгляд. Давайте приглядимся внимательнее, забудем на время о романтике и выясним, ради чего геологи организуют различные экспедиции, какая у них цель, как они ее достигают? Ясно, что в экспедиции геологи отправляются не только для собственного удовольствия. Их цель — поиск полезных ископаемых.

Что же они делают? Ищут… И когда находят — это праздник, радость: их тяжелый труд не пропал даром. Ибо бывает, что работа проходит вхолостую. Конечно, геологи действуют не вслепую, имеется огромный опыт предшественников, геологическая наука, новые и еще более новые методы геофизики, геохимии, геоморфологии и других гео…наук. И все равно случается, что деятельность поисковых партий терпит фиаско: в результате большой работы ничего не находят.

Но как-то нехорошо в наш век, в период научно-технической революции вместо действий наверняка

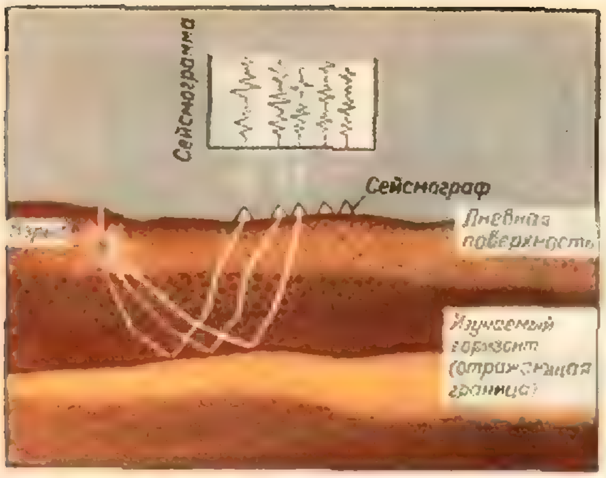


Рис. 1.

жить по-старинке в ситуации «повезет — не повезет». И кажется, что следует прикрикнуть на геологов, потребовать с них работы наверняка, раз им «создают все условия»...

Геологи ищут не клад, спрятанный пиратом от посторонних взоров, а подземные кладовые, где уголь и нефть, золото и вольфрам, железо и уран — богатства, не сравнимые по масштабам с любыми кладами. И, конечно, они при поиске тоже как-то оценивают свои шансы. Оценки эти до сих пор носят качественный характер, хотя опираются на различного рода информацию, носящую как качественный, так и количественный характер.

Но сейчас во всех отраслях промышленности решается проблема оптимизации: надо все делать возможно быстрее, дешевле, с наименьшим количеством погрешностей и ошибок. И возникает необходимость учета всех причин, создающих помехи, средств для их преодоления, необходимость количественной оценки качества проведенных работ.

Итак, речь пойдет о новом подходе к проблеме поиска полезных ископаемых, точнее, о проблеме поиска месторождений нефти и газа.

Что искать?

Поверхность Земли на много километров в глубину представляет собой многослойный бутерброд: чередуются пласты песчаные, глинистые, известняки и т. д. Нефть или газ могут залегать лишь в пористых пластах, где между частичками породы имеются достаточные промежутки. Под влиянием всяких катаклизмов ровные пласты осадочных пород изменили свою геометрию, появились впадины и подъемы, горные кряжи и разломы. В большинстве случаев месторождения нефти и газа приурочены к подземным холмам с непроницаемой для жидкости или газа покрышкой; она может быть глинистой или соляной. Под этим плотным куполом находятся пористые пласты, в которых и залегает жидкость или газ. Поэтому первая задача геологов при поиске нефти или газа — это обнаружить подземные купола, или, как их называют геологи, локальные*) поднятия. Вот о поиске локальных поднятий и пойдет сейчас речь.

Модель

Как составить себе представление о структуре земных пластов на глубине нескольких километров под поверхностью Земли? Ответ ясен: надо бурить скважины, отбирать с разных глубин куски породы — керн, и затем сопоставлять результаты исследования различных скважин. Но бурить много скважин — это очень дорого, бурение скважины на глубину 2—4 *км* стоит сотни тысяч рублей, а сейчас бурят и более глубокие скважины. И поэтому для получения предварительной информации используются различные косвенные методы, такие, например, как гравиразведка или электроразведка. Наиболее информативный среди них — сейсморазведка.

Этот метод, простой по идее, но достаточно сложный при осуществлении, состоит в следующем (рис. 1). В неглубокой скважине производят взрыв (незначительной силы). Упругая волна — результат взрыва — распространяется в толще Земли, отражаясь от границ раздела пластов, образованных различными породами. Отраженная волна регистрируется сейсмоприемником, расположенным на поверхности Земли — на дневной поверхности, как говорят геологи.

---

*) Слово «локальный» означает местный, не выходящий за определенные пределы.

Если предположить, что граница, от которой регистрируются отражения, является плоской, а скорость распространения упругих волн вдоль всего пути волны постоянна, то можно явно выписать зависимость времени прихода волны на дневную поверхность от координат сейсмоприемника и параметров среды. Эта зависимость носит в сейсморазведке название *годографа отраженной волны*, а задача восстановления отражающей границы по заданному годографу называется обратной кинематической задачей сейсморазведки. При сделанных предположениях эта задача однозначно разрешима, и такой метод используется на практике под названием *метода эффективной скорости*.

Введенные выше предположения в совокупности образуют так называемую модель реальной среды. Та модель, которая используется в методе эффективной скорости, весьма приближенно описывает реальную ситуацию. Разумеется, ее можно было бы усложнить, чтобы приблизить к реальной среде. Но нам важно подчеркнуть, что построение модели среды — неотъемлемая часть решения обратной кинематической задачи сейсморазведки. В той или иной форме она всегда присутствует при интерпретации данных сейсморазведки. Однако любая принятая модель лишь приближенно отражает действительное положение вещей. Это, конечно, не единственная трудность, возникающая при интерпретации сейсмических наблюдений: имеются еще аппаратурные погрешности, наблюдаются искажения регистрируемой отраженной волны колебаниями, отраженными от других границ, и т. п. Но все же, как показывают и опыт, и общие рассуждения, источник наибольших погрешностей — это несоответствие или, как принято говорить, неадекватность выбираемой модели реальной среде.

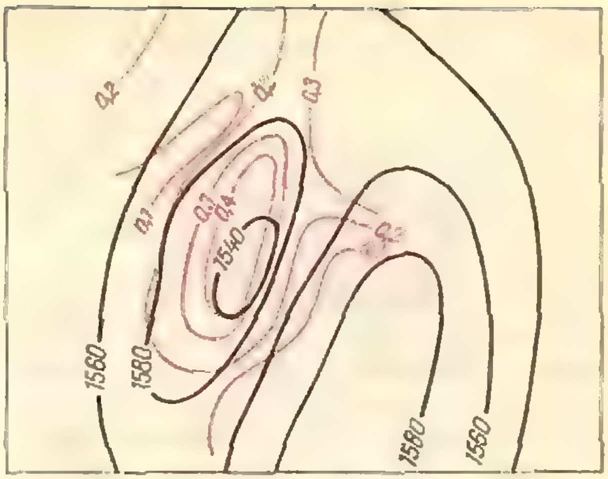


Рис. 2.

При этом приходится принимать во внимание следующее немаловажное обстоятельство: слишком простая модель среды позволяет лишь очень грубо решить интересующую нас задачу, а достаточно сложная вообще не допускает ее решения (по крайней мере, с помощью имеющихся в нашем распоряжении средств и за реальные сроки). И приходится, как всегда, искать компромисс между желаниями и возможностями...

Верить ли карте?

Итак, интерпретация сейсмических наблюдений позволяет приближенно восстановить форму интересующей нас отражающей поверхности. Обратим внимание на это слово: приближенно.

Геологи, так же как и географы, для наглядного представления рельефа строят карту равных уровней (рис. 2). Здесь черными линиями отмечены все точки, которые на изучаемой поверхности расположены на одинаковой глубине. Число, которое написано около этой линии, указывает глубину в метрах, или уровень. На карте представлено всегда несколько таких линий уровня, причем последовательные уровни отличаются между собой на постоянную величину (здесь на 20 метров). Если поверхность крутая, то такие линии расположены густо, если пологая — редко.

Когда поверхность представляет собой купол, то ее линии уровня — замкнутые кривые, причем окрестности вершины купола соответствует внутренняя, самая маленькая по размерам линия.

Итак, результатом сейсморазведочных работ является карта линий уровня изучаемого горизонта, и если где-то на этой карте есть ряд замкнутых линий уровня, вложенных друг в друга, причем внутренние линии соответствуют меньшим глубинам, то эта часть карты соответствует куполу — локальному поднятию.

Теперь нужно бурить скважину, чтобы выяснить, есть ли в этом поднятии нефть или газ. И каждому ясно, что бурить надо в вершине купола, то есть внутри самой маленькой по размерам линии уровня, ибо здесь наибольшие шансы наверняка попасть в залежь, если она на самом деле существует.

Но подчас пробурят первую скважину, а она не даст притока нефти или газа, затем бурят еще одну, две, три, и вот оказывается, что никакого локального поднятия нет, геофизическая информация о наличии купола оказалась ошибочной. Следовательно, зря бурили эти скважины, впустую потрачены большие средства и значительное время.

Как же это могло произойти? Кто в этом виновен? И главное: как избежать таких ошибок?

Вспомним выделенное выше слово приближенно. Глубины залегания, а следовательно, форма и расположение линий уровня определяются геофизиками не точно, а с погрешностями, и порой с весьма значительными.

Винить их в этом не нужно. Дело в том, что ошибки, как я выше говорил, это следствие как аппаратурных погрешностей, так и самого метода. И если аппаратурные погрешности можно заметно уменьшить, то погрешности метода принципиально не устранимы. Если бы нам были известны точно скоростные характеристики среды, то есть скорости распространения упругой волны во всех пластах вдоль пути этой волны, то проблемы поиска локальных поднятий вообще не существовало бы: добраться до локального поднятия принципиально было бы столь же легко, как добраться из Москвы в Киев, пользуясь компасом и точной географической картой.

Однако, когда карта линий уровня — ее называют структурной картой — уже нарисована (а далась она не даром — затрачены большой и квалифицированный труд, средства и время), то очень соблазнительно относиться к такой карте с доверием. Такова уж человеческая природа: трудно все время относиться с недоверием к окружающему, особенно, если проще этому верить. Да и что же здесь можно поделать: другой информации в распоряжении геофизика или геолога вроде бы и нет.

Формализация

О кладоискателях написано много, и я уверен, читатель легко восстановит в памяти соответствующие сюжеты. Всякий раз, когда кладоискатель сталкивается с трудностями, связанными с возможностью разных путей для достижения своей цели, он как-то оценивает свои шансы на каждом из путей. Но это оценка интуитивная, качественная. Если бы кладоискателем оказался кибернетик, то он прежде всего приложил бы усилия для выработки критерия количественной оценки шансов добиться успеха, а затем выбор пути на каждом шаге уже не представлял бы для него трудностей: надо было бы действовать так, чтобы критерий давал все время наибольшее из возможных значений.

В нашей задаче поиска подземных кладовых — локальных поднятий — ситуация та же: нужно построить критерий для выбора наилучшей последовательности действий или, как принято сейчас говорить, для выбора наилучшей стратегии.

Заметим теперь, что информация, получаемая в ходе поискового процесса, носит статистический характер, и поэтому при построении критерия и выбора стратегий целесообразно воспользоваться вероятностным подходом.

Итак, речь пойдет о подходе к поисковому процессу с математических позиций. Но для этого и сам процесс следует должным образом формализовать.

Прежде всего нужно дать четкое определение изучаемому объекту — локальному поднятию.

Определим в каждой точке Q с координатами (x, y) на изучаемой части плоскости (дневной поверхности) функцию (расстояние от дневной поверхности до поверхности купола) $h = H(Q) \equiv H(x, y)$, значения которой описывают поверхность изучаемого горизонта. Линия уровня представляет собой множество тех точек Q, координаты которых удовлетворяют уравнению $H(x, y) = h_0$, где h_0 — определенное число.

Локальное поднятие — это область на плоскости, ограниченная замкнутой линией уровня при каком-то фиксированном значении h_0, *внутри которой всюду* $H(x, y) > h_0$.

Здесь следует сделать два замечания.

Во-первых, из определения вытекает, что внутри локального поднятия находится бесконечно много других локальных поднятий, ибо внутри выбранных нами линий уровня лежат другие также замкнутые линии уровня. Впрочем, это многообразие нам не помешает.

Во-вторых, следует ограничить размеры изучаемых локальных поднятий. Действительно, весьма малые купола не имеют промышленного значения, а слишком большие могут вообще иметь другой смысл.

Поэтому практически на каждой территории нас интересуют локальные поднятия, диаметр D (то есть наибольшая хорда) которых заключен в некоторых пределах (между минимальным, меньше которого разработка залежи нерентабельна, и тем, который соответствует максимально возможному размеру поднятия на изучаемой территории).

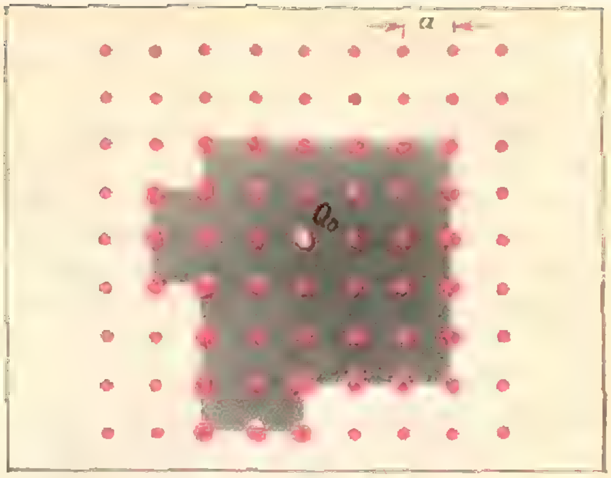


Рис. 3.

На практике исходные данные сейсморазведки дают возможность определить глубины залегания изучаемого горизонта лишь в некоторых отдельных точках, да и то с погрешностями. Затем вся поверхность этого горизонта определяется путем интерполяции (то есть приближенно восстанавливается), и, конечно, положения точек этой поверхности будут еще менее точными.

Итак, положения точек изучаемой поверхности определяются с ошибками, а следовательно, и положения точек ее линий уровня тоже определяются с ошибками.

Для дальнейшего нам полезно изменить объект изучения: мы будем интересоваться не наличием или отсутствием в данной области локального поднятия, а будем выяснять относительно отдельных точек, принадлежат ли они к локальному поднятию.

Разобьем плоскость (x, y) квадратной сетью с шагом a. Функцию $H(Q) \equiv H(x, y)$, описывающую поверхность локального поднятия, будем задавать только в узлах сети, и вместо произвольных кривых будем рассматривать лишь полигоны, то есть кривые, стороны которых идут вдоль линий сети. На рисунке 3 закрашена внутренность такого замкнутого полигона, охватывающего точку Q_0, которую мы также помещаем в узле сети.

Реальные локальные поднятия в платформенных областях — достаточно хорошо устроенные поверхности: они медленно меняются, и шаг сети выбирается так, чтобы между узлами не было резких колебаний этой поверхности. Тогда можно с достаточной точностью заменить предыдущее определение локального поднятия на следующее: *точка Q_0 принадлежит локальному поднятию, если найдется хотя бы один замкнутый полигон, охватывающий точку Q_0, во всех узлах Q_i которого изучаемая поверхность расположена ниже, чем в точке Q_0: $H(Q_i) < H(Q_0)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Диаметр полигона предполагается при этом ограниченным, так же как и выше для произвольных линий.

Вероятностный подход

В соответствии с определением точка Q_0 либо принадлежит локальному поднятию, либо не принадлежит. Но наши знания о положении точек изучаемой поверхности содержат погрешности, носящие статистический характер. Поэтому утверждение о принадлежности точки Q_0 локальному поднятию может быть высказано лишь с некоторой вероятностью. Введем соответствующую характеристику.

Именно, определим в каждой изучаемой точке Q с координатами (x, y) изучаемой области функцию достоверности $d(Q) \equiv d(x, y)$, представляющую собой вероятность того, что точка Q принадлежит локальному поднятию.

Функция достоверности наглядно может быть задана так же, как и структурная карта — набором ее линий уровня. Точки, расположенные на этой линии уровня, с одинаковой вероятностью принадлежат локальному поднятию. При этом линии уровня функции достоверности, вообще говоря, не совпадают с линиями уровня поверхности, которая строится по геофизическим данным.

Теперь возникает вопрос о том, как же построить функцию достоверности по информации, имеющейся в распоряжении геофизиков. Отклонения значений глубины залегания, полученных в результате сейсморазведочных работ, от действительных значений глубины залегания изучаемой поверхности в каждой точке Q — это случайные величины. Для изучения их вероятностных характеристик были сопоставлены данные сейсморазведки с данными последующего бурения, которые, как значительно более точные, были приняты за действительные. Обработка данных на больших регионах Волго-Уральской нефтегазоносной провинции дала возможность выяснить вероятностные характеристики этих случайных величин.

В соответствии с последним определением нужно, чтобы нашелся хотя бы один замкнутый полигон, охватывающий точку Q_0, во всех узлах Q_i которого значения функции $H(Q_i)$ будут меньше, чем $H(Q_0)$. Так как сами величины $H(Q_i)$ — случайны, то и событие «найдется хотя бы один замкнутый полигон, охватывающий точку Q_0», — тоже случайное. Его вероятность и есть вероятность принадлежности точки Q_0 локальному поднятию, то есть значение функции достоверности $d(Q_0)$.

Зная вероятностные свойства случайных величин $H(Q_i)$, можно написать формулы для вычисления значений функций достоверности. Однако эти формулы очень громоздки, и для вычислений их использовать нецелесообразно.

Поэтому для вычисления значений функции достоверности используется другой прием, основанный на так называемом методе Монте-Карло (или методе статистических испытаний). Здесь приходится уже воспользоваться быстродействующей вычислительной машиной. Но это тема отдельной статьи. Сейчас лишь подчеркну, что именно на этом пути были получены окончательные результаты, о которых сейчас и пойдет речь.

Некоторые результаты и перспективы

Сама собой напрашивается мысль: на структурную карту (то есть на карту линий уровня изучаемого горизонта, построенную по данным сейсморазведки) нанести и значения функции достоверности. Можно даже, пользуясь обычными приемами интерполяции, нанести линии уровня функции достоверности (на рисунке 2 и далее линии уровня функции достоверности нанесены красными линиями).

Теперь можно приступить к обсуждению того нового, что внесла в структурную карту функция достоверности.

Оказалось, что на участках, где наибольшие значения функции достоверности были достаточно высокими (более 0,8), наблюдалось, как правило, совпадение локального поднятия, построенного по данным сейсморазведки, (будем его в дальнейшем называть геофизическим поднятием) с реальным поднятием (см. рис. 4, где локальное поднятие закрашено).

При наибольших значениях функции достоверности порядка 0,5 — 0,6 часто отмечалось смещение геофизического поднятия от реального, причем участки с наибольшими значениями функции достоверности тяготели по расположению к реальному поднятию (рис. 5 и 6). Из этого следует важный практический вывод: закладывать поисковую скважину следует не в тех точках, которые оказываются по геофизическим построениям самыми высокими (то есть в своде геофизического поднятия), а в точках с наибольшими значениями функции достоверности, ибо они с наибольшей вероятностью на обследуемой области принадлежат реальному локальному поднятию.

Наконец, геофизические структуры, на которых максимальные значения функции достоверности были не более 0,35, как правило, оказывались ложными: их наличие опровергалось последующим бурением. В этом случае все затраты на разбуривание подобных ложных структур оказывались непроизводительными.

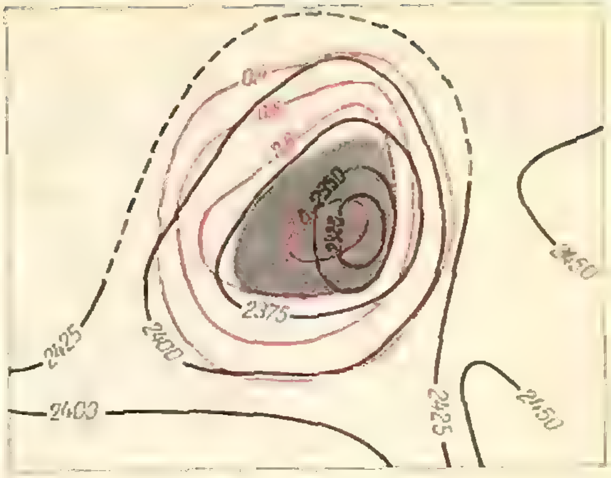


Рис. 4.

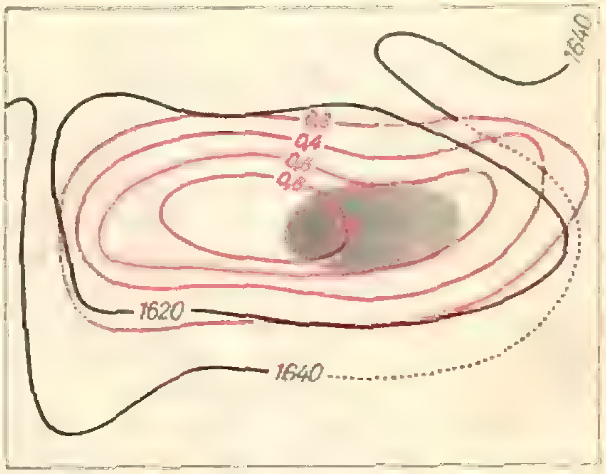


Рис. 5.

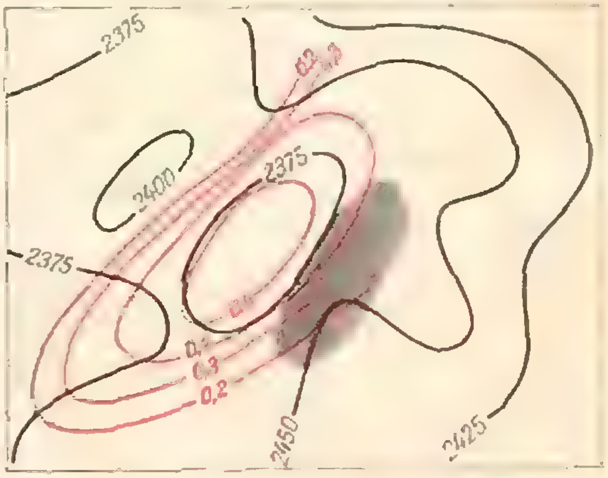


Рис. 6.

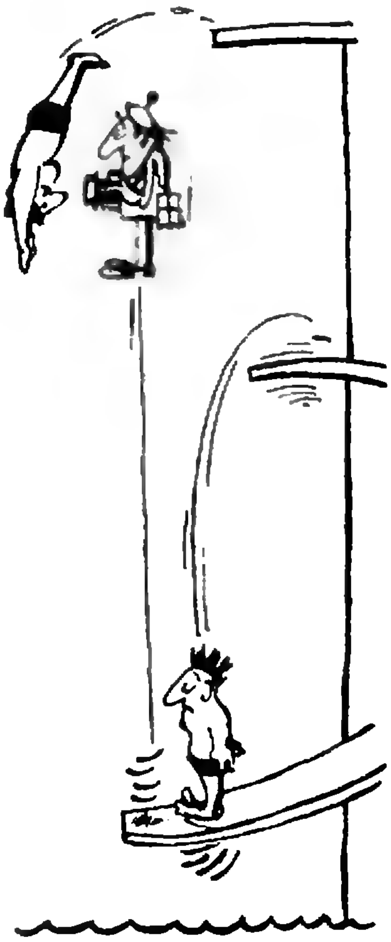
Хочу заметить, что эти выводы были сделаны на основании очень большого экспериментального материала, по сотням геофизических поднятий, и, конечно, обработка геофизического материала дала значительно больше сведений, чем здесь упомянуто.

Таким образом, новый подход к проблеме поиска и созданный математический аппарат уже показал свою жизнеспособность и высокую эффективность в проблеме оценки достоверности при поиске локальных поднятий. Однако те же методы дают возможность построить функцию достоверности для оценки принадлежности точки к своду локального поднятия (это существенно при выборе точки заложения первой поисковой скважины) и функцию достоверности для зоны водонефтяного контакта, то есть границы нефтяной залежи. Далее, используя функцию достоверности принадлежности точек локальному поднятию, можно построить хорошую оценку средней площади, занимаемой локальным поднятием. Этот же прием даст возможность с новых позиций подойти к важнейшей проблеме подсчета запасов нефти (или газа) на месторождении. Таким образом, в области нефтегазовой геологии и геофизики методы, опирающиеся на функцию достоверности, уже принесли значительный эффект, и их последовательное использование приведет к еще большим успехам.

Но здесь мне хотелось бы подчеркнуть, что методы вероятностного поиска с успехом могут быть использованы и при решении других поисковых задач в геологии, да и многих аналогичных задач из других областей науки и техники.

«Тур карикатур»

В газете «Советский спорт» от 24 декабря 1972 года была опубликована следующая карикатура (перепечатанная из зарубежной газеты).



Художник снабдил ее подписью: «Без слов». Мы предлагаем другую подпись: «Может ли быть такое?» Попробуйте оценить карикатуру с этой точки зрения.

В. Александров

Б. ТЕЙЛОР
Д. ЛАНГЕНБЕРГ
У. ПАРКЕР

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Среди большого числа разнообразных физических величин совершенно особое место занимают так называемые фундаментальные физические постоянные (постоянная Планка, скорость света, заряд и масса электрона и т.п). Мы называем их фундаментальными не случайно. Эти постоянные связаны с самыми глубокими и общими физическими закономерностями природы. Они входят в основные, важнейшие теории современной физики, так сказать, в фундамент физических знаний. Физики стремятся определить значения этих величин с максимально доступной степенью точности, измеряя их снова и снова. Эксперименты по повторному определению численных значений фундаментальных постоянных позволяют получать сведения о степени справедливости основных физических теорий. Для этих экспериментов часто привлекаются новые методы, постоянно возникающие в процессе развития физики.

Мы помещаем здесь сокращенный перевод статьи американских физиков, которым недавно удалось существенно повысить точность определения фундаментальных физических постоянных. Полный перевод этой статьи, выполненный В. И. Рыдником, опубликован в журнале «Успехи физических наук», том 105, выпуск 3, ноябрь 1971 года.

Публикация подготовлена В. А. Лешковцевым.

Вопреки распространенному мнению, физика во многих своих областях — не особенно точная наука. Физики зачастую вполне удовлетворяются измерением какой-либо величины с точностью до нескольких процентов и такой же степенью совпадения экспериментального результата с его теоретическим предсказанием. В некоторых случаях большим достижением считается совпадение обоих результатов даже только по порядку величины (то есть их расхождение менее чем в 10 раз). Столь невысокая точность имеет в основном двоякое происхождение. Во-первых, в большинстве экспериментов физики имеют дело со сложными системами, и в опытах одновременно фигурирует несколько взаимосвязанных, но часто мало понятных явлений. Во-вторых, существующие теории обычно дают лишь приближенное описание, основывающееся на упрощенной качественной модели системы.

Вместе с тем в физике существует ряд особых величин, которые можно и нужно знать с очень высокой точностью. Это — фундаментальные физические постоянные. К их числу, в частности, относятся скорость света в пустоте c, постоянная Планка h, заряд электрона e и масса электрона m_e. Мы выбрали именно эти фундаментальные постоянные с целью проиллюстрировать совершенно различное их «происхождение».

Скорость света и постоянная Планка — примеры постоянных, которые естественно фигурируют в математических формулировках основных физических теорий. Например, в теории относительности Эйнштейна энергия E и масса m связаны знаменитым соотношением $E = mc^2$; в квантовой теории энергия E и частота ν фотона связаны соотношением $E = h\nu$.

Заряд и масса электрона являются примерами постоянных, характеризующих не только эту элементарную частицу, но и все прочие частицы, из которых построено вещество (тогда к этим постоянным добавляются численные множители). Например, заряд α-частицы вдвое больше фундаментальной единицы электрического заряда, а масса покоя нейтрального π-мезона в 264,1 раза больше фундаментальной единицы массы (то есть равна 264,1 m_e).

Разумеется, в природе существует много других величин, которые могут быть измерены с высокой точностью, например, плотность кусочка золота или расстояние от Земли до Солнца. Такие величины, однако, не считаются фундаментальными постоянными. Они слишком тесно связаны с частными свойствами того материала или системы, над которыми производятся измерения. Другой кусочек золота при высокой степени точности измерения даст другую плотность. Вместе с тем марсианин мог бы совершенно справедливо заметить, что расстояние от Марса до Солнца ничуть не менее «фундаментально», чем расстояние от Солнца до Земли. В сущности, эти величины не универсальны; они не фигурируют в основных уравнениях теоретической физики.

Почему важна точность?

Почему важно знать численные значения фундаментальных постоянных с высокой точностью? Прежде всего потому, что количественные предсказания основных физических теорий зависят от численных значений постоянных, входящих в эти теории. Для получения точного количественного описания физического мира существенно располагать точным знанием этих численных значений. Точное определение фундаментальных постоянных в разного рода физических экспериментах еще более важно по той причине, что оно позволяет проверить согласованность и правильность самих основных физических теорий.

Если присмотреться к структуре физической науки, то можно заметить, что физика состоит из ряда как будто разнородных областей — физики твердого тела, атомной физики, ядерной физики, физики элементарных частиц и т. д. Фактором, связывающим воедино все эти области, является физическая теория; все они имеют единую основу, все опираются на представления квантовой механики, теории электромагнетизма, специальной теории относительности, статистической механики и т. п. Фундаментальные постоянные, включенные в эти теории, — как бы звенья в теоретической цепи, связывающей всю физику. Измерения этих постоянных на все более высоком уровне точности нужны не только для того, чтобы узнать новый лишний знак после запятой, но и потому, что этот новый знак может привести к обнаружению ранее не известной несогласованности или, наоборот, может устранить имеющуюся несогласованность в нашем описании физического мира.

Относительная точность, с которой сегодня измеряются многие фундаментальные постоянные, достигает миллионных долей. Под нею здесь понимается та относительная неопределенность, которую мы должны приписать нашему знанию численного значения какой-либо величины. Эта неопределенность указывает пределы, в которых результат может отличаться от истинного значения величины. Она есть количественная мера нашего сомнения в численном значении данной величины.

Для практических целей относительная точность в одну миллионную долю может считаться весьма высокой. Такая точность соответствует определению длины футбольного поля с погрешностью, равной толщине одной страницы этого журнала. Существует несколько величин, значения которых были измерены с точностью, еще в тысячу раз более высокой. Это соответствует погрешности в толщину данной страницы уже при измерении расстояния от Нью-Йорка до Сан-Франциско!

С необходимостью чрезвычайно точного определения фундаментальных постоянных физики столкнулись при разработке квантовой электродинамики. Эта теория описывает различные взаимодействия элементарных частиц. Она предсказала целый ряд очень тонких эффектов, для обнаружения которых потребовались измерения с такой же высокой относительной точностью, как и при измерении фундаментальных постоянных. Если бы точность определения фундаментальных постоянных была невелика, теория не смогла бы предсказать наличие таких явлений.

Высокая степень точности в определении скорости света необходима для расчета орбит искусственных спутников и траекторий космических кораблей, при решении вопроса о том, движутся ли земные континенты, и вообще тогда, когда необходимо очень точно измерить большие расстояния.

Уроки прошлого

В период с 1907 по 1917 годы Роберт Милликен произвел серию экспериментов по определению численного значения фундаментальной единицы электрического заряда *e* с помощью своего знаменитого метода падающей масляной капли. В методе Милликена изучалось движение несущих небольшой заряд маленьких масляных капель в воздухе между двумя параллельными горизонтальными металлическими пластинами. Вначале определялось время, за которое капля опускалась на определенное расстояние под действием одной лишь силы тяжести. Затем между пластинами создавалась определенная разность потенциалов, заставлявшая каплю подниматься (то есть двигаться против силы тяжести), и вновь измерялось время, за которое капля проходила заданное расстояние. Из многих наблюдений за движением различных капель вычислялось значение *e* (это вычисление требовало предварительного определения других величин, фигурирующих в опыте, — местного значения ускорения силы тяжести, расстояния между пластинами, давления и вязкости воздуха и плотности масла). Окончательное опубликованное Милликеном в

1917 году значение e составило $(4{,}774 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ.

В 30-х годах в связи с появлением нового метода определения e выяснилось, что в милликеновское значение вкралась существенная ошибка. Новый метод заключался в раздельном определении двух других физических постоянных — числа Авогадро N и числа Фарадея F *). Число Авогадро равно количеству атомов (или молекул), содержащихся в 1 моле вещества; моль определяется как масса в граммах, равная атомному (или молекулярному) весу вещества. Число Фарадея есть количество электричества, которое должно протечь через раствор электролита, чтобы на электроде выделился 1 моль одновалентного элемента, находящегося в растворе. Число Фарадея и число Авогадро в случае одновалентных элементов связаны простым соотношением $F = Ne$ **).

Отсюда следует, что $e = F/N$, то есть e легко получить из известных значений F и N. Число Авогадро определялось путем тщательного измерения плотности, атомного веса и постоянной кристаллической решетки (расстояния между атомными плоскостями кристаллических веществ). Число Фарадея определялось измерением массы элемента, электролитически выделившегося на электроде при пропускании через раствор электролита, содержащего этот элемент, известного тока в течение известного времени.

Полученное таким путем значение e оказалось равным $(4{,}8021 \pm \pm 0{,}0009) \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, что существенно отличается от найденного Милликеном. Главный источник ошибки в измерениях Милликена, как позднее выяснилось, заключался в том, что он использовал неправильное значение вязкости воздуха. Милликен взял его, основываясь почти целиком на измерениях одного из своих студентов, но впоследствии оказалось, что этот студент допустил незамеченную ошибку. После того как данные Милликена были пересчитаны с учетом правильного значения вязкости воздуха, оказалось, что найденное значение e великолепно согласуется с полученным косвенным путем из измерений чисел Авогадро и Фарадея.

Этот случай хорошо иллюстрирует тот общий факт, что экспериментально найденное значение постоянной меняется с каждым новым ее определением. Причина заключается в том, что трудно измерить все фигурирующие в опыте величины с высокой точностью; любой мыслимый эффект, который мог бы повлиять на результат, требует тщательного и длительного изучения. И даже при этом случается «прозевать» существенный эффект.

Определение отношения e/h

Вероятно, наилучший пример тех важных следствий, которые может иметь исключительно точное повторное определение фундаментальных постоянных, дают проведенные в последние годы измерения величины e/h группой ученых из Пенсильванского университета; в состав этой группы входили авторы настоящей статьи и Э. Дененстайн. Эти измерения, осуществленные благодаря открытию явления, наблюдающегося в твердых телах при низких температурах, привели к результату, который оказал существенное влияние на такие далекие от физики твердого тела области, как физика элементарных частиц, квантовая электродинамика, физика рентгеновских лучей и атомная физика. Использованное в измерениях замечательное явление, наблюдаемое в сверхпроводящих материалах, известно под названием эффекта Джозефсона (для переменного тока).

---

*) Его называют также постоянной Фарадея, так как оно одинаково для всех веществ.

**) В случае, если валентность элемента равна n, в этом соотношении следует заменить N на N/n.

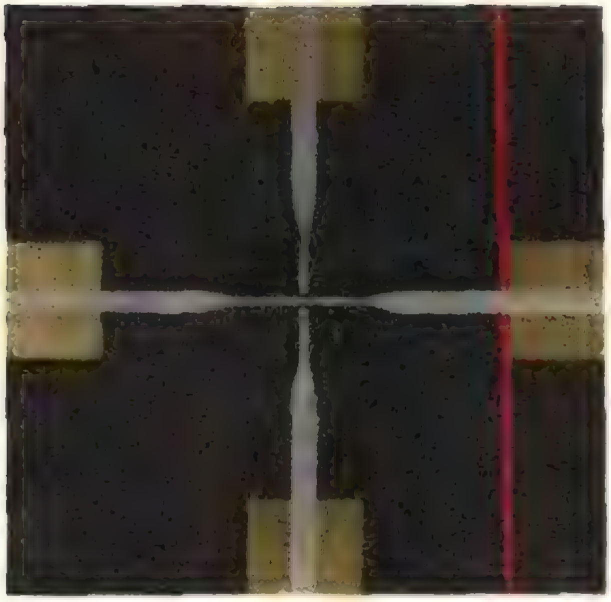


Рис. 1.

Оно было впервые предсказано студентом Кембриджского университета Джозефсоном в 1962 году. Он теоретически показал, что если почти вплотную приблизить два сверхпроводника (то есть вещества, которые полностью утрачивают сопротивление электрическому току при температурах, близких к абсолютному нулю) и поддерживать между ними постоянную разность потенциалов U, то через зазор между сверхпроводниками потечет переменный ток, не испытывающий сопротивления, — «переменный сверхпроводящий ток».

На фотографии 1 показано устройство, осуществляющее такое неплотное соединение сверхпроводников. На ней виден сверхпроводящий контакт типа «бутерброда» из двух сверхпроводящих пленок, разделенных слоем изолятора толщиной около 10^{-7} *см*. Джозефсон нашел, что частота ν переменного сверхпроводящего тока должна быть пропорциональна приложенной к контакту постоянной разности потенциалов U с коэффициентом пропорциональности $2e/h$, то есть $\nu = (2e/h)\,U$.

Соотношение Джозефсона, вытекающее из некоторых общих предположений о природе сверхпроводимости, является, по-видимому, точным и не зависит от типа сверхпроводника и таких условий опыта, как температура, напряженность магнитного поля и многое другое. Благодаря этому опыт по определению отношения e/h оказался весьма простым в сравнении с большинством экспериментов по измерению других фундаментальных постоянных. В этом опыте необходимо лишь измерить разность потенциалов между двумя сверхпроводниками и частоту переменного сверхпроводящего тока. Окончательный результат измерений дал значение e/h, примерно в 20 раз более точное, чем наилучшее найденное ранее из экспериментов с рентгеновскими лучами значение этого отношения.

Лучшее значение e/h приводит к более точному значению фундаментальных постоянных

Новое значение отношения e/h, измеренное с помощью эффекта Джозефсона, привело к важному пересмотру численных значений других фундаментальных постоянных. Дело в том, что лишь несколько таких постоянных можно измерить непосредственно и притом с высокой точностью. Значения же остальных приходится вычислять, соответствующим образом комбинируя эти постоянные. Существенно, что результаты таких комбинаций имеют примерно ту же точность, что и входящие в них непосредственно измеренные постоянные. Для наилучшего значения какой-либо постоянной используют своего рода усреднение ее значений, полученных прямым и косвенными путями.

Значения некоторых важнейших фундаментальных постоянных, полученные авторами этой статьи в 1969 году, приведены в таблице. Для сравнения в ней указаны значения тех же постоянных, определенные в 1963 году Коэном и Дюмоном. Они считались наиболее точными вплоть до 1969 года.

Числа в скобках указывают неопределенность в последних цифрах значения постоянной. Из таблицы видно, что новые значения точнее, так как относительные погрешности в из-

Название постоянной	Обозначение	Единица измерения	Значение 1969 г.	Относительная погрешность, 10^{-6}	Значение 1963 г.	Относительная погрешность, 10^{-6}
Заряд электрона	e	10^{-19} *к*	1,6021917 (70)	4.4	1,60210 (2)	12
Постоянная Планка	h	10^{-34} *дж·с*	6,626196 (50)	7,6	6,62559 (16)	24
Масса электрона	m_e	10^{-31} *кг*	9,109558 (54)	6	9,10908 (13)	11
Число Авогадро	N	10^{26} *кмоль*$^{-1}$	6,022169 (40)	6,6	6,02252 (9)	15

мерениях 1969 года значительно меньше, чем в измерениях 1963 года.

Эти измерения хорошо иллюстрируют связь, которая имеется между значениями фундаментальных постоянных: существенное изменение значения одной из них влечет за собой заметные изменения значений остальных величин.

Интересно также наблюдать, как меняется наше знание фундаментальных постоянных по мере развития физики. В качестве характерного примера мы приводим на рисунке 2 график, который показывает, как менялось принятое значение массы электрона в период после 1950 года. Около каждой точки указаны значения m_e (в единицах 10^{-31} *кг*). Вертикальными черточками показаны погрешности, приписываемые этим значениям. По оси ординат отложены относительные отклонения значений m_e от значения, принятого в 1969 году.

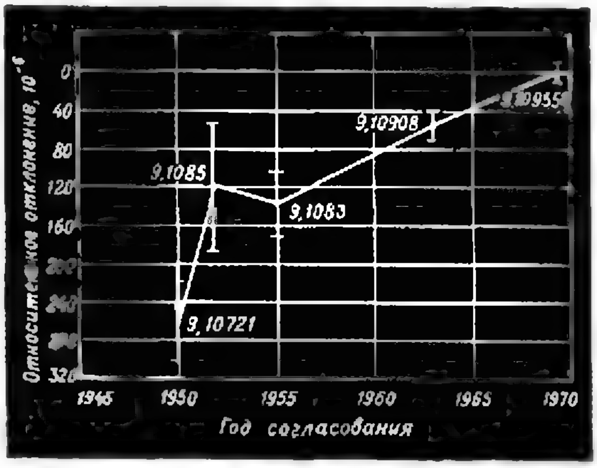


Рис. 2.

Этот график наглядно показывает, что ни одну совокупность фундаментальных постоянных нельзя принимать за истину в последней инстанции. Мы можем надеяться, что значения 1969 года ближе к истине, чем предшествующие. Однако, будучи реалистами, мы не можем отвергнуть возможность того, что в будущем могут потребоваться дальнейшие существенные изменения численных значений постоянных. Здесь вполне уместно привести слова Гёте: «Не ошибается лишь тот, кто ни к чему не стремится».

Чего же следует ожидать в будущем? Можно ли непрерывно совершенствовать измерения, чтобы с их помощью удалось получать все более точные значения постоянных? Будут ли в дальнейшем совершенствоваться и теории, извлекая пользу из уточненных значений постоянных, так что можно будет производить все более строгие сопоставления теории и опыта? На все эти вопросы ответ, безусловно, положительный. Можно считать общим правилом, что когда существующие методы достигают своего предела возможностей, открываются новые явления и получают новый толчок эксперимент и физическая теория.

Лаборатория «Кванта»

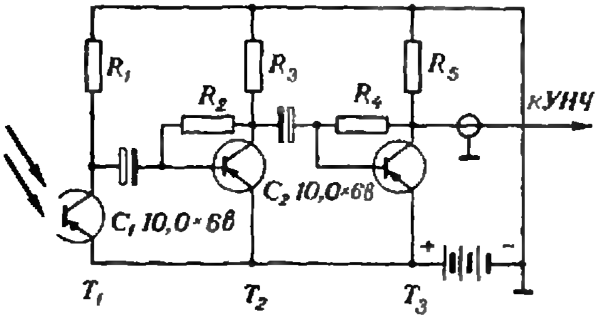
В. В. Майер

Опыты с инфракрасным излучением

Приемником инфракрасного излучения может служить самодельный фототранзистор. Его нетрудно изготовить, спилив головку металлического корпуса любого мощного транзистора (например, П-210). Такой фототранзистор реагирует практически только на инфракрасные лучи, непосредственно примыкающие к видимой области спектра.

Если на изготовленный вами фототранзистор направить свет от включенной в сеть переменного тока лампы накаливания, на его выводах появится переменное напряжение частотой 100 *гц*. Величина этого напряжения очень мала, ее следует усилить.

Схема простейшего предварительного усилителя изображена на рисунке. В качестве транзисторов T_2 и T_3 можно использовать любые низкочастотные транзисторы. Питание усилителя осуществляется от батареи карманного фонаря КБС-Л-0,50.



R_1 = 2 *ком*; R_2 = 100 *ком*; R_3 = 10 *ком*; R_1 = = 100 *ком*; R_5 = 10 *ком*; T_2 и T_3 — любые низкочастотные транзисторы. Транзистор T_1 можно включить и иначе — использовав выводы эмиттер — база. При этом вывод базы подключается к плюсу батареи, а сопротивление R_1 нужно взять равным 30 ÷ 50 *ком*.

При правильной сборке прибор начинает работать сразу при включении питания. Наладка заключается в подборе величины резистора R_1.

Выход предварительного усилителя при помощи экранированного провода следует подключить к гнездам «звукосниматель» любого промышленного радиоприемника или проигрывателя (можно использовать и самодельный усилитель низкой частоты). При освещении фототранзистора светом включенной в сеть лампы накаливания вы услышите звук частотой 100 *гц*. (Если сильный «фон» переменного тока слышен и без освещения транзистора, то предварительный усилитель следует заключить в металлическую коробку, соединенную с «землей» устройства, — это уменьшит наводки из сети.)

Теперь, когда у вас есть приемник инфракрасного излучения, попробуйте ответить на следующие вопросы:

1. Почему при освещении фототранзистора лампой накаливания, включенной в сеть переменного тока, из динамика усилителя слышен звук («фон») частотой 100 *гц*?

2. Как, не меняя схемы приемника, существенно усилить звук?

3. Убедитесь, что датчик действительно реагирует на инфракрасные лучи (пластинка эбонита толщиной 0,5—1 *мм* полностью задерживает видимый свет и пропускает инфракрасные лучи).

4. Попытайтесь найти какой-нибудь инфракрасный фильтр (попробуйте использовать, например, различные типы фотографических светофильтров).

5. На пути пучка света, падающего на фототранзистор, расположите два поляроида (их можно взять из школьного набора по поляризации света). Вращайте один из поляроидов вокруг его оси. Что вы при этом наблюдаете? Какие выводы вы можете сделать из своих наблюдений?

6. Докажите закон отражения для инфракрасных лучей.

7. Проверьте, фокусируются ли инфракрасные лучи линзой?

8. Какие эксперименты по изучению свойств инфракрасного излучения вы можете еще поставить?

В. С. Абрамович

Суммы одинаковых степеней натуральных чисел

На вопрос: «Умеете ли вы складывать одинаковые степени последовательных натуральных чисел?», многие недоуменно пожмут плечами: кто же не умеет … складывать? Однако складывать можно по-разному. Всем, наверное, известна небольшая история — легенда о 8-летнем Гауссе. В то время как его одноклассники трудились над вычислением суммы $1+2+3+\ldots$ $\ldots+20$, Гаусс увидел простую закономерность

$$1+20=\ldots=10+11=21$$

и сразу получил ответ: 210.

Конечно, найти суммы при сложении вторых, третьих, четвертых,… степеней натуральных чисел уже значительно сложнее. В этой статье рассказывается о трех простых способах построения формул суммирования, с помощью которых вы легко вычислите любую такую сумму.

Итак, суммы, которыми мы будем заниматься, имеют вид

$$S_q(n)=1^q+2^q+\ldots+n^q. \quad (1)$$

Число q предполагается целым и неотрицательным. Например,

$$S_2(4)=1^2+2^2+3^2+4^2=30,$$
$$S_{10}(2)=1^{10}+2^{10}=1025.$$

Ясно, что $S_0(n)$ для любого натурального n совпадает с n, так как все n слагаемых в этом случае равны 1.

§ 1. Что дает бином Ньютона?

При вычислении сумм (1) нам поможет бином Ньютона. (О биноме Ньютона см. Н. Я. Виленкин, «Комбинаторика», «Наука», 1969.)

$$(k-1)^{q+1}=k^{q+1}-C^1_{q+1}k^q+$$
$$+C^2_{q+1}k^{q-1}-\cdots+$$
$$+(-1)^q\,C^q_{q+1}k-(-1)^q. \quad (2)$$

Перенесем первое слагаемое из правой части в левую и, полагая последовательно $k=1,\ 2,\ldots,\ n$, сложим полученные результаты. Если использовать обозначение (1), мы получим

$$-n^{q+1}=-C^1_{q+1}S_q(n)+$$
$$+C^2_{q+1}S_{q-1}(n)-\cdots+$$
$$+(-1)^qC^q_{q+1}S_1(n)-(-1)^q\,S_0(n).$$

Из этого тождества находим

$$S_q(n)=$$
$$=\frac{1}{q+1}\{n^{q+1}+C^2_{q+1}S_{q-1}(n)-\ldots+$$
$$+(-1)^qC^q_{q+1}S_1(n)-(-1)^q\times$$
$$\times S_0(n)\}. \quad (3)$$

При $q=1$:

$$S_1(n)=\frac{1}{2}\{n^2+C^2_2S_0(n)\}=$$
$$=\frac{1}{2}(n^2+n).$$

Теперь, получив выражение для $S_1(n)$, положим в (3) $q=2$:

$$S_2(n)=\frac{1}{3}\{n^3+C^2_3S_1(n)-S_0(n)\}=$$
$$=\frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3}{2}(n^2+n)-n\right\}=$$
$$=\frac{1}{3}\left(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right).$$

Так последовательно мы можем получить с помощью тождества (3) выражения для $S_3(n)$, $S_4(n)$ и т. д.

В эффективности таких формул вы можете убедиться, проделав некоторые конкретные вычисления. Например, с помощью полученного выражения для $S_2(n)$ такая большая сумма, как $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2 + 100^2$ находится очень быстро: $S_2(100) = 338350$. А сколько потребовалось бы времени для последовательного сложения!

§ 2. Вместо q членов — один

Итак, к каждой из формул для вычисления сумм $S_q(n)$, $q = 1, 2, \ldots$ можно последовательно прийти с помощью общего соотношения (3). Такие соотношения, которые определяют новый член некоторой последовательности по ее предыдущим членам, называются *рекуррентными*.

Конечно, более предпочтительными являются такие рекуррентные соотношения, которые содержат в правой части возможно меньше членов, — в лучшем случае только один: предшествующий определяемому.

Для последовательности сумм $S_q(n)$ такое простое рекуррентное соотношение существует.

Для того чтобы его записать, введем следующее обозначение. Пусть $P_m(n)$ — некоторый многочлен степени m относительно n:

$$P_m(n) = a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} n + a_m.$$

Тогда $P_m^*(n)$ — это многочлен степени $m+1$, получающийся из многочлена $P_m(n)$ заменой в нем степеней n^k выражениями:

$$\frac{n^{k+1} - n}{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Очевидно следующее простое свойство: если $P(n)$ и $Q(n)$ — два многочлена, то

$$[P(n) + Q(n)]^* = P^*(n) + Q^*(n). \quad (4)$$

Теперь докажем теорему, состоящую из двух утверждений.

Теорема 1.

1 . Сумма $S_q(n)$ представляет собой многочлен степени $q+1$ относительно n без свободного члена.

2 . Сумма $S_q(n)$ связана с суммой $S_{q-1}(n)$ $(q = 1, 2, \ldots)$ соотношением

$$S_q(n) = n + qS^*_{q-1}(n). \quad (5)$$

Доказательство. Оба пункта докажем, применяя полную математическую индукцию.

1 . Так как $S_0(n)$ совпадает с n, то первое утверждение при $q = 0$ справедливо. Предположим, что оно верно для сумм $S_0(n)$, $S_1(n), \ldots, S_{q-1}(n)$. Тогда в правой части (3) мы получим многочлен степени $q+1$ без свободного члена, то есть утверждение верно и для следующей суммы $S_q(n)$. Следовательно, оно имеет место для всех сумм $S_q(n)$, $q \geqslant 0$.

2 . Соотношение (5) выполняется, очевидно, для $q = 1$:

$$S_1(n) = n + n^* = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Предположим, что оно справедливо для $q = 1, 2, \ldots, m-1$. Тогда согласно тождеству (3) для $q = m$ получим

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\{n^{m+1} + C^2_{m+1}[n + (m-1)S^*_{m-2}(n)] - C^3_{m+1}[n + (m-2) \times S^*_{m-3}(n)] + \cdots + (-1)^m C^m_{m+1}[n + S^*_0(n)] - (-1)^m C^{m+1}_{m+1} n\} = \frac{1}{m+1}\{n^{m+1} + n(C^2_{m+1} - C^3_{m+1} + \cdots + (-1)^{m+1} C^{m+1}_{m+1}) + (m-1)C^2_{m+1}S^*_{m-2}(n) - (m-2)C^3_{m+1}S^*_{m-3}(n) + \cdots + (-1)^m C^m_{m+1}S^*_0(n)\}.$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$1-C^1_{m+1}+C^2_{m+1}-\cdots+(-1)^{m+1}C^{m+1}_{m+1}=0$$

и, следовательно,

$$C^2_{m+1}-C^3_{m+1}+\cdots+(-1)^{m+1}C^{m+1}_{m+1}=C^1_{m+1}-1=m.$$

Замечая еще, что

$$C^k_{m+1}\,\frac{m-k+1}{m+1}=C^k_m$$

и используя свойство (4) операции*, получим такое выражение для $S_m(n)$:

$$S_m(n)=\frac{n^{m+1}+nm}{m+1}+[C^2_mS_{m-2}(n)-C^3_mS_{m-3}(n)+\cdots+(-1)^mC^m_mS_0(n)]^*.$$

Полагая в (3) $q=m-1$, получим, что выражение в квадратных скобках равно $mS_{m-1}(n)-n^m$, следовательно,

$$S_m(n)=\frac{n^{m+1}+nm}{m+1}+[mS_{m-1}(n)-n^m]^*=\frac{n^{m+1}+nm}{m+1}+mS^*_{m-1}(n)-\frac{n^{m+1}-n}{m+1}=n+mS^*_{m-1}(n).$$

Таким образом, (5) верно и для $q=m$. Теорема доказана.

Пример. Предположим, вы знаете, что

$$S_3(n)=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2).$$

Найдем выражение для $S_4(n)$:

$$S_4(n)=n+4S^*_3(n)=n+(n^4+2n^3+n^2)^*=n+\frac{n^5-n}{5}+2\,\frac{n^4-n}{4}+\frac{n^3-n}{3}=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

§ 3. Общая формула

Бином Ньютона, однако, может дать значительно больше, чем тождество (3), доказанное в § 1.

Рассмотрим следующие преобразования (m и n предполагаются натуральными числами):

$$m^n-1=[(m-1)+1]^n-1=(m-1)C^1_n+(m-1)^2C^2_n+\cdots+(m-1)^nC^n_n.$$

Пусть $m\neq1$. Разделив обе части тождества на $m-1$, получим

$$1+m+m^2+\cdots+m^{n-1}=C^1_n+(m-1)C^2_n+\cdots+(m-1)^{n-1}C^n_n. \qquad (6)$$

Это равенство справедливо для всех натуральных m и n, в том числе и для $m=1$ (в этом случае оно очевидно). Поскольку слева и справа мы имеем многочлены степени $n-1$ относительно m, то это возможно лишь в том случае, если многочлены тождественно равны, то есть их коэффициенты совпадают (в данном случае все они равны единице). Если раскрыть скобки в правой части (6) и приравнять коэффициенты при m^k, $k=0, 1,\dots, n-1$, единице, то получится ряд тождеств, связывающих биномиальные коэффициенты. Для нас важно следующее: если степени m^k, $k=0, 1,\dots, n-1$ слева и справа в (6) заменить *любыми* числами $a_0, a_1,\dots,a_{n-1}$, равенство не нарушится: ведь коэффициенты перед числами a_k останутся равными единице! Таким образом, мы приходим к следующему тождеству, верному для любых чисел $a_0, a_1,\dots, a_{n-1}$:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=C^1_n+(a_1-a_0)C^2_n+(a_2-2a_1+a_0)C^3_n+\cdots+[a_{n-1}-C^1_{n-1}a_{n-2}+C^2_{n-1}a_{n-3}-\cdots+(-1)^{n-1}]C^n_n. \qquad (7)$$

Теорема 2. Сумма $S_q(n)$ в общем случае может быть вычислена по формуле

$$S_q(n)=C^1_n+(2^q-1)C^2_n+(3^q-2\cdot2^q+1)C^3_n+\cdots+[(q+1)^q-C^1_qq^q+C^2_q(q-1)^2-\cdots+(-1)^q]C^{q+1}_n. \qquad (8)$$

Доказательство. Положим в тождестве (7) $a_k = (k+1)^q$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и рассмотрим вначале значения $n \leqslant q+1$. Так как в этом случае $C_n^p = 0$ для $p > q+1$, то из (7) вытекает формула (8) при условии $1 \leqslant n \leqslant q+1$. Однако слева и справа мы имеем многочлены степени $q+1$ относительно n без свободного члена и, следовательно, они должны совпадать для *всех* n. Действительно, в противном случае их разность — многочлен степени не выше $q+1$ — имел бы $q+2$ вещественных корня: $0, 1, 2, \ldots, q+1$.

Попытайтесь самостоятельно доказать, что тогда этот многочлен тождественно равен нулю *).

Формула (8) представляет сумму $S_q(n)$ в виде линейной комбинации сочетаний $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{q+1}$.

$$S_0(n) = C_n^1,$$

$$S_1(n) = C_n^1 + C_n^2,$$

$$S_2(n) = C_n^1 + 3C_n^2 + 2C_n^3,$$

$$S_3(n) = C_n^1 + 7C_n^2 + 12C_n^3 + 6C_n^4,$$

$$S_4(n) = C_n^1 + 15C_n^2 + 50C_n^3 + 60C_n^4 + 24C_n^5,$$

и т. д.

Исследовать любопытные закономерности, возникающие между коэффициентами этих комбинаций, например, законы образования коэффициентов по столбцам, предоставляем читателям.

Приведем в заключение еще несколько задач о суммах S_q.

Упражнения

1. Покажите, что

$$S_1 = S_1,$$
$$2(S_1)^2 = 2S_3,$$
$$4(S_1)^3 = 3S_5 + S_3,$$
$$8(S_1)^4 = 4S_7 + 4S_5,$$

и вообще, что при $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$2^{k-1}(S_1)^k = C_k^1 S_{2k-1} + C_k^3 S_{2k-3} + C_k^5 S_{2k-5} + \ldots,$$

причем последний член стоящего справа выражения равен S_k либо kS_{k+1}, в зависимости от того, нечетно k или четно.

2. Покажите, что

$$3S_2 = 3S_2,$$
$$6S_2S_1 = 5S_4 + S_2,$$
$$12S_2(S_1)^2 = 7S_6 + 5S_4,$$
$$24S_2(S_1)^2 = 9S_8 + 14S_6 + S_4$$

и вообще, что при $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$3 \cdot 2^{k-1} S_2 (S_1)^{k-1} = (C_k^0 + 2C_k^1) S_{2k} + (C_k^2 + 2C_k^3) S_{2k-2} + \ldots,$$

причем последний член стоящего справа выражения равен либо $(k+2)S_{k+1}$, либо S_k, в зависимости от того, нечетно k или четно.

3. Покажите, что

$$S_3 = (S_1)^2,$$

$$S_5 = (S_1)^2 \cdot \frac{4S_1 - 1}{3},$$

$$S_7 = (S_1)^2 \cdot \frac{6(S_1)^2 - 4S_1 + 1}{3},$$

и вообще, что S_{2k-1} (где $2k-1 \geqslant 3$) является многочленом от $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ степени k, делящимся на $(S_1)^2$.

4. Покажите, что

$$S_4 = S_2 \frac{6S_1 - 1}{5},$$

$$S_6 = S_2 \frac{12(S_1)^2 - 6S_1 + 1}{7},$$

$$S_8 = S_2 \frac{40(S_1)^3 - 40(S_1)^2 + 18S_1 - 3}{15},$$

и вообще, что $\frac{S_{2k}}{S_2}$ является многочленом степени $k-1$ от S_1.

5. Докажите, что при $k \geqslant 1$ (но не при $k = 0$)

$$S_k(-x-1) = (-1)^{k-1} S_k(x).$$

6. Найдите сумму: $1 + 27 + 125 + \ldots + (2n-1)^3$.

7. Найдите сумму: $2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2$.

---

*) Если вам не удастся это сделать, вы можете найти доказательство в «Кванте» № 12, 1972, стр. 37

Правильные многогранники

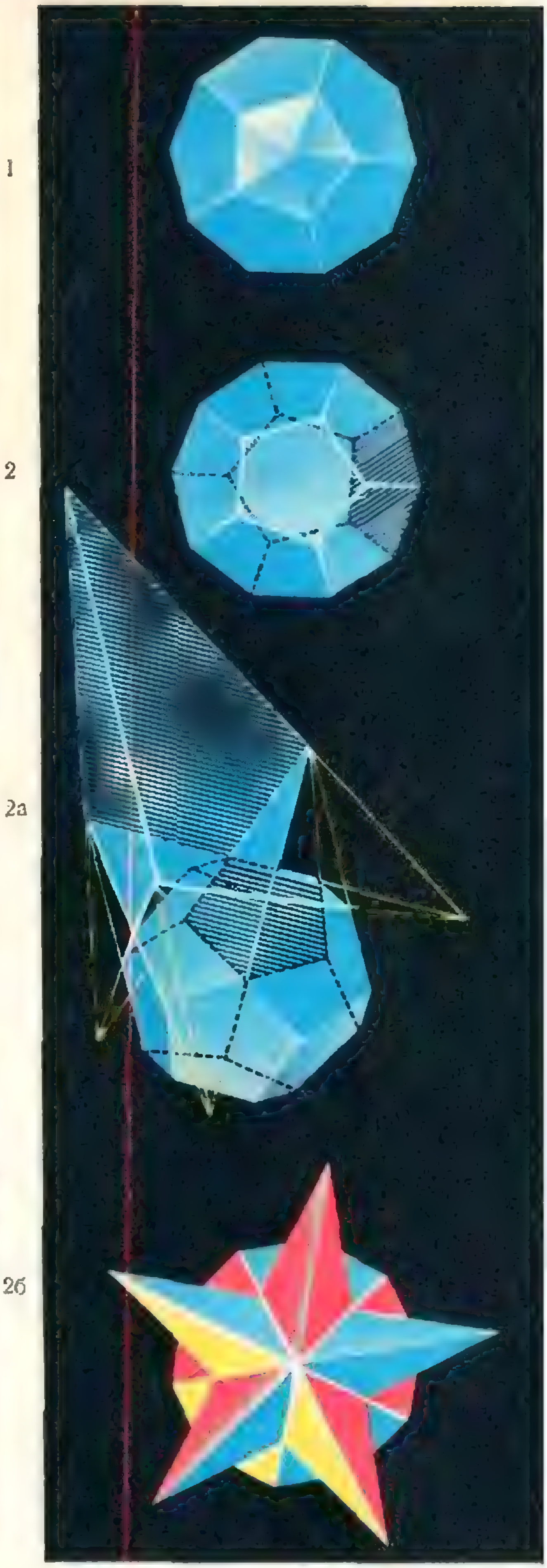
Выпуклые правильные многогранники — тетраэдр, октаэдр, гексаэдр (куб), додекаэдр и икосаэдр — принято называть платоновыми телами*).

Платоновы тела рассматриваются в школьных учебниках, в том числе в учебнике А. П. Киселева «Геометрия», часть вторая.

Напомним определение правильного многогранника, данное в этом учебнике: «*Многогранник называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны*». Из этого определения следует, что в правильных многогранниках равны все плоские углы, все двугранные углы и все ребра. В учебнике доказывается, что никаких других правильных многогранников, кроме платоновых тел, (см. 4-ю страницу обложки) быть не может.

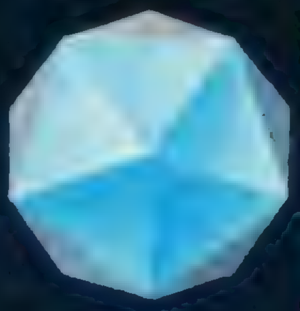
Доказательство приводится вполне строгое. И все же правильных многогранников *не пять, а девять*. Их вы видите на обложке нашего журнала. Дело в том, что у остальных четырех многогранников (их мы в дальнейшем будем называть звездчатыми) грани — пересекающиеся правильные многоугольники, а у двух из них каждая из граней представляет собой самопересекающийся многоугольник. Такие многоугольники и многогранники в курсе А. П. Киселева из рассмотрения исключены, хотя приведенное выше определение правильного многогранника, как и следствие из него, остаются в силе.

Теперь немного истории. Два звездчатых многогранника были построены Иоганном Кеплером (1571—1630). Только спустя без малого двести лет французский геометр Луи Пуансо (1777—1859) указал на существование еще двух правильных звездчатых многогранни-

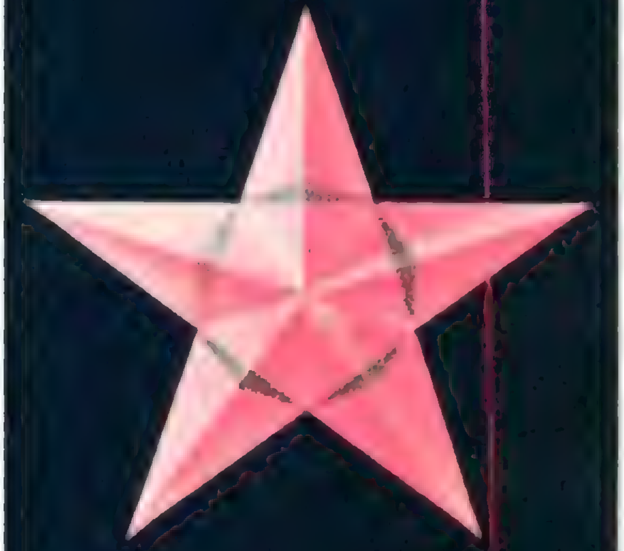


---

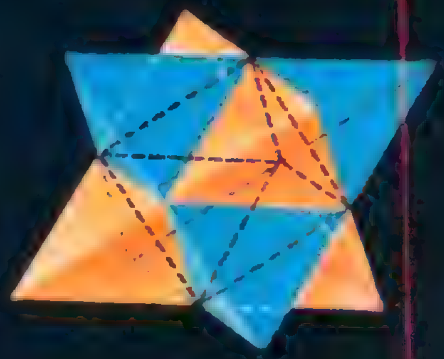
*) Древнегреческий философ Платон (427—347 гг. до н. э.), который упомянул о правильных многогранниках в одной из своих работ, на самом деле не являлся их первооткрывателем. Тетраэдр, гексаэдр и додекаэдр были известны задолго до Платона. Например, при раскопках найдена модель додекаэдра, служившая детской игрушкой более 2500 лет назад.



3



3а



4

ков. (Все четыре звездчатых многогранника приведены на 2-й странице обложки.) Доказать, что других правильных многогранников не существует, Пуансо не сумел.

Спустя год (в 1811 году) это сделал французский математик Огюстен Луи Коши (1789—1857). Он воспользовался тем, что согласно определению правильного многогранника, его можно наложить на самого себя так, что произвольная его грань совместится с наперед выбранной. Из этого следует, что все грани звездчатого многогранника равноудалены от некоторой точки — центра сферы, вписанной в многогранник.

Плоскости граней звездчатого многогранника, пересекаясь, образуют еще и правильный выпуклый многогранник, то есть платоново тело, описанное около той же сферы Это платоново тело Коши назвал ядром данного звездчатого многогранника. Тем самым звездчатый многогранник можно получить, продолжая плоскости граней одного из платоновых тел.

Любое ли платоново тело может служить ядром правильного звездчатого многогранника? Чтобы разобраться в этом, обратимся к многогранным углам звездчатого многогранника. Плоские углы такого многогранного угла равны и благодаря равенству соответствующих двугранных углов могут быть совмещены друг с другом поворотом многогранного угла относительно оси, проходящей через его вершину. Одновременно с совмещением плоских углов совместятся и соответствующие грани ядра, повернувшегося вместе со звездчатым многогранником.

На рисунках 1, 2 и 3 выделены грани ядер — додекаэдра и икосаэдра, которые переходят друг в друга при таких поворотах, и показаны многогранные углы, к которым приводит продолжение граней.

На рисунке 4 рассмотрен случай, когда продолжение ребер правильного многогранника, октаэдра, приводит к образованию не одного, а двух правильных многогранников — пересекающихся тетраэдров.

Докажите самостоятельно, что никакие другие повороты платоновых тел и соответствующие продолжения их граней не приводят к образованию новых правильных многогранников.

В. Н. Березин

Задачник «Кванта»

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 июня 1973 года по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М201, М205» или «... Ф215».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

Задачи

М201—206; Ф213—217

М201. Прямая l_1 пересекает стороны a; b и c треугольника (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно; прямая l_2 пересекает их в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что если точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины стороны a, а точки B_1 и B_2 симметричны относительно середины стороны b, то точки C_1 и C_2 симметричны относительно середины стороны c.

Нгуен Конг Кви (Ханой)

М202. Докажите, что из последовательности

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

являющейся бесконечной арифметической прогрессией ($d \neq 0$), тогда и только тогда можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, когда отношение a/d рационально.

Н. Б. Васильев

М203. а) Докажите, что если проекции точки пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ на прямые AB, BC, CD и DA соединить последовательно четырьмя прямыми (рис. 1), то эти прямые будут касаться одной окружности.

б) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

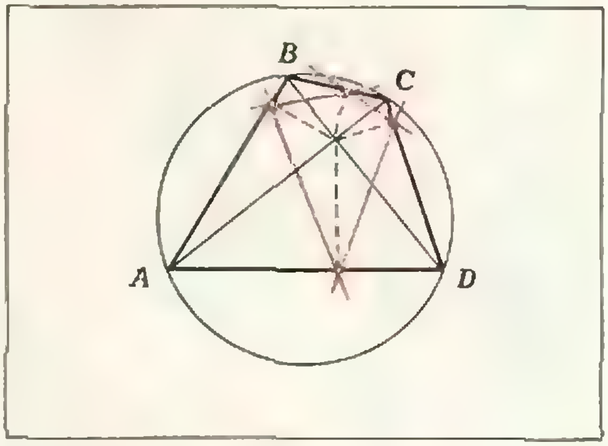


Рис. 1.

М204. Назовем натуральное число хорошим, если в его десятичной записи встречаются подряд цифры 1973, и плохим — в противном случае. (Например, число 197 639 917 — плохое, 116 519 732 — хорошее.) Докажите, что существует такое натуральное число n, что среди всех n-значных чисел (от 10^{n-1} до $10^n - 1$)

больше хороших, чем плохих. Постарайтесь найти возможно меньшее такое n.

Г. А. Гуревич

M205.* 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент *). Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил четное число (в частности, быть может, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «+», и некоторые из остальных — знаком «—» и приписать каждой задаче некоторое целое положительное число баллов так, что каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «+» и «—».

(Замечание. Эти утверждения верны только в том случае, если количество задач хотя бы на единицу больше количества студентов.)

Ф213. Максимально допустимая скорость движения автомобиля по скользкой дороге при прохождении поворота радиуса R равна $v_{\max}$. На повороте дорога наклонена под углом α к горизонту. Какова минимальная скорость, с которой должен двигаться автомобиль, чтобы проехать поворот?

Ф214. В схеме, изображенной на рисунке 2, $R_1 = 10$ *ком*, $R_2 = R_3 = 5$ *ком*, а к клеммам 1—2 приложено переменное напряжение $U = 127$ *в*. Диоды можно считать идеальными — при одном направлении тока их сопротивление бесконечно мало, при другом — бесконечно велико. Найти, какая мощность выделяется на сопротивлении R_1.

Л. П. Баканина

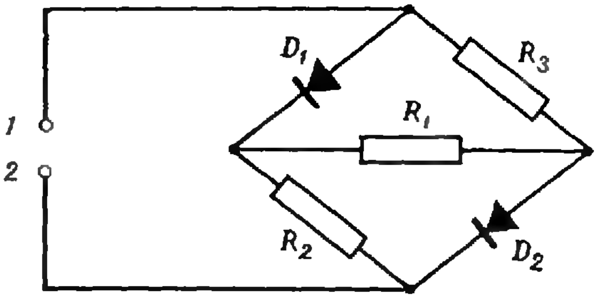


Рис. 2.

Ф215. Два мыльных пузыря радиусов R_1 и R_2 сливаются в один пузырь радиуса R_3. Найти атмосферное давление, если коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки равен σ.

Ф216. Вставая и приседая в определенные моменты времени, мальчик на качелях легко увеличивает амплитуду своих качаний. Объясните, почему это удается.

Ф217*. Электронно-лучевая трубка с ускоряющим напряжением U помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, направленной вдоль оси трубки. На экране при этом наблюдается небольшое расплывчатое пятно. Если менять величину индукции, то можно заметить, что при некоторых значениях B_0, $2B_0$, $3B_0$, ... электронное пятно фокусируется — собирается в точку. Объясните это явление. Как с помощью такого эксперимента определить отношение заряда электрона к его массе?

---

*) Мы надеемся что аналогичное утверждение будет верным для задач **M181—M205**, тем более, что читателей «Кванта» много больше 24.

Решения задач

М160—164; Ф178—182

М160. *Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из этой же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечетное число очков. Докажите, что в турнире участвовало четное число команд. (Поражение — 0 очков, ничья — 1 очко, выигрыш — 2 очка.)*

Пусть число команд равно N. Представим сначала результаты турнира в виде турнирной таблицы $N \times N$. На пересечении i-й строки и j-го столбца поставим число очков, набранных i-й командой в матче с j-й командой; будем обозначать его через a_{ij}. Будем считать, что команда в матче «с самой собой» набрала 0 очков, тогда на диагонали будут стоять нули ($a_{ii} = 0$).

Заметим теперь, что если $a_{ij} = 0$, то есть i-я команда проиграла j-й, то $a_{ji} = 2$, так как в этом случае j-я команда выиграла у i-й. Точно так же, если $a_{ij} = 1$, то и $a_{ji} = 1$. Итак, в турнирной таблице обязательно выполняется условие $a_{ij} + a_{ji} = 2$.

Каждой команде в турнирной таблице соответствует строка и столбец. Число очков, набранных i-й командой в матчах с группой команд с номерами $j_1, \ldots, j_k$, равно сумме чисел $a_{ij_1}, \ldots, a_{ij_k}$, стоящих на пересечении i-й строки со столбцами $j_1, \ldots, j_k$.

Теперь мы можем забыть про хоккейный турнир, сформулировав по-новому задачу на языке таблиц.

Пусть квадратная таблица $N \times N$, состоящая из целых чисел a_{ij}, удовлетворяет следующим двум условиям:

1) все числа a_{ii}, стоящие на ее диагонали, четны, и сумма $a_{ij} + a_{ji}$ каждых двух чисел, симметричных относительно этой диагонали, тоже обязательно четна;

2) для каждой группы столбцов найдется такая строка, что сумма чисел на пересечении этой строки со столбцами этой группы нечетна.

Нужно доказать, что условия 1) и 2) могут выполняться только в том случае, когда N четно.

Разумеется, решив эту новую задачу, мы решим и задачу М160.

Будем доказывать утверждение задачи от противного. Допустим, что существует таблица $N \times N$ с нечетным N, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Мы покажем, что тогда можно построить таблицу $(N-2) \times (N-2)$, также удовлетворяющую условиям 1) и 2). Применив это построение $(N-1)/2$ раз, мы получили бы таблицу, состоящую из единственного числа и удовлетворяющую условиям 1) и 2). Этого, однако, не может быть, так как для таблицы 1×1 оба условия одновременно не выполняются. Значит, сделанное предположение окажется неверным и утверждение задачи будет доказано.

Для того чтобы из таблицы $N \times N$ построить таблицу $(N-2) \times (N-2)$, сохранив условия 1) и 2), мы введем следующие преобразования таблиц:

Преобразование I. Меняем местами i-ю строку с j-й и i-й столбец с j-м.

Преобразование II. i-й столбец заменяем на сумму i-го и j-го столбца, а затем i-ю строку на сумму i-й и j-й строки.

Поясним преобразование II; i-ю и j-ю строки можно рассматривать как наборы N чисел $(a_{i1}, \ldots, a_{iN})$ и $(a_{j1}, \ldots, a_{jN})$; суммой строк назвать строку: $(a_{i1} + a_{j1}, \ldots, a_{iN} + a_{jN})$;

например,

$$\begin{array}{r} (010102) \\ +\;(101110) \\ \hline (111212) \end{array}.$$

Аналогично определяется сумма i-го и j-го столбцов.

Прежде всего заменим все четные числа в таблице на 0, а нечетные — на 1. Получим таблицу, которая симметрична, то есть $a_{ij} = a_{ji}$, кроме того, $a_{ii} = 0$, поэтому условие 1) для нее выполнено. Очевидно, что для нее сохраняется и условие 2).

Рассмотрим последний, N-й столбец этой таблицы. Согласно свойству 2) для него найдется такая строка, что на их пересечении стоит единица; если k — номер строки, то $a_{kN} = 1$ и, следовательно, $a_{Nk} = 1$. (Здесь мы применили условие 2) к одному столбцу.)

Сделаем теперь преобразование I: поменяем местами k-ю строку с $(N-1)$-й и k-й столбец с $(N-1)$-м.

В результате таблица будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{1\,(N-1)} & a_{1N} \\ a_{21} & \ldots & a_{2\,(N-1)} & a_{2N} \\ a_{31} & \ldots & a_{3\,(N-1)} & a_{3N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(N-2)\,1} & \ldots & a_{(N-2)\,(N-1)} & a_{(N-2)\,N} \\ a_{(N-1)\,1} & \ldots & 0 & 1 \\ a_{N1} & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Применив теперь несколько раз преобразование II (используя два крайних столбца и две крайние строки), мы можем привести таблицу к такому виду:

$$\tilde{A} =$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \ldots & \tilde{a}_{1\,(N-2)} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{i1} & \ldots & \tilde{a}_{i\,(N-2)} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{(N-2)\,1} & \ldots & \tilde{a}_{(N-2)\,(N-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Напомним, что число 2 мы заменяем на 0. Вычеркнув из этой таблицы последние два столбца и последние две строки, мы получим новую таблицу $(N-2) \times (N-2)$. Остается проверить, что она удовлетворяет условиям 1) и 2).

Преобразования I и II переводят симметричные таблицы в симметричные и не меняют четности чисел, стоящих на диагонали. Следовательно, новая таблица будет удовлетворять условию 1).

Остается проверить, что преобразования I, II сохраняют условия 2). Для преобразований I это совершенно ясно. Остается доказать это для преобразования II.

Если рассматриваемая группа столбцов не содержит i-го столбца и можно указать k-ю строку, удовлетворяющую условию 2), где k не равно i, то, очевидно, и после преобразования k-я строка будет ему удовлетворять.

Если этого сделать нельзя, то есть $k = i$ (хотя бы одна строка до преобразования существует!), то для j-й строки соответствующая сумма четна. Отсюда ясно, что в преобразованной таблице сумма для i-й строки по-прежнему нечетна.

Аналогично разбираются случаи, когда в группу столбцов входит i-й столбец. Если в нее не входит j-й столбец, то надо взять строку, «обслуживающую» группу, пополненную j-м столбцом, а если входит, то, наоборот, его надо убрать. Мы сумели от таблицы $N \times N$ перейти к таблице $(N-2) \times (N-2)$. Таким образом, наша задача полностью решена.

Оказывается, что наша задача — частный случай такой общей теоремы из линейной алгебры:

если $a_{ij} + a_{ji} = 0$, и система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = 0, \end{cases}$$

имеет только нулевое решение, то N четно. Эта теорема верна и для обычных чисел, и для «поля»*) из двух элементов 0 и 1, и для любого другого «поля». Проще всего ее доказывать, используя понятие *определителя* систем линейных уравнений. Так и поступил читатель *Э. Туркевич* (Черновцы), приславший нам решение задачи **M160**. Но можно доказывать ее и с помощью «элементарных преобразований» таблицы a_{ij}, как поступили мы выше.

Постарайтесь самостоятельно доказать эту теорему и вывести из нее решение задачи.

Б. Макаревич

M161. *Озеро имеет форму невыпуклого n-угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого m-угольника, где $m \leqslant n$.*

Пусть l — сторона многоугольника. Прямая, являющаяся продолжением l, делит плоскость на две полуплоскости; обозначим через D_l полуплоскость, которая примыкает к отрезку l с той же стороны, что и озеро (с другой стороны к отрезку l примыкает берег). При этом граничная прямая в полуплоскость D_l не включается.

Пересечение D всех n полученных полуплоскостей либо пусто, либо является выпуклой фигурой с числом сторон $m \leqslant n$.

Докажем, что D совпадает с множеством точек, из которых видны все берега озера.

1. Пусть O — точка из D. Докажем, что все берега видны из точки O. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — вершины многоугольника — озера.

Соединим отрезками точки O, A_1, A_2 и посмотрим, где может быть точка A_3.

Как видно из рисунка 1, вершина A_3 не может находиться с той же стороны от прямой

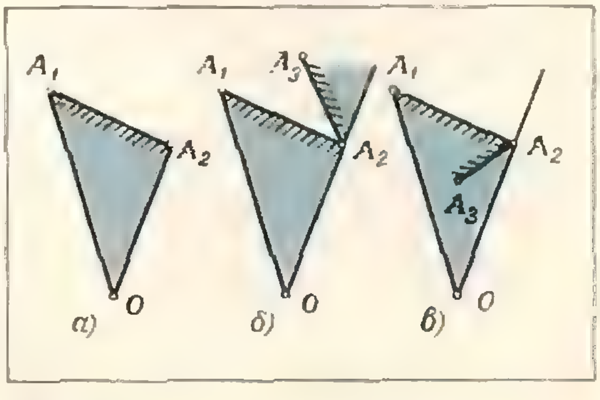


Рис. 1.

---

*) Полем называется множество, в котором введены операции сложения и умножения, обладающие обычными свойствами: они коммутативны, ассоциативны, имеют обратные операции — вычитание и деление и т. п.: условие $a_{ij} + a_{ji} = 0$ в поле из 0 и 1 равносильно условию $a_{ij} = a_{ji}$, поскольку $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, и $0 + 1 = 1 + 0 = 1$.

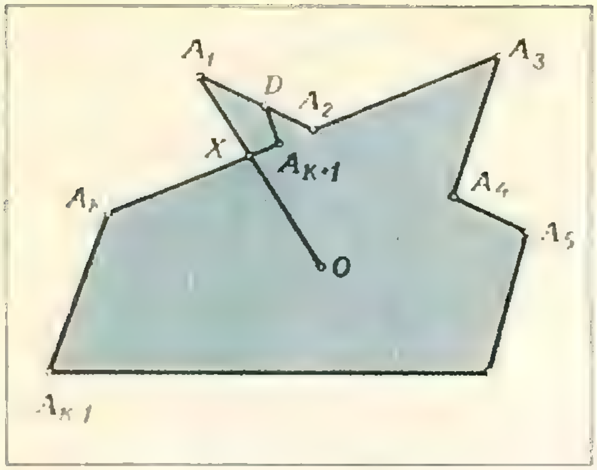


Рис. 2.

OA_2, что и вершина A_1 (заштрихована та сторона отрезков, к которой примыкает озеро). Значит, точки A_1 и A_3 находятся по разные стороны прямой OA_2.

Пусть точка X движется по берегу озера (от A_1 к A_2, от A_2 к A_3 и т. д.). Когда X движется от A_1 к A_2, отрезок OX вращается в некоторую сторону (например, пусть он вращается по часовой стрелке). Так как A_1 и A_3 лежат по разные стороны отрезка OA_2, то при движении точки X от A_2 к A_3 отрезок будет вращаться в ту же сторону. Рассуждая аналогично с точками A_2, A_3, A_4, . . . , мы видим, что при движении от A_3 к A_4, от A_4 к A_5 и т. д. отрезок OX вращается в ту же сторону.

Когда отрезок OX совершит полный оборот, точка X совпадет с точкой A_1. Действительно, предположим, что точка X не совпала с A_1; например $OX < OA_1$. Тогда при дальнейшем движении точка X не сможет попасть в точку A_1, так как она не сможет выйти за пределы многоугольника $DA_2A_3 \ldots A_kA_{k+1}$ (рис. 2) — контур многоугольника не замкнется.

Следовательно, внутрь $\Delta\, OA_1A_2$ не попадет ни одна точка контура, и берег A_1A_2, а значит, и все берега озера из точки O видны.

2. Пусть из точки O видны все берега озера. Рассмотрим сторону $l = CB$ многоугольника $A_1 \ldots A_n$. Тогда ясно, что $\Delta\, OCB$ лежит полностью внутри озера, значит, точка O лежит внутри D_l. Таким образом, точка O лежит внутри всех полуплоскостей D_l, то есть лежит внутри D.

Итак, мы показали, что множество точек, из которых видны все берега, совпадает с множеством D и, значит, либо пусто, либо является выпуклым многоугольником с числом сторон m, где $m \leqslant n$.

И. Н. Бернштейн

М162. *Последовательность натуральных чисел*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots \quad (A)$$

такова, что каждое натуральное число либо входит в последовательность (*A*) *либо представляется в виде суммы двух чисел из последовательности* (*A*), *быть может, одинаковых.*

Докажите, что $a \leqslant n^2$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим первые $(n-1)$ членов последовательности (A)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1}, \qquad (1)$$

и все натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух из этих чисел:

$$\begin{gathered} a_1 + a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_{n-1}, \\ a_2 + a_2,\ a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_2 + a_{n-1}, \\ a_{n-1} + a_{n-1}. \end{gathered} \qquad (2)$$

Нетрудно подсчитать, что здесь написано $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных сумм. Даже если все числа (1) и (2) различны, все равно их общее количество не превышает

$$(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n - 2}{2} < \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Таким образом, найдутся натуральные числа от 1 до n^2, которые не содержатся среди чисел (1) и (2). Поэтому, если последовательность (A) удовлетворяет условию задачи (каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более двух чисел из (A)), то $a_n \leqslant n^2$.

Из нашего рассуждения можно получить и более точную оценку:

$$a_n \leqslant \frac{n^2 + n}{2}. \qquad (3)$$

Интересно выяснить, нельзя ли получить еще лучшую оценку. Последовательности, удовлетворяющие условию задачи, которые удается построить очень далеки (при больших n) от той границы, которую дает неравенство (3). Мы приведем два примера.

1) Зафиксируем некоторое натуральное число k и рассмотрим последовательность: 1, 2, 3, . . ., $k-1$, $2k-1$, $3k-1$, $4k-1$, . . . ($a_n = nk - (k-1)^2$ при $n = k$, $k+1$, $k+2$, . . .). Эта последовательность, очевидно, удовлетворяет условию задачи. Как легко видеть, при $n = 2k$

$$a_n = a_{2k} = 2k^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k - 1 = \frac{n^2 + 4n - 4}{4}. \qquad (4)$$

Однако, хотя оценка (4) для a_n при $n = 2k$ лишь примерно вдвое хуже (3), но с ростом n расхождение между a_n и $\frac{n^2 + n}{2}$ сильно увеличивается: ведь a_n растет как линейная функция от n.

2) Рассмотрим последовательность всех натуральных чисел, представимых в виде

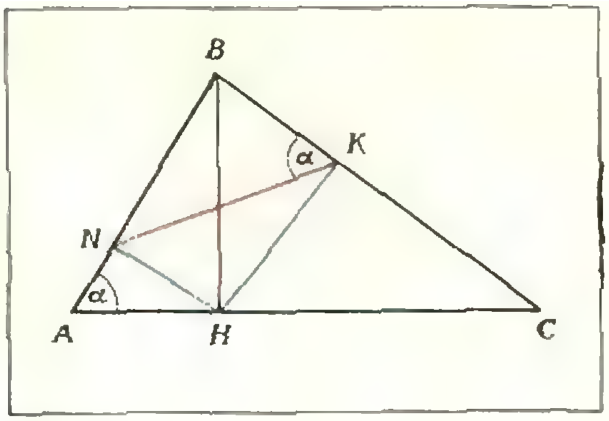


Рис. 3.

суммы двух квадратов целых чисел:
1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20 . . .

Поскольку каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов *), эта последовательность тоже удовлетворяет условию задачи. (Как можно доказать, она растет быстрее любой линейной функции от n: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n \to \infty$, но медленнее n^2: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n^2 = 0$. Оказывается, a_n растет примерно как $n\sqrt{\ln n}$.)

M163. *Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то проекции их точки пересечения на все четыре стороны (или их продолжения) лежат на одной окружности.*

Многие читатели правильно указали, что добавка «или их продолжения» в условии не нужна, поскольку перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла, не может не попасть на гипотенузу.

Заметим, что если из основания высоты BH произвольного треугольника ABC с острыми углами A и C (рис. 3) опустить перпендикуляры HK и HN на стороны BC и BA соответственно, то треугольники KBN и ABC подобны (угол B общий и $AB \cdot BN = BH^2 = BC \cdot KB$, то есть $AB : BC = KB : BN$), поэтому

$$\measuredangle BKN = \measuredangle BAC \quad (\text{и } \measuredangle BNK = \measuredangle BCA).$$

Используя это, легко проверить, что углы, обозначенные на рисунке 4 одинаковыми буквами — α, β, γ и δ, равны друг другу, поэтому сумма противоположных углов K и M четырехугольника $KLMN$ равна

$$(\pi - \alpha - \beta) + (\pi - \gamma - \delta) =$$
$$= (\pi - \beta - \delta) + (\pi - \alpha - \gamma) = \pi,$$

поэтому он вписанный.

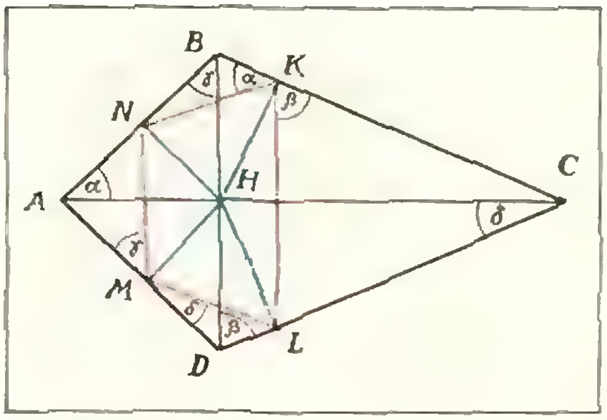


Рис. 4.

Верно и обратное: если в четырехугольнике $ABCD$ основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей на стороны, являются вершинами вписанного четырехугольника, то диагонали $ABCD$ *перпендикулярны. Это доказывается точно так же.*

Н. Б. Васильев.

M164. *На белых клетках бесконечной шахматной доски, заполняющей верхнюю полуплоскость* (рис. 5), *записаны какие-то числа так, что для каждой черной клетки сумма чисел, стоящих в двух соседних с ней клетках, справа и слева, равна сумме двух других чисел, стоящих в соседних с ней клетках, сверху и снизу. Известно число, стоящее в одной клетке n-й строки (голубой крестик на рисунке), а требуется узнать число, стоящее над ним в (n + 2)-й строке (красный знак вопроса на рисунке). Сколько еще чисел, стоящих в двух нижних строках (голубые точки на рисунке), нужно для этого знать?*

Введем следующие обозначения (см. рис. 6): x — неизвестное число в $(n+2)$-ой строке, d_n — данное число в

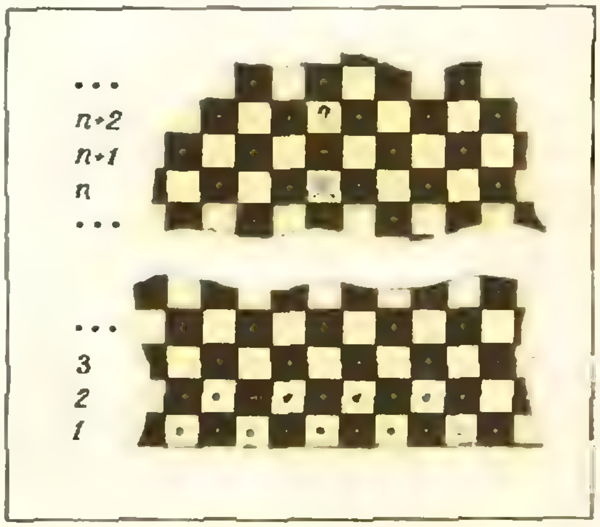


Рис. 5.

---

*) См., например, задачу 249 из книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра», «Наука», М., 1965.

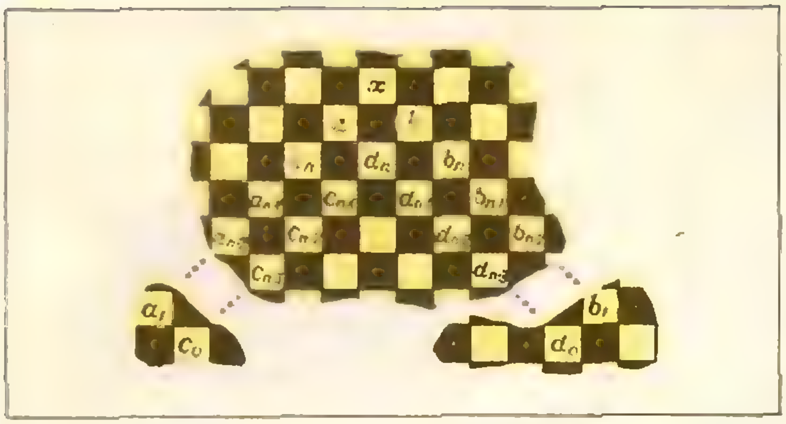


Рис. 6.

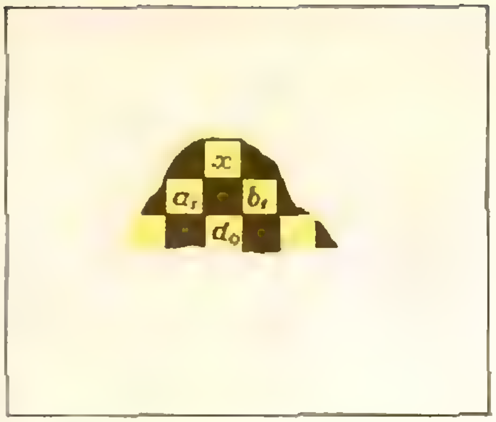


Рис. 7.

n-й строке. Числа a и b нам не даны, но известно что $x + d_n = a + b$, откуда $x = d_n + (a - d_n) + (b - d_n)$. Так как $b + d_{n-1} = d_n + b_n$, то $b - d_n = b_n - d_{n-1}$. Аналогично

$$b_n - d_{n-1} = b_{n-1} - d_{n-2} = b_{n-2} - d_{n-3} = \ldots = b_1 - d_0.$$

Тем самым, $b - d_n = b_1 - d_0$. Точно так же

$$a - d_n = a_n - c_{n-1} = a_{n-1} - c_{n-2} = \ldots = a_1 - c_0.$$

Значит, $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$.

Итак, чтобы определить x, нужно, кроме d_n, знать всего 4 числа a_1, b_1, c_0 и d_0 в первой и нулевой строках.

Нельзя ли обойтись меньше, чем четырьмя числами?

В вырожденном случае (при $n = 0$) — можно: тогда $x = a_1 + b_1 - d_0$ (см. рис. 7), и, кроме d_0, достаточно знать только два числа (a_1 и b_1).

При $n \geq 1$ обойтись меньше, чем четырьмя числами, нельзя, причем, кроме d_n, нужно знать именно числа a_1, b_1, c_0 и d_0: если хотя бы одно из этих чисел неизвестно, то знание даже *всех остальных чисел* в первой и нулевой строках не дает возможности определить x. Докажем это.

Пусть, например, число a_1 неизвестно (см. рис. 6). Тогда ничто не мешает задать его произвольно. Это было бы совершенно очевидно, если бы число d_n не было известно. В этом случае числа первой и нулевой строк не связаны никакими соотношениями, — их можно задать все совершенно произвольно, а по ним определить все остальные числа (сначала во второй строке, затем в третьей, и т. д.). При этом $d_n = P - N$, где P — сумма чисел первой строки, стоящих между a_1 и b_1 (исключая сами a_1 и b_1), а N — сумма чисел нулевой строки, стоящих между c_0 и d_0 (исключая сами c_0 и d_0); равенство $d_n = P - N$ легко доказывается индукцией по n; при этом нужно воспользоваться выведенной ранее формулой $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$.

Таким образом, $d_n = P - N$ — единственное соотношение, связывающее d_n и числа нулевой и первой строк; a_1 в него не входит. Значит, зная d_n и все числа нулевой и первой строк, кроме a_1, мы не можем определить a_1, — наоборот, оно может быть задано произвольно. Но, зафиксировав b_1, c_0, d_0 и d_n и придавая a_1 различные значения, мы будем получать разные значения и для x.

Итак, знание a_1, b_1, c_0 и d_0 необходимо и достаточно для определения x при данном d_n.

М. Л. Гервер.

Ф178. *В закрытом кубическом сосуде с ребром 1 см имеется n молекул газа. Стенки кубика таковы, что молекулы газа, попав на стенку, остаются на ней 10^{-2} с. Оценить, сколько молекул газа находится на стенках.*

Сосуд находится при комнатной температуре.

Отношение числа молекул n_1, находящихся на стенках, к числу молекул n_2, которые движутся между стенками, равно отношению времени τ, в течение которого молекула находится на стенке, ко времени t ее полета от одной стенки до другой:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau}{t}.$$

Так как $n_1 + n_2 = n$, то

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\tau}{t + \tau}.$$

Отсюда

$$n_1 = n\frac{\tau}{t + \tau} = n\frac{1}{1 + \frac{t}{\tau}}.$$

Оценим величину t. Средняя квадратичная скорость молекул газа с молекулярной массой μ при температуре T К равна

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Для определенности будем считать, что все молекулы движутся с такой скоростью перпендикулярно к стенкам сосуда. Тогда время, за которое молекула пролетит расстояние l между стенками, равно

$$t=\frac{l}{v}=\frac{l}{\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}},$$

и

$$n_1=n\frac{1}{1+\frac{l}{\tau}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}}}.$$

Пусть в сосуде находится воздух ($\mu = 29$ *кг/кмоль*) при температуре $T = 300°$ K. Подставляя в формулу для n_1 значения всех величин, получим

$$n_1=n\frac{1}{1+\frac{10^{-2}}{10^{-2}}\sqrt{\frac{29}{3\cdot 8,3\cdot 10^3\cdot 300}}}\approx$$

$$\approx n\frac{1}{1+0,02}\approx 0,98\,n.$$

Ф179. *Подводная лодка, погружаясь вертикально, излучает короткие звуковые импульсы сигнала гидролокатора длительностью τ_0 в направлении дна. Длительность отраженных сигналов, измеряемых гидроакустиком на лодке, равна τ. Какова скорость погружения лодки?*

Скорость звука в воде V. Дно горизонтально.

Рассмотрим, с чем связано изменение длительности сигнала. Для этого удобно перейти от длительности сигнала к его протяженности. Пусть сигнал, излучаемый гидролокатором на лодке, имеет форму, показанную на рисунке 8, то есть его интенсивность скачком меняется от нуля до некоторой величины в момент времени t, остается постоянной в течение времени τ_0 и опять скачком падает до нуля в момент времени $t+\tau_0$. Если лодка неподвижна, то протяженность излучаемого сигнала (расстояние между передним и задним фронтами) равна $l_0 = V\tau_0$. Если лодка опускается, протяженность сигнала становится меньше. Действительно, пусть в момент начала сигнала лодка находится в некоторой точке A (рис. 9), а к тому времени, когда сигнал прекращается, — в точке C, причем $AC = u\tau_0$, где u — скорость погружения лодки. Передний фронт сигнала за время τ_0 переместится в точку B, пройдя расстояние l_0. Следовательно, протяженность сигнала равна $l_1 = BC = (V-u)\tau_0$. Этот сигнал доходит до дна, отражается от него без изменения протяженности и движется навстречу лодке. В некоторый момент времени передний фронт сигнала поравняется с лодкой. Задний же фронт сигнала продолжает двигаться со скоростью $V+u$ относительно лодки, следовательно, длительность сигнала, принимаемого на лодке, равна

$$\tau=\frac{l_1}{V+u}=\frac{(V-u)\tau_0}{(V+u)}.$$

Отсюда

$$u=V\frac{\tau_0-\tau}{\tau_0+\tau}.$$

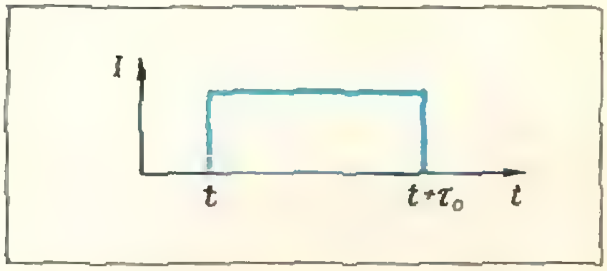


Рис. 8.

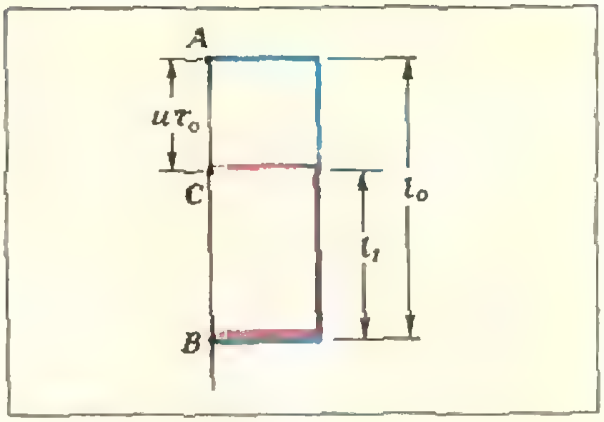


Рис. 9.

Ф180. *В однородное электрическое поле, напряженность которого равна E, внесли металлический шар. Известно, что плотность поверхностных зарядов на «полюсе» шара в точке* **A** *(рис. 10) равна σ_0. Определить плотность поверхностных зарядов в точке B, направление на которую из центра шара составляет угол α с направлением внешнего электрического поля.*

Очевидно, что распределение наведенных на шаре зарядов должно быть симметричным относительно оси AC. Так как в целом шар

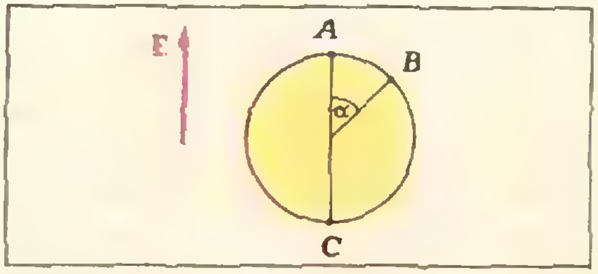


Рис. 10.

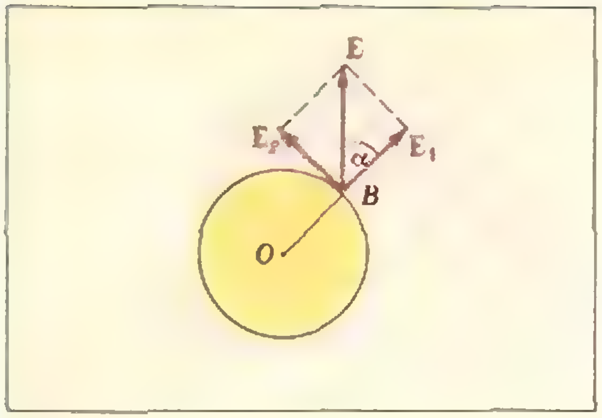


Рис. 11.

электронейтрален, то заряды выше и ниже «экватора» имеют разные знаки. Следовательно, на втором полюсе C плотность поверхностных зарядов равна $-\sigma_0$, а на экваторе она равна нулю.

Поскольку заряды на поверхности проводника всегда распределяются так, что их плотность пропорциональна напряженности электрического поля, то можно считать, что плотность наведенных зарядов σ в каждой точке шара будет пропорциональна напряженности внешнего поля E:

$$\sigma \sim E.$$

(Это следует также из соображений размерностей — размерности σ и E одинаковы).

Воспользуемся принципом суперпозиции и разложим поле с напряженностью $\mathbf{E}$ в точке B на две составляющие (рис. 11) — по направлению OB (вектор $\mathbf{E}_1$) и перпендикулярно к OB (вектор $\mathbf{E}_2$):

$$E_1 = E\cos\alpha,$$

$$E_2 = E\sin\alpha.$$

Плотность зарядов σ в точке B тоже представим как сумму плотностей зарядов, которые возникают в этой точке: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, причем σ_1 создается полем с напряженностью $\mathbf{E}_1$, а σ_2 — полем с напряженностью $\mathbf{E}_2$.

Но в поле с напряженностью $\mathbf{E}_2$ точка B лежит на «экваторе» сферы, поэтому $\sigma_2 = 0$. В поле же с напряженностью $\mathbf{E}_1$ точка B является «полюсом» сферы. Поэтому $\sigma_1 \sim E_1$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{E_1}{E}.$$

Отсюда

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_0 \frac{E_1}{E_0} = \sigma_0 \cos\alpha.$$

Ф181. *Спутник движется вокруг Земли по почти круговой орбите со скоростью v. Изменение его орбиты связано с тем, что на спутник действует со стороны микрочастиц сила трения $F = av^{\alpha}$, где a и α — константы. Найти α, если известно, что радиус орбиты спутника меняется очень медленно.*

Сразу оговорим, что будем решать задачу для случая, когда радиус орбиты меняется с постоянной скоростью.

Работа против силы трения совершается за счет уменьшения механической энергии спутника.

Пусть спутник массы m движется со скоростью v по круговой орбите радиуса R. Его кинетическая энергия равна $W_к = \frac{mv^2}{2}$, а потенциальная $W_п = -\gamma\frac{mM}{R}$, где M — масса Земли, γ — гравитационная постоянная (см., например, статью Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяготения», «Квант» № 6, 1972).

Центростремительное ускорение спутнику сообщает сила тяготения. Поэтому по второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma\frac{mM}{R^2},$$

откуда

$$v = \left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь выражение для $W_к$ можно записать так:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R}.$$

Тогда полная механическая энергия спутника равна

$$W = W_к + W_п = -\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R}.$$

Если радиус орбиты за время Δt уменьшится на малую величину ΔR ($\Delta R \ll R$), то изменение энергии спутника будет равно

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R} - \left(-\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R-\Delta R}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R(R-\Delta R)}\Delta R \approx \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R^2}\Delta R.$$

Работу против силы трения за это время можно посчитать так:

$$A = F_{тр.\,ср} v_{ср}\Delta t = av_{ср}^{\alpha+1}\Delta t \approx$$

$$\approx a\left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\Delta t$$

($v_{ср}\Delta t$ — это расстояние, на которое спутник переместится за время Δt).

Приравняем полученные выражения для работы и изменения полной энергии спутника:

$$a\left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\Delta t = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R^2}\Delta R.$$

Разделив обе части равенства на Δt, получим

$$a\left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R^2}\frac{\Delta R}{\Delta t},$$

где $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ — скорость приближения спутника к Земле — величина постоянная. Проанализируем полученное равенство. Оно должно выполняться при любых значениях переменной R. Для этого необходимо, чтобы показатели степени при R в обеих частях равенства были одинаковы, то есть

$$-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = -2,$$

откуда $\alpha = 3$.

Ф182. *Оцените, на какую высоту вы смогли бы подпрыгнуть на Луне.*

Эту задачу трудно решить строго.

Большинство читателей, приславших нам решение этой задачи, рассуждали так. При прыжке на Земле центр тяжести человека поднимается на высоту $h_\text{З}$. Это означает, что человек совершает работу $A = mgh_\text{З}$. Такую же работу может совершить человек и при прыжке на Луне. Но на Луне ускорение свободного падения составляет $1/6$ часть земного: $g_\text{Л} = \frac{1}{6}g_\text{З}$.

Поэтому из равенства работ

$$mg_\text{Л}h_\text{Л} = mg_\text{З}h_\text{З}$$

следует, что на Луне человек может подпрыгнуть на высоту в 6 раз большую, чем на Земле ($h_\text{Л} = h_\text{З}g_\text{З}/g_\text{Л}$). Если на Земле при прыжке центр тяжести человека поднимается на высоту $h' = 60$ *см*, то на Луне вы сможете подпрыгнуть на высоту 3,6 *м*.

В этом решении не учтена, однако, существенная деталь. Вспомним, как мы прыгаем на Земле: приседаем, затем резко выпрямляем ноги. Пусть, приседая, человек опускает свой центр тяжести на $h'' = 50$ *см*, а, подпрыгивая, поднимает его на $h' = 60$ *см* (по сравнению с тем положением центра тяжести, когда человек просто стоит) на Земле и на высоту h — на Луне. Будем считать, что человек во время прыжка совершает одинаковую работу на Земле и на Луне*), то есть

$$mg_\text{З}(h' + h'') = mg_\text{Л}(h'' + h).$$

Отсюда

$$h = 6h' + 5h'' = 6{,}1 \text{ м}.$$

И. Ш. Слободецкий

---

*) Это равносильно предположению, что одинакова сила, которая действует на туловище со стороны ног.

Кто где живет?

Вокруг стола сидят четверо жителей острова Трисельска.

Напомним, что на этом острове три села: Правдово, Чередово и Лгуново. Жители села Правдово всегда говорят правду; жители Чередова через раз говорят правду, а через раз лгут, причем первый ответ может оказаться как правдой, так и ложью; жители Лгунова всегда лгут.

Имена сидящих за столом по часовой стрелке — Петр, Иван, Юрий и Олег. Каждому из них были заданы следующие три вопроса.

1) Из какой деревни ваш сосед слева?

2) Из какой деревни человек, сидящий против вас?

3) Из какой деревни ваш сосед справа?

Ответы были следующие:

Петр: 1) из Правдова; 2) из Чередова; 3) из Чередова.

Иван: 1) из Лгунова; 2) из Чередова; 3) из Чередова.

Юрий: 1) из Лгунова; 2) из Правдова; 3) из Чередова.

Олег: 1) из Лгунова; 2) из Правдова; 3) из Чередова.

Из какой деревни был родом каждый из спрошенных?

А. А. Рывкин

Периодические функции

Определения

Все вы, по-видимому, знаете, что такое периодическая функция. Однако для того, чтобы заняться изучением ее свойств, нужно все же дать ее строгое определение. Оказывается, сделать это не так просто. Вот, например, одно определение и «следствие» из него.

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что при всех значениях x из области определения этой функции $f(x+T) = f(x)$.*

Докажем теперь лемму 1:

Если $T > 0$ — период функции $f(x)$, то $-T$ — тоже период этой функции.

Доказательство состоит в выписывании цепочки равенств:

$$f(x-T) = f[(x-T)+T] = f(x).$$

В самом деле, ведь T — период функции $f(x)$, и потому, если его прибавить к аргументу $x-T$, то значение функции не изменится (первое равенство). Остается раскрыть скобки и получить $f(x)$.

Прежде, чем читать дальше, попытайтесь найти ошибку в этом доказательстве.

Все проведенные здесь рассуждения справедливы. Только из них не следует, что $-T$ является периодом $f(x)$. Если вы еще не обнаружили ошибку в доказательстве, то рассмотрите функцию $\sin(\sqrt{x})^2$. Ее область определения $x \geqslant 0$, и для любого x из этой области определения

$$\sin(\sqrt{x+2\pi})^2 = \sin(\sqrt{x})^2,$$

то есть 2π с точки зрения сформулированного определения — период функции. Вместе с тем -2π не будет ее периодом, так как левее $x = 0$ функция $\sin(\sqrt{x})^2$ не определена и, например, $\sin(\sqrt{0-2\pi})^2$ не существует.

Теперь ясна и ошибка доказательства: прежде чем рассматривать значение $f(x-T)$, нужно быть уверенным, что это значение существует, а это ниоткуда не следует. Вот почему удается сконструировать опровергающий пример.

Чтобы лемма 1 могла быть доказана, необходимо иное определение периодической функции.

Определение 1. *Функция $f(x)$, определенная хотя бы в одной точке, называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$ (называемое периодом), что для любого x из области определения этой функции*

а) числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат ее области определения;

б) $f(x+T) = f(x)$.

При таком определении приведенное выше доказательство леммы 1 становится верным.

Используя определение периодической функции, можно установить, является ли та или иная функция периодической.

Пример 1. *Доказать, что функция $y = \sin \lg x$ не является периодической.*

Установить этот факт легко — достаточно заметить, что данная функция определена при всех $x > 0$ и не существует при всех $x \leqslant 0$. Следовательно, какое бы $T > 0$ мы ни выбрали, наша функция будет определена при $x = T/2$ и не будет определена при $x = \frac{T}{2} - T = -\frac{T}{2}$, то есть она не является периодической.

Пример. 2. *Доказать, что функция*

$$\cos x + \sin(x\sqrt{2})$$

— не периодическая.

Пусть существует число $T \neq 0$ такое, что

$$\cos(x+T) + \sin[\sqrt{2}(x+T)] \equiv$$
$$\equiv \cos x + \sin(\sqrt{2}x)$$

для всех x. Положим в этом тождестве $x = 0$ и $x = -T$; тогда получим следующие два равенства:

$$\begin{cases} \cos T + \sin(\sqrt{2}T) = 1 & (1) \\ \cos T - \sin(\sqrt{2}T) = 1. & (2) \end{cases}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $\cos T = 1$, а $\sin(\sqrt{2}T) = 0$, откуда $T = 2\pi k$ и $T = \pi n/\sqrt{2}$. Приравнивая эти значения ($T \neq 0$, и поэтому $k \neq 0$, $n \neq 0$), найдем $\sqrt{2} = n/2k$, то есть $\sqrt{2}$ — рациональное число. Полученное противоречие доказывает, что функция $\cos x + \sin(\sqrt{2}x)$ — не периодическая.

Пример 3. *Доказать, что функция $y = 3\sin x + \sin 2x$ является периодической.*

Обычно рассуждают так. Пусть T — период этой функции. Тогда равенство

$$3\sin(x+T) + \sin 2(x+T) =$$
$$= 3\sin x + \sin 2x \quad (1)$$

должно удовлетворяться при всех x, в том числе и при $x = 0$. Воспользовавшись этим, придем к уравнению относительно T:

$$3\sin T + \sin 2T = 0. \qquad (2)$$

то есть $(3 + 2\cos T)\sin T = 0$. Так как выражение в скобках в нуль не обращается, $\sin T = 0$, $T = k\pi$.

Однако найденные таким образом значения T вовсе не обязаны быть периодами функции. Перейдя от соотношения (1) к соотношению (2), мы смягчили ограничения на T, содержавшиеся в (1). Ведь первое соотношение должно быть справедливым при *всех* x, в то время как второе обеспечивает его справедливость лишь при $x = 0$. Таким образом, мы установили, что все периоды рассматриваемой функции заключены среди чисел вида $x = k\pi$. Однако это совсем не означает, что все числа такого вида являются ее периодами.

Далее, поскольку

$$3\sin\frac{\pi}{2} + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 3,$$

$$3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -3,$$

то есть $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$, то π не будет периодом функции. Число 2π и все числа вида $2k\pi$ — ее периоды, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Основной период

Определение 2. *Наименьший положительный период периодической функции $f(x)$ называют основным.*

Наиболее внимательные из читателей, наверное, тут же возразят: прежде, чем давать чему-то название, хорошо бы убедиться в существовании определяемого объекта. Мы займемся выяснением существования основного периода после того, как докажем еще одно свойство периодических функций.

Лемма 2. *Если T_1 и T_2 — периоды функции $f(x)$, причем $T_1 + T_2 \neq 0$, то $T_1 + T_2$ — период $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $y = x + T_1$. Так как T_1 — период функции f, *то* $f(y)$ существует одновременно с $f(x)$. T_2 — тоже период f. Следовательно, $f(y + T_2)$ существует и $f(y + T_2) = f(y) = f(x + T_1) = f(x)$, то есть $f(x + T_1 + T_2) = f(x)$.

По условию, $T_1 + T_2 \neq 0$. Таким

образом, доказано, что $T_1 + T_2$ — период функции f.

Следствие 1. *Если T_1 и T_2 — периоды функции f и $T_1 \neq T_2$, то $T_1 - T_2$ — период функции f.*

Следствие 2. *Если T_1 и T_2 — периоды функции f, причем $mT_1 + nT_2 \neq 0$, где m и n — целые, то $mT_1 + nT_2$ — период функции f.*

Доказательство этих следствий проведите самостоятельно.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ периодическая и известно, что у нее нет положительных периодов, меньших некоторого числа $\alpha > 0$, то она имеет основной период.*

Доказательство. Пусть T — период. Если внутри отрезка $[0, T]$ есть еще хотя бы один период T', то найдется период T_1, лежащий на отрезке $\left[0, \frac{T}{2}\right]$. В самом деле, $T - T'$ — тоже период, и если $T' \leqslant \frac{T}{2}$, то положим $T_1 = T'$, и если $T' > \frac{T}{2}$, то $T - T' < \frac{T}{2}$ и можно положить $T_1 = T - T'$.

Теперь берем период T_1 и отрезок $[0, T_1]$ и продолжаем те же рассуждения, получая период T_2 и так далее.

Но длина отрезка $[0, T_k]$ по крайней мере вдвое меньше длины отрезка $[0, T_{k-1}]$, поэтому при некотором n отрезок $[0, T_n]$ будет иметь длину, меньшую α, и потому не будет содержать ни одного периода.

Значит, на некотором этапе мы должны были остановиться, найдя тем самым наименьший положительный период функции $f(x)$.

Нам удалось доказать теорему благодаря условию, что $f(x)$ не имеет положительных периодов, меньших некоторого $\alpha > 0$. Это условие выглядит излишне жестким и появляется желание доказать более сильное утверждение: периодическая функция $f(x)$, отличная от константы, имеет основной период. К сожалению, такое утверждение ложно. Чтобы установить это, достаточно привести опровергающий пример.

В качестве такого примера можно взять функцию Дирихле. Эту функцию определяют так: она равна нулю во всех иррациональных точках числовой оси и единице — во всех рациональных точках. Легко убедиться в том, что функция Дирихле будет периодической, ее период — любое рациональное число, отличное от нуля. Однако основного периода у нее нет, поскольку среди всех положительных рациональных чисел нет наименьшего (нуль не является положительным числом).

Теорема 2. *Если у периодической функции $f(x)$ есть основной период, то все ее периоды кратны основному.*

Доказательство. Если T — основной период функции $f(x)$, то kT, где $k \neq 0$ — целое, тоже ее период (по следствию 2 из леммы 2).

Докажем теперь, что у $f(x)$ нет иных положительных периодов, кроме kT.

Пусть $T_1 > 0$ — период $f(x)$ и $T_1 \neq kT$ ни при каком натуральном k. Тогда найдется такое целое $n > 0$, что

$$nT < T_1 < (n + 1)\,T,$$

то есть

$$0 < T_1 - nT < T,$$

откуда следует, что $T_1 - nT$ — положительный период $f(x)$, меньший T, что противоречит условию, в силу которого T — основной период $f(x)$.

Период суммы функций

Часто возникает потребность в определении периода функции, образованной как комбинация других периодических функций.

Пример 4. *Найти основной период функции*

$$\sin 3x + \operatorname{tg} 2x.$$

Основной период функции $\sin 3x$ равен $\frac{2\pi}{3}$, а основной период $\operatorname{tg} 2x$ равен $\frac{\pi}{2}$. Период суммы $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ будем искать среди чисел, являющихся периодами каждой из этих функций, а потому содержащих целое число раз оба эти периода. Если же мы хотим найти среди таких периодов наименьший, то следует взять наименьшее общее кратное периодов слагаемых *), то есть построить наименьший отрезок, содержащий целое число отрезков длины $\frac{2\pi}{3}$ и целое число отрезков длины $\frac{\pi}{2}$. Таким будет отрезок длины 2π, а число 2π — наименьшим из всех сконструированных таким образом периодов для $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$.

К сожалению, мы не доказали, что 2π — основной период функции $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$. Не доказали, ибо искали периоды этой функции с помощью некоторого специального приема — среди чисел, являющихся периодами каждого из слагаемых. Если бы можно было установить, что период суммы $f_1 + f_2$ непременно является периодом каждого слагаемого f_1 и f_2 в отдельности, то обнаружение основного периода было бы закончено. Однако такое утверждение заведомо неверно. Убедиться в этом легко на простом примере:

$$f_1 = \sin x + x, \quad f_2 = \sin x - x,$$
$$f_1 + f_2 = 2\sin x.$$

Здесь f_1 и f_2 не являются периодическими функциями — обе они имеют единственный корень $x = 0$. Вместе с тем их сумма $f_1 + f_2$ — функция периодическая с периодом 2π.

Доказать, что 2π — основной период функции $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ можно, опираясь на свойства самой этой функции, изученные на любом отрезке длины 2π, например, на отрезке $[0, 2\pi]$. На этом отрезке функция имеет те же самые точки разрыва, что и $\operatorname{tg} 2x$. Поэтому ее период должен быть обязательно кратным числу $\frac{\pi}{2}$. Остается убедиться на примерах, что $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ не являются периодами этой функции. Возьмите для этой цели $x = \frac{\pi}{6}$ и проведите необходимые выкладки.

При решении примеров, подобных примеру 4, многие школьники ссылаются на достаточно общую теорему, в которой устанавливается, что *основной период суммы периодических функций $f = f_1 + f_2$ есть наименьшее кратное основных периодов T_1 и T_2 функций f_1 и f_2 соответственно.* Некоторые даже приводят доказательство этой теоремы!

В формулировке теоремы, которую мы привели — целый каскад ошибок и некорректностей. Если даже добавить в условии, что $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$, то нет никаких оснований надеяться, что отрезки длины T_1 и T_2 окажутся соизмеримыми. Поэтому сумма двух периодических, причем очень «хороших» функций, может оказаться функцией непериодической (см. пример 2). Дополним условие теоремы словами, «если оно существует», относящимися к наименьшему общему кратному периодов T_1 и T_2. Примеры 5 и 6 опровергают утверждение и такой уточненной теоремы.

Пример 5. Пусть $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$. Тогда $f(x) = \operatorname{tg} x$. Основные периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ есть 2π, в то время как основной период $f(x)$ равен π.

Пример 6. Пусть

$$f_1(x) = \sqrt{\lg \sin x}, \; f_2(x) = \operatorname{tg} x,$$
$$f(x) = \sqrt{\lg \sin x} + \operatorname{tg} x.$$

Основной период f_1 равен 2π (эта функция определена лишь в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ числовой оси), основной период f_2 равен π. Функция $f(x)$ не определена нигде на числовой оси, так как все точки, входящие в область определения первой функции, не попадают в область определения второй. Поэтому ее нельзя считать периодической.

На самом деле имеет место гораздо более слабая теорема и формулируется она для *периодов*, а не для *основных периодов*.

---

*) Обычно это понятие определяется для натуральных чисел. Говоря о наименьшем общем кратном периодов T_1 и T_2, мы будем иметь в виду отрезок наименьшей длины, в котором отрезки длины T_1 и T_2 содержатся целое число раз.

Теорема 3. *Если $T_1 > 0$ — период $f_1(x)$, $T_2 > 0$ — период $f_2(x)$, причем T_1 и T_2 соизмеримы и существуют значения x, принадлежащие одновременно области определения f_1 и f_2, то $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ — периодическая функция, имеющая своим периодом число T, равное общему кратному (в том числе и наименьшему) периодов T_1 и T_2.*

Доказательство. Пусть T — наименьшее общее кратное соизмеримых отрезков T_1 и T_2. Тогда имеются такие натуральные k и l, что $T = kT_1$ и $T = lT_2$. Если x — любое из области определения $f(x)$, то

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(x + kT_1) + f_2(x + lT_2) = f_1(x+T) + f_2(x+T) = f(x+T).$$

Все ограничения, имевшиеся в условии теоремы, были использованы в приведенной цепочке равенств.

Вообще говоря, может быть доказана аналогичная теорема о гораздо более широком классе комбинаций функций f_1 и f_2, включая произведение, частное. Однако рассмотрение конкретных практических ситуаций здесь, по-видимому, гораздо эффективнее построения какой-либо строгой теории.

Упражнения

Будут ли периодическими следующие функции и, если да, то найти их основные периоды:

1. $2^{|\sin x|}$;
2. $\cos 3\pi x - \sin 2\pi x$;
3. $\sin 2x \sin 3x \cos 5x$;
4. $\lg \sin x + \lg \cos x$;
5. $\lg \lg (1 + \sin x) + \lg \lg (1 - \sin x)$;
6. $|\sin \arcsin x|$;
7. $\arcsin \sin x$;
8. $\sin \dfrac{1}{x}$;
9. x^2.

10. Докажите, что функция $\cos x^2$ не является периодической.

11. Докажите, что если функция $\cos x + \sin ax$ периодическая, то a — рациональное число.

Расшифруйте!

1.

```
    ***
 ×
    *3*
   ----
    3**
   **3*
  3**3
  ------
  ******
```

2.

```
  ******* | *6*
 -        |-----
  *6**      6***
  ----
     ***
    -
     **6
     ----
     ****
    -
     ***6
     ----
        0
```

Где ошибка?

— Сколько корней у квадратного уравнения?

— Два, конечно,— ответите вы.

— Но всегда ли?

Рассмотрим такое уравнение:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$$

(здесь a, b и c — попарно различные числа).

Подставим $x = a$. Первое и третье слагаемые обратятся в нуль. Второе дает единицу. Подставив $x = b$, увидим, что первые два слагаемых обращаются в нуль, а третье дает единицу.

Подстановка $x = c$ приводит к такому же результату. Таким образом, хотя мы имеем квадратное уравнение, корней, по крайней мере, три! Получили противоречие: уравнение второй степени имеет больше двух корней!

Как же это получилось?

Л. А. Боровинский

Задачи на максимум и минимум

В повседневной жизни, в практических и научных задачах часто возникает необходимость определения условий, при которых мы получим наилучшие результаты при определенных усилиях. В других случаях, наоборот, необходимо знать, при каких условиях можно достичь определенной цели при минимальных затратах труда или времени. Такие условия называются оптимальными.

Часто, даже не замечая этого, мы решаем задачи на определение оптимальных условий, пользуясь жизненным опытом и смекалкой. Однако интуиция и жизненный опыт могут быть обманчивы или недостаточно точны. В лучшем случае они подскажут нам условия, которые обеспечивают получение хорошего, но не наилучшего результата. Для точного нахождения оптимальных условий необходимо прибегнуть к испытанному оружию — математике.

Многие законы физики могут быть сформулированы как некоторые экстремальные принципы, то есть требования экстремума (максимума или минимума) определенных физических величин. Мы знаем, например, что состояния равновесия механической системы можно найти из условий экстремума потенциальной энергии системы, причем в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна, а в состоянии неустойчивого равновесия — максимальна. Тот, кто знаком с принципом Ферма, согласно которому свет между двумя точками идет всегда по пути, требующему минимального времени, из этого принципа может вывести все законы геометрической оптики.

Есть существенное различие между оптимальными условиями для процессов, управляемых человеком, и для процессов, происходящих в природе самопроизвольно. В первом случае оптимальные условия определяют наиболее выгодный, но не единственно возможный, ход процесса. А во втором — условия экстремума в границах применимости законов природы определяют либо единственно возможный, либо наиболее вероятный ход процесса.

Сложные задачи на определение оптимальных или экстремальных условий решаются с помощью теории дифференциального исчисления, вариационного исчисления или линейного программирования.

Однако существует много простых задач на определение экстремумов функций, которые можно решить, не пользуясь этими сложными математическими теориями. Для их решения нужно знать только свойства элементарных функций (например, квадратного трехчлена или тригонометрических функций). Можно также воспользоваться известной теоремой:

Среднее геометрическое n положительных чисел не больше их среднего арифметического, то есть

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, э. д. с. которого равна E, а внутреннее сопротивление и сопротивление подводящих проводов в сумме равны r. Какое сопротивление R должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?*

По закону Ома для полной цепи ток равен

$$I = \frac{E}{R+r},$$

а по закону Джоуля — Ленца мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна

$$P = I^2R = \frac{E^2R}{(R+r)^2} = \frac{E^2}{R + 2r + \frac{r^2}{R}}.$$

При малом R ($R \ll r$) полезная мощность мала, так как почти вся мощность, забираемая от источника, выделяется в подводящих проводах и в источнике. Если R велико ($R \gg r$), полезная мощность опять мала, так как мал ток в цепи. Следовательно, существует некоторое значение R, при котором полезная мощность будет максимальной.

Рассмотрим выражение

$$R + 2r + \frac{r^2}{R} = 2r + \left(R + \frac{r^2}{R}\right).$$

Ясно, что полезная мощность достигает наибольшей величины, когда это выражение будет минимальным. Величина $2r$ задана, а произведение членов R и $\frac{r^2}{R}$, стоящих в скобках, не зависит от R и постоянно, поэтому, согласно указанной выше теореме, наименьшее значение знаменателя будет достигнуто тогда, когда $R = \frac{r^2}{R}$, то есть $R = r$.

Наибольшее значение полезной мощности при этом равно

$$P_{\max} = \frac{E^2r}{4r^2} = \frac{E^2}{4r}.$$

Отметим, что в этом случае к. п. д. источника составляет только 50%. Поэтому получать максимальную мощность от источника целесообразно только в течение коротких промежутков времени, например, при работе стартера автомашины. Чтобы более целесообразно использовать запас энергии источника тока, сопротивление R должно быть значительно больше r. При этом полезная мощность будет меньше максимальной, но зато к. п. д. будет ближе к 100%. Проверьте это.

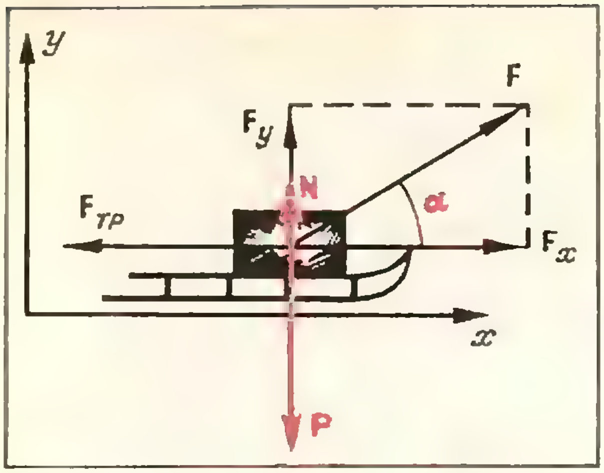


Рис. 1.

Задача 2. *Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности под действием силы* **F**, *приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы* **F** *с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен k.*

Разложим силу **F** на горизонтальную и вертикальную составляющие $\mathbf{F}_x$ и $\mathbf{F}_y$ (рис. 1). Сила нормального давления саней на снег равна разности веса саней и вертикальной составляющей силы **F**:

$$N = P - F\sin\alpha. \qquad (1)$$

Поэтому сила трения

$$F_{тр} = kN = k(P - F\sin\alpha). \qquad (2)$$

Сани будут двигаться равномерно при условии компенсации горизонтальных сил: $F_x = F_{тр}$, то есть

$$F\cos\alpha = k(P - F\sin\alpha). \qquad (3)$$

Отсюда находим силу F как функцию угла α:

$$F = \frac{kP}{k\sin\alpha + \cos\alpha}. \qquad (4)$$

Очевидно, что сила F будет минимальной при таком значении угла α, при котором знаменатель в формуле (4) максимален. Для определения этого угла преобразуем знаменатель выражения (4) так, чтобы в него входила только одна тригонометрическая функция угла α. Для этого представим коэффициент трения k как тангенс некоторого угла φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = k; \qquad \varphi = \operatorname{arctg} k;$$

$$\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}; \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Так как k задано, угол φ можно считать известным. Подставляя в (4) $\operatorname{tg}\varphi$ вместо k и умножая числитель и знаменатель на $\cos\varphi$, получим

$$F = \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{P\sin\varphi}{\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha} = \frac{P\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} =$$

$$= \frac{Pk}{\sqrt{1+k^2}\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Теперь ясно, что сила F будет минимальной тогда, когда $\cos(\alpha-\varphi) = 1$, то есть

$$\alpha_{\min} = \varphi = \operatorname{arctg} k.$$

При этом минимальное значение силы F равно

$$F_{\min} = \frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Из решения этой задачи можно сделать практический вывод: когда необходимо везти на санях груз по дороге с большим коэффициентом трения (например, если дорога посыпана песком), нужно тянуть сани за короткую веревку. Если же коэффициент трения мал, веревка должна быть длинной. Объясните это.

Задача 3. *Точки 1 и 2 движутся по осям x и y к началу координат (рис. 2). В момент* $t_0 = 0$ *точка 1 находится на расстоянии* $s_1 = 10$ *см, а точка 2 — на расстоянии* $s_2 = 5$ *см от начала координат. Первая точка движется со скоростью* $v_1 = 2$ *см/с, а вторая — со скоростью* $v_2 = 4$ *см/с. Каково наименьшее расстояние между ними?*

В момент t расстояние между точками равно

$$d = \sqrt{(s_1 - v_1t)^2 + (s_2 - v_2t)^2} =$$

$$= \sqrt{(10-2t)^2 + (5-4t)^2} =$$

$$= \sqrt{20t^2 - 80t + 125}\,(\text{см}).$$

Под корнем стоит квадратный трехчлен, из которого можно легко выделить полный квадрат. Действительно,

$$20t^2 - 80t + 125 = 5\,[(2t-4)^2 + 9].$$

Ясно, что минимум этого выражения, а значит, и расстояния d будет при $t = 2$, откуда

$$d_{\min} = \sqrt{45}\ \text{см} \approx 6{,}7\ \text{см}.$$

В заключение рассмотрим задачу, для решения которой используется так называемый метод приращений, не входящий в программу средней школы.

Задача 4. *Группа спортсменов организовала на берегу моря следующее соревнование. Стартуя из точки A (рис. 3) на берегу моря, каждый спортсмен должен достичь буйка B, расположенного на расстоянии* $l = 120$ *м от берега. Береговую линию можно считать прямой; расстояние от старта A до основания перпендикуляра BC, опущенного на эту линию, равно* $L = 200$ *м. Каждый спортсмен имеет право пробежать любое расстояние по берегу от старта A*

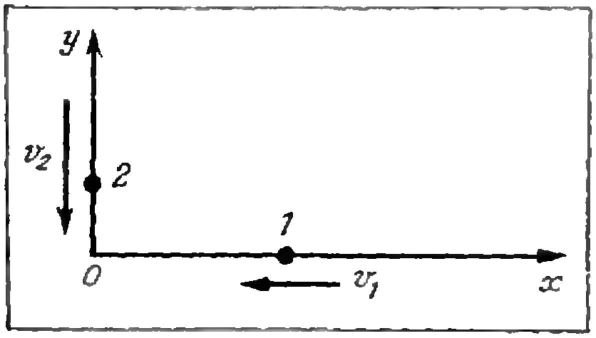


Рис. 2.

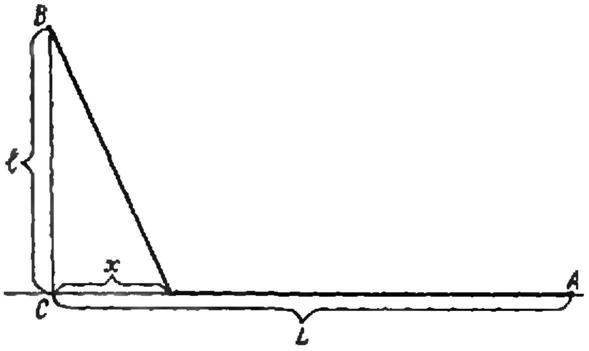


Рис. 3.

по направлению к основанию перпендикуляра BC, а затем плыть к буйку. Победителем считается тот, кто доплывает до буйка B быстрее всех. Из какой точки берега наиболее выгодно начать плыть к буйку спортсмену, который знает, что при беге по песчаному берегу его скорость равна 13 км/ч, а скорость плавания — 5 км/ч.

Пусть x — расстояние от точки C до того места, откуда спортсмен начинает плыть к буйку. Тогда спортсмен пробегает расстояние $L-x$, а проплывает расстояние $\sqrt{l^2+x^2}$. Общее время движения от старта A до буйка B равно

$$t=\frac{L-x}{v_1}+\frac{\sqrt{l^2+x^2}}{v_2}.$$

Пусть длина отрезка x увеличивается на малую величину Δx. Тогда время движения станет равным

$$t'=\frac{L-(x+\Delta x)}{v_1}+\frac{\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}}{v_2}.$$

Изменение времени равно

$$\Delta t=t'-t=-\frac{\Delta x}{v_1}+$$
$$+\frac{\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}-\sqrt{l^2+x^2}}{v_2}=$$
$$=-\frac{\Delta x}{v_1}+$$
$$+\frac{l^2+(x+\Delta x)^2-l^2-x^2}{v_2\left[\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}+\sqrt{l^2+x^2}\right]}=$$
$$=\left\{\frac{2x+\Delta x}{v_2\left[\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}+\sqrt{l^2+x^2}\right]}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{v_1}\right\}\Delta x.$$

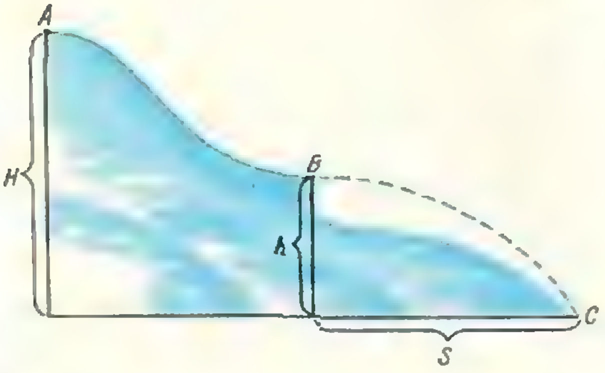


Рис. 4.

Так как $\Delta x \ll x$, выражение для Δt можно упростить. Тогда

$$\Delta t\approx\left\{\frac{x}{v_2\sqrt{l^2+x^2}}-\frac{1}{v_1}\right\}\Delta x.$$

Поскольку $\Delta x>0$, знак Δt совпадает со знаком выражения в фигурных скобках.

При малых x $(x\to 0)$ выражение в фигурных скобках отрицательно, а значит, t убывает с ростом x. При $x\gg l$ выражение в фигурных скобках положительно, и время растет с ростом x. Поскольку функция Δt меняется непрерывно с увеличением x, существует такое значение x_m, при котором Δt обращается в нуль, то есть убывание t с увеличением x сменяется ростом t. Это значение x_m и будет соответствовать минимальному времени t.

Итак,

$$\frac{x_m}{v_2\sqrt{x_m^2+l^2}}-\frac{1}{v_1}=0,$$

откуда

$$x_m=l\,\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}.$$

Подставляя численные значения всех величин, получим $x_m=50$ *м*.

Длина L в решении не использовалась. Однако знать ее необходимо. Подумайте, почему.

Упражнения

1. Имеется множество наклонных плоскостей с одинаковыми основаниями, равными b, *но с разными высотами. При какой высоте* h время соскальзывания тела по наклонной плоскости без трения будет минимальным?

2. Верхняя точка трамплина находится на высоте H над землей, а на высоте h трамплин обрывается (рис. 4). Какой должна быть высота h при заданной высоте H, чтобы лыжник, съехав с трамплина, мог пролететь наибольшее расстояние S (считая по горизонтали)?

Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Новосибирский государственный университет

Новосибирский государственный университет основан в 1959 году в научном центре Сибирского отделения АН СССР. В НГУ имеются факультеты:

математический с отделениями математики, прикладной математики и механики;

физический;

естественный с отделениями химии и биологии;

геолого-геофизический;

гуманитарный с отделениями русского языка и истории;

экономический со специализацией по экономической кибернетике.

Университет расположен в Академгородке в 20 километрах от Новосибирска. Обучение студентов проводится на базе научных институтов Сибирского отделения АН СССР: гидродинамики, математики, вычислительного центра, ядерной физики, теоретической и прикладной механики, теплофизики, физики полупроводников, автоматики и электрометрии, геологии и геофизики, неорганической химии, органической химии, химической кинетики и горения, катализа, истории, филологии и философии, цитологии и генетики.

На первых двух курсах студенты изучают современные методы исследования, что позволяет им уже с третьего курса проходить практику в одной из научно-исследовательских лабораторий сначала два-три дня в неделю, а на пятом курсе — полную рабочую неделю.

Со второго курса студенты привлекаются к участию в работе научных семинаров на кафедрах.

В университете преподают ведущие ученые Сибирского отделения АН СССР.

Приемные экзамены в университет проводятся с 11 июля.

Приведем варианты вступительных экзаменов 1972 года по математике и задачи по физике, предлагавшиеся на физическом факультете.

Математика

В каждом варианте предлагалось 4 задачи, на решение которых отводилось 5 астрономических часов.

Специальности: математика, прикладная математика и механика, физика, экономическая кибернетика

Вариант 1

1. При каких вещественных значениях a, b, c $(a\cdot b\cdot c\neq 0)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 + a \\ y^2 = (z-x)^2 + b \\ z^2 = (x-y)^2 + c \end{cases}$$

имеет вещественные решения? Найти эти решения.

2. В остроугольном треугольнике ABC углы при вершинах A и B равны α и β соответственно, а радиус описанной окружности с центром в точке O равен R. Найти радиус окружности, которая проходит через точку C, касается стороны AB и центр которой лежит на отрезке OC.

3. Решить уравнение

$$2\cos x = \sqrt{2+\sin 3x}.$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ грани SAC и ABC перпендикулярны и являются равными равнобедренными треугольниками ($AS = AC = AB = a$, $\angle SAC = 30^\circ$). Найти высоту прямого кругового конуса, окружность основания которого проходит через точки A, B и C, а боковая поверхность — через точку S.

Вариант 2

1. Найти вещественные решения системы уравнений

$$(x+y)^2 = (y+z)^2 = \frac{1}{4}(x+z)^2 = \frac{2}{x+y+z}.$$

2. Три круга радиуса R каждый касаются внутренним образом круга радиуса $2R$. Углы треугольника, образованного точками касания, острые и равны α, β, γ. Определить площадь части большого круга, получающейся после выбрасывания всех трех меньших кругов.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\frac{5}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=1.$$

4. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC=7a$ и углом при основании α таким, что $\sin\alpha=0{,}8$. Боковые грани пирамиды образуют с основанием одинаковые двугранные углы, равные 45°. Перпендикулярно к плоскости SBC проведена плоскость P, пересекающая боковые стороны треугольника ABC в точках, находящихся на равном расстоянии $4a$ от прямой BC. Найти объем той из частей пирамиды, возникающих в результате сечения плоскостью P, которая не содержит точку A.

Специальности: химия, биология, геология, геофизика

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)^{\frac{1}{x-y}}=2\sqrt{3}\\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=3.\end{cases}$$

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D и проведены прямые DP и DQ, параллельные сторонам BC и AB соответственно. P — точка пересечения прямых DP и AB, и точка Q — прямых DQ и BC. Найти длину отрезка PQ, если $AC=1$, $AD=l$ $(0<l<1)$ и $\measuredangle ACB=\alpha$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{ctg}4x+1}{\operatorname{ctg}4x-1}.$$

4. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 1. Найти длину бокового ребра, если известно, что биссекториальная плоскость двугранного угла при основании делит объем пирамиды в отношении 2 : 1 (считая от вершин).

Физика

Каждому абитуриенту на письменном экзамене предлагалось 5 задач.

№ 1. «Экспериментальная» задача, в которой требовалось объяснить физическое явление, демонстрировавшееся экзаменаторами на лабораторном столе.

№ 2. «Легкая» задача, которую может решить каждый средне подготовленный абитуриент.

№ 3 и 4. Задачи, требующие достаточно уверенного знания основных физических законов и некоторой сообразительности.

№ 5. Задача повышенной трудности, требующая умения разбираться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Ниже приведена бо́льшая часть задач (в скобках указан номер каждой задачи в экзаменационном билете).

Задача 1. (*1*). Две катушки с проводом висят так, что их оси горизонтальны и лежат на одной прямой. Зазор между торцами катушек около 3 *см*. При включении катушек в электрическую сеть через лабораторный автотрансформатор катушки притягиваются.

Почему притягивающиеся катушки начинают отталкиваться, когда между ними вставлен медный лист? Почему картина меняется, если вместо медного вставлен железный лист?

Задача 2. (*1*). Имеются два динамика и два звуковых генератора. При поочередном подключении каждого динамика к своему генератору в обоих случаях слышны звуки одинаковой на слух громкости и частоты. При одновременном подключении — звук той же частоты, но с периодическим усилением и ослаблением громкости. Объяснить явление.

Задача 3. (*1*). Черный диск с одним узким белым сектором приводится во вращение. При освещении диска периодически вспыхивающей лампой видны три неподвижных белых сектора, расположенных через 120°. Найти скорость вращения диска по наблюдаемой картине при известной частоте вспышек ν освещающей лампы.

Задача 4. (*2*). Двойной маятник вращается вокруг вертикальной оси так, что обе нити лежат в одной плоскости с осью и составляют с ней постоянные углы α и β (рис. 1). Длины нитей одинаковы и равны l. Найти угловую скорость вращения маятника. Ускорение свободного падения равно g.

Задача 5. (*2*). В цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном жидкостью плотности ρ до высоты h, возле дна в боковой стенке имеется отверстие, заткнутое пробкой. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть пробку в сосуд на длину l?

Пробка имеет форму цилиндра радиуса r, длиной больше l. Трение не учитывать. Сосуд достаточно высок, так что вода из него не выливается.

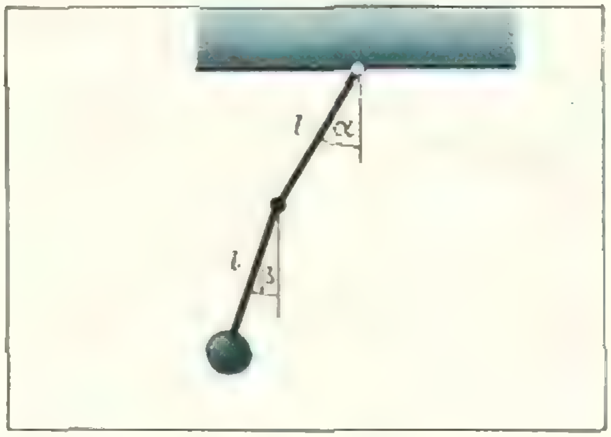


Рис. 1.

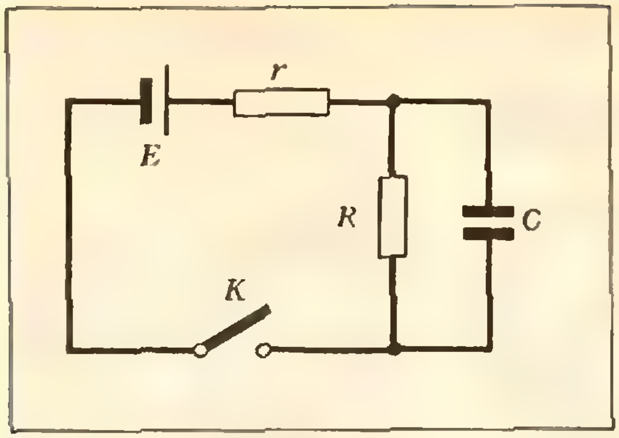


Рис. 2.

Задача 6. (*3*) Точку подвеса маятника длины l мгновенно приводят в движение в горизонтальном направлении с постоянной скоростью v, затем после перемещения на расстояние a мгновенно останавливают. Перед началом движения маятник покоился. При какой скорости подвеса колебания маятника, возникшие с началом движения, прекращаются сразу же после остановки? Угол отклонения маятника от вертикали считать малым.

Задача 7. (*3*) Имеется параллельный пучок одинаковых ядер, движущихся со скоростью v. Ядра в пучке самопроизвольно делятся на две части одинаковой массы. Максимальная скорость осколков, движущихся в направлении пучка, оказалась равной u. Найти скорость осколков, движущихся в направлении, перпендикулярном пучку (для неподвижного наблюдателя).

Задача 8. (*3*) Жука фотографируют в двух масштабах, поднеся фотоаппарат на расстояние l, равное сначала тройному, а затем пятикратному фокусному расстоянию объектива. Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одинаковой? Считать, что диаметр объектива много меньше l.

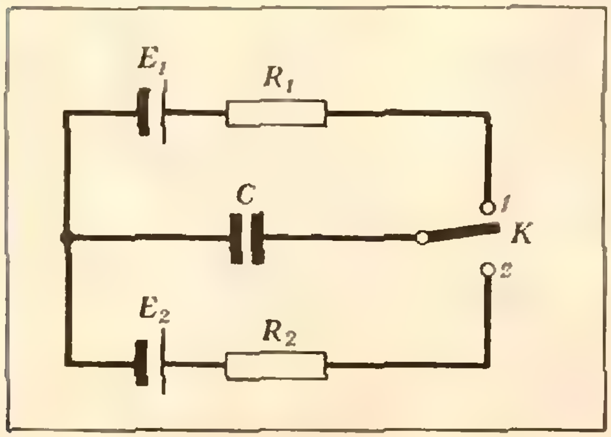


Рис. 3.

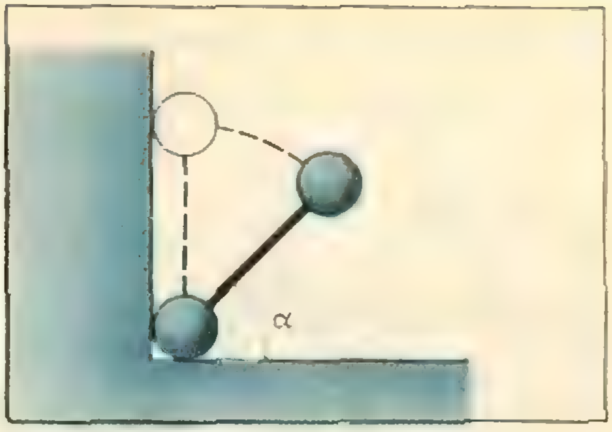


Рис. 4.

Задача 9. (*4*) В цепи (рис. 2) течет постоянный ток. Ключ размыкают. Через какое приблизительно время заряд на конденсаторе уменьшится на $\frac{1}{1000}$ своей первоначальной величины?

Задача 10. (*4*) Брусок весом P удерживается в воздухе N струями воды, бьющими вертикально вверх из отверстий сечением S каждое. Скорость воды на выходе из отверстия равна v. Отталкиваясь от бруска, вода разлетается в горизонтальной плоскости. На какой высоте над отверстиями удерживается брусок? Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

Задача 11. (*5*) Ключ K (рис. 3) замыкают поочередно с каждым из контактов на очень маленькие одинаковые промежутки времени, причем изменение заряда конденсатора за время каждого включения очень мало́. Какой заряд окажется на конденсаторе после очень большого числа переключений?

Задача 12. (*5*) Определить силу, действующую на вертикальную стенку со стороны падающей гантели в момент, когда ось гантели составляет угол α с горизонтом (рис. 4).

Гантель начинает свое движение без начальной скорости. Вес каждого шара гантели P, расстояние между шарами много больше радиуса шаров; трением пренебречь.

Задача 13. (*5*) На непроводящем кольце массы m и радиуса R равномерно распределен небольшой заряд q. Кольцо может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоится. Имеется перпендикулярное к плоскости кольца магнитное поле, индукция которого в центральной области кольца радиуса $a \leqslant R$ равна $2B$, а в остальной области равна B. Затем всюду магнитное поле равномерно уменьшается до нуля. Какую скорость приобретает кольцо после исчезновения магнитного поля?

А. А. Атавин,
С. Т. Беляев,
В. А. Цецохо

Новые книги

*В этом номере мы продолжаем *) публиковать аннотации на книги, выходящие в 1973 году, представляющие интерес для наших читателей.*

Во II квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).

Математика

Издательство «Наука»

1. Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н. и другие. *Задачи по элементарной математике* (объем 22 л., тираж 200 000 экз., цена 72 коп.).

Эта книга представляет собой сборник задач повышенной трудности по элементарной математике. Все задачи снабжены решениями или обстоятельными указаниями. При составлении данного издания учтен опыт вступительных экзаменов за последние годы.

Книга рассчитана на учащихся 10-х классов и может быть использована при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

2. Калнин Р. А., *Алгебра и элементарные функции* (объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 13 коп.).

Книга содержит материал по алгебре и элементарным функциям в объеме курса техникумов. Она может быть также использована при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

3. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э., *Функции и графики* (объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 13 коп.).

Данная книга входит в «библиотеку физико-математической школы». В ней изложены важнейшие математические понятия — понятия функции, графиков функции и так далее. Приведены простейшие примеры построения графиков функции.

Книга рассчитана на школьников 8—10 классов, интересующихся математикой. Она также может быть использована в работе математических кружков.

4. Литлвуд Дж., *Математическая смесь* (объем 8 л., тираж 40 000 экз., цена 45 коп.).

Книга состоит из ряда очерков, хотя и весьма различных по сюжету, но объединенных математической тематикой. В них и небольшие исследования по теории математики, и популярное изложение ряда математических вопросов, и интересные задачи, и, наконец, просто математические шутки.

Живой и увлекательный язык делает эту книгу интересной для самого широкого круга читателей.

Издательство «Мир»

5. Кэррол Л., *История с узелками* (объем 23 л., тираж 200 000 экз., цена 1 руб. 36 коп.).

Имя Льюиса Кэррола — автора знаменитых сказок «Алиса в Стране Чудес» и «Алиса в Зазеркалье» — хорошо известно советскому читателю. Однако Л. Кэррол, математик по образованию, был также автором занимательных математических головоломок и задач, изящных логических парадоксов.

В этой книге собраны наиболее интересное из того, что было опубликовано из этого жанра Л. Кэрролом. Книга доставит огромное удовольствие самому широкому кругу читателей.

Физика

Издательство «Наука»

6. Гурский И. П., *Элементарная физика* (объем 25 л., тираж 200 000 экз., цена 80 коп.).

Книга представляет собой пособие по физике для поступающих в вузы. В ней сжато и последовательно рассматриваются все вопросы, вошедшие в программу вступительных экзаменов. Изложение материала сопровождается решением типовых задач.

Книга рассчитана на учащихся старших классов средней школы, слушателей подготовительных отделений и лиц, занимающихся самообразованием.

7. Григорьев В. И., Мякишев Г. Я., *Силы в природе* (объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 73 коп.).

Книга вводит читателя в мир физических представлений на примерах основных типов взаимодействия сил в природе.

Написанная хорошим языком, с большим числом иллюстраций, эта книга будет полезна школьникам старших классов, учителям, ведущим факультативные занятия.

8. Иванов Б. Н., *Принципы современной физики* (объем 8 л., тираж 30 000 экз., цена 50 коп.).

В книге в относительно простой и доступной форме излагаются основные понятия и принципы современной физики и дается представление о современном состоянии физики в целом.

Книга представляет интерес для учителей средней школы, а также будет доступна подготовленным школьникам старших классов.

---

*) См. «Квант» № 2, стр. 74, 1973.

9. *Астрономичкесий календарь. Постоянная часть,* под редакцией П. И. Бакулина (объем 55 л., тираж 20 000 экз., цена 3 р. 16 коп.).

Книга содержит сведения из сферической и теоретической астрономии, некоторые задачи практической астрономии, основные понятия астрономии.

В ней также приведены описания некоторых астрономических инструментов и методика работы с ними.

Книга рассчитана на участников астрономических кружков, любителей астрономии и т. д.

10. Ефремов Ю. Н., *Глубины Вселенной* (объем 9 л., тираж 25 000 экз., цена 32 коп.).

Книга посвящена строению окружающего нас мира звезд и галактик, истории его изучения и методам определения расстояний во Вселенной.

Книга написана живо и увлекательно. Ее с интересом прочтут школьники старших классов, интересующиеся проблемами астрономии.

Издательство «Просвещение»

11. Мякишев Г. Я., *Элементарные частицы.* (Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 коп.).

В книге рассказывается о тех трудностях, с которыми встретились ученые при попытке построения теории элементарных частиц, о задачах, вставших перед ними.

Книга написана доходчивым языком и доступна школьникам старших классов.

М. Л. Смолянский

Специальность — прикладная математика

Из Бугурусланского района Оренбургской области в редакцию «Кванта» пришло письмо. Его автор — выпускник Верхнепавлушкинской восьмилетней школы — Василий Кудеров пишет:

«Я бы очень хотел специализироваться по профессии прикладная математика. Математику я люблю. Знания по математике у меня есть. Читаю дополнительную литературу по математике. Математика притягивает меня».

Таких писем много. Они приходят от школьников, мечтающих стать специалистами по прикладной математике.

В беседе с нами директор методического кабинета Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР Е. Л. Некрасов сообщил, что по этой специальности готовятся математики-прикладники. Наряду со всесторонним средним образованием, с высоким общематематическим образованием, они получают знания и навыки применения математики в решении задач экономики, управления и научных исследованиях. При этом в решении задач используется умение учащихся составлять алгоритмы и программы для электронновычислительных машин.

Правила приема в техникумы по этой специальности обычные: устный экзамен по математике и письменный экзамен по русскому языку и литературе.

Е. Л. Некрасов сообщил также, что в Министерстве приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР специальность «прикладная математика» открыта в следующих техникумах:

МОСКОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ

Москва, 105264, Измайловский б-р, 19, телефон 163-00-70. Принимаются только жители г. Москвы и Московской области.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ МЕХАНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ № 1

Ленинград, 197137, Песочная наб., 14, телефон 33-55-60. Принимаются только жители Ленинграда и Ленинградской области.

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ТЕХНИКУМ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ

Днепропетровск, 320600, ул. Дзержинского, 2/4, телефон 44-05-55. Для иногородних есть общежитие.

РОСТОВСКИЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ

Ростов-на-Дону, 344037, 24-я линия, 2/15, телефон 5-04-33. Для иногородних есть общежитие.

В. Н. Березин

Экзамены по математике в школах ГДР

В различных странах учебные планы и программы различны. В этой статье мы расскажем об особенностях обучения в 10-летних и 12-летних школах ГДР, о курсе математики в этих школах, об уровне экзаменационных требований.

В Германской Демократической Республике успешно осуществляется Единая социалистическая система образования, закон о которой был принят Народной Палатой Республики в 1965 году. Наряду со всеобщим обязательным десятилетним образованием, обучением в расширенных (12-летних) средних школах, а также средних специальных и высших учебных заведениях, система предусматривает и весьма широкое профессионально-техническое образование.

В этой системе нет «тупиковых» школ. В Конституции ГДР (статья 26) записано, что «государство обеспечивает возможность перехода на последующую более высокую ступень образования . . . в соответствии с с принципом успеваемости и общественными потребностями».

В первый класс принимаются дети, которым к 30 мая текущего года исполнилось 6 лет, то есть почти на год раньше, чем в наши школы. Но курс математики в школах ГДР значительно отстает от курса соответствующих классов советской школы. Например, программа по математике пятого класса школы ГДР почти полностью совпадает с программой наших четвертых классов.

В седьмом классе много времени уделяется вычислениям с процентами и составлению отношений, применению логарифмической линейки; в этом же классе изучается извлечение квадратного корня и элементы начертательной геометрии. Решение квадратных уравнений впервые рассматривается в девятом классе, а понятие о тригонометрических функциях — в десятом. В целом десятилетняя школа ГДР дает математическую подготовку лишь немногим бóльшую, чем наша восьмилетка. Большинство выпускников десятилетки умеют применять полученные знания: быстро и безошибочно считают на логарифмической линейке, уверенно пользуются таблицами, справочниками. Но решение простейшей текстовой задачи вызывает у них подчас непреодолимые затруднения. А некоторых знакомых нам разделов в десятилетней школе вообще не изучают: нет пределов, не рассматривают прогрессий, почти не решают тригонометрических уравнений — это признано необязательным для всеобщего десятилетнего образования и перенесено в двенадцатилетнюю, расширенную школу.

В расширенной школе на изучение математики отводится 300 уроков (по 5 уроков в неделю в XI и XII классах). Помимо традиционных разделов изучаются математическая индукция, теория пределов, векторная алгебра и аналитическая геометрия, а также основы дифференциального и интегрального исчисления — примерно в объеме первого курса некоторых наших втузов.

Весьма интересна система оценок, принятая в школах ГДР. За решение каждой задачи начисляется несколько баллов; если задача решена не полностью или с ошибкой, то число баллов уменьшается или вовсе не присуждается. К тексту письменной работы по математике за 10 классов (см. ниже) приложена (только для учителя!) инструкция по оценке. В ней указано, что задача № 1 оценивается в 6 баллов, по одному баллу за составление первого уравнения, составление второго уравнения, исключение одного неизвестного, нахождение первого числа, нахождение второго числа и за проверку.

Точно так же «расценены» остальные задачи; вся работа может быть оценена 40 баллами. Далее в инструкции приведена шкала:

39 и 40 баллов — отметка «1» — «очень хорошо»;
от 32 до 38 баллов — отметка «2» — «хорошо»;
от 24 до 31 балла — отметка «3» — «удовлетворительно»;
от 14 до 23 баллов — отметка «4» — «достаточно»;
от 0 до 13 баллов — отметка «5» — «недостаточно».

Аналогично оцениваются и письменные работы в году; за устные ответы оценки ставятся редко (даже и по физике, химии, биологии, истории). Как правило, отметка «3» ставится за 60%, а отметка «4» — за 33% выполнения задания. Эта отметка позволяет переходить из класса в класс, но абсолютно исключает возможность попасть в 12-летнюю школу, и тем более в вуз.

После окончания 8-го класса каждый ученик получает рекомендацию на предмет продолжения образования.

При этом 15—20% лучших учеников рекомендуются в 12-летнюю школу, окончание которой дает право поступления в вуз (без экзаменов, но по рекомендации школы), 10—15% наиболее слабых учеников рекомендуются в трехлетние профессиональные школы, дающие специальность и общее десятилетнее образование. Остальные продолжают обучение в IX и X классах.

Большинство окончивших 10-летнюю школу попадает в двухлетние производственные школы, готовящие квалифицированных рабочих; во многих из этих школ есть и трехлетние отделения, дающие не только рабочую квалификацию, но и полное среднее образование, эквивалентное 12-летней школе.

Лучшие выпускники профессиональных или производственных школ могут быть приняты в трехлетние «инженерные школы» — типа наших техникумов. Они готовят специалистов средней квалификации — технологов, экономистов, механиков, строителей (в отличие от «диплом-инженеров» — выпускников вузов).

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся в 1972 году на письменных экзаменах по математике за курс десятилетней школы (в массовой, вечерней и профессиональной школах — один и тот же вариант). Мы рекомендуем девятиклассникам выполнить эту работу *).

Далее приводится один из вариантов экзаменационной работы за курс двенадцатилетней школы. Ее могут выполнить десятиклассники, знакомые с элементами дифференциального и интегрального исчисления и, разумеется, ученики физико-математических школ.

Для выполнения каждой из этих работ на экзамене отводится по 4 урока (180 минут).

Письменный выпускной экзамен по математике (10 класс)

Задачи для обязательного решения

1. Сумма двух чисел равна 4. Если утроенное первое число уменьшить на удвоенное второе, получится 52. Вычислите эти числа. Сделайте проверку.

2. Фабрика-кухня электростанции готовит ежедневно 600 порций с картофельным гарниром. На каждую порцию требуется 250 *г* картофеля.

а) Сколько тонн картофеля нужно запасти на 30 дней?

б) В соответствии с решениями VIII съезда СЕПГ для лучшего обслуживания трудящихся ночной смены нужно готовить дополнительно по 150 порций в день. На сколько дней хватит теперь запасенного картофеля?

3. 17 ноября 1970 г. советская межпланетная станция «Луна-17» доставила на Луну первый самодвижущийся аппарат «Луноход-1». Из первоначального пункта высадки A Луноход прошел отрезок длиной 82 *м* до пункта B, затем повернул на угол 91,2° против часовой стрелки и прошел новый отрезок длиной 96 *м* до пункта C. Вычислите (с помощью логарифмической линейки) расстояние от пункта высадки A до конечного пункта C.

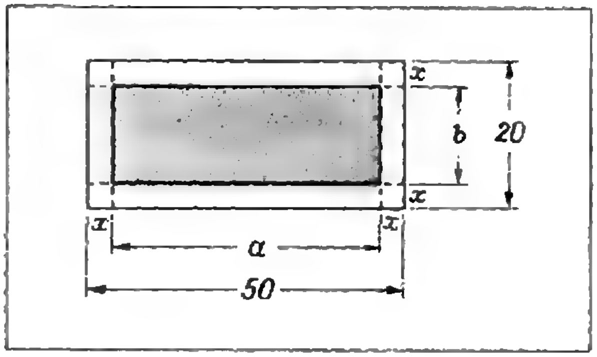


Рис. 1.

4. Две функции заданы своими уравнениями:

$$y_1 = f_1(x) = 2x + 1;$$
$$y_2 = f_2(x) = x^2 + 2x - 3.$$

а) Постройте график первой функции в прямоугольной системе координат.

б) Вычислите корень этой функции *).

в) График второй функции есть парабола. Вычислите координаты ее вершины и постройте график этой функции на том же чертеже.

г) Вычислите корни второй функции.

д) Графики данных функций пересекаются в точках P_1 и P_2. Найдите координаты точек пересечения.

6. а) Вычислите 12,5% от 528 *га*.

б) Найдите все углы x в интервале $0° \leqslant x \leqslant 360°$, для которых $\sin x = 0{,}6600$.

в) Произведение разности двух различных чисел на третье число равно x. Представьте это соотношение в форме равенства с помощью буквенных обозначений.

г) Формулу объема конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ преобразуйте, разрешив равенство относительно r.

Задачи по выбору

Решите одну из задач 7.1, 7.2, 7.3.

7.1. Докажите следующие утверждения:

а) Сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

б) Если меньшее из этих чисел — четное, то та же сумма делится и на 2.

7.2. Из листа жести прямоугольной формы размером 50×20 *см* нужно сделать открытый ящик в форме прямоугольного параллелепипеда. Для этого в четырех углах листа вырезают квадратики со стороной x (рис. 1). Закрашенный прямоугольник со сторонами a и b является основанием (дном) ящика.

а) Вычислите площадь дна при $x = 1{,}5$.

б) Найдите x, при котором площадь дна составляет 400 *см*². Вычислите для этого случая a и b.

---

*) Задачу № 5 из этой работы мы не публикуем. Для ее решения необходимы сведения из курса начертательной геометрии, которого в наших школах нет.

*) То есть значение x, при котором функция обращается в нуль.

7.3. Дано линейное неравенство

$$\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2.$$

а) Решите неравенство в области действительных чисел.

б) Укажите множества (перечислите элементы множеств):

1) множество M_1 решений неравенства в области натуральных чисел;

2) множество M_2 решений неравенства в области целых чисел при условии $-4 < x < 1$;

3) множество M всех элементов, входящих и в множество M_1, и в множество M_2.

Письменный экзамен по математике на аттестат зрелости

Задачи для обязательного решения

1. Дан четырехугольник с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(9;\ 8)$, $C(6;\ 12)$, $K(2;\ 9)$.

а) Изобразите этот четырехугольник в прямоугольной системе координат.

б) Составьте уравнения прямых AB и KC и докажите, что AB параллельно KC.

в) Вычислите угол BAK.

г) Найдите абсциссу точки P на оси Ox, для которой $\angle BPA = 90^\circ$.

2. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

а) Постройте эллипс по точкам при $a = 5$ и $b = 4$ (в каждом квадранте найдите не менее трех точек).

б) Найдите объемы V_x и V_y эллипсоидов, полученных вращением данного эллипса вокруг осей Ox и Oy; примените интегральное исчисление.

в) Докажите, что отношение этих объемов $V_x : V_y = b : a$.

3. В теории автоматического регулирования встречается функция $y = f(t) = -t^3 + 9t^2$. Исследуйте эту функцию на промежутке $0 \leq t \leq 6$.

а) Найдите в этом промежутке абсциссу t_0 точки перегиба графика функции; вычислите также ординату y_0 точки перегиба.

б) Составьте уравнение касательной к кривой в точке перегиба.

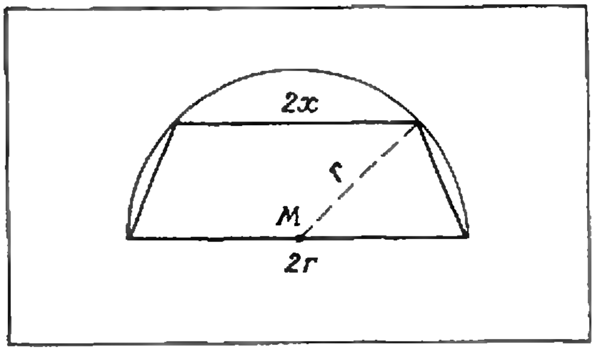


Рис. 2.

в) Вычислите координаты точки пересечения этой касательной с осью t.

г) Докажите, что все функции, задаваемые уравнениями вида $y = f(x) = Ax^3 + Bx^2$ $(A \neq 0,\ B \neq 0)$ имеют экстремальное значение при $x = 0$.

4. Из полукруглого листа железа, радиус которого 4 *дм*, требуется вырезать равнобедренную трапецию максимальной площади (рис. 2).

а) Выразите площадь трапеции как функцию переменной x.

б) Определите значение x в случае, когда площадь принимает максимальное значение (не применяя вторую производную для нахождения экстремума).

Задачи по выбору

Решите одну из задач 5.1, 5.2, 5.3.

5.1. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

а) Найдите координаты фокусов F_1 и F_2 и вершин A_1 и A_2.

б) Проверьте, что точки $P_1(5;\ 9/4)$ и $P_2(5; -9/4)$ лежат на гиперболе.

в) Постройте гиперболу (схематически).

г) Через точки A_1 и P_1 проходит прямая m, через A_2 и P_2 — прямая n. Найдите уравнения этих прямых и вычислите координаты их точки пересечения K.

д) Проверьте, что точка K лежит на эллипсе, центр которого и полуоси a и b такие же, как у данной гиперболы.

5.2. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$ *см* и $BC = 6$ *см*; ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 8 *см*.

а) Выберите систему координат и определите в ней координаты вершин пирамиды.

б) Вычислите координаты середин ребер AB, AC и SC — точек M_1, M_2 и M_3.

в) Составьте уравнение прямой M_1M_3 в выбранной системе координат; вычислите угол, который составляет эта прямая с ребром SC (с помощью логарифмической линейки).

г) Составьте уравнение плоскости, определяемой прямой M_1M_3 и точкой M_2.

5.3. Дана функция $y = e^{-0,5x}$ в промежутке $-4 \leq x \leq 4$.

а) Постройте график этой функции, определив координаты хотя бы трех точек.

б) В точке пересечения кривой с осью Oy постройте касательную и составьте ее уравнение.

в) Выберите на графике данной функции точку $P(x_1;\ y_1)$, абсцисса которой $x_1 > 0$, и через эту точку проведите вертикальную прямую. Построенная прямая, график данной функции и оси координат определят некоторую криволинейную трапецию; обозначим ее площадь через S. Докажите, что $S = 2(1 - y_1)$.

А. Я. Халамайзер

«Квант» для младших школьников

1. Доказать, что при любом натуральном n число

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3}\cdot 3^{n+2} + 36$$

делится на 900.

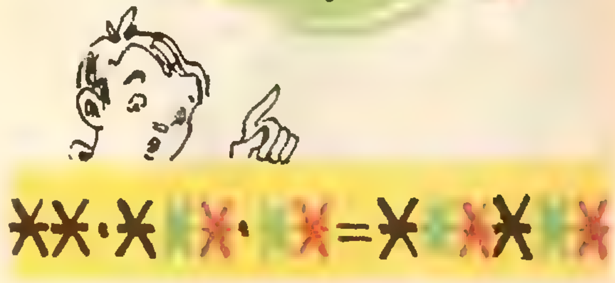
2. Имеются два больших непрозрачных сосуда. В одном из них — керосин, в другом — керосин с водой. Как можно различить эти сосуды, имея в своем распоряжении динамометр и гирьку на веревочке?

3. Все натуральные числа от 1 до 100 разбиты на две группы: четные и нечетные числа. Определить, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и на сколько.

4. Первый автомобиль едет со скоростью 60 *км/ч*. С какой скоростью должен ехать второй автомобиль, чтобы проходить каждый километр на 2 минуты быстрее? На 1 минуту быстрее? Вообще, на сколько быстрее может проходить второй автомобиль 1 *км*?

5. На рисунке в формуле цифры заменены цветными звездочками (для каждой цифры — своя звездочка). Восстановите формулу.

6. Почему ручки к дверям привинчивают у «свободного» края?



А. Д. Бендукидзе

О распределении простых чисел

Если вы прочли статью «О простых числах», напечатанную в «Кванте» № 4, то у вас, наверное, возник вопрос: как эти числа распределены? Как часто встречаются они в ряду натуральных чисел? Чему равно число простых чисел, не превосходящих данного n? Об этом и пойдет сейчас речь.

1. Как мы уже знаем, множество простых чисел, являющееся частью бесконечного множества натуральных чисел, само является бесконечным. Естественно возникает вопрос: как эта часть расположена в целом? К сожалению, никакого простого закона в распределении простых чисел не обнаружено, хотя некоторые закономерности легко доказываются.

Возьмем, например, множество простых чисел, не превосходящих 100: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.**

В начале этого ряда стоят 2 и 3. Они и в ряду натуральных чисел стоят по соседству. Легко сообразить, что это единственный случай, когда из двух соседних натуральных чисел оба простые — ведь все простые числа, кроме числа 2, нечетны.

Идем дальше. После 3 стоит 5; «расстояние» между ними равно двум. Таково же «расстояние» между членами следующей пары — 5 и 7. А вот между 7 и 11 уже три составных числа. Далее опять пара соседних нечетных чисел: 11 и 13. Наиболее «удаленными» в нашем списке являются 89 и 97 — между ними семь составных чисел. Но продолжая этот ряд простых чисел, мы обнаружим и числа, «расстояние» между которыми больше восьми. Такими будут, например, 113 и 127, 139 и 149. При этом опять встретятся числа с наименьшим возможным «расстоянием», например, 149 и 151, 179 и 181, 191 и 193. Постараемся теперь выяснить, насколько большим может быть «расстояние» между двумя соседними простыми числами.

Возьмем, например, число 100 и докажем, что можно найти 100 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого. Для этого перемножим все натуральные числа от двух до 101 включительно. Полученное число обозначим через A:

$$A = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \ldots 98\cdot 99\cdot 100\cdot 101.$$

Ясно, что оно без остатка делится на 2, 3, 4, ..., 100, 101. Рассмотрим теперь следующие 100 последовательных натуральных чисел:

$$A+2,\ A+3,\ A+4,\ \ldots,\ A+99,\ A+100,\ A+101.$$

Все эти числа составные. В самом деле, первое из них делится на 2 (так как на 2 делятся оба слагаемых), второе — на 3 (оба слагаемых делятся на 3), третье — на 4 и так далее. Последнее $A+101$ делится на 101.

Итак, мы нашли 100 последовательных чисел и все они составные. Аналогично можно найти 1000, 10 000 и более следующих друг за другом составных чисел. Таким образом, «расстояние» между двумя соседними простыми числами может быть сколь угодно большим.

2. Если не принимать во внимание единственное исключение — числа 2 и 3, то наименьшее «расстояние» между соседними простыми числами равно двум. В первой сотне 8 таких пар:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73)

Такие пары простых чисел называются близнецами. Но неизвестно даже, конечно или бесконечно множество близнецов. Наибольшей из известных пар-близнецов является пара (1000000009649, 1000000009651).

3. Коснемся еще одного вопроса, связанного с простыми числами. Возьмем отрезок ряда натуральных чисел от 1 до некоторого n включительно. На этом отрезке имеется определенное количество простых чисел. Число их принято обозначать через $\pi(n)$ *). Чему равно $\pi(n)$ для отдельных значений n?

Для малых n это легко подсчитать. Например, $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 3$, $\pi(7) = 4$, $\pi(8) = 4$, $\pi(9) = 4$, $\pi(10) = 4$.

Сразу замечается нерегулярное изменение $\pi(n)$. Вообще, никакой простой формулы для $\pi(n)$ написать нельзя.

Тем не менее, увеличивая n, можно заменить, что «средняя плотность» простых чисел, то есть отношение $\pi(n):n$ становится все меньше и меньше. Это хорошо видно из следующей таблицы:

n	$\pi(n)$	$\pi(n):n$
10	4	0,4
100	25	0,4
1 000	168	0,17
10 000	1 229	0,12
100 000	9 592	0,096
1 000 000	78 498	0,078
10 000 000	664 579	0,066
100 000 000	5 761 455	0.057
1 000 000 000	50 847 478	0,051

Доказано, что с возрастанием n отношение $\pi(n):n$ приближается к нулю. Впервые этот факт доказал Леонард Эйлер — величайший математик XVIII века. В дальнейшем великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев уточнил результат Эйлера, доказав более общую теорему (см. «Квант» № 5 за 1971 год, стр. 1—3), но об этом мы уже рассказывать не будем.

Внимание — град!

9 июня 1926 года необычайно крупный град выпал в Одессе. Отдельные градины достигали 300 *г*, а ледяной покров, который образовался на земле, доходил до 30 *см*.

В июле 1928 года выпал град в городе Поттере (США); градины достигали 10 *см* в диаметре, а масса отдельных градин доходила до 600 *г*. Градины были ровные, шарообразные и состояли из концентрических слоев льда, намерзших на центральное ядро. Они падали довольно далеко одна от другой и целиком зарывались в землю.

Механизм образования града понять несложно.

Если учесть, что температура воздуха в тропосфере понижается в среднем на 5—6° С при подъеме на каждый километр, то легко подсчитать, что на высоте 6—8 *км* над Землей, то есть высоте, характерной для верхней границы грозового облака, температура существенно ниже нуля даже в июльский полдень. Капельки переохлажденной воды и отдельные кристаллики льда, сталкиваясь между собой, образуют ядра будущих градин. Проходя через многокилометровую толщу облака (6—7 *км*), ядра обрастают слоями прозрачного льда. Толщина нарастающей оболочки зависит от процесса возгонки водяного пара с поверхности градин и в еще большей степени от интенсивности восходящих потоков воздуха внутри облака. Эти потоки, во-первых, «подбрасывают» к летящей вниз градине новые переохлажденные капли воды, которые тут же намерзают на градину. Во-вторых, если потоки достаточно мощные, они могут на время увлечь градину вверх, тем самым существенно удлиняя путь ледяного шара в переохлажденной жидкости. В этих случаях размеры градин, падающих на землю, могут стать катастрофически большими.

Л. В.

---

*) π — греческая буква «пи», n — латинская буква «эн», $\pi(n)$ — читается так: «пи от эн».

К статье «Баллистическая задача в космосе»

1. Пусть O — фокус параболы, A — вершина ($OA = h$), а $OB = 2\,OA$ — перпендикуляр, опущенный на директрису. Для начальной точки M_0 имеем $r_0 = OM_0 = M_0N$, где M_0N — расстояние от точки M_0 до директрисы (рис. 1). Из оптического свойства параболы следует, что касательная к параболе в точке M_0 является биссектрисой угла $\angle OM_0M$. Из рисунка видно, что

$$r_0 = M_0N = OB + OM_0\cos 2\alpha_0 = 2h + r_0\cos 2\alpha_0.$$

Отсюда

$$h = \frac{r_0}{2}(1 - \cos 2\alpha_0).$$

2. Материальная точка уходит по гиперболе на бесконечность. При этом ее предельная скорость имеет (согласно формуле (1)) величину

$$v_\infty = \lim_{r\to\infty} v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

и направлена по асимптоте.

Так как тангенс угла наклона асимптоты к оси гиперболы равен $\frac{b}{a}$ (рис. 2), то, как легко показать, расстояние от фокуса до асимптоты равно b. Поэтому закон сохранения момента импульса дает

$$mv_\infty b = mv_0r_0\sin\alpha_0.$$

Отсюда, подставляя значение v_∞, получаем

$$b = \frac{v_0r_0\sin\alpha_0}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}.$$

С другой стороны, расстояние h от фокуса до вершины гиперболы будет положительным корнем уравнения (6), которое можно будет теперь переписать в виде

$$h^2 + \frac{\gamma m_0}{\frac{v_0^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0}}\,h - b^2 = 0. \qquad (*)$$

Так как $(h + a)^2 = a^2 + b^2$, то

$$h^2 + 2ah - b^2 = 0.$$

Сопоставляя это уравнение с (*), получаем

$$a = \frac{\gamma m_0 r_0}{r_0v_0^2 - 2\gamma m_0}.$$

Заметим, что отрицательный корень уравнения (*) дает взятое со знаком минус расстояние от фокуса F до вершины второй ветви гиперболы (по которой движение не происходит).

3. Решение этой задачи аналогично решению задачи 2.

Указания.

1. Величина потенциальной энергии в кулоновском поле отталкивания равна

$$W_п = \frac{Qq}{r}.$$

2. Движение точки в этом случае происходит по второй, так называемой «мнимой» ветви соответствующей гиперболы.

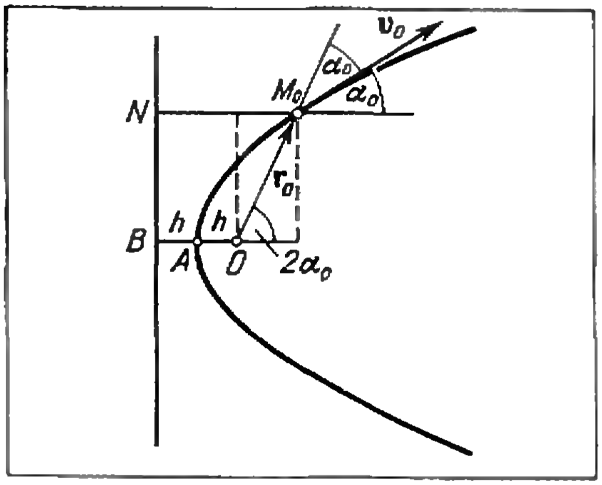


Рис. 1.

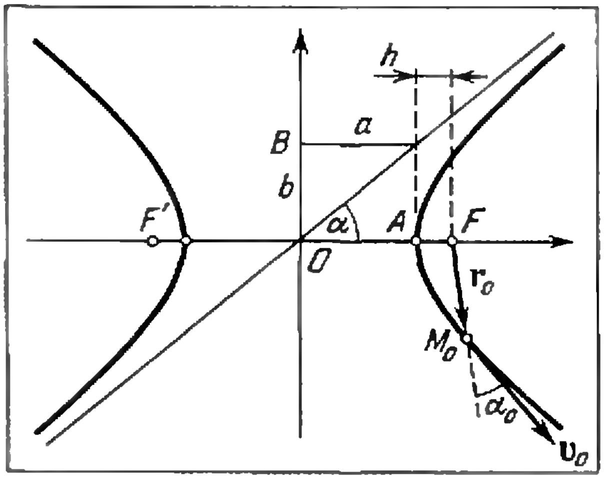


Рис. 2.

К статье «Опыты с инфракрасным излучением»

1. Нить лампы накаливания, включенной в сеть переменного тока частотой 50 *гц*, раскаляется всякий раз, когда идущий через нее ток достигает максимального (по абсолютной величине) значения, то есть 100 раз в секунду.

2. Приемник реагирует на поток инфракрасного излучения, но сила звука в громкоговорителе пропорциональна изменению этого потока. За 0,005 *с* нить лампы не успевает сильно охладиться, поэтому изменение потока составляет лишь малую его часть. Чтобы увеличить изменение потока, достаточно прерывать падающий на фототранзистор световой пучок вращающимся вентилятором. В этом нетрудно убедиться, проведя перед фототранзистором ладонью с «растопыренными» пальцами: из динамика будет слышен звук значительно более сильный, чем при простом освещении фототранзистора лампой накаливания.

5. При вращении одного из поляроидов освещенность фототранзистора падает до нуля, в то время как громкость звука, идущего из динамика, остается неизменной. Отсюда следует, что поляроиды поляризуют только видимую область спектра, оставляя инфракрасные лучи неполяризованными. (Это свойство поляроидов; вообще инфракрасные лучи тоже поляризуются.) Фототранзистор реагирует только на инфракрасные лучи, так как в противном случае при изменении освещенности фототранзистора громкость звука также изменялась бы.

6. Так как фототранзистор реагирует только на инфракрасные лучи, а для видимого света закон отражения доказан, то для проверки этого закона в инфракрасной области достаточно внести датчик в пучок света, отраженный зеркалом.

К статье «Периодические функции»

1. π.

2. Основной период функции $\cos 3\pi x$ равен $\frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$. Основной период функции $\sin 2\pi x$ равен $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Для отрезков длины $^2/_3$ и 1 наименьшим общим кратным будет отрезок длины 2.

Докажем, что 2 — основной период. Рассмотрим с этой целью корни уравнения $\cos 3\pi x = \sin 2\pi x$ на отрезке $[0, 2]$. Этих корней будет шесть: 0,1; 0,5; 0,9; 1,3; 1,5; 1,7. Функция $\cos 3\pi x - \sin 2\pi x$ при $x = 0$ равна 1 и монотонно убывает, по крайней мере на отрезке $[0,\ 0{,}1]$. Следовательно, у нее не может быть периодов меньших, чем 0,1, то есть по теореме 3 у нее существует основной период.

Предположим, что 2 не является основным периодом. В таком случае им будет некоторое число большее 0,1, которому соответствует отрезок, укладывающийся в 2 целое число раз (теорема 2). Найденные значения корней подсказывают лишь одно такое число — 0,4. Однако оно не является периодом, так как, например, при $x = 1{,}5 + 0{,}4 = 1{,}9$ данная функция не обращается в нуль. Следовательно, 2 — основной период.

3. Функцию можно записать в виде $\frac{1}{4}(\cos 6x - \cos 10x - 1 + \cos 4x)$. Периоды стоящих в скобках тригонометрических функций равны соответственно $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{\pi}{2}$. Наименьшее общее кратное соответствующих отрезков равно π. Непосредственной проверкой убеждаемся, что π — период данной функции. Остается доказать, что это основной период. Для доказательства достаточно изучить корни функции на отрезке $[0, \pi]$:

$$0,\ \frac{\pi}{10},\ \frac{3\pi}{10},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{7\pi}{10},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{9\pi}{10},\ \pi.$$

Если π не является основным периодом, то основной период должен укладываться в π обязательно целое число раз. Поэтому можно рассматривать в качестве возможных основных периодов лишь числа $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$. Так как ни одно из чисел $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}$ не является корнем, то основным периодом будет число π.

4. 2π.

5. Функция не является периодической, так как ее область определения не содержит ни одной точки.

6. Функция не является периодической, так как она не определена при $|x| > 1$.

7. 2π.

8. Функция не является периодической. Если $T > 0$ — ее период, то $f(T) = f(T - T) = f(0)$. Левая часть равенства существует при всех $T > 0$, в то время как правая не существует.

9. Функция не является периодической, так как из условия $(x + T)^2 \equiv x^2$ при $x = 0$ следует $T = 0$.

10. Пусть a — период функции. Тогда $\cos(x + a)^2 = \cos x^2$ при всех x, в том числе при $x = 0$, откуда

$$\cos a^2 = 1, \quad a^2 = 2\pi n.$$

Выберем теперь такое значение для x, чтобы обеспечить несоизмеримость x с a. Например, $x = a\sqrt{2}$. Тогда

$$\cos[a^2(1+\sqrt{2})^2] = \cos 2a^2,$$

откуда либо

$$a^2(1+\sqrt{2})^2 + 2a^2 = 2\pi k,$$

либо

$$a^2(1+\sqrt{2})^2 - 2a^2 = 2\pi k.$$

Воспользовавшись тем, что $a^2 = 2\pi n$ и подставив его в эти два равенства, мы получим либо $5 + 2\sqrt{2} = \frac{k}{n}$, либо $1+2\sqrt{2} = \frac{k}{n}$ ($n \neq 0$, так как a, по предположению, период). И в том и в другом случае мы приходим к выводу, что $\sqrt{2}$ — число рациональное. Полученное противоречие доказывает непериодичность функции $\cos x^2$.

11. Указание. Предположите, что данная функция является периодической с периодом T и запишите условие периодичности при $x = 0$, $x = -T$. Исследуйте полученную систему уравнений.

К статье «Задачи на максимум и минимум»

1. $h = b$.

Указание. Воспользоваться ограниченностью тригонометрической функции $y = \sin x$.

2. $h_{\text{опт}} = \frac{H}{2}$, $S_{\max} = H$.

Указание. При исследовании воспользоваться теоремой о среднем.

Замечание. Мы получили, что дальность полета определяется величинами h и H, то есть зависит только от конструкции трамплина. Если бы это было так на самом деле, то не было бы смысла проводить соревнования по прыжкам с трамплина, так как дальность полета всех лыжников была бы одинаковой. В действительности, чем выше мастерство лыжника, тем меньшую долю энергии он потеряет из-за трения и сопротивления воздуха. Поэтому мастерство лыжника сильно влияет на дальность полета.

К статье «Новосибирский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. Ответ: при $a\cdot b\cdot c > 0$

$$x = \pm\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc}, \quad y = \pm\frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc},$$

$$z = \pm\frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}.$$

Решение. Исходная система легко приводится к виду

$$\begin{cases} (x-y+z)\cdot(x+y-z) = a, \\ (y-z+x)\cdot(y+z-x) = b, \\ (z-x+y)\cdot(z+x-y) = c. \end{cases}$$

Полагая $x+y-z = u$, $x-y+z = v$, $-x+y+z = w$, получим для u, v, w систему

$$u\cdot v = a, \quad uw = b, \quad vw = c,$$

откуда $(u\cdot v\cdot w)^2 = a\cdot b\cdot c$, $u = \frac{u\cdot v\cdot w}{v\cdot w} = \pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$; $v = \pm\frac{\sqrt{abc}}{b}$; $w = \pm\frac{\sqrt{abc}}{a}$ (лишь при $a\cdot b\cdot c > 0$). Здесь для u, v, w берутся выражения либо все со знаком «+», либо все со знаком «—». Возвращаясь к старым переменным

$$\left(x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u+w}{2}, \quad z = \frac{v+2w}{2}\right),$$

находим ответ.

2. Ответ:

$$\frac{2R\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos(\alpha-\beta)}.$$

Решение. Для определенности будем считать, что $\alpha \geqslant \beta$. Пусть точки M, K, N — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек C, O_1, O на сторону AB (рис. 1). Тогда CM — высота ΔABC. K — точка касания окружности искомого радиуса ($O_1K = O_1C = x$) со стороной AB; N — середина стороны AB. $\angle CON$ есть центральный угол описанной около $\Delta\, ABC$ окружности, опирающийся на дугу, составленную из дуги, стягиваемой хордой AC, и половины дуги, стягиваемой хордой AB. Поэтому $\angle CON = 2\beta + (\pi - \alpha - \beta) = \pi - \alpha + \beta$. Тогда $\angle OCM = \pi - \angle CON = \alpha - \beta$. Проектируя ломаную CO_1K на

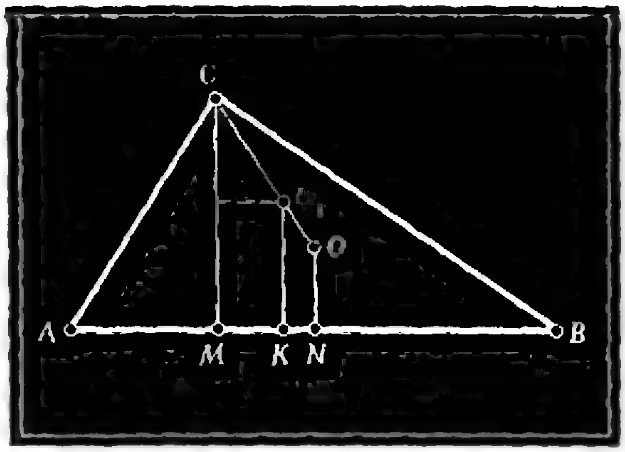


Рис. 1.

CM, получим

$$CM = CO_1\cdot\cos\angle OCM + O_1K = x[1+\cos(\alpha-\beta)].$$

Но $CM = AC\sin\alpha = 2R\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$. Отсюда

$$x=\frac{2R\sin\alpha\cdot\sin\beta}{1+\cos(\alpha-\beta)}.$$

3. Ответ: $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$, $x=2k\pi+\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}$, $k=0, \pm1, \pm2, \dots$

Решение. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим уравнение

$$4\cos^2 x = 2+\sin 3x. \qquad (*)$$

При этом очевидно, что корнями исходного уравнения являются корни уравнения (*), удовлетворяющие условию $\cos x\geqslant 0$. Теперь проведем эквивалентные преобразования:

$$4\cos^2 x = 2+3\sin x-4\sin^3 x,$$

$$\sin^3 x-\sin^2 x-\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{2}=0,$$

$$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin x-1\right)=0.$$

Отсюда: а) $\sin x=\frac{1}{2}$; б) $\sin^2 x-\frac{1}{2}\times\sin x-1=0$.

а) С учетом условия $\cos x\geqslant 0$ получаем $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \dots$

б) Имеем: $\sin x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$. Но $\frac{1+\sqrt{17}}{4}>1$, а $1>\frac{\sqrt{17}-1}{4}>0$, поэтому (с учетом условия $\cos x\geqslant 0$) получаем

$$x=\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$$

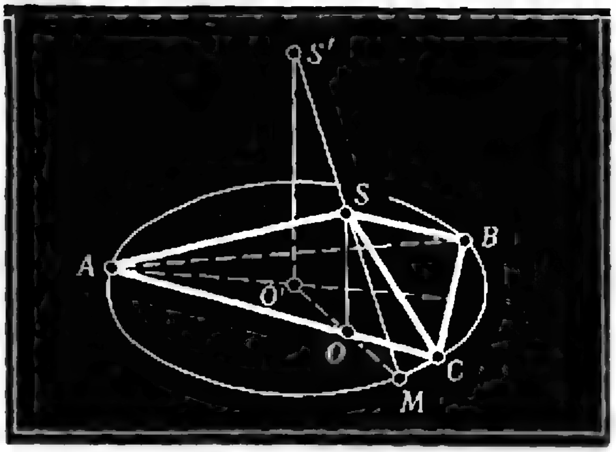


Рис. 2.

4. Ответ: $\frac{a}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{4-\sqrt{3}})$.

Решение. Так как пл. $SAC\perp$ пл. ABC, то высота SO пирамиды $SABC$ является высотой ΔSAC, опущенной на сторону AC (рис. 2). Тогда $SO=\frac{1}{2}AS=\frac{a}{2}$,

$$AO=AS\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=a\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(\text{и } \angle SAC=30°!).$$

Пусть O' — центр окружности основания конуса, S' — его вершина, а $S'M$ — образующая конуса, проходящая через вершину S пирамиды. Тогда, очевидно, точка O лежит на радиусе $O'M$ основания конуса и $\Delta S'O'M\backsim\Delta SOM$. Из подобия этих треугольников находим, что $S'O'=SO\frac{O'M}{OM}$. По теореме синусов для ΔABC имеем

$$O'A=O'M=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{a}{2\cdot\sin\frac{180°-30°}{2}}=\frac{a}{2\cos 15°}.$$

По теореме косинусов для $\Delta AO'O$ имеем

$$O'O=\sqrt{AO^2+(AO')^2-2AO\cdot AO'\cos\angle OAO'}=$$

$$=\frac{a}{2\cos 15°}\times\sqrt{1+(3-2\sqrt{3})\frac{1+\cos 30°}{2}}=\frac{a\sqrt{4-\sqrt{3}}}{4\cos 15°}.$$

Тогда $OM=O'M-OO'=\frac{a}{4\cos 15°}\times(2-\sqrt{4-\sqrt{3}})$.

Теперь остается только вычислить высоту $S'O'$. Имеем

$$S'O'=\frac{a}{2}\cdot\frac{\frac{a}{2\cos 15°}}{\frac{a}{4\cos 15°}(2-\sqrt{4-\sqrt{3}})}=$$

$$=\frac{a}{2-\sqrt{4-\sqrt{3}}}=\frac{a}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{4-\sqrt{3}}).$$

Вариант 2

1.

x	1	$2\sqrt[3]{2}$	0
y	0	$-\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2}$
z	1	0	$2\sqrt[3]{2}$

2. $2R^2(\pi-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma)$.

3. $x=(2k+1)\pi\pm\arccos\frac{4}{5}$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. $\frac{113}{12}a^3$.

Вариант 3

1. $x=7$, $y=5$.

2. $PO=\frac{\sqrt{1-4l(1-l)\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$.

3. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$; k — целое; $k\neq 3l$; $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Физика

1. В пространстве между катушками с переменным током возникает переменный магнитный поток. В металлическом листе наводятся вихревые токи так, чтобы создаваемое ими магнитное поле компенсировало изменение потока через металлический лист. Катушки отталкиваются от медного листа, а следовательно, и друг от друга.

Железный лист — ферромагнетик, при его намагничивании возникает притяжение между листом и катушками, которое оказывается сильнее отталкивания за счет вихревых токов.

2. Частоты колебаний ω_1 и ω_2 отличаются на небольшую величину. При сложении возникают биения; амплитуда биений периодически увеличивается и уменьшается. Это соответствует усилению и ослаблению звука.

3. Три белых сектора постоянно видны в том случае, если за время между двумя вспышками полоса, совершив любое число оборотов, сдвинется на угол $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}$. Полный угол поворота полосы:

$$\varphi_1=2\pi k+\frac{2\pi}{3} \quad \text{или} \quad \varphi_2=2\pi k+\frac{4\pi}{3}$$

(k — любое целое число). Заметим, что

$$\varphi_1=2\pi\frac{3k+1}{3}, \quad \varphi_2=2\pi\frac{3k+2}{3},$$

то есть $\varphi=\frac{2\pi}{3}n$, где n — любое целое число, не делящееся на 3.

Время между вспышками $t=\frac{2\pi}{\nu}$, следовательно, скорость вращения диска

$$\omega=\frac{\varphi}{t}=\frac{\nu}{3}n.$$

4. $\omega^2=\frac{g\,\mathrm{tg}\,\beta}{l\,|\sin\alpha+\sin\beta|}$.

Заданные углы α и β могут быть реализованы только при вполне определенном соотношении масс. Интересно исследовать, какие углы α и β могут быть реализованы. Например, может ли быть $\alpha=10°$ и $\beta=80°$?

5. $A=\pi r^2\rho g l\left(h-r+\frac{lr^2}{2R^2}\right)$.

6. Маятник начинает колебаться относительно точки подвеса с периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ и начальной скоростью v. Начальная скорость относительно Земли равна нулю. Остановить подвес так, чтобы маятник мгновенно остановился, можно в тот момент, когда скорость маятника относительно Земли равна 0 (маятник при этом проходит положение равновесия). Такая ситуация будет иметь место через промежуток времени $nT=\frac{a}{v}$, где n — натуральное число. Отсюда

$$v=\frac{a}{nT}=\frac{a}{2\pi n}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

7. В системе координат, движущейся вместе с пучком (со скоростью v), осколки равной массы разлетаются в произвольных направлениях с равными по величине и противоположно направленными скоростями v'. Максимальную относительно неподвижного наблюдателя скорость имеют осколки, отлетающие в направлении движения пучка. Эта скорость $u=v+v'$.

Скорость частиц, отлетающих в перпендикулярном направлении (рис. 3), находится из условия

$$u_1^2+v^2=v'^2.$$

Отсюда

$$u_1=\sqrt{v'^2-v^2}=\sqrt{u(u-2v)}.$$

Если $u\leqslant 2v$, то таких осколков нет.

8. Рассмотрим изображение в фотоаппарате маленького участка жука; линейный

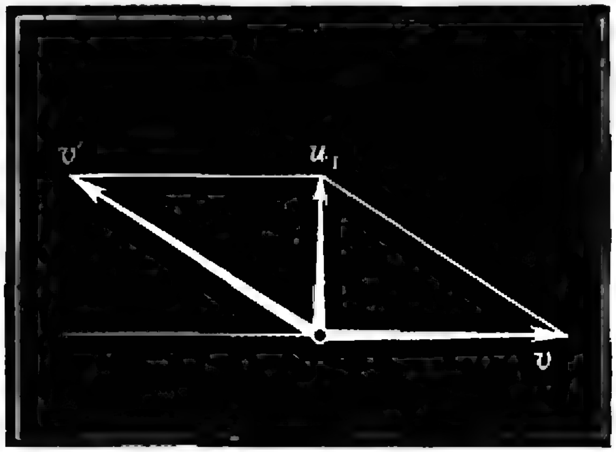


Рис. 3.

размер этого участка L_0. Освещенность изображения зависит от потока, падающего на диафрагму, и от площади изображения:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Отношение потоков, падающих на объектив в первом и во втором случае, равно

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{d_1^2 l_2^2}{d_2^2 l_1^2} = \frac{25}{9}\,\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Воспользовавшись формулой линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$ (a — расстояние от жука до объектива, b — расстояние от объектива до изображения), можно найти отношение площадей изображений

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{L_1^2}{L_2^2} = \frac{L_1^2/L_0^2}{L_2^2/L_0^2} = \frac{b_1^2/a_1^2}{b_2^2/a_2^2} =$$

$$= \frac{F^2 l_1^2 (l_2-F)^2 l_2^2}{F^2 l_2^2 (l_1-F)^2 l_1^2} = \frac{(l_2-F)^2}{(l_1-F)^2} = 4.$$

Поскольку освещенности в первом и во втором случае одинаковы,

$$\frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{\Phi_2}{S_2}.$$

Отсюда $\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{S_1}{S_2}$, то есть $\frac{25}{9}\,\frac{d_1^2}{d_2^2} = 4$

и $\frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{5}$.

9. После размыкания ключа по сопротивлению R течет ток $i = \frac{u}{R}$, где u — разность потенциалов на конденсаторе, которая равна $\frac{q}{C}$. Так как нас интересуют очень малые изменения заряда, мы не будем учитывать, что и ток, и разность потенциалов зависят от времени. За время Δt заряд конденсатора уменьшится на величину $i\Delta t$. Тогда

$$\Delta q = i\Delta t = \frac{u\Delta t}{R} = \frac{q\Delta t}{RC}.$$

Отсюда

$$\Delta t = \frac{\Delta q}{q}\,RC = 10^{-3}\,RC.$$

10. При ударе о брусок струя меняет направление движения, а следовательно, и импульс: $\Delta(mv) = F_1\Delta t$.

Изменение количества движения жидкости $\Delta(mv)$ за время Δt связано с тем, что масса воды $\rho S v\Delta t$ на высоте h изменяет вертикальную скорость от v_1 до 0, то есть

$$\Delta(mv) = \rho S v v_1\,\Delta t.$$

Из закона сохранения энергии

$\frac{\mu v_1^2}{2} + \mu g h = \frac{\mu v^2}{2}$ (μ — масса небольшой порции воды) найдем $v_1 = \sqrt{-2gh + v^2}$.

Тогда сила $F_1 = \rho S v v_1 = \rho S v\sqrt{v^2-2gh}$.

Такая же по величине сила действует со стороны каждой струи на брусок. Так как всего струй N, то общая сила

$$F = N\rho S v\sqrt{v^2-2gh}.$$

Из условия равновесия бруска $P = F$:

$$P = N\rho S v\sqrt{v^2-2gh}.$$

Окончательно получим

$$h = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{P}{\rho S N v^2}\right)^2\right].$$

11. Пусть конденсатор уже зарядился, и разность потенциалов на нем равна U. Тогда при очередном замыкании ключа в положение *1* в начальный момент через сопротивление R_1 пойдет ток $I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}$. За время включения заряд конденсатора изменится на величину $I_1\tau$, где τ — время включения. Когда ключ замкнут в положение *2*, пойдет ток $I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}$. Так как U — установившееся напряжение, должно выполняться соотношение $I_1\tau = -I_2\tau$, то есть после двух переключений заряд на конденсаторе остается неизменным:

$$\frac{E_1 - U}{R_1} = -\frac{E_2 - U}{R_2}.$$

Отсюда

$$U = \frac{E_2R_1 + E_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Заряд на конденсаторе

$$q = CU = C\,\frac{E_2R_1 + E_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

12. Из условия равновесия нижнего шарика следует, что

$$R_x = T\cos\alpha.$$

Верхний шарик движется по окружности радиуса l, где l — длина гантели (рис. 4), поэтому

$$P\sin\alpha - T = \frac{mv^2}{l}.$$

Отсюда

$$T = P\sin\alpha - \frac{mv^2}{l}.$$

По закону сохранения энергии

$$Pl = \frac{mv^2}{2} + Pl\sin\alpha,$$

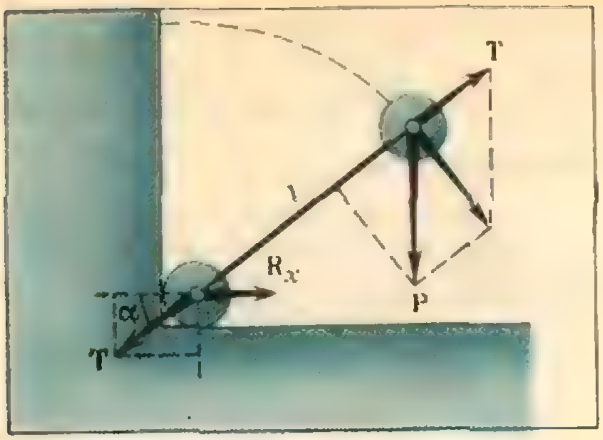


Рис. 4.

то есть

$$\frac{mv^2}{l} = 2P(1 - \sin\alpha).$$

Теперь можно записать

$$T = P\sin\alpha - 2P(1 - \sin\alpha) = P(3\sin\alpha - 2).$$

Сила, действующая на стенку,

$$R_x = P\cos\alpha\,(3\sin\alpha - 2).$$

13. При уменьшении магнитного поля изменяется магнитный поток через кольцо. Возникающее электрическое поле раскручивает кольцо.

Магнитный поток через кольцо равен

$$\Phi = \pi a^2 2B + \pi(R^2 - a^2)B = \pi B(a^2 + R^2).$$

По закону электромагнитной индукции

$$E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi(a^2 + R^2)\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Пусть магнитное поле равномерно уменьшается до 0 за время t; тогда

$$E_{\text{инд}} = \frac{\pi(a^2 + R^2)B}{t}.$$

Э. д. с. индукции равна работе по перемещению единичного заряда вдоль всего кольца в возникающем электрическом поле с напряженностью E,

$$E_{\text{инд}} = 2\pi RE.$$

Отсюда

$$E = \frac{(a^2 + R^2)B}{2Rt}.$$

На каждый элемент кольца длины $\Delta l \ll R$ $\left(\text{заряд такого элемента } \Delta q = \frac{\Delta l}{2\pi R}q, \text{ масса } \Delta m = \frac{\Delta l}{2\pi R}m\right)$ действует сила ΔqE, которая создает ускорение $a = \frac{\Delta qE}{\Delta m}$ и за время t увеличивает скорость от 0 до

$$v = at = \frac{\Delta qE}{\Delta m}t = \frac{q}{m}\frac{(a^2 + R^2)B}{2R}.$$

К задачам «Квант» для младших школьников.

(см. «Квант» № 4, 1973.)

1. $a = 5$, $d = 357$.

2. Если сделать в крышке банки только одно отверстие и опрокинуть банку, сок будет выливаться до тех пор, пока давление жидкости на уровне отверстия не станет равным атмосферному. Когда в крышке два отверстия, то воздух, попадающий в банку через «свободное» отверстие, оказывает дополнительное давление на жидкость и «выталкивает» ее.

3. 4, 36, 68.

4. Легче привести в движение стопку книг — при этом надо преодолеть силу трения, действующую на нижнюю обложку книги, соприкасающейся со столом. Во втором случае надо преодолеть еще и силу трения, действующую на верхнюю обложку книги.

5. 38,5 × 16 = 616.

6. При одинаковых сопротивлениях подводящих проводов и нити лампы величина поверхности у проводов больше, чем у нити, и провода быстрее отдают тепло.

К «Задаче» *(см. «Квант» № 4, 1973, стр. 45)*

Пусть в урнах лежат соответственно a, b, c и d шаров. Тогда проигрышными для начинающего являются те и только те положения, для которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в записи чисел a, b, c и d в двоичной системе счисления, для всех разрядов кратны трем.

Рассмотренную игру можно обобщить на случай, когда урн n, а шары можно брать не более, чем из k урн ($k \leqslant n$). В этом случае проигрышными положениями будут те, в которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в двоичной записи количеств шаров в данных урнах, делятся на $k + 1$. При $k = 1$ получим игру «ним» (см. статью И. М. Яглома «Две игры со спичками», «Квант» № 2, 1971).

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 5/II 1973 г.
Подписано в печать 19/III 1973 г. Зак. 149
Бумага 70×100 1/16 Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,20
Уч.-изд. л. 6,29 Тираж 382 315 экз. Т-00798
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

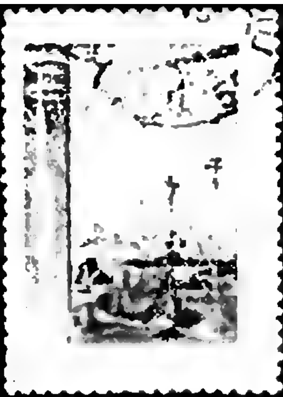
МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕТЕОСЛУЖБЕ

В январе 1972 года исполнилось 100 лет с того дня, когда Главная физическая обсерватория в Петербурге выпустила первый метеорологический бюллетень. В то время метеорологи располагали весьма примитивной техникой и очень малым количеством метеостанций (в России их было около 10).

Сейчас изучение атмосферы производится разветвленной сетью метеостанций, построенных как в нашей стране, так и за границей. Работники службы погоды имеют в своем распоряжении самую совершенную технику. При этом используются шары-пилоты, радиозонды, самолеты, ракеты и даже искусственные спутники Земли.

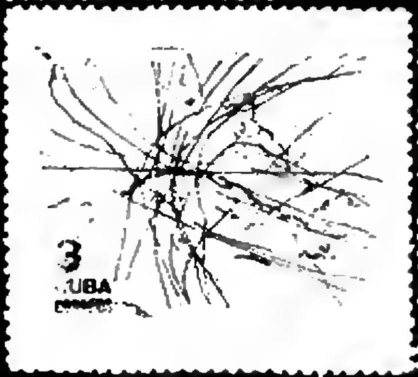
Метеорологии посвящено много марок и блоков, выпущенных в различных странах мира. На фото приведены некоторые из них, связанные с юбилейными датами.

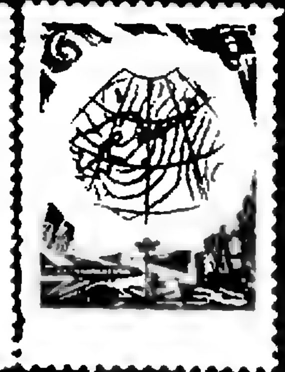
На марках, посвященных 40- и 50-летию гидрометеослужбы СССР, выпущенных в 1961 и 1971 гг., изображены современные средства метеорологических исследований и участки карты погоды.

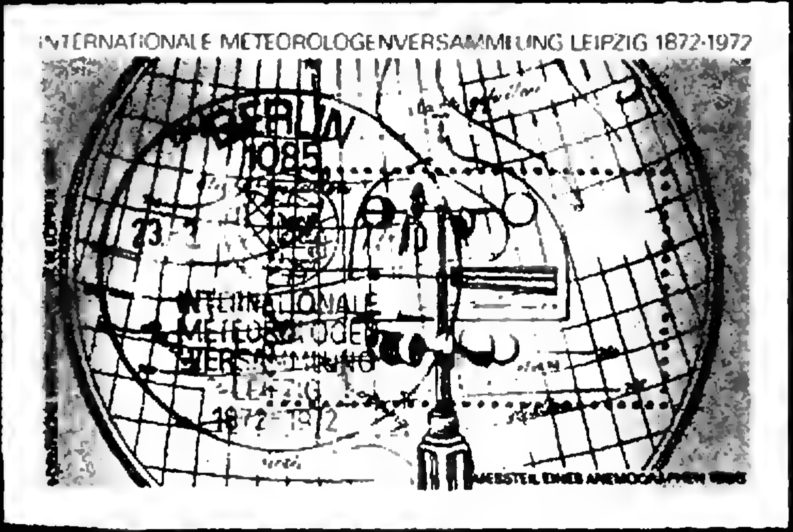


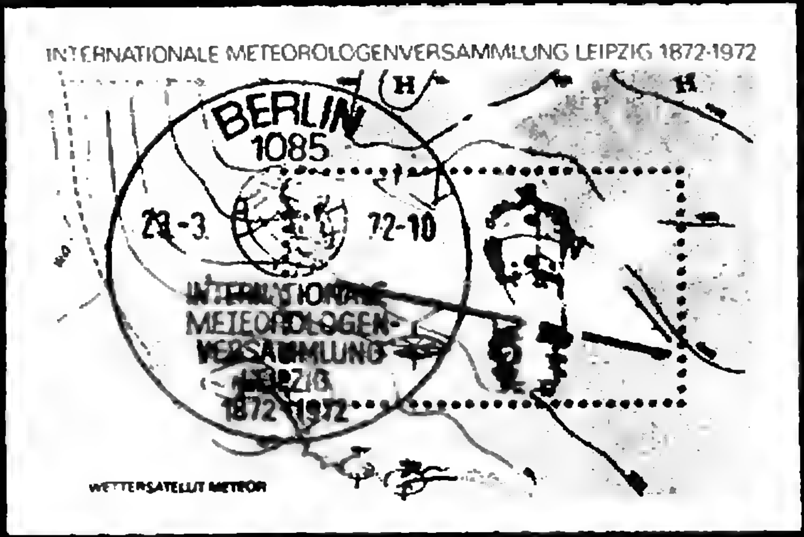
На фото приведена также кубинская марка из серии 1971 года, посвященная Всемирному дню метеорологии (карта Кубы со схемой движения сильнейших ураганов) и два красочных блока, выпущенных в Германской Демократической Республике 23 марта 1972 года в ознаменование 100-летия Лейпцигской встречи метеорологов. На одном блоке показана первая немецкая метеорологическая карта и анемограф (прибор для определения направления и скорости ветра). На другом блоке изображена современная метеорологическая карта и советский метеорологический спутник «Метеор».

А. В. Лятыкис






INTERNATIONALE METEOROLOGENVERSAMMLUNG LEIPZIG 1872-1972
BERLIN
1085
23-3.
INTERNATIONALE
METEOROLOGEN
VERSAMMLUNG
LEIPZIG
1872-1972


INTERNATIONALE METEOROLOGENVERSAMMLUNG LEIPZIG 1872-1972
H
H
BERLIN
1085
23-3.
72-10
INTERNATIONALE
METEOROLOGEN-
VERSAMMLUNG
LEIPZIG
1872-1972
WETTERSATELLIT METEOR

НОМЕР
6

Основан в 1970 году

Квант

1973
6

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

В НОМЕРЕ

2 Лев Андреевич Арцимович
4 *Б. С. Эппель.* Задачи о телах вращения и теоремы Гюльдена
9 *В. Г. Болтянский.* Доказательства теорем Гюльдена
14 *М. И. Каганов, Г. Я. Любарский.* Электрон движется с трением
20 *М. Л. Гервер.* О наполнении и закупоривании бутылок
28 *Б. И. Силкин.* С корнем квадратным — сквозь историю
Математический кружок
30 *А. А. Егоров.* Площадь под гиперболой, логарифм и экспонента
Лаборатория «Кванта»
40 *А. А. Варламов, Д. В. Казаковцев.* Выращивание кристаллов
Задачник «Кванта»
42 Задачи М206-М210; Ф218—Ф222
44 Решения задач М165—М169; Ф183—Ф187
Практикум абитуриента
54 *В. В. Пекарскас.* Геометрия комплексных чисел
58 Технические вузы с повышенной математической подготовкой
58 *В. К. Саульев.* О новой квалификации «инженер-математик»
59 Р. Н. Молодежникова, И. И. Семенов. Московский авиационный институт
60 *А. В. Ефимов.* Московский институт электронной техники
61 *О. П. Чопенко.* Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
Рецензии, библиография
62 *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский.* «Математические досуги» Мартина Гарднера
66 *М. Л. Смолянский.* Новые книги
68 *Ф. Кедров.* Брошюры по физике
Информация
70 *Л. В. Кованцова.* Киевская заочная физико-математическая школа
72 *М. Д. Карасев, Г. С. Тарасюк.* VI Международная олимпиада по физике
«Квант» для младших школьников
74 Задачи
75 *А. С. Варпаховский.* Пальцы — счетная машина
Уголок коллекционера
В. А. Рудов. Марки, посвященные первой женщине-космонавту *(3-я стр. обложки)*
78 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(стр. 13, 39, 57)*

© Издательство «Наука» 1973 г.

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин**
Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров**

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
А. И. Климанов
(*главный художник*),
С. М. Козел,
В. А. Лешковцев
(*зам. главного редактора*),
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
М. Д. Миллионщиков,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
М. Л. Смолянский
(*зам. главного редактора*),
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
Т. М. Макарова
(*художественный редактор*)
И. Б. Мамулова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
Л. В. Чернова
(*зав. редакцией*).
Художник В. В. Андреев

1 марта 1973 года скончался член редакционной коллегии журнала «Квант», выдающийся физик, крупный организатор науки и общественный деятель, член президиума Академии наук СССР, академик-секретарь Отделения общей физики и астрономии АН СССР, руководитель научного отдела Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, председатель Национального комитета советских физиков, председатель научного совета по комплексной проблеме «Физика плазмы», профессор Московского университета, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий СССР академик Лев Андреевич Арцимович.

Лев Андреевич АРЦИМОВИЧ

Л. А. Арцимович родился 25 февраля 1909 года в Москве. В 1928 году он окончил физико-математический факультет Белорусского университета и в 1930 году поступил лаборантом в Ленинградский физико-технический институт. Вскоре он начал самостоятельные научные исследования.

Основной областью его научных интересов, в которую он внес наибольший вклад, была атомная физика. Он впервые количественно изучил явление полного внутреннего отражения рентгеновских лучей. Позже он, совместно с И. В. Курчатовым, исследовал реакцию «нейтрон+ +протон», в результате которой получается ядро тяжелого водорода. В 1936 году Л. А. Арцимович остроумными опытами опроверг предположение американского физика Шенкланда о том, что при взаимодействии электронов и позитронов в определенных условиях нарушается закон сохранения энергии. В 1936—1940 годах он исследовал различные явления, сопровождающие прохождение быстрых электронов через вещество. При этом он доказал, что все эти явления, вопреки мнению некоторых ученых, правильно описываются квантовой механикой.

В годы войны Л. А. Арцимович выполнил ряд важных работ в области электронной оптики. В послевоенные годы Л. А. Арцимович занялся решением важной научно-технической проблемы — электромагнитным методом разделения изотопов атомных ядер. Разработка этой проблемы потребовала создания большого научного коллектива, которому удалось создать надежные промышленные установки для разделения изотопов и обеспечить производство чистых изотопов различных элементов для нужд физики, техники, биологии и медицины.

С 1951 года и до последних дней своей жизни Л. А. Арцимович возглавлял экспериментальные исследования по физике горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций в нашей стране. Ему и его сотрудникам удалось впервые осуществить термоядерную реакцию в лабораторных условиях. В последние годы на установках «Токамак» советские физики достигли рекордных результатов как по температуре водородной плазмы, так и по времени ее устойчивого существования.

Отдавая дань научным заслугам Л. А. Арцимовича, Академия наук СССР в 1946 году избрала его членом-корреспондентом, а в 1953 году — академиком. С 1957 года Л. А. Арцимович был бессменным академиком-секретарем Отделения физико-математических наук, а затем — Отделения общей физики и астрономии АН СССР.

Немало времени отдал Лев Андреевич воспитанию научной смены. Он преподавал в Ленинградском политехническом институте, Ленинградском университете, Московском инженерно-физическом институте. В последние годы жизни он руководил кафедрой атомной физики в МГУ.

Л. А. Арцимович был человеком с необычайным богатством интересов, далеко выходивших за пределы его специальности. Он обладал большим человеческим обаянием и обостренным чувством юмора. Многие из его шутливых высказываний давно стали «физическими афоризмами».

Лев Андреевич не дожил до создания технического термоядерного реактора. Но благодарное человечество не забудет имя того, кто внес неоценимый вклад в создание будущих термоядерных электростанций.

Задачи о телах вращения и теоремы Гюльдена

Б. С. Эппель

Мы предлагаем читателю решить (или по крайней мере попробовать решить) очень несложную задачу из задачника по геометрии Н. А. Рыбкина *) (№ 5 § 24).

Задача 1. *Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и удалена от нее на расстояние, равное апофеме треугольника.*

Определить объем и поверхность полученного тела.

Напомним, что апофема — это радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Интересующий нас объем равен удвоенной разности объемов усеченного конуса с образующей BC (рис. 1) и цилиндра с образующей KC:

$$V = 2(V_{\text{ус. к}\ BC} - V_{\text{цил.}\ KC}) = 2\left[\frac{1}{3}\pi KC\cdot(MB^2+MK^2+MB\cdot MK) - \pi MK^2\cdot KC\right].$$

Теперь по стороне треугольника a найдите отрезки, участвующие в формуле. После упрощений вы получите, что $V=\frac{1}{2}\pi a^3$.

При желании точно так же можно вычислить и величину поверхности. Она равна $2\pi a^2\sqrt{3}$.

Как видите, решение связано с довольно громоздкими выкладками.

---

*) Н. А. Рыбкин, Сборник задач по геометрии, ч. 2, М., «Просвещение», 1972.

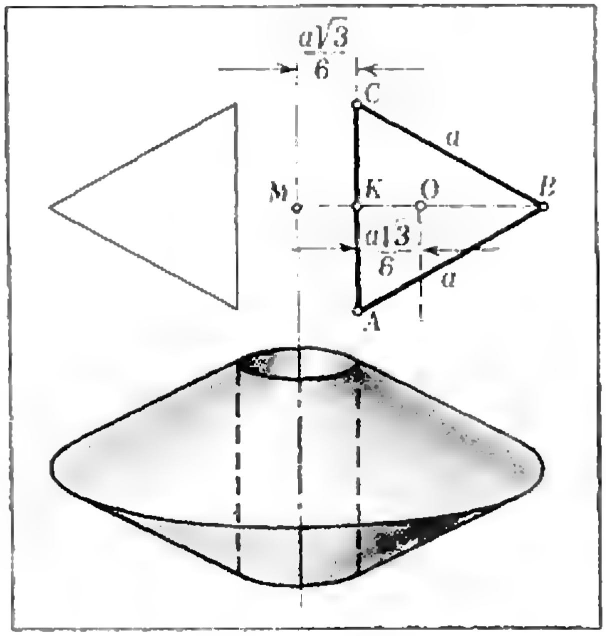


Рис. 1.

Вообще решения задач о вычислении объемов и поверхностей тел вращения, как правило, не сложны, но довольно громоздки. В то же время решения таких задач с помощью теорем Гюльдена записываются буквально в несколько строк.

Сформулируем эти теоремы.

1-я теорема Гюльдена (о площади поверхности вращения). *Поверхность тела, образованного вращением плоской линии (замкнутой или незамкнутой) вокруг оси, лежащей в плоскости этой линии и не пересекающей ее, равна произведению длины вращающейся линии на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения до центра тяжести линии:*

$$S = P\cdot 2\pi R,$$

где P — длина вращающейся линии (или ее периметр, если она замкнутая), а R — расстояние от центра тяжести до оси вращения.

2-я теорема Гюльдена (об объеме тела вращения). *Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, расположенной в той же плоскости и не пересекающей фигуру, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения до центра тяжести фигуры:*

$$V = S\cdot 2\pi R,$$

где S — площадь вращаемой фигуры, R — расстояние от центра тяжести до оси вращения.

Подчеркнем, что в первой теореме речь идет о центре тяжести масс, равномерно распределенных по длине линии, а во второй теореме — о центре тяжести масс, равномерно распределенных по всей площади фигуры.

Вследствие того, что теоремы Гюльдена не доказываются в школьном курсе (они доказываются методами интегрального исчисления) *), прямо использовать их для решения задач в практике школы или экзамена не принято. Но предпосылать элементарному решению быстрое получение ответа с помощью теорем Гюльдена, не скрывая своего знакомства с этими теоремами, можно, и предосудительного в этом ничего нет. Знание же ответа облегчает длинные и громоздкие выкладки, и, главное, вносит уверенность в работу.

Теоремы несят немного «физический привкус». Для их применения нужно уметь находить центры тяжести линий и плоских фигур.

В тех случаях, с которыми нам придется столкнуться, это несложно. Так, центром тяжести отрезка является его середина. Это дает возможность находить центр тяжести любой ломаной линии (в частности, центр тяжести контура многоугольника): надо поместить в середине каждого звена ломаной массу, численно равную длине этого звена; тогда центр тяжести этих масс и будет центром тяжести ломаной линии.

Нетрудно находить и центры тяжести простейших плоских фигур. Например, центром тяжести круга и правильного многоугольника служит их центр, центром тяжести треугольника — точка пересечения его медиан; параллелограмма (квадрата,

---

*) См. статью В. Г. Болтянского на с. 9.

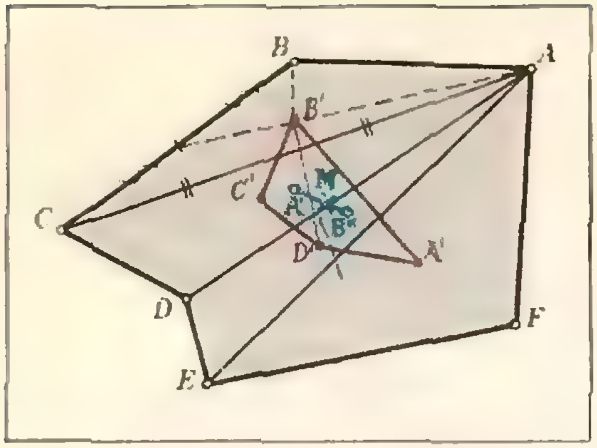


Рис. 2.

ромба, прямоугольника) — точка пересечения диагоналей.

Центр тяжести произвольного n-угольника строится так. Разобьем n-угольник на треугольники, в каждом из которых найдем центр тяжести. Потом в каждом центре тяжести треугольника поместим массу, численно равную площади этого треугольника. Центр тяжести этих масс и будет центром тяжести исходного многоугольника (рис. 2).

Упражнение. Постройте центр тяжести трапеции и центр тяжести ее контура; то же в случае дельтоида (это два равнобедренных треугольника, имеющих общее основание, вершины которых лежат по разные стороны от него) произвольного неправильного пятиугольника.

Но одно дело построить точку — центр тяжести, а другое — суметь найти расстояние от него до оси вращения. В тех случаях, когда вам это будет удаваться (а в школьных и экзаменационных задачах — это, как правило, можно сделать), проверка с помощью теорем Гюльдена будет возможна.

Решение большинства задач, помещенных в задачнике по геометрии Н. А. Рыбкина (ч. 2, § 24), можно проверить с помощью теорем Гюльдена.

Вернемся теперь к задаче, с которой мы начали статью, и покажем ее решение (лучше сказать, проверку решения) с помощью теорем Гюльдена. Найдем вначале R — расстояние от оси вращения до центра тяжести (см. рис. 1):

$$OM = R = OK + KM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$S = P\cdot 2\pi R = 2\pi a^2\sqrt{3};$$

$$V = S\cdot 2\pi R = \frac{1}{2}\,\pi a^3.$$

Проверьте с помощью теорем Гюльдена ответы к задачам №№ 3, 4, 6, 7, 9, 10 (§ 24 того же задачника).

А вот типичная задача средней трудности.

Задача 2*). *Правильный треугольник, сторона которого a, вращается около оси, проходящей вне его через конец его стороны под острым углом α к этой стороне. Определить площадь поверхности тела вращения.*

Ответ: $2\pi a^2\sqrt{3}\sin(30^\circ+\alpha)$.

Получим его с помощью теоремы Гюльдена. Из $\Delta\, AOM$ (рис. 3)

$$R = AO\cdot\sin(30^\circ+\alpha) = \frac{a\sqrt{3}}{3}\times$$
$$\times\sin(30^\circ+\alpha),$$

$$S = P\cdot 2\pi R = 2\pi a^2\sqrt{3}\sin(30^\circ+\alpha).$$

---

*) П. В. Стратилатов, Тригонометрия. Дополнительный материал к курсу геометрии 9, 10 классов, М., «Просвещение», 1972, задача 294; П. В. Стратилатов. Сборник задач по тригонометрии, М., «Просвещение», 1965, задача 553.

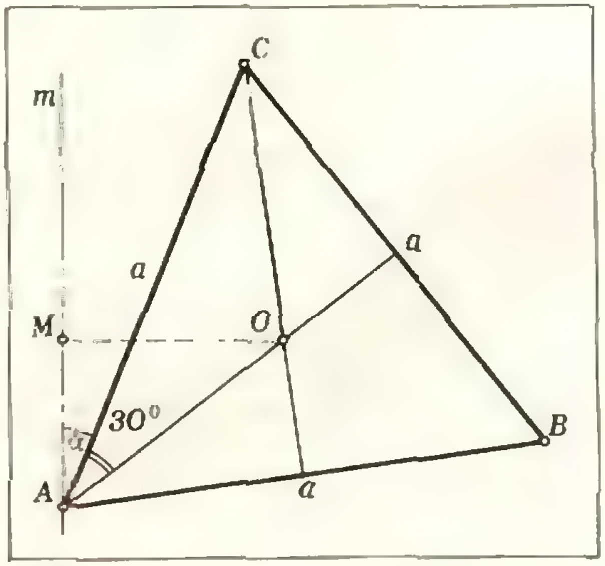


Рис. 3.

Сравнив это решение с обычным, вы полнее оцените краткость проверки.

Проверьте, используя теоремы Гюльдена, ответы к задачам №№ 296 (555), 300 (559), 303 (585) (П. В. Стратилатов, Сборник задач по тригонометрии).

Покажем еще несколько интересных применений теорем Гюльдена к решению задач.

Задача 3*. *Плоская ломаная состоит из n равных отрезков, имеющих длину a и соединенных в виде зигзага под углом α друг к другу. Определить поверхность, образуемую вращением этой линии около оси, которая проходит через один из концов ее параллельно биссектрисе угла α* *).

Традиционное решение этой задачи довольно громоздко, оно включает в себя суммирование арифметической прогрессии (точнее, первых n нечетных чисел) и вполне оправдывает «звездочку» — знак повышенной трудности, которая стоит около ее номера. Между тем теорема Гюльдена позволяет решить задачу совсем коротко, почти в уме.

В самом деле, центр тяжести ломаной находится, как легко видеть, на расстоянии $\frac{na}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ от оси вращения, а длина ломаной равна na (рис. 4). Следовательно,

$$S = P\cdot 2\pi R = na\cdot \pi na\sin\frac{\alpha}{2} = \pi n^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Впрочем, из рисунка 4 нетрудно усмотреть изящное решение задачи традиционным методом: легко догадаться, что искомая поверхность вращения равна боковой поверхности конуса с образующей AM, служащей продолжением последнего звена AB. Ведь поверхность вращения отрезка

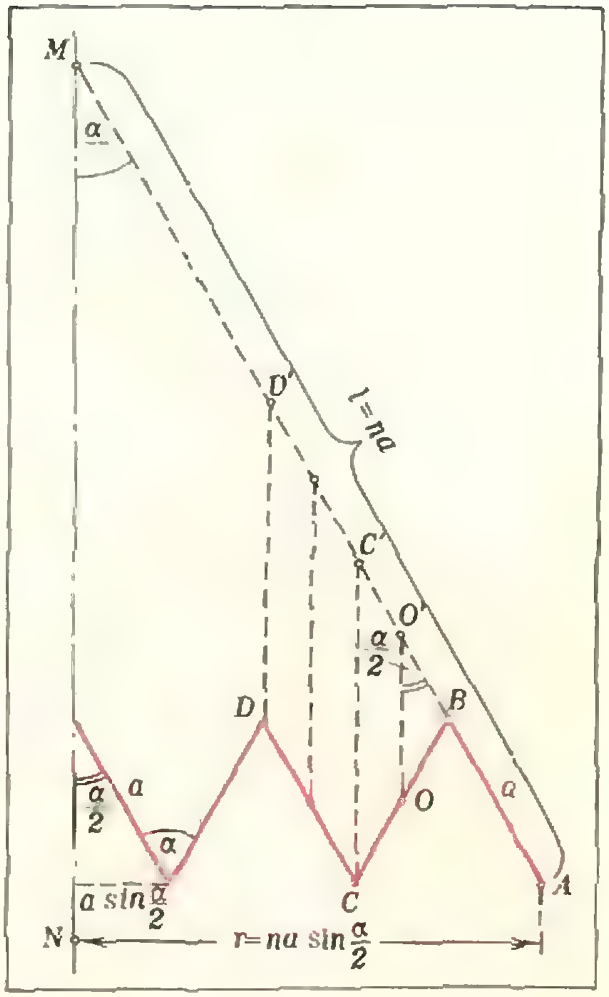


Рис. 4.

BC' равна поверхности вращения отрезка BC (эти поверхности симметричны относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку B). Поверхности вращения отрезков DC и $D'C'$ также равны (они совмещаются параллельным переносом). Остается найти боковую поверхность конуса с образующей AM:

$$S = \pi rl = \pi\left(na\sin\frac{\alpha}{2}\right)an = \pi a^2n^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Вот еще одна задача.

Задача 4. *Прямоугольник вращается около оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Определить объем и поверхность тела вращения, если диагональ прямоугольника равна d, а угол между диагоналями равен φ.*

---

*) Н. А. Рыбкин, Сборник задач по тригонометрии, М., Учпедгиз, 1956, § 23, задача 7.

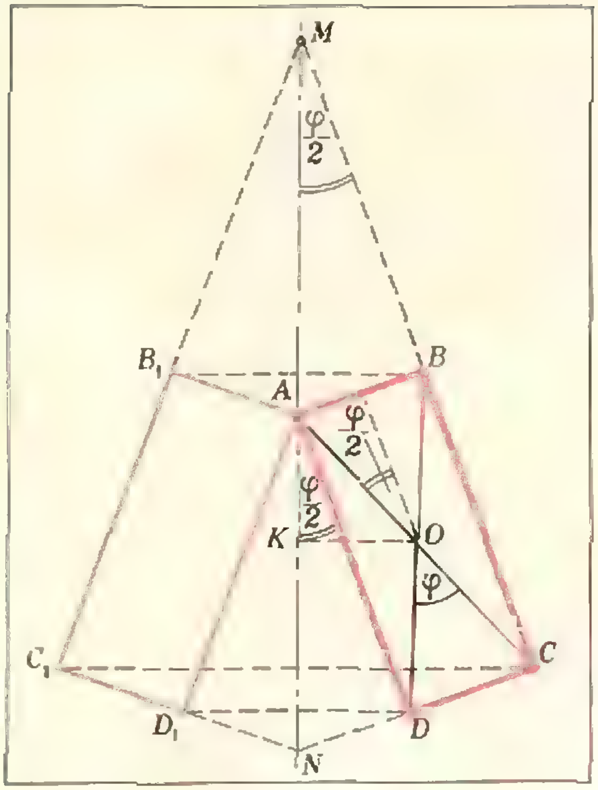


Рис. 5.

Здесь площадь прямоугольника равна $\frac{d^2}{2}\sin\varphi$, его периметр равен

$$2d\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\,d\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right),$$

а центр тяжести находится на расстоянии $R=\frac{d}{2}\sin\varphi$ от оси вращения. Следовательно, по теоремам Гюльдена

$$V=\frac{1}{2}\pi d^3\sin^2\varphi,$$
$$S=2\pi d^2\sqrt{2}\sin\varphi\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Обычное решение довольно громоздко: нужно найти объемы двух усеченных конусов с образующими BC и CD (рис. 5) без объемов двух полных конусов с образующими AB и AD. Однако если продолжить стороны BC и CD до пересечения с осью вращения в точках M и N, то искомый объем значительно короче вычислится как сумма объемов двух полных конусов с образующими CM и CN без удвоенного объема тела, образованного вращением треугольника ABM (сумма объемов полных конусов с образующими AB и BM). Удвоенный объем потому, что надо бы вычитать сумму объемов тел, полученных от вращения двух треугольников ABM и ADN. Но один из этих треугольников может быть совмещен со вторым с помощью переноса, параллельного оси. Поэтому объемы этих тел вращения равны между собой.

Точно так же при вычислении поверхностей в этой задаче боковые поверхности усеченных конусов могут быть заменены боковыми поверхностями полных конусов, что тоже заметно сокращает выкладки.

Последние наши задачи также позволяют использовать для их решения все упрощения и преимущества, которые дают теоремы Гюльдена. Предоставляем решить их читателю.

Задача 5. *Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, проходящей вне ромба параллельно стороне на расстоянии $\frac{a}{4}$ от этой стороны. Определить объем и поверхность тела вращения.*

Задача 6. *Квадрат $ABCD$ со стороной a вращается около оси, проходящей вне его на расстоянии b от ближайшей вершины A квадрата и составляющей угол α со стороной AB. Определить объем и поверхность тела вращения.*

В. Г. Болтянский

Доказательства теорем Гюльдена

В статье Б. С. Эппеля, помещенной в этом номере «Кванта», сформулированы две теоремы Гюльдена. Обычно они доказываются (с применением интегралов) в курсах «высшей математики». Ниже приводятся простые доказательства этих теорем, которые, хотя и основаны на техже идеях, что и «интегральные» доказательства, но в явном виде интегралов не содержат.

В этих доказательствах не обсуждается, что такое длина произвольной кривой, что такое площадь поверхности, объем тела и т. д. Подобные вопросы относятся к теории измерения геометрических величин. (Кстати, при доказательстве теорем Гюльдена методами интегрального исчисления они, как правило, тоже не рассматриваются.) Читателю, который хотел бы получить ответы на эти вопросы, можно порекомендовать прочесть первые две статьи V тома «Энциклопедии элементарной математики» (изд-во «Наука», 1966).

Прежде всего установим справедливость следующего предложения.

Лемма. *Пусть в плоскости по одну сторону от прямой l расположено несколько материальных точек одинаковой массы. Тогда центр тяжести этой системы точек удален от прямой l на расстояние, равное среднему арифметическому расстояний этих точек от прямой l.*

Эта лемма легко доказывается методом математической индукции. Обозначим число рассматриваемых материальных точек через n, сами точки через $M_1, M_2, \ldots, M_n$, массу каждой точки через m, а расстояния точек от прямой l через $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Перейдем к доказательству леммы. Если $n = 1$, то утверждение леммы очевидно. Без труда проверяется справедливость леммы и при $n = 2$. Проведем теперь очередной шаг индукции, то есть покажем, что если лемма справедлива для меньшего, чем n, числа материальных точек, то она справедлива и для n точек. Пусть P — центр тяжести материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Согласно предположению индукции, точка P находится от прямой l на расстоянии

$$r = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}}{n-1}.$$

Мы можем теперь систему материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ заменить одной точкой P, сосредоточив в ней массу, равную $(n-1)m$. Теперь остается найти центр тяжести O *двух* материальных точек P и M_n. Так как точка P имеет массу $(n-1)m$, а точка M_n — массу m, то $PO : OM_n = 1 : (n-1)$. Следовательно, если r^* — расстояние от точки O до прямой l (рис. 1), то

$$(r - r^*) : (r^* - r_n) = 1 : (n-1).$$

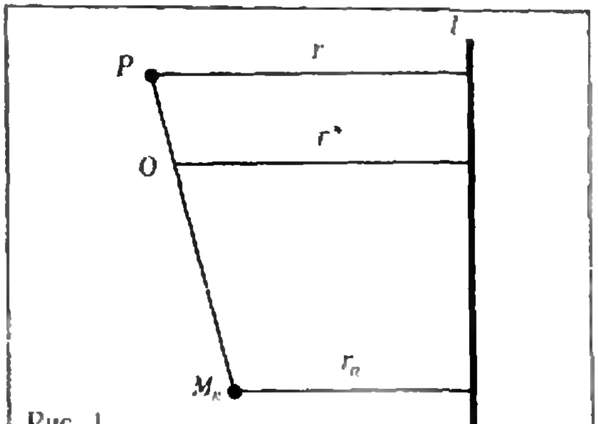


Рис. 1.

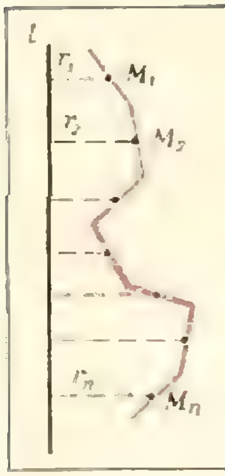


Рис. 2.

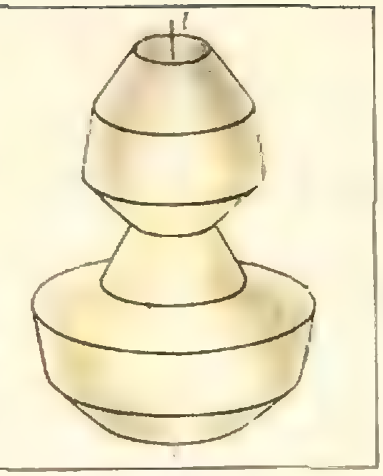


Рис. 3.

откуда

$$r^* = \frac{(n-1)\,r + r_n}{n} = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} + r_n}{n}.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для n материальных точек. Проведенная индукция и доказывает лемму.

Перейдем теперь к доказательству первой теоремы Гюльдена. Прежде всего докажем, что эта теорема справедлива, если плоская линия, о которой идет речь в теореме, является n-звенной ломаной, у которой все звенья имеют одну и ту же длину m. Середины звеньев ломаной обозначим через $M_1, M_2, \ldots, M_n$, а расстояния этих точек от прямой l — через $r_1, r_2, \ldots, r_n$ (рис. 2). При вращении рассматриваемой ломаной вокруг прямой l получается поверхность (рис. *3*), состоящая из n частей, каждая из которых представляет собой боковую поверхность усеченного конуса. Так как боковая поверхность усеченного конуса равна произведению длины образующей на длину окружности среднего сечения, то площадь получившейся поверхности вращения равна

$$S = m\cdot 2\pi r_1 + m\cdot 2\pi r_2 + \ldots + m\cdot 2\pi r_n.$$

Замечая, что длина рассматриваемой ломаной (рис. 2) равна $P = nm$, можно переписать выражение для площади так:

$$S = P\cdot 2\pi R, \qquad (1)$$

где

$$R = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}. \qquad (2)$$

Но центр тяжести ломаной, то есть центр тяжести системы точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$, в каждой из которых сосредоточена масса m, согласно лемме, отстоит от прямой l на расстоянии R. Это и означает, что в рассматриваемом частном случае первая теорема Гюльдена справедлива.

Обратимся теперь к общему случаю. Пусть K — плоская линия, а Π — поверхность, получающаяся при вращении линии K вокруг прямой l. Разведем ножки циркуля на некоторое расстояние m и будем, начиная от одного конца линии K, откладывать засечки вдоль линии K (рис. 4) столько раз, сколько мы сможем это сделать. Соединяя последовательно точки, полученные при выполнении этих засечек, мы получим ломаную L, вписанную в линию K, причем все звенья ломаной L имеют одну и ту же длину m (рис. 5). При вращении ломаной L вокруг прямой l получится поверхность T, вписанная в поверхность Π.

Как мы уже знаем, площадь S поверхности T вычисляется по формуле (1), где P — длина линии L, а R — расстояние центра тяжести линии L от прямой l. Будем теперь в этом построении считать, что $m \to 0$. Тогда

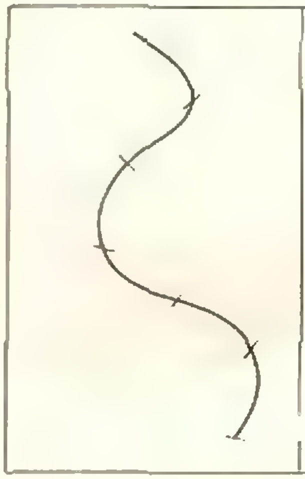


Рис. 4.

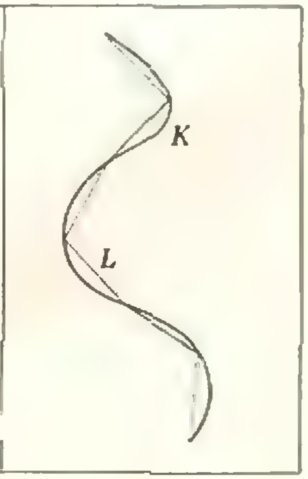


Рис. 5.

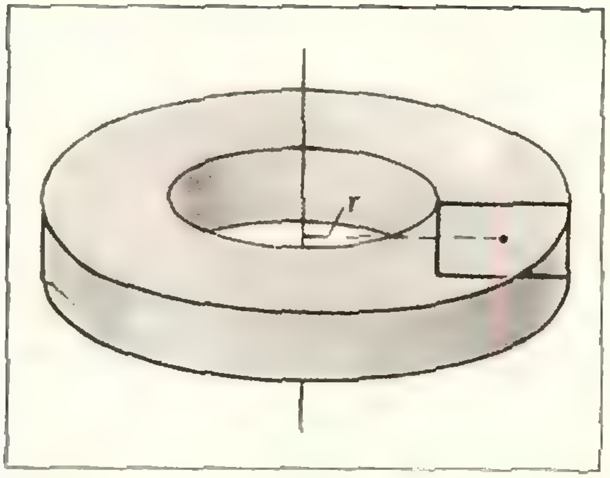


Рис. 6.

длина P ломаной L будет стремиться к длине линии K, площадь поверхности T будет стремиться к площади поверхности Π, а центр тяжести ломаной L будет приближаться к центру тяжести линии K. Так как для любого m соотношение (1) для ломаной L справедливо, то, переходя к пределу при $m \to 0$, мы найдем, что соотношение (1) справедливо и для линии K. Этим и завершается доказательство первой теоремы Гюльдена.

Обратимся теперь к доказательству второй теоремы Гюльдена. Прежде всего рассмотрим *шайбу*, то есть тело, получающееся при вращении прямоугольника вокруг прямой, которая не пересекает прямоугольника и параллельна двум его сторонам (рис. 6). Объем шайбы легко вычислить как разность объемов двух цилиндров. Предоставляем читателю самостоятельно вычислить этот объем V и убедиться, что для шайбы справедливы вторая теорема Гюльдена, то есть

$$V = S \cdot 2\pi r, \qquad (3)$$

где S — площадь вращающегося прямоугольника, а r — расстояние его центра тяжести от оси вращения l.

Пусть теперь F — плоская фигура площади S, а l — лежащая в ее плоскости прямая, не пересекающая фигуры F. Возьмем произвольное *натуральное число* n и *проведем* $n-1$ прямых, перпендикулярных l и разбивающих фигуру F на n «долек», каждая из которых имеет одну и ту же площадь $\frac{1}{n}S$ (рис. 7). Каждая «долька» ограничена двумя отрезками, перпендикулярными l, и двумя дугами, соединяющими концы этих отрезков. (Правда, если фигура F — не выпуклая, то могут быть и более сложные «дольки», как, например, на рис. 8; однако проводимые рассуждения применимы и к этому случаю.) Заменим эти дуги отрезками, параллельными l, так, чтобы площадь дольки при этом не изменилась (то есть чтобы «долька» превратилась в прямоугольник той же площади $\frac{1}{n}S$). Проделав это с каждой «долькой», мы превратим F в «ступенчатую» фигуру G, мало отличающуюся от фигуры F. Фигура G составлена из n прямоугольников, каждый из которых имеет площадь $\frac{1}{n}S$. Центры тяжести этих прямо-

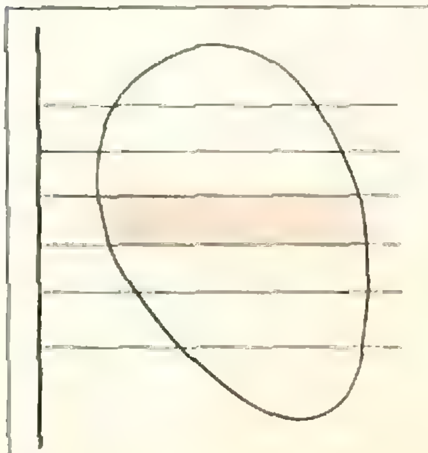


Рис. 7.

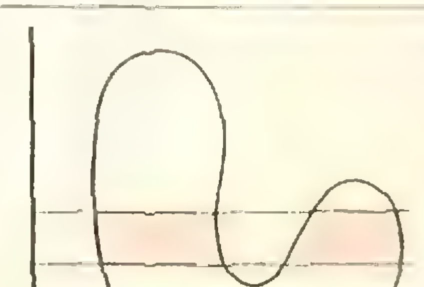


Рис. 8.

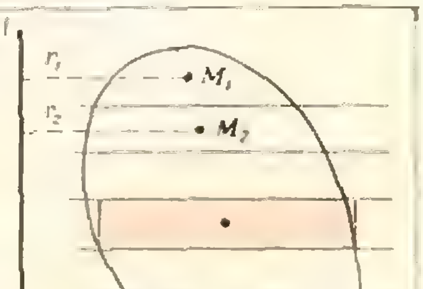


Рис. 9.

угольников обозначим через M_1, $M_2, \ldots\ldots, M_n$ (рис. 9), а их расстояния от прямой l—через $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

При вращении фигуры F вокруг прямой l получается тело X, объем которого требуется найти, а при вращении фигуры G вокруг прямой l получается тело Y, мало отличающееся от тела X. Так как фигура G составлена из n прямоугольников, то тело Y составлено из n шайб. Вычисляя объем каждой шайбы по формуле (3), легко найдем объем V тела Y:

$$V = \frac{1}{n} S\cdot 2\pi r_1 + \frac{1}{n} S\cdot 2\pi r_2 + \cdots + \frac{1}{n} S\cdot 2\pi r_n,$$

то есть

$$V = S\cdot 2\pi R, \tag{4}$$

где R вычисляется по формуле (2). Заметим теперь, что центр тяжести площади фигуры G, то есть центр тяжести системы точек $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n$, в каждой из которых сосредоточена масса $\frac{1}{n}S$, согласно лемме, отстоит от прямой l на расстоянии R. Формула (4) означает, следовательно, что для фигуры G вторая теорема Гюльдена справедлива.

Будем теперь в этом построении считать, что $n \to \infty$. Тогда объем тела Y, получающегося при вращении фигуры G, будет стремиться к объему тела X, а центр тяжести фигуры G будет стремиться к центру тяжести фигуры F. (Заметим, что площади фигур F и G одинаковы.) Так как для любого n соотношение (4) для фигуры G справедливо, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, мы найдем, что соотношение (4) справедливо и для фигуры F. Этим завершается доказательство второй теоремы Гюльдена.

Вторую теорему Гюльдена можно условиться считать «трехмерной» теоремой Гюльдена, так как она говорит об объеме тела вращения. Первую теорему Гюльдена можно назвать «двумерной», так как она говорит о площади поверхности вращения. Можно по аналогии сформулировать «одномерную теорему Гюльдена»:

Пусть в плоскости по одну сторону прямой l даны несколько точек. Тогда суммарная длина C окружностей, получающихся при вращении этой системы точек вокруг прямой l, равна произведению числа точек на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения l до центра тяжести этой системы точек:

$$C = n\cdot 2\pi R,$$

где n — число точек, а R — расстояние от центра тяжести до оси вращения.

Читатель без труда сам докажет эту простенькую теорему.

Любопытно, что все три теоремы Гюльдена (трехмерная, двумерная и одномерная) могут быть объединены одной общей формулировкой. Делается это так. Будем называть *нульмерной фигурой* любое множество, состоящее из конечного числа точек. Далее, *нульмерным объемом* нульмерной фигуры условимся называть число точек этой фигуры. Линии условимся называть *одномерными фигурами*; длину линии будем называть ее *одномерным объемом*. Поверхности (в частности, плоские фигуры) условимся называть *двумерными фигурами*, а площадь поверхности — ее *двумерным объемом*. Наконец, тела будем называть *трехмерными фигурами*, а объем тела будем также называть его *трехмерным объемом*.

Теорема Гюльдена. *Пусть в плоскости по одну сторону прямой l расположена $(k-1)$-мерная фигура F (здесь k — любое из чисел 1, 2, 3). Через S обозначим $(k-1)$-мерный объем фигуры F, а через R — расстояние от ее центра тяжести до прямой l. При вращении фигуры F вокруг прямой l получается k-мерная фигура, k-мерный объем которой вычисляется по формуле*

$$V = S\cdot 2\pi R.$$

При $k = 3$ это дает «трехмерную» теорему Гюльдена; при $k = 2$ и 1 получаем (только в иных обозначе-

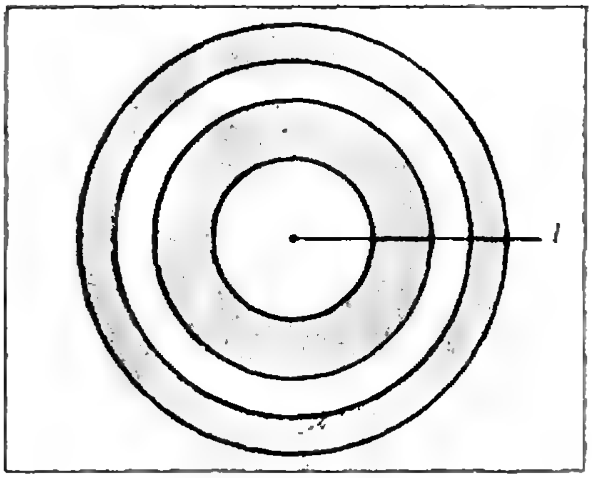


Рис. 10.

ниях) «двумерную» и «одномерную» теоремы.

Наконец, отметим (для читателя, знакомого с понятиями многомерной геометрии), что приведенная выше общая формулировка теоремы Гюльдена применима к n-мерному евклидову пространству — только вместо плоскости надо рассматривать $(n-1)$-мерную плоскость, а в качестве l надо взять $(n-2)$-мерную плоскость. Число k в этой теореме может (в случае n-мерного пространства) принимать любое из значений $1, 2, \ldots, n$.

А чтобы не огорчались читатели, не знакомые с понятиями многомерной геометрии, сформулируем получающуюся теорему для $n=2$ (то есть для случая плоскости).

Теорема Гюльдена на плоскости. *Пусть на прямой по одну сторону от точки O расположена $(k-1)$-мерная фигура F (здесь k — любое из чисел 1, 2). Через S обозначим $(k-1)$-мерный объем фигуры F, а через R — расстояние ее центра тяжести от точки O. При вращении фигуры F вокруг точки O получается k-мерная фигура, k-мерный объем которой вычисляется по формуле*

$$V=S\cdot 2\pi R.$$

В частности, при $k=1$ (то есть в случае, когда фигура F состоит из нескольких отрезков, рис. 10) эта формула позволяет вычислить сумму площадей нескольких концентрических колец.

Разные задачи

1. Исключить x, y, z из уравнений

$$\begin{aligned} xy\ (x+y)&=c,\\ yz\ (y+z)&=a,\\ zx\ (z+x)&=b,\\ xyz&=d. \end{aligned}$$

2. Построить треугольник ABC $(BC>AB>CA)$ по заданному углу A и суммам длин сторон $AB+BC$ и $AB+AC$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} (ax)^{\lg a}&=(by)^{\lg b},\\ b^{\lg x}&=a^{\lg y}. \end{aligned}$$

4. Найти частное от деления на $p-1$ числа, написанного в p-ичной системе счисления с помощью $p-1$ единиц (то есть числа $111\ldots1$). Как записывается это частное в p-ичной системе счисления?

5. Три точки A, B и C лежат на одной прямой. Построена окружность с центром в точке A. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, соединяющих точки B и C с диаметрально противоположными точками окружности.

6. Три окружности проходят через точки M и N. Найти геометрическое место таких точек P, что касательные PA, PB и PC, проведенные из точки P к этим окружностям (A, B, C — точки касания), удовлетворяют соотношению $PA\cdot PB=k\cdot PC^2$.

7. Доказать, что если p — простое число, то остаток от деления C_{p-1}^{m} на p равен $(-1)^m$.

8. Доказать, что если p — простое число, больше трех, то $\frac{1}{2}C_{2p}^{p}-1$ делится на p^3.

Электрон движется с трением

М. И. Каганов, Г. Я. Любарский

Введение

Слово «трение» напоминает о движущихся частях машин, о санках, скользящих по снежному насту, о метеорите, раскаляющемся при пролете через атмосферу. В одних случаях без трения нельзя обойтись, в других — делают все возможное, чтобы от него избавиться. С трением приходится считаться лыжнику-слаломисту и инженеру-конструктору; поскользнувшийся прохожий сетует на отсутствие трения, а физики в лабораториях изыскивают способы уменьшения трения хотя бы на доли процента. Но, пожалуй, кто бы ни думал о трении, все представляют себе какое-либо макроскопическое тело (нога, колесо, винт парохода), взаимодействующее со средой или с другими телами.

А можно ли говорить о трении при движении микроскопической частицы, например, электрона?

В этой статье мы рассмотрим движение электронов в металле. Известно, что электроны совершают беспорядочное, хаотическое движение. Но если по проводнику идет ток, то, кроме хаотического теплового движения, есть еще и направленное движение электронов.

Очень сложно описать поведение каждого электрона в отдельности. Поэтому мы заменим движение всех частиц потоком одинаковых «средних» частиц, движущихся в одном направлении с одинаковыми средними скоростями. Это можно сделать, так как при векторном сложении всех скоростей скорости хаотического движения, направленные в разные стороны, дают в сумме нуль, и остаются только скорости направленного движения электронов под действием электрического тока. Оказывается, рассматривая поток «средних» электронов, можно не только понять процессы, происходящие в металлах, но и вывести правильные формулы, описывающие эти процессы. Конечно, такое «усредненное» рассмотрение проще, чем подробное.

Электронный газ

То, что металлы хорошо проводят электрический ток, давно привело к мысли, что в металле есть свободные электроны.

Свободных электронов много. В одном кубическом сантиметре металла их около $10^{22} \div 10^{23}$. Подобно молекулам в газе, они находятся в непрерывном движении. Так и говорят: «электронный газ» или «газ электронов проводимости». Правда, свойства этого газа существенно отличаются от свойств обычных газов. Электронный газ в металлах подчиняется законам квантовой механики. Из всех необычных (квантовых) свойств электронного газа для нас важно одно: средняя скорость хаотического движения электронов в металле слабо зависит от температуры и для большинства металлов приблизительно равна $\langle v \rangle \approx \approx 10^8$ *см/с* *).

«Средний» электрон

Если по металлическому проводнику течет ток, значит, к нему приложена разность потенциалов, причем между током I и разностью потенциалов U существует простая пропорциональность

$$I = \frac{U}{R}.$$

Это — знаменитый **закон Ома**. Сопротивление R пропорционально длине проводника L и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S:

$$R = \frac{\rho L}{S}.$$

Коэффициент пропорциональности ρ (удельное сопротивление) зависит только от материала проводника и от того, в каких условиях этот проводник находится (какова его температура, например). Величину $1/\rho$ обычно обозначают буквой σ. Это — удельная электропроводность. Если ввести теперь плотность тока $j = \frac{I}{S}$ и напряженность электрического поля $E = \frac{U}{L}$, то закон Ома перепишется в дифференциальной форме *)

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \qquad (1)$$

Величины, входящие в (1), не зависят от геометрических размеров проводника. Буквы **j** и **E** напечатаны жирным шрифтом, чтобы показать: напряженность электрического поля и плотность тока — векторы.

Так как заряд переносят электроны (заряд каждого электрона $e \approx \approx 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ электростатических единиц **), $[e] = \frac{г^{1/2} см^{3/2}}{с}$), то плотность тока можно выразить через число электронов в единице объема ($n \approx \approx 10^{23}$ $см^{-3}$) и среднее арифметическое значение их скорости $\overline{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{j} = en\,\overline{\mathbf{v}}. \qquad (2)$$

По металлу течет ток; имеется направленный поток электронов; $\overline{\mathbf{v}}$ — скорость этого потока.

Формулу (2) можно «прочесть» несколько иначе, не учитывая хаотического движения электронов. В каждом кубическом сантиметре металла есть n электронов, и все они движутся со скоростью $\overline{\mathbf{v}}$. Подмена беспорядочно движущихся электронов, «сносимых» приложенным к металлу электрическим полем, одинаково движущимися «средними» электронами производится для упрощения, чтобы легче исследовать свойства проводников.

---

*) Речь идет о средней квадратичной скорости: $\langle v \rangle = \sqrt{\overline{v^2}}$; черта над v^2 здесь и в дальнейшем обозначает среднее арифметическое значение.

*) См. статью Я. А. Смородинского «Закон Ома» («Квант» № 4, 1971).

**) Мы в этой статье будем пользоваться системой СГСЭ, в которой единицы электрических величин (заряда, тока, напряженностей электрического и магнитного полей) выражаются через механические единицы (*см*, *г*, *с*).

Со стороны приложенного к проводнику электрического поля на электрон действует сила, равная

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}. \qquad (3)$$

Из формул (1), (2) и (3) следует, что скорость «среднего» электрона пропорциональна приложенной силе:

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\sigma}{e^2 n}\mathbf{F}, \qquad (4)$$

то есть «средний» электрон движется по законам механики Аристотеля *). Механика Аристотеля правильно описывает движение в тех случаях, когда тело движется с трением и приложенная постоянная сила уравновешивается силой трения. Следовательно, «средний» электрон под действием электрического поля движется по металлу с трением.

Подвижность

Главная характеристика частиц в механике Аристотеля — их подвижность u — скорость частицы под воздействием единичной силы. Согласно формуле (4) подвижность «среднего» электрона равна $\sigma/e^2 n$.

В отличие от средней скорости, подвижность не зависит от величины приложенной силы.

Принято не подвижность выражать через удельную электропроводность, а наоборот, удельную электропроводность выражать через подвижность:

$$\sigma = ne^2 u. \qquad (5)$$

Может возникнуть вопрос: зачем одну характеристику металла (электропроводность σ) выражать через две другие?

Это делают потому, что величины n и u определяют различные, можно сказать, независимые характеристики металла. Число свободных электронов в единице объема n практически не изменяется с температурой, мало зависит от состояния образца данного металла (монокристалл или поликристалл, очень чистый или с небольшим количеством примесей). Подвижность u характеризует силу сопротивления среды движению электронов. С изменением температуры она может измениться в сотни, тысячи раз; значительно увеличивается подвижность при очистке металла от примесей. Число электронов n и подвижность u допускают независимое экспериментальное определение.

Следует подчеркнуть еще одно. Введение подвижности означает определенное проникновение в природу электропроводности: формула (5) имеет право на существование только в том случае, если ток переносится электронами. Вся совокупность экспериментальных фактов подтверждает такую точку зрения.

Эффект Холла

Если проводник, по которому течет ток, поместить в магнитное поле $\mathbf{B}$ так, как показано на рисунке, то в направлении оси y возникает разность потенциалов, пропорциональная величине тока и магнитного поля. Это явление называется эффектом Холла.

На электрон, находящийся в проводнике с током, кроме силы, действующей со стороны электрического поля, действует также сила Лоренца

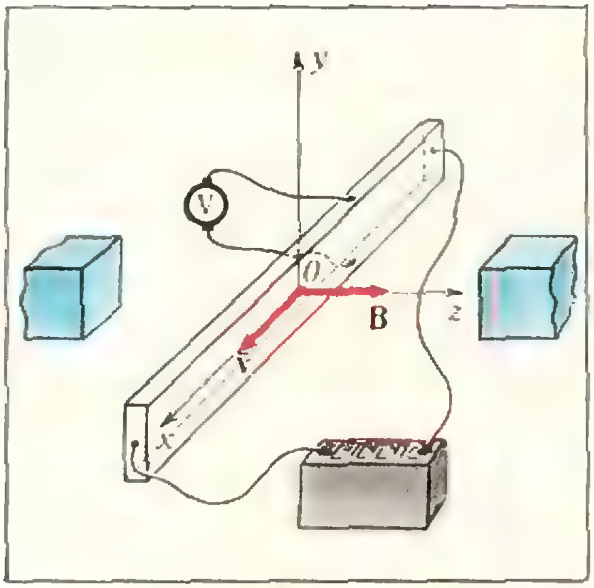
$$F = \frac{e}{c} vB\sin(\widehat{\mathbf{vB}}),$$

направление которой перпендикулярно скорости $\mathbf{v}$ и магнитному полю $\mathbf{B}$.

На «средний» электрон также действует сила Лоренца, величину кото-

---

*) См. статью М. И. Каганова, Г. Я. Любарского «О механике Аристотеля» («Квант» № 8, 1972).



рой можно определить, подставив вместо скорости **v** среднюю скорость $\overline{\mathbf{v}}$. В нашем примере, согласно формуле (2), $\overline{v}=\frac{j}{en}$, а $\sin(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{B}}) = 1$ (см. рисунок). Поэтому

$$F = \frac{jB}{nc}. \qquad (6)$$

Под действием этой силы электроны двигались бы в направлении оси y. На самом же деле, как только некоторое число электронов скопится на краю пластины (деться им некуда), возникнет электрическое поле, действующее в направлении, противоположном силе Лоренца, и накопление зарядов прекратится.

Ясно, что установившимся движение зарядов будет тогда, когда

$$eE_y = F.$$

Подставив сюда значение F из формулы (6), получим значение напряженности поля Холла

$$E_y = \frac{jB}{nec}. \qquad (7)$$

Мы получили значение поля Холла, возникающего в проводнике, помещенном в магнитное поле B, когда по нему течет ток с плотностью j. При этом мы рассматривали только «средние» электроны, движущиеся со средней скоростью.

Простота полученной формулы должна несколько насторожить. Верна ли она всегда? Не является ли ее простота следствием упрощенного («усредненного») рассмотрения? К сожалению, приходится констатировать, что это действительно так. Подробное, учитывающее движение каждого электрона рассмотрение приводит к более сложной формуле, но (и это для нас важно!) порядок величины поля Холла получится тот же. Поэтому простая формула (7) позволяет оценить число свободных электронов в единице объема: ведь все величины, входящие в формулу (7), за исключением n (числа частиц — носителей заряда), определяются экспериментально.

Измерения показывают, что у хороших металлов, как мы и говорили, $n = 10^{22} \div 10^{23}$ $см^{-3}$. Это означает, что от каждого атома металла оторвался и свободно движется по кристаллу по крайней мере один или даже несколько электронов.

Зная число электронов в единице объема, можно подсчитать подвижность электронов в металле. Возьмем из справочника удельное сопротивление меди ρ_{Cu} (как правило, в справочнике приводится значение удельного сопротивления при комнатной температуре):

$$\rho_{Cu} \approx 1{,}7\cdot 10^{-6}\ ом\cdot см \approx 1{,}8\cdot 10^{-18}\ с.$$

Не удивляйтесь, что размерность удельного сопротивления — секунда. Проверьте это, воспользовавшись выражением для удельной электропроводности через подвижность.

Разделив $\sigma = 1/\rho$ на $ne^2 \approx \approx 4\cdot 10^{22}\ (4{,}8\cdot 10^{-10})^2 = 0{,}9\cdot 10^4$, получим, что подвижность электронов в меди приблизительно равна $6\cdot 10^{12}$ $с/г$. Много это или мало? Если сравнивать с подвижностью электронов той же меди при очень низких температурах, то мало. При температурах, близких к абсолютному нулю, подвижность в сотни и тысячи раз больше. Если сравнивать с подвижностью электронов в других проводниках, то много. Электроны меди — одни из наиболее подвижных.

Для того чтобы ощутить, что представляет собой подвижность, вычислите скорость «среднего» электрона, скажем, когда по металлу течет ток, плотность которого равна 1 *а/мм*^{2} *).

Если вы не ошиблись при расчете, то вас, наверное, поразило, как мала средняя скорость: под действием электрического поля электронный газ медленно перемещается по проводнику. Это конечно, ни в коей мере не противоречит утверждению о том, что средняя скорость хаотического движения очень велика.

Время свободного пробега

Тот факт, что по проводнику под действием постоянного поля течет постоянный ток, показывает, что электроны, приобретающие энергию от электрического поля, отдают ее металлу (точнее было бы сказать: кристаллической решетке металла); в металле при прохождении тока выделяется тепло (его называют джоулевым). Чтобы не противоречить ранее высказанному утверждению о свободе электронов в металлах (мы его скоро проверим!), предположим, что каждый электрон движется в течение времени τ под действием внешнего поля, а потом, в коротком акте столкновения с чем-то, отдает приобретенную от электрического поля энергию (τ — время свободного пробега электрона). Так как ускорение электрона равно eE/m, то прирост скорости за время τ равен $\frac{e\tau}{m}E$, а средний ток есть **)

$$j = \frac{ne^2\tau}{m}E. \tag{8}$$

Сравнивая эту формулу с формулами (1) и (5), находим

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau};\ u = \frac{\tau}{m}. \tag{9}$$

Это — очень важные формулы. Они связывают макроскопические величины (удельное сопротивление, подвижность) с параметрами, характеризующими движение отдельных электронов. Не надо, правда, забывать, что τ — тоже средняя характеристика.

Вместо времени свободного пробега иногда удобно пользоваться понятием длины свободного пробега:

$$l = \langle v\rangle\tau, \tag{10}$$

l — расстояние, которое проходит (в среднем) электрон между двумя столкновениями, $\langle v\rangle$ — средняя скорость хаотического движения электронов. Для электронного газа, как мы уже говорили, $\langle v\rangle$ не зависит от температуры и температурные зависимости l и τ совпадают.

Теперь проверим, можно ли в действительности считать электроны проводимости свободными. Выше мы подсчитали подвижность электронов меди. Она оказалась равной $6\cdot10^{12}$ *с/г*. Отсюда и из формул (9) и (10) следует:

$$\tau \approx 2\cdot10^{-14}\ с;\ l \approx 2\cdot10^{-6}\ см, \tag{11}$$

так как $m \approx 10^{-27}$ *г*, а

$$\langle v\rangle \approx 3\cdot10^{8}\ см/с.$$

Значения τ и l полностью подтверждают наше представление о свободе электронов проводимости: между двумя столкновениями электрон проходит расстояние, в сто раз превышающее размеры атома! При понижении температуры электропроводность металлов возрастает, возрастает подвижность электронов, а следовательно, возрастает и время свободного пробега — более отчетливо проявляется свобода электрона.

Можно ли непосредственно измерить время свободного пробега электронов τ или их длину свободного пробега l? Отвечая на этот вопрос, мы не должны забывать, что в эксперименте мы всегда имеем дело со всеми электронами сразу — просто с образцом металла (проволочкой, пластинкой). Или, другими словами, следим за движением «среднего» электрона, подчиняющегося законам механики Аристотеля.

---

*) Экспериментальное определение скорости носителей заряда описано в статье В. В. Майера «С какой скоростью движутся ионы» («Квант» № 4, 1973)

) Формулу (8) можно вывести значительно более аккуратно. Постарайтесь это сделать, рассмотрев электроны, пересекающие плоскость, расположенную перпендикулярно вектору **E.

Теплопроводность.

Мы рассмотрели одну причину, заставляющую двигаться «средний» электрон,— действие электрического поля. Можно заставить двигаться электроны и другим способом: поддерживать на концах металлического образца разность температур $T_1 - T_2$. Электроны устремляются от теплого конца к холодному в попытке выравнять температуру — по металлу потечет ток. В разомкнутом проводнике возникнет электрическое поле, препятствующее движению электронов (в разомкнутом проводнике $j = 0$), но если поддерживать разность температур, то тепло будет перетекать, и переносить его будут электроны.

Противоречия в этой фразе нет: $j = 0$ означает, что от холодного и от горячего концов образца движется с одинаковой средней скоростью одинаковое число электронов. Но обе группы электронов несут различные количества тепловой энергии: группа, которая движется от нагретого конца, несет больше тепла.

Анализ процесса переноса тепла электронами показывает, что коэффициент теплопроводности (коэффициент пропорциональности между $\frac{T_1 - T_2}{L}$, где L — длина проводника, и плотностью потока тепла) равен *)

$$\varkappa = \frac{1}{3} Cl\langle v\rangle, \qquad (12)$$

где C — теплоемкость электронного газа, которая линейно зависит от абсолютной температуры (это еще одно проявление квантовых свойств газа электронов проводимости). Из формул (12), (9) и (10) видно, что из отношения $\rho\varkappa/T$ выпадают величины, зависящие от температуры *), то есть $\rho\varkappa/T$ не зависит от температуры металла:

$$\frac{\rho\varkappa}{T} = \text{const}. \qquad (13)$$

Более подробное рассмотрение показало бы, что «константа» не зависит даже от сорта металла. Для всех металлов она одна и та же. Формула (13) была получена на основании анализа экспериментальных фактов и носит название закона Видемана — Франца. Ее вывод показывает, что мы правильно понимаем «устройство» металла.

Заключение

Ясно, что, заменив хаотически движущиеся электроны одинаковыми «средними» электронами, мы упростили задачу исследования свойств металла. Но простота не дается даром. За нее надо платить. Чем же мы платим за эту простоту? Во-первых, тем, что не всегда получаем точные формулы (мы специально отметили это обстоятельство после вывода формулы для поля Холла). Во-вторых (и это самое главное), отказом от углубления наших представлений. Мы согласились выражать силу трения «среднего» электрона через подвижность, выразили подвижность через среднее время свободного пробега и... остановились. Остановились в продвижении к более полному пониманию процессов, происходящих в металле при прохождении через него электрического тока. Исследование поведения всех электронов, их взаимодействия с ионами кристаллической решетки металла позволило бы нам не только ввести подвижность и время свободного пробега, но и вычислить эти величины. Тем самым определить, как удельное сопротивление зависит от температуры.

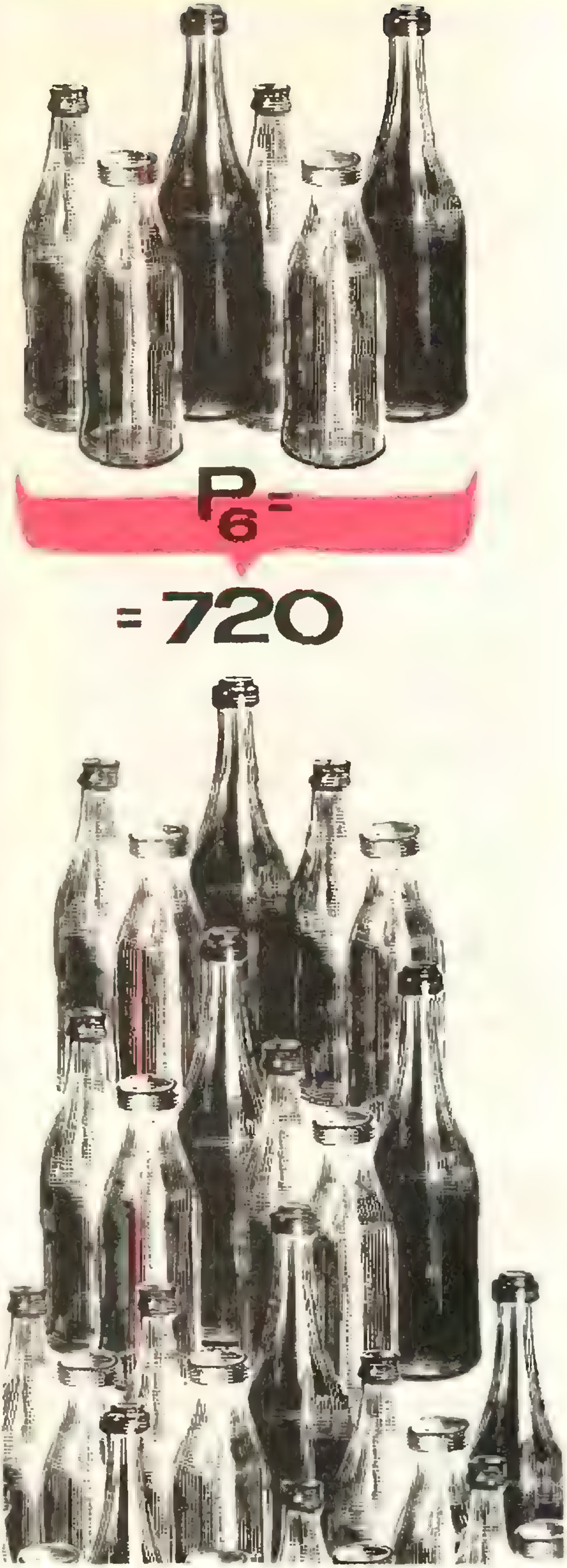
---

*) Мы говорим только об электронной части коэффициента теплопроводности. Тепло переносят не только электроны. Через диэлектрик (изолятор), в котором нет свободных электронов, тоже распространяется тепло, правда хуже, чем через металл.

*) Напомним еще раз, что среднее квадратичное значение тепловой скорости электронов $\langle v\rangle$ не зависит от температуры.

О наполнении и закупоривании бутылок

М. Л. Гервер



> *Все успел: обед разогрел,*
> *Быстро съел — за уроки сел,*
> *«Квант» почитал — в футбол*
> *поиграл...*
> *Милг. «Мисти-фисти, или*
> *сказки про пострела»*

Человек каждый день много дел разных делает. Идет утром в школу (если он школьник), домой вернется — обед разогреет и т. д. (см. эпиграф). Дела обычно менять местами можно: сначала в футбол поиграть — потом за уроки сесть, сперва обед съесть — потом его разогреть...

Стоп! С обедом что-то не вышло — не все на свете переставлять разрешается.

Это относится и к совсем серьезным вещам: высотному крану нечего делать на стройке, пока фундамент дома не заложен; нельзя «для сокращения сроков» пахать, сеять и молотить одновременно...

С тем, что задержка в одном деле может помешать начать другие, приходится считаться при планировании — *например*, когда оценивают, сколько времени потребует большой комплекс взаимосвязанных работ. В заметке на шутливом примере показано, какого рода математические задачи могут встретиться при этом.

1. Постановка задачи

Привезли на автоматическую линию бутылки, очень много: N штук. А на линии работают 2 автомата: I и II. I бутылки наполняет, II — закупо-

Таблица 1

№ бутылки	Время наполнения в секундах	Время закупоривания в секундах
1	7	10
2	9	8
3	3	1
4	2	4
5	11	6
6	5	12

ривает. Бутылки разные: с широким горлышком и с узким, высокие, пузатые — нестандартные. Про каждую бутылку известно, сколько времени уходит на ее наполнение и сколько — на ее закупоривание.

Сколько проработает автоматическая линия с момента, когда начнет наполняться первая бутылка, до момента, когда будет закупорена последняя? Это зависит от того, в каком порядке бутылки будут в автоматы попадать (например, для 6 бутылок есть $P_6=720$ таких порядков). Возникают, таким образом, два вопроса:

Как быстро определить тот порядок, при котором время работы линии будет наименьшим? И как вычислить это наименьшее время?

2. Численный пример

Начнем с примера: пусть партия из 6 бутылок характеризуется таблицей 1.

Попробуем подавать бутылки в автоматы именно в том порядке, в котором они указаны в таблице: сначала 1-ю, потом 2-ю и так до 6-й. Тогда автоматы будут работать так.

Через 7 секунд наливающий автомат наполнит 1-ю бутылку (рис. 1), через $7+9=16$ *с.* — 2-ю, через $16+3=19$ *с.* — 3-ю, через $19+2=21$ *с.* — 4-ю, через $21+11=32$ *с.* — 5-ю, через $32+5=37$ *с.* — 6-ю*).

Закупоривающий автомат покончит с 1-й бутылкой через $7+10=17$ *с.* и лишь тогда сможет заняться 2-й бутылкой (которая, тем самым, простоит наполненная целую секунду). Со 2-й бутылкой он покончит через $17+8=25$ *с.* (так что 3-я бутылка простоит в ожидании пробки уже 6 *с.*). Через $25+1=26$ *с.* будет закупорена 3-я бутылка, через $26+4=30$ *с.* — 4-я. Теперь закупоривающий автомат мог бы заняться 5-й бутылкой, но та, как мы знаем, еще не наполнена, поэтому автомат 2 *с.* простоит без дела. Через $32+6=38$ *с.* будет закупорена 5-я бутылка, а через $38+12=50$ *с.*, наконец, и 6-я.

Построим вспомогательную таблицу 2.

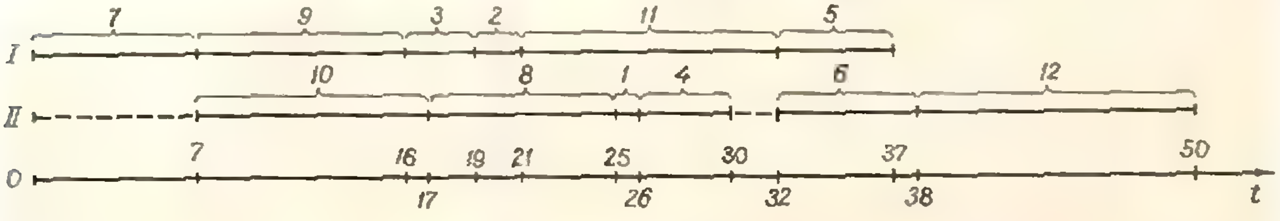


Рис. 2.

---

*) Считается, что, наполнив бутылку, автомат может, не теряя ни секунды, начать наполнять следующую.

Таблица 2

7	31+10=41	7+41=48
7+ 9=16	23+ 8=31	16+31=47
16+ 3=19	22+ 1=23	19+23=42
19+ 2=21	18+ 4=22	21+22=43
21+11=32	12+ 6=18	32+18=$\boxed{50}$
32+ 5=37	12	37+12=49

Числа, стоящие в ее первом столбце, уже знакомы нам: здесь записано, через сколько секунд автомат I наполнит первую бутылку, первые две бутылки, первые три бутылки и т. д. Этот столбец получается последовательным сложением (сверху вниз) чисел, стоящих во втором столбце таблицы 1. *Второй столбец таблицы 2 удобнее сначала читать снизу вверх:* в таком порядке, чтобы получился этот столбец, складывали числа из третьего столбца таблицы 1. Третий столбец 2 — сумма первых двух ее столбцов.

Второй столбец таблицы 2 имеет следующий смысл: если бы автомат II работал *без простоев*, то он закупорил бы все бутылки за 41 *с.*; если бы он закупоривал без простоев все бутылки начиная со 2-й, то потратил бы на это 31 *с.*; на закупоривание без простоев всех бутылок, начиная с 3-й, нужно 23 *с.* и т. д.

В нашем примере автомат II работал без простоев лишь после того, как в него попала 5-я бутылка. Она была туда подана (см. 5-ю строку таблицы 2) через 32 *с.* после начала работы автоматической линии; после этого автомат II работал 18 *с.*, так что вся работа линии длилась 50 *с.* (см. третий столбец таблицы 2).

В п. 5 мы вернемся к этому примеру, а теперь покажем, как вычислить время работы автоматической линии в общем случае — при условии, что порядок подачи бутылок на линию задан.

3. Время работы автоматической линии

В нашем примере 50 *с.* — это наибольшее число в третьем столбце таблицы 2. Это не случайно: справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть времена наполнения и закупоривания бутылок задаются таблицей 3, и пусть бутылки попадают в автоматы именно в том порядке, в котором они указаны в этой таблице. Построим по таблице 3 вспомогательную таблицу 4 (подобно тому, как выше, по таблице 1 была построена таблица 2).*

Тогда время работы автоматической линии равно наибольшему числу в третьем столбце таблицы 4.

Доказательство. Проведем две горизонтальные прямые: *I* и *II* (рис. 2.) На прямой *I* отложим (сле-

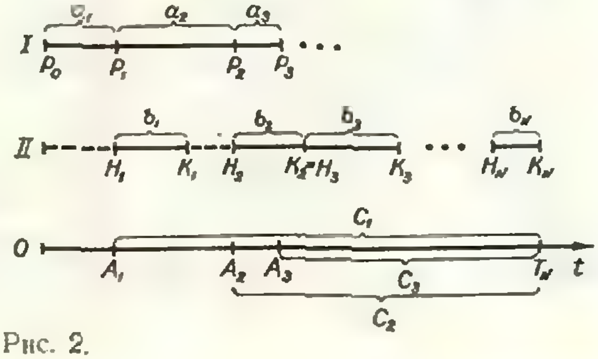


Рис. 2.

Таблица 3

№ бутылки	Время наполнения	Время закупоривания
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
. . .	. . .	. . .
$N-2$	a_{N-2}	b_{N-2}
$N-1$	a_{N-1}	b_{N-1}
N	a_N	b_N

ва направо) отрезки P_0P_1, $P_1P_2, \dots, P_{N-1}P_N$ (с длинами $a_1, a_2, \dots, a_N$). На прямой II отложим (тоже слева направо) отрезки $H_1K_1, H_2K_2, \dots, H_NK_N$ (с длинами $b_1, b_2, \dots, b_N$). Точку H_1 расположим при этом на одной вертикали с P_1, и далее — при любом i, $1 < i \leqslant N$, — точку H_i будем располагать на одной вертикали с более правой из точек P_i и K_{i-1} (это соответствует тому, что автомат II начинает закупоривать очередную бутылку, когда она наполнена и когда закупорена предыдущая бутылка). Ортогонально спроектируем на горизонтальную ось времени t точки $P_0, P_1, \dots, P_N$ в точки $O, A_1, \dots, A_N$ и точку K_N в точку T_N. Ясно, что T_N — время работы автоматической линии в рассматриваемом нами случае.

Длину отрезка A_iT_N на оси t обозначим через C_i $i = 1, \dots, N$; тогда $T_N = A_i + C_i$.

Между отрезками $H_1K_1, H_2K_2, \dots, H_NK_N$ на прямой II могут быть просветы, и точка H_i располагается либо на одной вертикали с P_i, либо правее; поэтому $C_i \geqslant B_i = b_i + b_{i+1} + \dots + b_N$. Следовательно, $T_N \geqslant A_i + B_i$ ($i = 1, \dots, N$).

Возьмем самый правый из просветов между отрезками H_iK_i. Правее его идут отрезки H_nK_n, $H_{n+1}K_{n+1}, \dots, H_NK_N$, образующие один *сплошной* (без просветов) отрезок *) длины B_n. Так как H_n не совпадает с K_{n-1} (их разделяет просвет), то H_n лежит на одной вертикали с P_n и A_n. Итак, $T_N = A_n + B_n$.

Таким образом, T_N равно максимальному из чисел $A_i + B_i$ ($i = 1, \dots, N$). Утверждение 1 доказано.

Таблица 4 строится по заданной таблице 3 чрезвычайно быстро: первые два столб-

---

*) При этом может случиться, что $n = N$.

Таблица 4

$a_1 = A_1$	$B_2 + b_1 = B_1$	$A_1 + B_1$
$A_1 + a_2 = A_2$	$B_3 + b_2 = B_2$	$A_2 + B_2$
$A_2 + a_3 = A_3$	$B_4 + b_3 = B_3$	$A_3 + B_3$
. . .	. . .	. . .
$A_{N-3} + a_{N-2} = A_{N-2}$	$B_{N-1} + b_{N-2} = B_{N-2}$	$A_{N-2} + B_{N-2}$
$A_{N-2} + a_{N-1} = A_{N-1}$	$B_N + b_{N-1} = B_{N-1}$	$A_{N-1} + B_{N-1}$
$A_{N-1} + a_N = A_N$	$b_N = B_N$	$A_N + B_N$

Таблица 5

№ бутылки	Время I	Время II
1	a	b
2	c	d

Таблица 5′

№ бутылки	Время I	Время II
2	c	d
1	a	b

ца ее получаются (каждый) за $N-1$ сложение, третий столбец — еще за N сложений (всего, таким образом, $3N-2$ сложения).

Итак, если порядок, в котором бутылки попадают на автоматическую линию, задан, то время работы линии вычисляется быстро. Остается научиться быстро определять по таблице 3 «наилучший» порядок подачи бутылок на линию, то есть такой порядок, при котором это время будет наименьшим.

4. Наилучший порядок

Сначала рассмотрим случай, когда бутылок всего две.

Пусть для одной из них времена наполнения и закупоривания равны a и b, а для другой соответственно c и d. Какой тогда порядок лучше — указанный в таблице 5 или указанный в таблице 5′?

Время работы линии в первом варианте (табл. 5) обозначим через t. В обозначениях таблицы 4 для $N=2$

$$A_1 = a, \qquad B_1 = b + d,$$
$$A_2 = a + c, \qquad B_2 = d.$$

Согласно утверждению 1 время t равно большему из чисел $A_1 + B_1$ и $A_2 + B_2$:

$$t = \max(A_1 + B_1,\ A_2 + B_2) = \max(a + b + d,\ a + c + d).$$

Обозначим сумму $a + b + c + d$ через S. Тогда формулу для t можно переписать так:

$$t = \max(S - c,\ S - b) = S - \min(b,\ c)$$

(если от S отнять меньшее из чисел b и c, то получится большее из чисел $S - b$ и $S - c$).

Аналогичная формула, разумеется, справедлива и для t', где t' — время работы линии во втором варианте (табл. 5′):

$$t' = S - \min(a,\ d).$$

Итак, если $\min(a, d) \geqslant \min(b, c)$, то $t \geqslant t'$.

Другими словами, при $N=2$ лучший порядок определяется по следующему правилу: выберем наименьшее из чисел a, b, c и d; если это a или d, то лучше первый вариант (табл. 5), если же это b или c, то — второй (табл. 5′). То есть при $N=2$ *в таблице, указывающей лучший порядок, наименьшее из чисел должно стоять либо в левом верхнем, либо в правом нижнем углу.*

На случай произвольного N последнее предложение обобщается так.

Утверждение 2. *«Наилучший» порядок можно определять по следующим правилам. Выберем в таблице 3 наименьшее из чисел a_1, b_1, ..., a_N, b_N*). Если это число равно a_k, то k-ю бутылку нужно подавать на линию самой первой; если же это число равно b_k, то k-ю бутылку нужно подавать на линию последней. Выяснив таким образом судьбу k-й бутылки, вычеркнем k-ю строку из таблицы 3. Среди оставшихся чисел a_i, b_i ($1 \leqslant i \leqslant N$, $i \neq k$) снова выберем наименьшее *). Если оно равно a_l, то l-ю бутылку отправим в начало очереди, а если оно равно b_l, то l-ю бутылку отправим в конец очереди (которую образуют все бутылки, кроме k-й). И так до последней бутылки.*

Мы докажем утверждение 2 в п. 6, а сейчас применим утверждения 1 и 2 к нашему примеру.

---

*) Если таких наименьших чисел несколько, можно взять любое из них.

Таблица 1′

№ бутылки	Время наполнения	Время закупоривания
4	2	4
6	5	12
1	7	10
2	9	8
5	11	6
3	3	1

5. Численный пример (окончание)

Наименьшее из чисел, обозначающих времена в таблице 1, равно 1. Это время закупоривания 3-й бутылки. Поэтому отправим 3-ю бутылку в самый конец очереди. Вычеркнем 3-ю строку из таблицы 1 и снова найдем наименьшее число. На этот раз оно равно 2 — это время наполнения 4-й бутылки. По нашим правилам отправляем 4-ю бутылку в начало очереди. Продолжая действовать так же, получим таблицу 1′.

Сколько будет работать линия при новом порядке? Составим, как обычно, таблицу 2′.

Максимальное число в ее 3-м столбце равно 44. Это и есть время работы линии. По сравнению со старым порядком мы выиграли 6 секунд.

Замечание: Переставим в таблице 1′ последние две строки (то есть поменяем 3-ю и 5-ю бутылки). Первые четыре *строки в таблицах 1′ и 2′ при этом не изменятся,* а последние две станут такими, как в таблицах 1″ и 2″ на странице 26.

Согласно утверждению 1 время работы линии будет по-прежнему равно 44 *с.* Таким образом, может случиться, что несколько различных порядков — «наилучшие». Утверждение 2 позволяет быстро найти один из них.

6. Доказательство утверждения 2

Выберем в таблице 3 какие-нибудь две строки, стоящие друг за другом, и поменяем их местами (см. табл. 6 и 6′).

Посмотрим, как изменится при этом таблица 4. Если мы переставим строки с номерами i и $(i+1)$, то при $k<i$ и при $k>i+1$ числа A_k и

Таблица 2′

2	$37+4=41$	$2+41=43$
$2+5=7$	$25+12=37$	$7+37=\boxed{44}$
$7+7=14$	$15+10=25$	$14+25=39$
$14+9=23$	$7+8=15$	$23+15=38$
$23+11=34$	$1+6=7$	$34+7=41$
$34+3=37$	1	$37+1=38$

Таблица 1″

3	3	1
5	11	6

Таблица 2″

23+3=26	6+1=7	26+7=33
26+11=37	6	37+6=43

Таблица 6

i	a	b
$i+1$	c	d

Таблица 6′

$i+1$	c	d
i	a	b

B_k не изменятся. Изменения произойдут только в строках с номерами i и $i+1$ (см. табл. 7 и 7′).

Тем самым

$$A_i+B_i=(A_{i-1}+B_{i+2})+a+b+d,$$

$$A'_i+B'_i=(A_{i-1}+B_{i+2})+b+c+d,$$

$$A_{i+1}+B_{i+1}=(A_{i-1}+B_{i+2})+a+c+d,$$

$$A'_{i+1}+B'_{i+2}=(A_{i-1}+B_{i+2})+a+b+c.$$

Обозначая $A_{i-1}+B_{i+2}$ через H и используя формулы для t и t' из п. 4, находим

$$\max(A_i+B_i,\quad A_{i+1}+B_{i+1})=H+t,$$

$$\max(A'_i+B'_i,\ A'_{i+1}+B'_{i+1})=H+t'.$$

Наибольшее из чисел A_k+B_k (при $k\neq i$ и $k\neq i+1$) обозначим через K. Время работы линии в двух сравниваемых между собой вариантах обозначим через T и через T'. Тогда, согласно утверждению 1,

$$T=\max(K,\ H+t),$$

$$T'=\max(K,\ H+t').$$

Ясно, что если $t\geqslant t'$, то $T\geqslant T'$*). В п. 4 мы доказали, что $t\geqslant t'$, если $\min(a,\ d)\geqslant\min(b,\ c)$.

Поэтому только что полученный результат можно сформулировать так:

Л е м м а. *Выберем в таблице 3 две произвольные соседние строки (см.*

Таблица 7

$A_{i-1}+a=A_i$	$B_{i+1}+b=B_i$	A_i+B_i
$A_i+c=A_{i+1}$	$B_{i+2}+d=B_{i+1}$	$A_{i+1}+B_{i+1}$

Таблица 7′

$A'_{i-1}+c=A'_i$	$B'_{i+1}+d=B'_i$	$A'_i+B'_i$
$A'_i+a=A'_{i-1}$	$B'_{i+2}+b=B'_{i+1}$	$A'_{i+1}+B'_{i+1}$

---

*) Отметим, что если $t>t'$, то не обязательно $T>T'$. Может случиться, что $\max(K,H+t,\ H+t')=K$ и тогда $T=T'$ независимо от того, какое из чисел t и t' больше.

табл. 6). *Если для них*

$$\min(a,\ d) \geqslant \min(b,\ c),$$

то эти строки можно переставить (см. табл. 6′), *и время работы линии при этом не увеличится.*

Отсюда уже следует утверждение 2 из п. 4. Докажем его.

Начнем с двух простых замечаний.

1) Порядок, к которому мы придем, применяя правила п. 4, не зависит от того, в каком порядке бутылки были расставлены первоначально. Поэтому достаточно доказать утверждение 2 в том случае, когда порядок, указанный в таблице 3, уже был «наилучшим» (точнее, одним из «наилучших» *).

2) Допустим, что, последовательно применяя правила п. 4, мы решили (на некотором шаге) передвинуть какую-то бутылку ближе к концу очереди: с i-го места на $(i+s)$-е. Тогда это можно сделать в s этапов: сначала переставить выбранную бутылку на $(i+1)$-е место, потом на $(i+2)$-е и т. д. То же верно и в случае, если мы должны передвинуть какую-то бутылку ближе к началу очереди: это также можно сделать в несколько этапов, меняя местами лишь рядом стоящие бутылки. Если убедиться, что на каждом этапе применима лемма, то тем самым будет доказано, что выполнение правил п. 4 не увеличивает времени работы линии. Согласно предыдущему замечанию только в этом и осталось убедиться, чтобы доказать утверждение 2.

Случаи, когда какая-то бутылка переносится в начало или в конец очереди, рассматриваются совершенно аналогично. Рассмотрим, например, второй из них.

Пусть по правилам п. 4 решено на некотором шаге перенести какую-то бутылку с i-го на $(i+s)$-е место, и пусть на этом шаге i-я и $(i+1)$-я строки задаются таблицей 6. Тогда число b является наименьшим среди чисел, обозначающих времена наполнения и закупоривания для всех бутылок, еще не расставленных к этому моменту на свои окончательные места. В частности, $b = \min(a,\ b,\ c,\ d)$. Тем самым, $\min(a,\ d) \geqslant \min(b,\ c)$. Значит, лемма применима. Точно так же доказывается, что она применима на любом этапе. Таким образом, доказательство полностью закончено.

Упражнения

1. В п. 3 мы подсчитали, что если порядок подачи бутылок на автоматическую линию задан, то время работы линии вычисляется за $3N-2$ сложения (где N — число бутылок). А сколько действий нужно произвести для определения «наилучшего» порядка?

Если называть «действием» выбор наименьшего числа в таблице из двух столбцов и произвольного числа строк, то потребуется N действий (см. утверждение 2 в п. 4). Пока N невелико, данное определение «действия» разумно,— например, можно считать, что при составлении таблицы 1′ по таблице 1 в п. 5 мы действительно потратили N действий ($N=6$). При больших N нахождение наименьшего числа в таблице явно перестает быть элементарным актом, так что «действием» разумнее назвать *сравнение двух чисел* (и выбор меньшего из них). Сколько таких действий-сравнений требуется для определения наилучшего порядка?

2. Можно рассматривать «задачу о бутылках» не для двух, а для n автоматов. (В математической литературе решенная в заметке задача известна под названием «задача Джонсона для $n=2$».)

При $n>2$ (даже при $n=3$) эта задача до сих пор не решена. Во многом это объясняется следующим. При $n=2$ добавление $(N+1)$-й бутылки к N бутылкам, уже расположенным наилучшим образом, не влияет на взаимный порядок первых N бутылок. При $n>2$ это перестает быть верным: уже при $n=N=3$ можно так задать времена $a_i,\ b_i,\ c_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ обработки трех бутылок тремя автоматами, что «в присутствии 3-й бутылки» 1-я бутылка должна подаваться на линию раньше 2-й, а «в отсутствие 3-й бутылки», наоборот, 2-я бутылка должна подаваться на линию раньше 1-й. Приведите пример, подтверждающий это.

3. Проверьте, что при $n=3$ бутылки, расставленные «наилучшим образом», подаются на каждый из автоматов в одном и том же порядке. При $n>3$ это уже не обязательно так: чтобы сделать время работы линии наименьшим, может иногда понадобиться отставить в сторону очередную бутылку, обработанную некоторым автоматом A, и на следующий автомат B подать ее уже после бутылки, которая выйдет из автомата A позже этой. Приведите соответствующий пример.

---

*) См. замечание в конце п. 5.

С корнем квадратным — сквозь историю

$$\sqrt{2}=1.41421356237309504$$

Совокупность цифр — эта бескрайняя азбука весьма выразительного языка математики — вот уже тысячелетиями поражает воображение человечества. Традиция интереса к очень крупным числам восходит, по крайней мере, к Архимеду, который, решив определить, сколько песчинок может поместиться во Вселенной, разработал систему классов и порядков арифметических величин. Он даже предложил принципы, с помощью которых можно «придумывать» названия сколь угодно больших чисел.

Однако интерес к квадратному корню из двух, видимо, возник еще раньше. В собрании Вавилонских исторических ценностей, хранящемся в Йельском университете (Нью-Хейвен, штат Коннектикут), есть круглая глиняная табличка, относящаяся к 1750 г. до нашей эры. На ней изображен рассеченный диагоналями квадрат и четкими клинописными знаками выписаны три цифры (см. фотографию). Когда их прочли, стало ясно, что без малого четыре тысячи лет назад в Вавилоне умели определять диагональ квадрата по его стороне, умножая ее длину на квадратный корень из двух. Цифры на табличке как раз и представляют собой эту величину, выведенную с точностью до пятого знака: 1, 24, 51, 10. Ну что ж, это совсем неплохое приближение к истине, ведь $1+24/60+51/60^2+10/60^3=1,41421$.

Невольно хочется повторить: это подсчитано в XVIII веке до нашей эры!

За пять столетий до нашей эры школа Пифагора сделала одно из величайших математических открытий. Пифагорейцы пытались доказать, что любое число может быть выведено путем сложения, вычитания, умножения и деления положительных целых чисел. А корень квадратный из двух — число иррациональное и конечным числом таких операций не получается. Это и было обнаружено последователями Пифагора. Однако они любили всяческую секретность и «законспирировали» свое открытие на долгие годы.

Его доказательство впервые появилось в «Началах» Евклида около 300 г. до нашей эры. А затем примерно в 140 г. нашей эры Теону из Смирны удалось разработать интереснейший алгоритм вычисления корня квадратного из двух; этот алгоритм стал предтечей всей методики использования непрерывных дробей.

В XIX веке математик Дж. М. Бурман довел вычисление квадратного корня из двух до 486-го десятичного знака. Его победа, добытая «голыми руками», омрачается тем, что в 316-м знаке Бурман допустил ошибку, и далее его вычисление уже неверно.

В последнее время интерес к подобным операциям стал не только данью традиции. «Неупорядоченные» величины, вроде корня квадратного из двух, могут служить для моделирования случайно происходящих массовых явлений, например возникновения и исчезновения рыночного

На фотографии вы видите глиняную табличку, которой около четырех тысяч лет.

Она хранится в Вавилонской коллекции Йельского университета. На ней в шестидесятиричной системе счисления, принятой в Вавилоне, записан $\sqrt{2}$ с точностью до пятого знака.

спроса, характера движения машин на шоссе в часы «пик», числа телефонных вызовов в большой сети, для составления расписания прибытия самолетов. Все это входит в круг математической теории с прозаическим названием «теория массового обслуживания».

Математикам необходимо знать, появляются ли где-либо в этой величине $\sqrt{2}$ такие последовательности, как, например, 7, 7, 7, 7, 7 или 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Подобные события теория пока предсказать не в силах, так что приходится добиваться ответа эмпирически, путем приближения и приближения к истине. Поэтому с момента появления скоростных электронных вычислительных машин математики не жалели сил и довели вычисление $\sqrt{2}$ до стотысячного знака. Недавним достижением была титаническая работа сотрудника Отдела математических методов в инженерном деле при Колумбийском университете профессора Жака Дутки (Нью-Йорк). Он специально разработал совершенно новый алгоритм и подсчитал величину пресловутого корня до миллион восемьдесят второго десятичного знака! Это наиболее длинная из всех вычисленных величин за всю историю математики.

Хотя алгоритм профессора Дутки и рассчитан на эффективное и быстрое вычисление, мощная ЭВМ «ИБМ 360-91» потратила на эту работу сорок семь с половиной часов машинного времени. А ведь обычно решение даже сравнительно сложных задач отнимает у современной ЭВМ если не секунды, то лишь минуту. К этому нужно добавить сотни часов, ушедших у группы специалистов, составлявших программу для вычислений. В напечатанном виде результат работы Дутки занимает книгу в двести одну страницу сжатого текста — 5000 десятичных знаков на каждой странице.

Теперь Дутка и его сотрудники намерены заняться числами π — отношением длины окружности к диаметру — и e — основанием натурального логарифма. Эти «орешки» будут еще труднее, чем корень квадратный из двух, но к π математики испытывают прямо-таки «историческую нежность», а e — одна из важнейших констант во всей системе исчисления, во всей высшей математике.

(The Sciences, Aug — Sept, 1971, с. 25 — 26, *перевод и переработка Б. И. Силкина*)

А. А. Егоров

Площадь под гиперболой, логарифм и экспонента

1. Введение. Определение логарифма

Показательная функция $x \to a^x$ изучается в школе после нескольких обобщений операции возвышения в степень: сначала определяются степени с натуральным показателем, затем с рациональным и, наконец, с иррациональным показателем. Логарифм определяется затем как функция, обратная показательной.

Мы поступим иначе: начнем сразу с определения логарифма, а потом перейдем к обратной функции — «экспоненте». Определение, которое мы сейчас дадим, позволит наглядно изучить основные свойства этих функций и получить оценки, особенно важные для физических приложений, а также продемонстрировать один из часто встречающихся в математике способов построения новых функций по уже известным.

Такой известной функцией послужит нам функция $x \to \frac{1}{x}$, график которой $y = \frac{1}{x}$ — знакомая вам гипербола.

Определение. Пусть b — положительное число. Обозначим через $\ln b$ число, модуль которого равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс $y = 0$ и прямыми $x = 1$ и $x = b$, а знак — плюс, если $b > 1$ (рис. 1, *а*), и минус, если $b < 1$ (рис. 1, *б*); если $b = 1$, то $\ln b = 0$. Функция $b \to \ln b$ называется *натуральным логарифмом.*

Мы увидим скоро, что $\ln b$ действительно есть логарифм числа b по основанию e, где $e = 2{,}71828\ldots$ — замечательная математическая константа, о которой уже рассказывалось в «Кванте» (см. статью Л. Г. Лиманова «О числе e и $n!$» в № 5 за 1972 г.).

Для тех, кто знаком с понятием интеграла (например, по статье Ю. И. Ионина в «Кванте» № 9), наше определение логарифма можно сформулировать так:

$$\ln b = \begin{cases} \int\limits_1^b \frac{1}{x}\,dx, & \text{если } b>1,\\ 0, & \text{если } b=1,\\ -\int\limits_b^1 \frac{1}{x}\,dx, & \text{если } 0<b<1.\end{cases}$$

Мы будем иногда ссылаться на статьи «О числе e» и «Интеграл», но лишь для сопоставления: предварительного знакомства с ними от читателя не требуется. Читателю, который хотел бы детально и строго проследить за всеми рассуждениями и решить задачи (а в них заключена значительная часть содержания статьи), потребуется знание основных свойств действительных чисел *). Однако ста-

---

*) См., например, пробный учебник Б. Е. Вейца и И. Т. Демидова «Алгебра и начала анализа», 9 класс, М., «Просвещение», 1969.

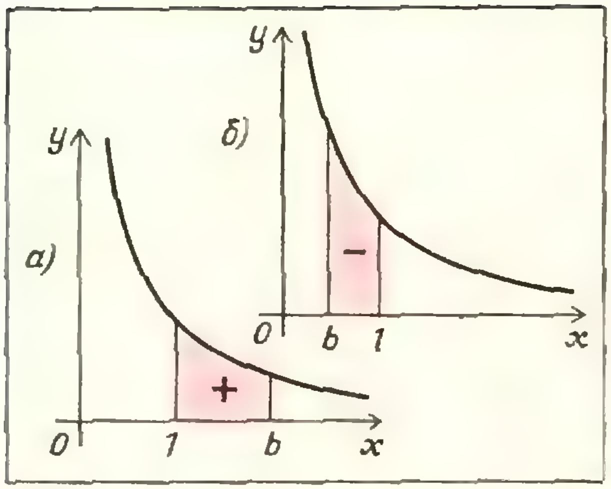


Рис. 1.

тья написана по возможности так, чтобы основные факты, касающиеся свойств логарифма и экспоненты, можно *было понять, пользуясь лишь* наивными представлениями о действительных числах, непрерывности, пределе и т. п., не вникая в тонкости, связанные со строгими определениями этих понятий.

2. Площадь

Одно из понятий, которое следовало бы строго определить, — это понятие площади. Действительно, нужно объяснить, что мы понимаем под площадью «криволинейной трапеции» (см. рис. 1). Ведь в школе речь идет только о площадях многоугольника, круга и его частей, а наша трапеция с одного бока ограничена гиперболой.

Здесь мы ограничимся замечанием, что площадь — это функция, которую можно определить на достаточно широком классе фигур (в этот класс включаются и многоугольники, и все выпуклые ограниченные фигуры, и наша «трапеция») так, чтобы выполнялись условия:

1) площадь любой фигуры — число неотрицательное;

2) площади равных (конгруэнтных) фигур равны;

3) если фигуру разрезать на две части, для каждой из которых площадь определена, то сумма этих площадей равна площади всей фигуры;

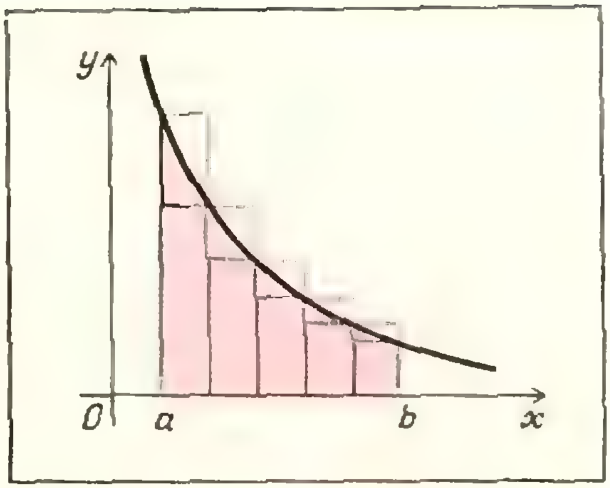


Рис. 2.

4) площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

Описывать класс фигур, для которых можно *определить такую функцию* S, мы не будем, но докажем, что условиями 1—4 площадь S «криволинейной трапеции» $a \leqslant x \leqslant b$; $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}$ (рис. 2) определяется однозначно.

Для этого разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей и построим две «лестницы» — ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $\frac{b-a}{n}$ на оси Ox, из которых одна содержит нашу криволинейную трапецию, а другая содержится в ней (рис. 2). Пусть S'_n и S''_n — площади этих «лестниц» *). Ясно, что $S'_n < S < S''_n$. С другой стороны, ясно, что

$$S''_n - S'_n = \frac{b-a}{n}\,(a^{-1} - b^{-1}),$$

то есть при достаточно большом n разность между S''_n и S'_n может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому существует только одно число S, заключенное между S'_n и S''_n при всех n (отсюда следует также, что обе последовательности S'_n и S''_n с ростом n приближаются к S, то есть, что S является их общим пределом).

---

*) Эти площади мы умеем определять с помощью условий 3 и 4.

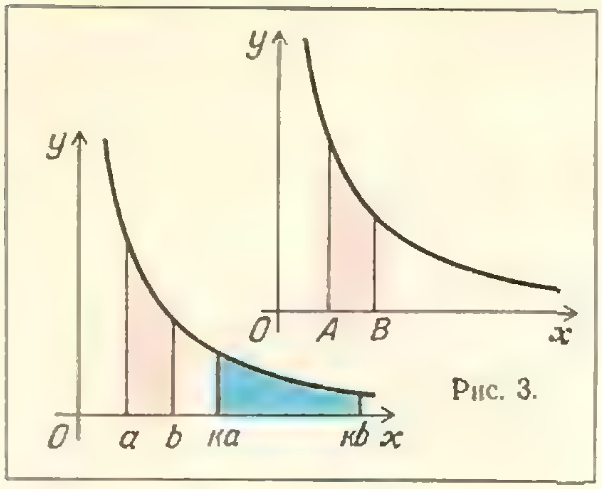


Рис. 3.

Рис. 4.

Итак, определение площади «трапеции» под гиперболой, а с ним и определение функции $y = \ln x$ уточнено.

Теперь мы выведем основное свойство натурального логарифма.

3. Основное свойство натурального логарифма

Это свойство выражается формулой

$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2 \qquad (1)$$

$$(\text{при } x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0)$$

и означает, что натуральный логарифм произведения равен сумме натуральных логарифмов сомножителей.

Прежде чем доказывать формулу (1), установим одно важное свойство криволинейных трапеций для функции $y = \frac{1}{x}$.

Обозначим через $S\,[A,\ B]$ площадь криволинейной трапеции с вершинами A, B (рис. 3). Тогда, если $b > a > 0$ и k — произвольное положительное число, то (рис. 4)

$$S\,[a,\ b] = S\,[ka,\ kb]. \qquad (2)$$

Для доказательства рассмотрим преобразование плоскости, состоящее в растяжении в k раз от оси Oy и в сжатии в k раз к оси Ox, то есть преобразование, переводящее точку $(x,\ y)$ в точку $\left(kx,\ \frac{y}{k}\right)$ (рис. 5). Легко видеть, что это преобразование переводит красную трапецию в голубую (рис. 4). В самом деле, если точка $(x,\ y)$ принадлежит красной трапеции, то $a \leqslant x \leqslant b$ и $0 \leqslant xy \leqslant 1$, но тогда $ka \leqslant kx \leqslant kb$ и $0 \leqslant (kx)\cdot\frac{y}{k} \leqslant 1$, то есть точка $\left(kx,\ \frac{y}{k}\right)$ принадлежит голубой трапеции. Наоборот, если $\left(kx,\ \frac{y}{k}\right)$ — некоторая точка голубой трапеции, то $(x,\ y)$ — точка красной.

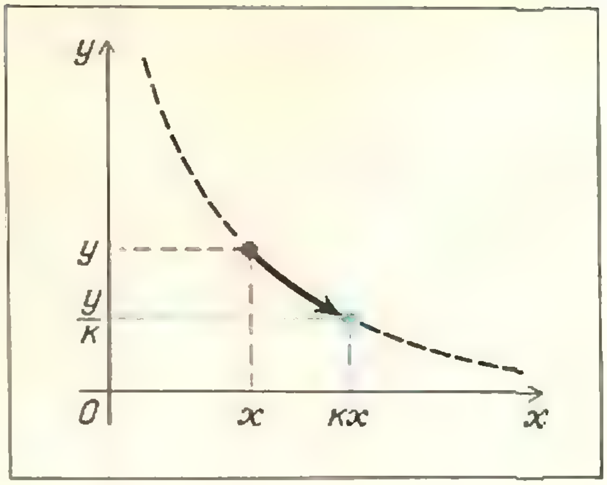


Рис. 5.

Заметим теперь, что при нашем преобразовании площадь любой фигуры не меняется. Действительно, так как не меняются площади прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (основания таких прямоугольников умножаются на k, а высоты — на $\frac{1}{k}$), то не меняются и площади ступенчатых фигур, вписанных в криволинейные трапеции, и, следовательно, площади самих криволинейных трапеций.

Итак, $S\,[a,\ b] = S\,[ka,\ kb]$ *).

Далее, вы без труда докажете, что $S\,[a,\ b] = \ln b - \ln a$ (рис. 6). Но

---

*) Те, кто читали статью про интеграл, конечно, заметили, что это равенство сразу проверяется с помощью «изменения масштаба» по x:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \int_{ka}^{kb} \frac{1}{x}\,dx\,.$$

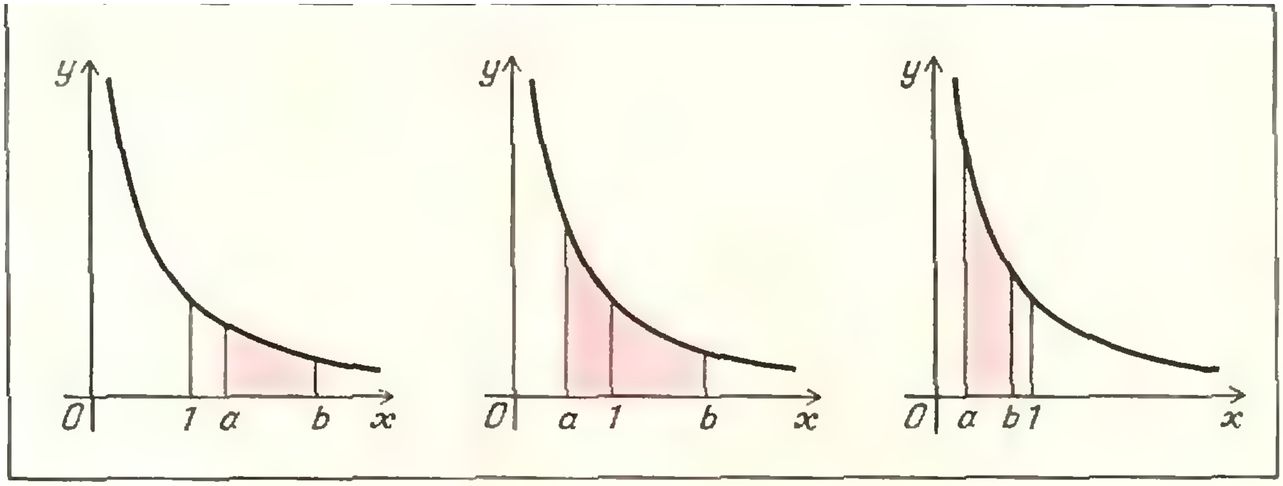


Рис. 6.

тогда

$$\ln b - \ln a = \ln kb - \ln ka. \qquad (2')$$

Хотя пока эта формула доказана лишь при $b > a$, она справедлива для любых положительных a и b: ведь при $a > b$ верно равенство

$$\ln a - \ln b = \ln ka - \ln kb,$$

равносильное (2′).

Основное свойство логарифмов сразу получается из (2′). Достаточно положить $b = x_2$, $a = 1$, $k = x_1$. В частности, при $x_2 = x_1^{-1} = x$ получаем

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}. \qquad (3)$$

Из основного свойства (1) легко выводятся следующие формулы:

$$\ln x_1 x_2 \ldots x_n = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n, \quad (4)$$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2. \qquad (5)$$

Они понадобятся нам в дальнейшем.

4. График функции $x \to \ln x$

Формула (1) позволяет уточнить поведение функции $y = \ln x$. Прежде всего убедимся в том, что $\ln x$ неограниченно возрастает при возрастании x. Действительно, так как $\ln 2 > 0$ и в силу (4) $\ln 2^n = \ln (2 \cdot 2 \cdot \ldots 2) = \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \ldots + \ln 2 = n \ln 2$, то $\ln 2^n$ при увеличении n возрастает неограниченно, а это и означает неограниченное возрастание функции $y = \ln x$ (в самом деле, $\ln x > n \ln 2$ при $x > 2^n$ — монотонное возрастание функции $\ln x$ вы без труда докажете сами).

Исследуем теперь поведение логарифма при x, близких к 0. Так как

$$\ln \frac{1}{2^n} = -\ln 2^n = -n \ln 2,$$

то при $0 < x < \frac{1}{2^n}$ получаем $\ln x < -n \ln 2$, то есть при достаточно малых x значение логарифма может быть сделано сколько угодно большим по модулю отрицательным числом.

Теперь мы можем нарисовать примерный график $y = \ln x$ (рис. 7).

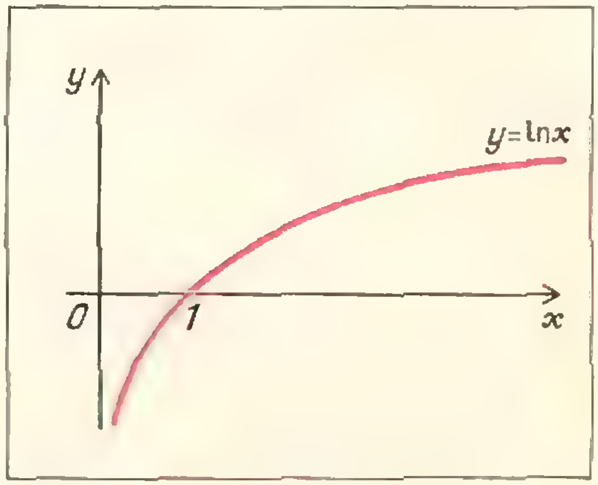


Рис. 7.

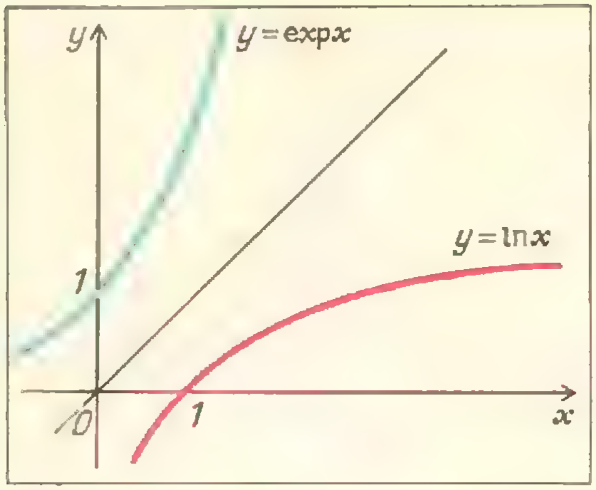


Рис. 8.

5. Экспонента

Можно доказать, что функция, изученная нами в предыдущих параграфах, принимает все действительные значения *). При этом каждое значение принимается, конечно, ровно один раз, то есть при любом x уравнение $\ln y = x$ имеет единственное решение. Для числа y, являющегося решением этого уравнения, принято обозначение

$$y = \exp x.$$

Получившаяся новая функция $x \to \exp x$, обратная к функции $x \to \ln x$, называется экспонентой.

Заметим, что по определению экспоненты справедливо равенство

$$\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x. \qquad (6)$$

График $y = \exp x$ симметричен графику $y = \ln x$ относительно прямой $y = x$. В самом деле, поскольку $y = \exp x$ равносильно $\ln y = x$, то график экспоненты получается из графика логарифма преобразованием плоскости, при котором точка (x, y) переходит в точку (y, x), а это преобразование — симметрия относительно прямой $y = x$ (рис. 8 **)).

Таким образом, экспонента — возрастающая функция, определенная на всей числовой прямой $-\infty < x < +\infty$ и принимающая положительные значения. Кроме того, экспонента принимает сколь угодно большие значения при неограниченном возрастании x и стремится к нулю при x, стремящемся к $-\infty$.

6. Основное свойство экспоненты

Это свойство выражается следующей формулой:

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2. \qquad (7)$$

Для его доказательства воспользуемся основным свойством натурального логарифма и соотношением (6). Так как $\ln y_1 y_2 = \ln y_1 + \ln y_2$, то для $y_1 = \exp x_1$ и $y_2 = \exp x_2$ получаем $\ln y_1 y_2 = x_1 + x_2$, то есть $y_1 \cdot y_2 = \exp(x_1 + x_2)$ или $\exp x_1 \cdot \exp x_2 = \exp(x_1 + x_2)$.

Из основного свойства exp (или из соответствующих свойств функции ln) легко вывести, что

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

и

$$\exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \\ = \exp x_1 \cdot \exp x_2 \ldots \cdot \exp x_n).$$

Обозначим число exp 1 через e. Другими словами, e — это решение уравнения $\ln e = 1$.

Пользуясь основным свойством экспоненты, мы докажем, что для рациональных $x = \frac{m}{n}$ $\exp x = e^x$.

Прежде всего при натуральном m

$$\exp m = \exp(1 + 1 + \ldots + 1) = \\ \exp 1 \cdot \exp 1 \cdot \ldots \cdot \exp 1 = e^m$$

и $\exp(-m) = \frac{1}{\exp m} = \frac{1}{e^m} = e^{-m}$.

Итак, $\exp m = e^m$ при любом целом m.

Кроме того, при натуральном n

$$\left(\exp \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \\ = \exp 1 = e,$$

---

*) Мы не будем этого доказывать, но заметим, что это почти очевидно «из соображений непрерывности». Строгое доказательство этого факта можно провести примерно так же, как доказательство существования $\sqrt{a}$ для любого $a \geq 0$.

**) Для того чтобы убедиться в правильности этого рисунка, вам следует доказать, что $\ln x < x$ при всех $x > 0$.

то есть

$$\exp\frac{1}{n} = \sqrt[n]{e}.$$

Для произвольного рационального $x = \frac{m}{n}$ (где $n > 0$, m и n — целые) получаем

$$\exp\frac{m}{n} = \left(\exp\frac{1}{n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{e}\right)^m = e^{\frac{m}{n}},$$

то есть $\exp x = e^x$ при любом рациональном x.

Если же α — иррациональное число, то формулу $e^\alpha = \exp\alpha$ удобнее всего считать определением степени числа e с показателем α.

Таким образом, для всех x

$$\exp x = e^x. \qquad (8)$$

Из последнего равенства и соотношения (6) следует, что логарифм данного положительного числа x — это показатель степени, в которую нужно возвести число e, чтобы получить число x:

$$e^{\ln x} = \exp \ln x = x.$$

7. Показательные функции и логарифмы с произвольным основанием

Теперь мы можем определить $y = a^x$ при любом $a > 0$, $a \neq 1$, и любом x, положив

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a},$$

а также логарифм числа $x > 0$ по основанию a, положив

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Легко убедиться в том, что для этих функций выполнены те же основные свойства:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2},$$

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

(при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$) и

$$a^{\log_a x} = x.$$

Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что эти определения совпадают с традиционными. Но в дальнейшем мы будем заниматься такими свойствами логарифмов и экспоненты, где существенно, что в роли основания берется именно число e, а не какое-то другое.

8. Скорость изменения показательной функции и логарифма

До сих пор мы говорили о свойствах логарифмов и показательных функций, которые известны из школьного курса. Сейчас речь пойдет о таких свойствах, которые связаны со скоростью изменения этих функций и которые особенно важны для приложений в физике.

Начнем с некоторых определений. Приращением Δf функции $x \to f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ называется разность $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$, приращением аргумента — разность $\Delta x = x_1 - x_0$. Отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ естественно называть *средней скоростью* изменения функции $x \to f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ (если x — время, а $f(x)$ — путь, пройденный движущимся телом к моменту x, то $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — средняя скорость движения за промежуток времени от x_0 до x_1). Пусть теперь x_0 фиксировано, а x_1 приближается к x_0. Если при этом отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ стремится к некоторому пределу, то это предельное значение — «мгновенная скорость» изменения функции в точке x_0 — называется *производной* функции $x \to f(x)$ в точке x_0 и обозначается через $f'(x_0)$. Значение производной характеризует поведение функции вблизи точки x_0.

Производная имеет наглядный геометрический смысл. Пусть M_0 — точка графика $y = f(x)$, соответствующая $x = x_0$, то есть точка с координатами $(x_0, f(x_0))$, M_1 — точка $(x_1, f(x_1))$. Проведем прямую M_0M_1. Угловой коэффициент этой прямой, то

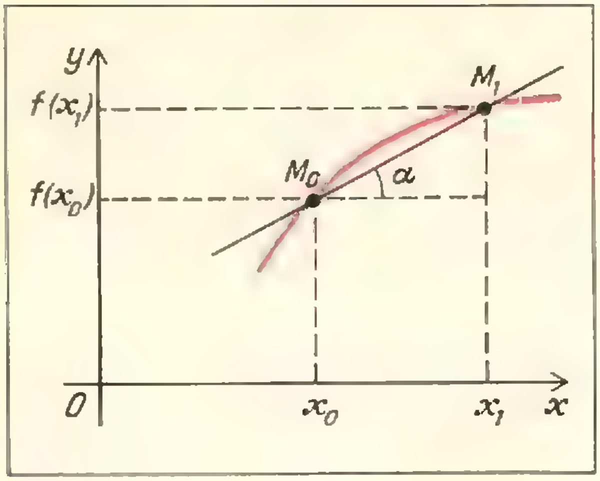


Рис. 9.

есть тангенс угла ее наклона к оси Ox равен (рис. 9)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Когда точка x_1 приближается к x_0, секущая стремится к предельному положению — к *касательной*, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0. Таким образом, значение производной при $x=x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(x_0, f(x_0))$.

Попробуем вычислить «мгновенную» скорость изменения для функции $f(x)=\ln x$. Ее приращение на отрезке $[x_0, x_1]$ равно

$$\ln x_1-\ln x_0=\ln\frac{x_1}{x_0}=$$
$$=\ln\left(1+\frac{x_1-x_0}{x_0}\right),$$

поэтому

$$\frac{\ln x_1-\ln x_0}{x_1-x_0}=\frac{1}{x_0}\cdot\frac{\ln(1+h)}{h}, \qquad (9)$$

где

$$h=\frac{x_1-x_0}{x_0}.$$

Когда x_1 стремится к x_0, величина h стремится к 0. Таким образом, остается выяснить, как ведет себя отношение $\frac{\ln(1+h)}{h}$ при малых h.

Из нашего определения логарифма, как мы вскоре увидим, легко получаются оценки, из которых следует, что при приближении h к нулю величина $\frac{\ln(1+h)}{h}$ приближается к 1, то есть

$$\ln(1+h)\approx h \text{ (при малых } h). \qquad (10)$$

Эту очень важную для приближенных расчетов формулу можно переписать еще так:

$$\exp h\approx 1+h \text{ (при малых } h). \qquad (11)$$

Отсюда мы выведем основные формулы для скорости изменения логарифма и экспоненты:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (12)$$

и

$$(\exp x)'=\exp x. \qquad (13)$$

9. Оценки натурального логарифма вблизи единицы

Вот одно из основных свойств логарифма:

$$\left|x-\frac{x^2}{x+1}\right|=\left|\frac{x}{x+1}\right|<$$
$$<|\ln(1+x)|<|x|. \qquad (14)$$

Для доказательства этих неравенств при $x>0$ достаточно сравнить площадь криволинейной трапеции $ABCD$ с площадями двух прямоугольников $AD'CB$ и $ADC'B$ (рис. 10). Действительно, площадь криволинейной трапеции равна $\ln(1+x)$, площадь $AD'CB$ равна

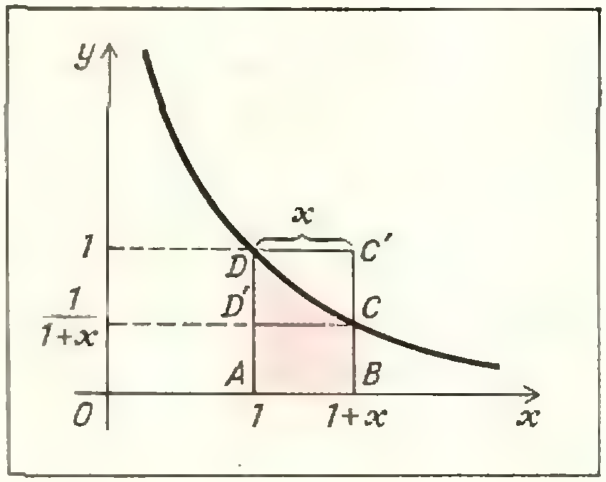


Рис. 10

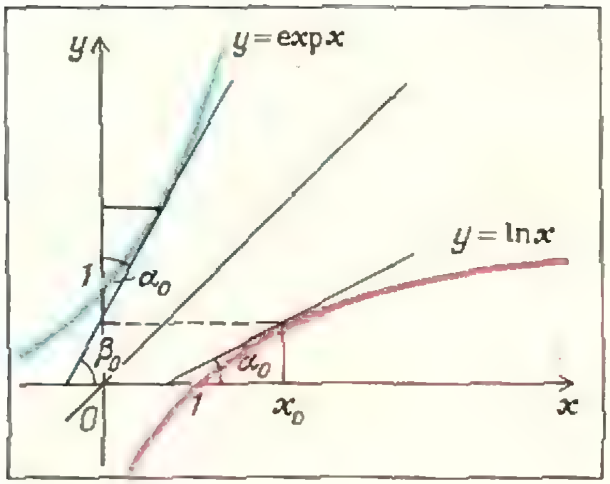


Рис. 11.

$AB\cdot BC = x\cdot\frac{1}{x+1}$, площадь $ADC'B$ равна $AB\cdot AD = x\cdot 1 = x$.

При $-1 < x < 0$ доказательство проведите сами.

Неравенства (14) позволяют оценить среднюю скорость изменения логарифма (9) так ($x_1 > x_0$):

$$\frac{1}{x_1} < \frac{\ln x_1 - \ln x_0}{x_1 - x_0} = \frac{\ln\left(1+\frac{x_1-x_0}{x_0}\right)}{x_1-x_0} < \frac{1}{x_0}.$$

Поэтому при x_1, стремящемся к x_0, средняя скорость стремится к $\frac{1}{x_0}$. Тем самым формула (12) для производной логарифма доказана. Итак, мы доказали существование касательной к графику функции $y = \ln x$ в каждой его точке и обнаружили, что при $x = x_0$ тангенс угла наклона касательной равен $\frac{1}{x_0}$.

Для нахождения углового коэффициента касательной к графику экспоненты воспользуемся тем, что этот график получается из графика логарифма симметрией относительно прямой $y = x$. Из рисунка 11 видно, что $\alpha_0+\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, а так как α_0 — угол наклона касательной к графику логарифма в точке x_0, y_0, то $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{1}{x_0}$.

Окончательно получаем

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_0\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0} = x_0 = e^{y_0},$$

то есть угловой коэффициент касательной к графику экспоненты при любом x равен значению экспоненты в точке x. Тем самым мы доказали и формулу (13).

Подчеркнем, что обе эти формулы справедливы именно для натуральных логарифмов и показательной функции с *основанием e. Для других* показательных функций скорость изменения в точке не равна, а лишь пропорциональна значению в точке x_0 (см. задачу 8).

Вернемся еще раз к неравенству (14). Из него сразу же вытекают приближенное равенство (10) и эквивалентное ему (11): ведь при $|x| \ll 1$ величина x^2 значительно меньше x (например, при $|h| < 0{,}1$ относительная погрешность формул (10) и (11) не превышает 1%, то есть отношение левой части к правой отличается от 1 не более чем на одну сотую).

Из этого же неравенства (14) нетрудно вывести замечательную формулу для числа e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

и более общую формулу для экспоненты

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad (15)$$

(см. задачу 1); другое доказательство этих формул было приведено в статье «О числе e и $n!$».

10. Разложение экспоненты в ряд

Формула (15) предыдущего пункта неудобна для вычислений, так как для обеспечения достаточной точности приходится брать очень большие значения n.

Здесь мы выведем другое выражение для экспоненты, представив ее в виде суммы бесконечного ряда слагаемых

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \dots + \frac{x^k}{1\cdot 2\dots k} + \dots \qquad (16)$$

подобно тому, как бесконечная геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + \dots$ представляет при $|x| < 1$ функцию $y = \frac{1}{1-x}$.

Такое представление удобно по двум причинам. Во-первых, для вычисления экспоненты с высокой точностью (например, при составлении таблиц) по формуле $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ хватает сравнительно небольшого числа слагаемых и, во-вторых, это разложение позволяет глубже изучить экспоненту (например, доказать иррациональность числа e (см. задачи 11, 12).

Мы ограничимся доказательством формулы (16) при $x > 0$.

Итак, пусть $T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ и $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Мы должны доказать, что

$$\lim S_n(x) = \exp x.$$

По формуле бинома получаем

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{x^2}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\,\frac{x^k}{n^k} + \dots + \frac{x^n}{n^n} = 1 + x + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!}x^k + \dots + \frac{x^n}{n^n}.$$

Числа, стоящие в правой части этого равенства в круглых скобках, все меньше единицы. Если их заменить единицами, то правая часть увеличится, так что

$$T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < S_n(x) \qquad (17)$$

С другой стороны, отбрасывая в правой части неравенства все слагаемые, кроме k первых, получим

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

При k постоянном и n, стремящемся к ∞, правая часть этого неравенства стремится к $S_k(x)$, поскольку каждый из сомножителей в круглых скобках стремится к 1, а так как $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ стремится к $\exp x$, то

$$\exp x > S_k(x)$$

при любом k, то есть последовательность $S_k(x)$ ограничена, и (при $x > 0$) возрастает. Следовательно, она имеет предел, причем

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \leqslant \exp x.$$

Кроме того, из неравенства (17) получаем, переходя к пределу при n, стремящемуся к ∞, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \geqslant \exp x.$$

Итак,

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Задачи

1. а) Докажите неравенства

$$\left|\frac{nx}{n+x}\right| < \left|n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| < |x|$$

($x > -n$; n — натуральное).

б) Выведите из этих неравенств формулу

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$; г) $\lim\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

3. Найдите площади криволинейных трапеций для функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$.

4. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n+2x}+\dots+\frac{1}{n+nx}\right)$.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}.$$

6. Докажите, что последовательность

$$c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

имеет предел.

7. Докажите, что $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\ln 2$.

8. Найдите угловые коэффициенты касательных к кривым $y=a^x$ и $y=\log_a x$.

9. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1).$$

10. Используя геометрическое определение логарифма, докажите при $x>0$ неравенства $\frac{2x}{2+x}<\ln(1+x)<\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$, выведите отсюда, что

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+x^3.$$

11. Докажите, что $0<e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)<\frac{x^n e^x}{(n+1)!}$ при $x>0$.

12. Пользуясь неравенствами предыдущей задачи, докажите, что число e а) иррационально; б) не является корнем никакого квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами ($a>0$).

Задачи

1. На плоскости нарисован треугольник ABC и проведены две пересекающиеся прямые. Точки P и Q движутся равномерно по этим прямым, причем точку пересечения прямых они проходят не одновременно. В каждый момент времени строится точка R такая, что треугольник PQR подобен треугольнику ABC, причем преобразование подобия сохраняет ориентацию треугольника.

Найти геометрическое место точек R.

2. Обозначим через $\varphi(n)$ количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Выразить через $\varphi(n)$ количество правильных звездчатых многоугольников (то есть самопересекающихся многоугольников, все стороны которых равны и все углы равны).

3. Точка P лежит на окружности, описанной вокруг правильного $(2n+1)$-угольника, причем P лежит между вершинами A_1 и A_{2n+1}.

Доказать, что сумма расстояний от точки P до вершин с нечетными индексами равна сумме расстояний от нее до вершин с четными индексами.

4. В треугольниках ABC и DEF дано, что $AB=DE$, $AC=DF$ и $\angle BAC>\angle EDF$. Доказать, что $\angle ABC$ меньше, равен или больше, чем $\angle DEF$, в зависимости от того, будет ли сумма $\angle ACB+\angle DFE$ меньше, равна или больше 180°.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Доказать, что если $BO=OD$ и $AB+BC=AD+DC$, то этот четырехугольник или является параллелограммом, или симметричен относительно диагонали AC.

А. А. Варламов,
Д. В. Казаковцев

Выращивание кристаллов

В этой статье рассказывается о работе, проделанной в Киевском Доме пионеров Андреем Варламовым и Дмитрием Казаковцевым, когда они учились в 9 классе школы № 145 г. Киева.

Предлагаем вам самостоятельно проделать описанные опыты. Тем, кто заинтересуется выращиванием кристаллов, можем порекомендовать прочитать статью М. О. Клия «Как вырастить кристалл» («Квант» № 5, 1970).

На рисунке 1 вы видите фотографию кристалла, выросшего в естественных условиях. Этот кристалл состоит из мелких кристалликов пирита и кальцида. Многие кристаллы имеют довольно причудливую форму. В природе кристаллы растут на протяжении миллионов лет. А нельзя ли ускорить этот процесс? Оказывается, можно. Промышленность уже давно снабжает технику искусственными кристаллами. Тем интереснее получить их самостоятельно. Именно такую задачу мы и поставили перед собой.

Теорию роста кристаллов мы излагать не будем, с ней можно ознакомиться по статье Р. Фуллмана «Рост кристаллов» («Квант № 6, 1971). Перейдем сразу к обзору методов выращивания монокристаллов.

Самый простой, но очень важный метод — выращивание кристаллов из растворов. К нему относится, в первую очередь, выращивание кристаллов путем постепенного снижения температуры раствора. Этот метод основан на свойстве многих кристаллических веществ изменять свою растворимость с изменением температуры. Он хорош тем, что не требует сложной аппаратуры и позволяет выращивать кристаллы очень многих веществ. Однако он пригоден только для хорошо растворимых соединений. При выращивании кристаллов малорастворимых веществ нужна громоздкая установка, чтобы вместить достаточное количество раствора.

Другой способ — испарение растворителя. При этом создается небольшое пересыщение раствора, за счет которого и идет кристаллизация. Одним из недостатков этого способа является появление кристаллов-паразитов там, где стенки сосуда граничат с поверхностью испаряющегося раствора. Но этот способ очень прост и потому широко используется. Подливая по мере испарения новые порции насыщенного раствора, можно вырастить и кристаллы малорастворимых соединений.

Интересен способ, предназначенный для выращивания кристаллов труднорастворимых соединений в том случае, если существуют два хорошо растворимых компонента, дающих в результате реакции интересующее нас вещество. Оба компонента растворяют в отдельных сосудах. Затем при непрерывном размешивании раствор одного из них при помощи бюретки вводится по каплям в раствор второго. Образующегося при реакции пересыщения достаточно для кристаллизации нужного нам вещества.

Мы выбрали самый простой способ — испарение растворителя. Установка представляла собой сосуд из органического стекла емкостью около 750 *мл*. В него налито примерно 600 *мл* насыщенного раствора медного купороса. По мере испарения в сосуд подливались новые порции раствора. Верхнюю часть стенок мы смазали тонким слоем вазелинового масла. Поэтому стенки не смачивались раствором, и кристаллы-паразиты на них почти не появлялись.

Первоначально из поликристаллической массы медного купороса мы отобрали семь кристалликов более или менее правильной формы. Каждый был опущен на тонкой (0,15 *мм*) лесе в сосуд с насыщенным раствором медного купороса. По мере роста удалялись неудачные кристаллы, обросшие паразитами и потерявшие типичную для монокристаллов медного купороса форму. Через две недели осталось только три лучших кристалла, а через месяц — всего один. Он был уже довольно велик, поэтому линейный рост его замедлился из-за большой поверхности кристаллизации. Вместо обычного в таких случаях перемешивания раствора мы решили вращать сам кристалл. Для этого подвесили его на лесе (длиной около 0,7 *м*), конец которой укрепили на оси микродвигателя. За 10—12 секунд работы двигателя леса закручивалась настолько, что после закрепления оси обеспечивала медленное вращение монокристалла в течение примерно получаса. Пожалуй, проще было бы просто перемешивать раствор вращающейся от микроэлектродвигателя мешалкой. В течение всего времени эксперимента сосуд был прикрыт целлофаном, чтобы в него не попадала пыль.

Несколько необычно мы получили второй кристалл. Во время более интенсивного испарения (при понижении относительной влажности и повышении температуры) возникало большое пересыщение. Пока сам кристалл был мал, его рост не мог скомпенсировать испарение. Поэтому на неровностях лесы начинали расти кристаллы-паразиты. Один из них нам так понравился, что мы вырастили его отдельно. В этом случае не было затравки, внесенной в раствор извне, весь кристалл был выращен в нашем растворе. Полученный кристалл имел более правильную форму, так как он был свободен от дефектов затравки.

Рис. 1.

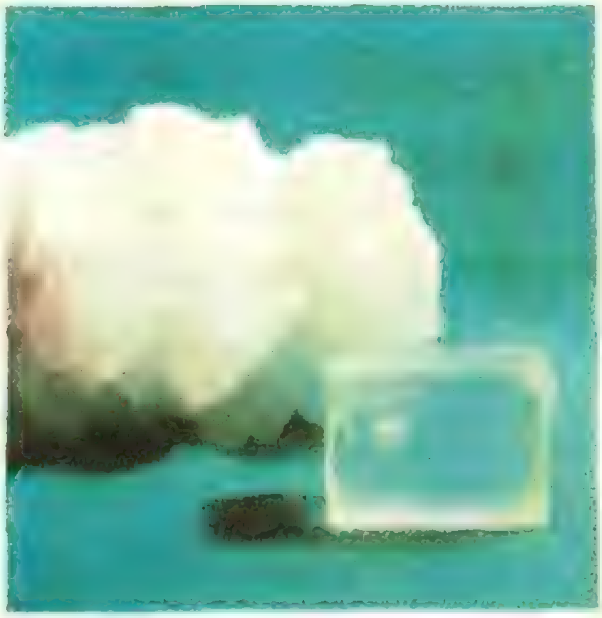


Рис. 2. Искусственно выращенный кристалл галида (каменной соли).

Задачник «Кванта»

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 августа 1973 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М206, М207» или « . . . Ф218».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «. . . новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.

В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).

Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М206-М210, Ф218-Ф222

М206. Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n, взаимно простого с числом 10, в последовательности можно указать такую группу стоящих подряд цифр, что записываемое этими цифрами число делится на n.

В. Уфнаровский

М207. Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Опишите вокруг треугольника $A_1A_2A_3$ треугольник $M_1M_2M_3$ наибольшей площади, подобный треугольнику $B_1B_2B_3$ (при этом вершина A_1 должна лежать на прямой M_2M_3, вершина A_2 — на прямой M_3M_1, вершина A_3 — на прямой M_1M_2).

Н. Д. Нагаев

М208. Известно, что разность между наибольшим и наименьшим из вещественных чисел

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{10}$$

равна 1. Какой

а) наибольшей,

б) наименьшей

может быть разность между наибольшим и наименьшим из 10 чисел

$$x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \ldots;\ \frac{x_1+x_2+\ .\ .\ .\ +x_{10}}{10}?$$

Каков будет ответ, если чисел не 10, а n?

В. Б. Пеллер

М209. Для любого треугольника ABC можно вычислить такую сумму:

$$S = \mathrm{tg}^2\, A/2 + \mathrm{tg}^2\, B/2 + \mathrm{tg}^2\, C/2.$$

Докажите, что

а) $S < 2$ для всех остроугольных и прямоугольных треугольников;

б) $S > 2$ для тупоугольных треугольников с тупым углом, большим $2\ \mathrm{arctg}\ {}^4/_3$;

в) среди треугольников с тупым углом φ таким, что $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$, имеются и такие, что $S > 2$, и такие, что $S < 2$.

М. Л. Гервер

М210*. Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В такой последовательности разрешается поменять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько всего существует неэквивалентных последовательностей?

Г. А. Гуревич

Ф218. Железнодорожный состав идет с постоянной скоростью $v = 72$ *км/ч* по горизонтальному участку пути. На сколько должна измениться мощность, развиваемая локомотивом, чтобы состав с той же скоростью продолжал двигаться во время сильного вертикального дождя. Считать, что каждую секунду на состав падает $m = 100$ *кг* воды, которая затем стекает на землю по стенкам вагонов. Изменением сил трения пренебречь.

С. М. Козел

Ф219. В вертикальном цилиндре имеется n молей идеального одноатомного газа. Цилиндр закрыт сверху поршнем массы M и площади S. Вначале поршень удерживался неподвижным, газ в цилиндре занимал объем V_0 и имел температуру T_0. Затем поршень освободили, и после нескольких колебаний он пришел в состояние покоя. Пренебрегая в расчетах всеми силами трения, а также теплоемкостью поршня и цилиндра, найти температуру и объем газа при новом положении поршня.

Вся система теплоизолирована. Атмосферное давление равно P_a.

Ф220. Экран освещается параллельным пучком лучей, перпендикулярным плоскости экрана. Как изменится освещенность экрана, если на пути света поставить призму ABC с малым углом раствора α и показателем преломления n, причем грань AB параллельна экрану (рис. 1)? Отражением света от призмы пренебречь.

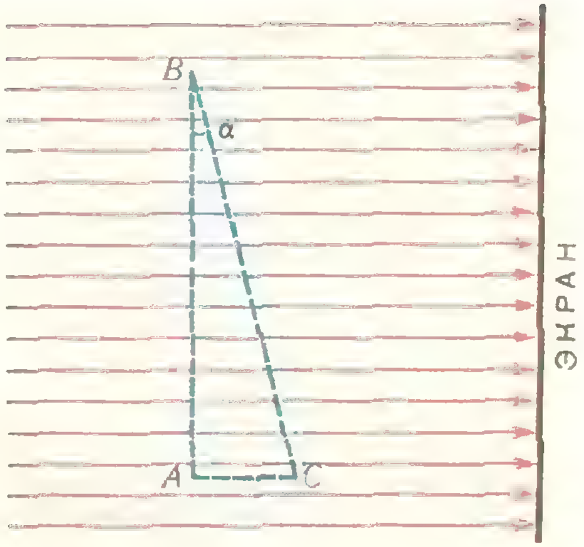


Рис. 1.

Ф221. На неподвижном круглом цилиндре радиуса R лежит доска, как показано на рис. 2. Толщина доски равна h. При каком соотношении между h и R равновесие доски будет устойчивым? Трение между доской и цилиндром велико.

В. Д. Кривченков

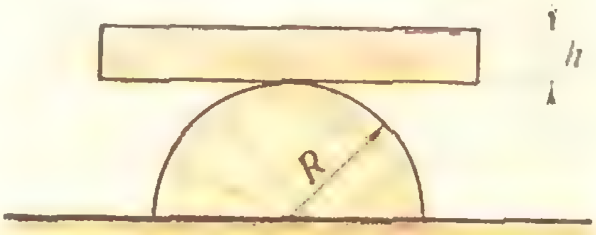


Рис. 2.

Ф222*. Громоотвод соединен с землей при помощи тонкостенной трубки диаметром 2 *см* и толщиной стенок 2 *мм*. После удара молнии трубка мгновенно превратилась в круглый стержень. Объясните это явление и оцените силу тока разряда, если известно, что при сжатии цилиндрический образец диаметром 3 *мм*, сделанный из того же материала, что и трубка, разрушается при силе 140000 *н*.

П. Л. Капица

Решения задач

М165-М169, Ф183-Ф187

М165. *На окружности расположено множество F точек, состоящее из 100 дуг. Известно, что при любом повороте R окружности множество $R(F)$ имеет общую точку с F. (Другими словами, для любого α от 0° до 180° в множестве F можно указать две точки, отстоящие друг от друга на α.) Какую наименьшую сумму длин могут иметь 100 дуг, образующих множество F? Каков будет ответ, если дуг не 100, а n?*

Решим задачу для n дуг.

Обозначим сумму длин n дуг, образующих множество F через S *).

S может быть сколь угодно близко к $\frac{180^\circ}{n}$. Достаточно привести пример: располагаем $(n-1)$ дугу, длина каждой из которых равна $\frac{a^\circ}{n}$ так, чтобы центры любых двух соседних отстояли на $\frac{180^\circ}{n}$, а за $(n-1)$-й помещаем n-ю дугу с длиной $\frac{180^\circ}{n}$ так, чтобы расстояние между их ближайшими концами равнялось $\frac{180^\circ}{n}$.

Легко проверяется, что указанная система дуг удовлетворяет условию задачи. При соответствующем выборе a° сумма длин дуг будет как угодно близка к $\frac{180^\circ}{n}$.

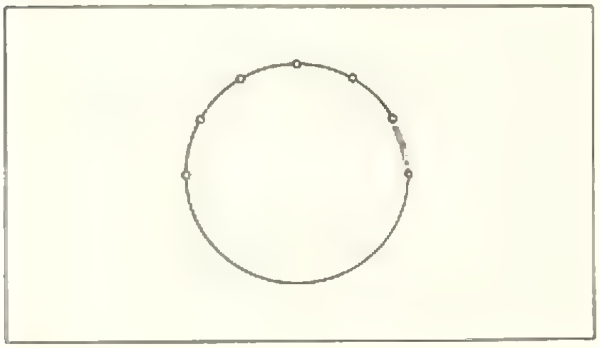


Рис. 1.

Если же точку на окружности считать дугой нулевой длины, то, заменив в примере все дуги, кроме последней, на точки, получаем множество F с суммой длин дуг, равной $\frac{180^\circ}{n}$ (рис. 1).

Докажем, что сумма S длин дуг не может быть меньше этого числа. Представим себе, что мы имеем два экземпляра нашей окружности, на которых размещены те же самые n дуг. Повернем одну из окружностей на угол φ, $0 < \varphi < 360^\circ$. Рассмотрим множество U_{ij} всех таких значений φ, для которых при таком повороте i-я дуга повернутой окружности пересекается с j-й дугой неподвижной окружности. Нарисуем отдельно «контрольную» окружность (с выбранной на ней начальной точкой $\varphi = 0$ (рис. 2)) и отметим на ней множества U_{ij} для всех i, j от 1 до n. Ясно, что U_{ij} является дугой с длиной, равной сумме длин i-й и j-й дуг.

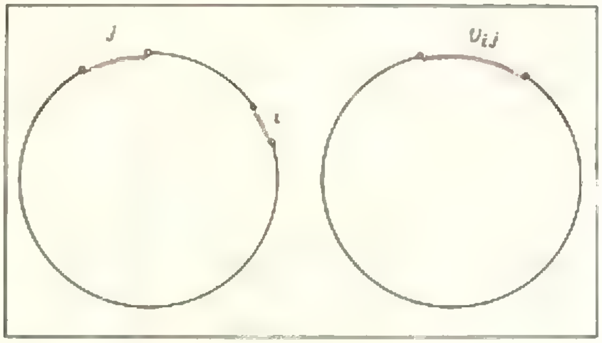


Рис. 2.

Отмеченные множества U_{ij} должны заполнять всю «контрольную» окружность, так как при любом повороте какие-то две дуги нашего множества должны пересекаться, поэтому сумма длин всех U_{ij} не меньше 360°. С другой стороны, эта сумма равна $2n \cdot S$, так как каждая дуга множества входит в сумму $2n$ раз.

Отсюда получаем, что $S \geqslant \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$.

Нетрудно заметить, что неравенство должно быть строгим (если отдельные точки не считать дугами), так как любые две области U_{ii} и U_{jj} имеют общий участок, содержащий начало отсчета.

Ю. П. Лысов

М166. а) *Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристских похода. В первом походе мальчиков было меньше 2/5 общего числа участников этого похода и во втором — тоже меньше 2/5. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше 4/7 общего числа учеников, если известно, что*

---

*) Поскольку нас интересует только относительная длина дуг, мы будем измерять ее в градусах.

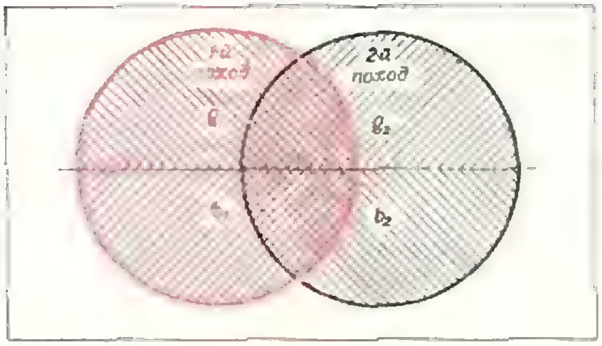


Рис. 3.

каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

б) *Пусть в i-м походе ($i = 1, 2, \dots, n$) мальчики составляли α_i часть общего количества участников этого похода. Какую наибольшую долю могут составлять мальчики на общей встрече всех туристов (всех, кто был хотя бы в одном из n походов)?*

а) В первом походе, как видно из условия, количество мальчиков было меньше 2/3 количества девочек — участниц этого похода. Тем более оно меньше 2/3 общего количества девочек — учениц класса. Точно так же мальчиков — участников второго похода — меньше 2/3 общего количества девочек в классе. Поскольку каждый ученик был хотя бы в одном походе, всего мальчиков в классе меньше 4/3 количества девочек. Следовательно, мальчиков в этом классе не больше 4/7 общего числа учеников.

С помощью обозначений, которые ясны из рис. 3 (b и g — первые буквы английских слов *boy* и *girl*), наше решение можно записать так.

По условию $5b_1 < 2(b_1 + g_1)$, откуда $3b_1 < 2g_1 \leqslant 2g$. Точно так же доказывается, что $3b_2 < 2g_2 \leqslant 2g$. Поскольку $b \leqslant b_1 + b_2$, получаем

$$3b \leqslant 3b_1 + 3b_2 < 4g,$$

откуда $7b < 4(b + g)$.

б) Эта задача решается аналогично. Пусть b_i и g_i — число мальчиков и девочек в i-м походе, b и g — число мальчиков и девочек на общей встрече. Тогда по условию $b_i = \alpha_i(b_i + g_i)$, откуда $(1 - \alpha_i)b_i = \alpha_i g_i \leqslant \alpha_i g$, поэтому если все $\alpha_i < 1$, то

$$b \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} g\right) = g \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i},$$

откуда

$$b\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right) \leqslant (b + g) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$$

(здесь $\sum\limits_{i=1}^{n}$ — знак суммирования:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n).$$

Итак, мы доказали, что если $\alpha_i < 1$ для всех i, то мальчики будут составлять не более $\frac{c}{1+c}$ от общего числа участников походов, где $c = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$.

Нужно еще убедиться в то, что эта граница может достигаться. Для этого требуется, чтобы все написанные неравенства превратились в равенства. Легко понять, что это будет так, если девочки во всех походах были одни и те же, а мальчики — разные, то есть каждый из мальчиков был только в одном походе. Покажем, что это может быть при любых α_i. Пусть $\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} = \frac{m_i}{N}$ (числа α_i и, следовательно, $\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$ рациональные; мы можем записать $\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$ в виде дробей с одним и тем же знаменателем). Тогда, если в i-м походе N (одних и тех же) девочек и m_i (разных) мальчиков, то на встречу придут $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ мальчиков и N девочек; отношение M к N как раз равно c, а отношение M к $M + N$ равно $\frac{c}{1+c}$.

Вернемся для примера к задаче а).

Если количество походов $n = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{5}$, то точной оценкой доли мальчиков является число $\frac{c}{1+c}$, где

$$c = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

то есть число $\frac{c}{1+c} = \frac{4}{7}$. Здесь $\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} = \frac{2}{3}$ ($i = 1, 2$), если в каждом походе были 3 (одни и те же) девочки и 2 мальчика (в первом походе — одни, во втором — другие), то всего 7 участников, из них 4 мальчика. (Если вам кажется, что 7 — слишком маленькое количество учеников в классе, то можете умножить одновременно все числа: 3, 2, 7 и 4, скажем, на 4 или на 5; поскольку нас интересуют только их отношения, это не повлияет на результат). Таким образом, число 4/7 в условии задачи а) нельзя заменить меньшим.

Возвращаясь снова к задаче б), заметим, что если $\alpha_j = 1$ для некоторого j (хотя бы для одного), то мы уже не можем дать никакой (отличной от 1) оценки сверху для доли мальчиков на общей встрече (не зная, сколько участников в каждом походе). Действительно, если, независимо от других походов, взять число участников j-го похода очень большим (все они — мальчики), то долю мальчиков на общей встрече можно сделать сколь угодно близкой к 1.

М167. *Докажите, что в любой арифметической прогрессии a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + nd$, ..., составленной из натуральных чисел, найдется бесконечно много членов, в разложение которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.*

Многие читатели, как показывают письма, не поняли условия задачи. Разберемся в нем подробнее.

Как известно, любое натуральное число N можно разложить на простые множители:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

и такое разложение единственно. В задаче **М167** требуется доказать, что в любой арифметической прогрессии из натуральных чисел можно выбрать такое бесконечное множество членов, что простые множители p_1, p_2, ..., p_r в разложении каждого из них — те же самые для всех этих членов (а степени α_1, α_2, ..., α_r могут быть, конечно, разными). Перейдем теперь к решению задачи.

Прежде всего заметим, что если первый член a и разность d прогрессии имеют общий наибольший делитель $q > 1$, то на q можно разделить все члены прогрессии. Ясно, что достаточно решить задачу для этой новой прогрессии, поскольку если какие-то члены новой прогрессии имеют одни и те же простые множители, то и после умножения на q они будут иметь одни и те же простые множители. Итак, мы можем считать, что a и d взаимно просты. Верна такая лемма: *если НОД $(a, d) = 1$, то существует такое k, что $a^k - a$ делится на d* (мы напомним ниже, как это доказывается).

Тогда при любом целом $m > 0$

$$a^{km} - a = (a^k - a)(a^{k(m-1)} + a^{k(m-2)} + \dots + 1)$$

делится на d, то есть $a^{km} - a = nd$, где n — целое число. Таким образом, для каждого натурального m число $a^{km} = a + nd$ входит в нашу прогрессию. Таким образом, существует бесконечно много членов прогрессии, являющихся некоторой степенью ее первого члена a. Ясно, что все эти члены имеют одни и те же простые множители.

Доказательство леммы. Рассмотрим последовательность чисел a, a^2, a^3, ... В ней найдутся два числа, дающие одинаковый остаток при делении на d. Пусть это будут a^s и a^t $(s < t)$. Тогда их разность $a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1)$ делится на d. Поскольку a и d взаимно просты, то $a^{t-s} - 1$ делится на d, поэтому $a^{t-s+1} - a$ делится на d, то есть k можно взять равным $t - s + 1$.

Это рассуждение уже приводилось в статье «Малая теорема Ферма» («Квант» № 10, 1972). Там же было сказано, что в роли k можно взять число $\varphi(d)$ — количество чисел, меньших d и взаимно простых с ним. («Теорема Эйлера»: $a^{\varphi(d)} - 1$ делится на d, если НОД $(a, d) = 1$).

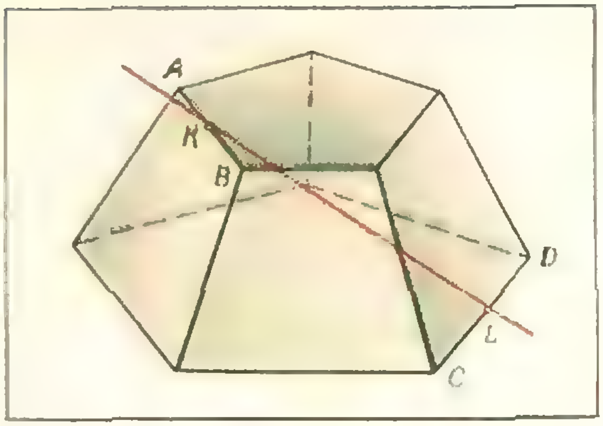


Рис. 4.

М168. *В правильной усеченной пирамиде (рис. 4) точка K — середина некоторой стороны AB верхнего основания, L — середина некоторой стороны CD нижнего основания. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую KL равны по длине.*

Если a и b — два отрезка (на плоскости или в пространстве), то проекцию отрезка a на прямую, на которой лежит отрезок b, мы будем обозначать через $\text{пр}_b a$. Тогда (рис. 5)

$$\text{пр}_b a = a \cos\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между прямыми, на которых

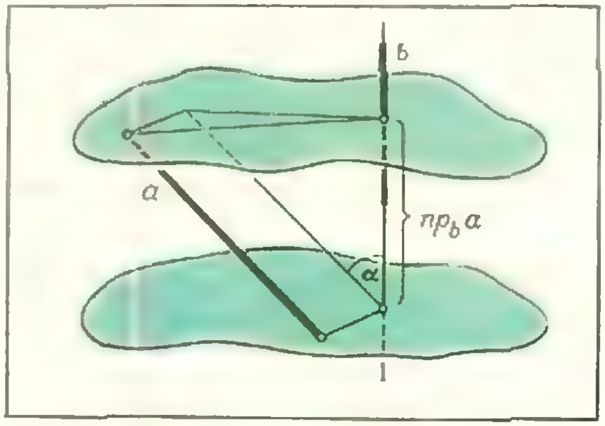


Рис. 5.

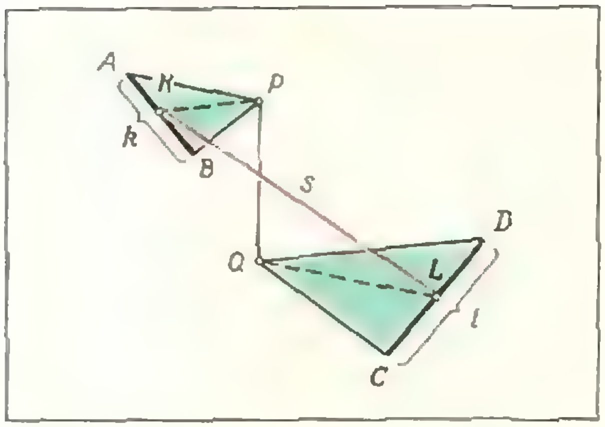


Рис. 6.

лежат отрезки a и b. (В этой и следующих формулах a, пр$_a b$ и т. п. означают длины соответствующих отрезков.) Наименьший угол между прямыми не превосходит $\pi/2$, поэтому $\cos\alpha \geqslant 0$. Из (1) следует равенство

$$a\,\text{пр}_a b = b\,\text{пр}_b a, \qquad (2)$$

которое пригодится нам при решении задачи.

Обозначим через P центр верхнего, а через Q — центр нижнего оснований пирамиды. Мы докажем следующий факт, несколько более общий, чем нужное нам утверждение задачи **М168**.

Пусть плоскости двух подобных равнобедренных треугольников ABP и CDQ с вершинами P и Q перпендикулярны отрезку PQ (и, тем самым, параллельны между собой). Обозначим отрезок, соединяющий середины K и L оснований AB и CD, через s. Тогда (рис. 6).

$$\text{пр}_s k = \text{пр}_s l. \qquad (3)$$

Пользуясь (2), мы вместо (3) можем доказывать такое равенство:

$$k\,\text{пр}_k s = l\,\text{пр}_l s. \qquad (4)$$

Теперь воспользуемся тем, что как это следует из (1), длина пр b_a не меняется при параллельном переносе отрезков a и b. Поэтому мы можем спроектировать отрезок $k = AB$ на плоскость треугольника CDQ и получим:

$$\text{пр}_{A'B'}K'L = \text{пр}_{A'B'}KL = \text{пр}_{AB}KL = \text{пр}_k s, \qquad (5)$$

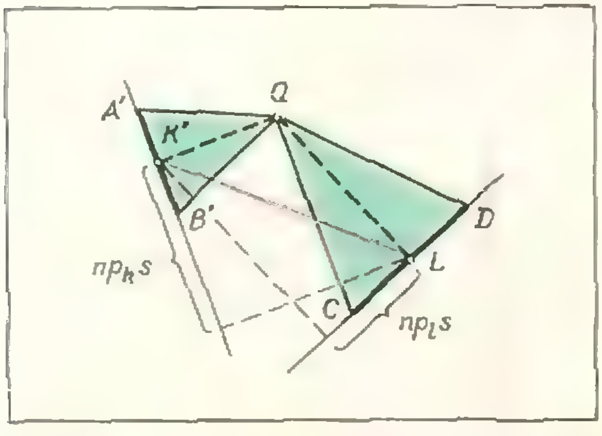


Рис. 7.

где A', B' и K' — проекции точек A, B и K на плоскость CDQ (рис. 7). Таким образом, мы свели задачу к тому случаю, когда оба треугольника лежат в одной плоскости (и имеют общую вершину).

Если отрезки AB и CD параллельны, то равенство (4) очевидно, поскольку обе проекции равны нулю. Если эти отрезки непараллельны, то получаем:

$$\frac{k}{l} = \frac{A'B'}{CD} = \frac{QK'}{QL} = \frac{\sin\angle QLK'}{\sin\angle QK'L} = \frac{|\cos\angle K'LC|}{|\cos\angle LK'B'|} = \frac{\text{пр}_l s}{\text{пр}_k s},$$

откуда следует (4).

М169. *Пусть $k < n$ — натуральные числа. Расставьте числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ в таблицу $n \times n$ так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в k-м столбце была а) наименьшей; б) наибольшей.*

Решим сначала задачу а).

Если расставить числа так, как показано в таблице 1, a — сначала заполнить первые k-столбцов, строку за строкой, числами от 1 до kn, а затем оставшимися числами заполнить последние $(n-k)$ столбцов (как угодно, лишь бы выполнялось условие возрастания чисел в каждой строке)— то сумма чисел в k-м столбце будет равна

Таблица 1a

				k		
1	2	. . .	$k-1$	k	$nk+1$	. . .
$k+1$	$k+2$	. . .	$2k-1$	$2k$		
$2k+1$	$2k+2$	. . .	$3k-1$	$3k$		
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . .			
$(n-1)k+1$		. . .	$nk-1$	nk	. . .	n^2

$$k(1+2+\ldots+n) = \frac{kn(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Мы докажем, что это значение суммы является наименьшим. Сначала докажем, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа k-го столбца, занумерованные в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_i < \ldots < a_n \qquad (2)$$

то

$$a_i \geqslant ki. \qquad (3)$$

Действительно, рассмотрим числа, стоящие в тех же строках, где стоят $a_1, a_2, \ldots, a_i$, и в первых k столбцах. Из условия (2) и условия, что числа в строках стоят в возрастающем порядке, следует, что эти ki чисел не превосходят числа a_i. Следовательно, среди чисел $1, 2, 3, \ldots, n^2$ имеется по крайней мере ki чисел, не превосходящих a_i. Отсюда вытекает (3). Сложив неравенства (3) по всем

$i = 1, 2, \ldots, n$, получим справа сумму (1), поэтому

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \frac{kn(n+1)}{2}.$$

Задачу б) можно решать аналогично, начиная с «самых больших» чисел и с самых правых столбцов. Но можно просто свести ее к уже решенной задаче а). Заменим в таблице каждое число a на (n^2+1-a) и затем переставим числа в каждой строке в обратном порядке. Ясно, что это — взаимно-однозначное преобразование множества таблиц из чисел $1, 2, \ldots, n^2$, удовлетворяющих условию задачи. При этом преобразовании каждое число в k-м столбце новой таблицы A' равно числу в той же строке и в $(n+1-k)$-м столбце старой таблицы A; поэтому сумма чисел в k-м столбце таблицы A' равна $n(n^2+1)-S$, где S — сумма чисел в $(n+1-k)$-м столбце A. Так что достаточно решить задачу а) для столбца с номером $(n+1-k)$, и мы получим решение задачи б) для столбца с номером k; ответ можно записать так: максимальная сумма в k-м столбце равна

$$n(n^2+1) - \frac{(n+1-k)\,n(n+1)}{2} = \frac{n\,[(n-1)^2 + k(n+1)]}{2}.$$

Таблица 1б.

	k	
. . . $nk-n$	$n^2-(n-k)$	. . . . . n^2
	$n^2-2(n+1-k)+1$	. . . $n^2-(n+1-k)$
	$n^2-3(n+1-k)+1$	. . . $n^2-2(n+1-k)$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
1	$nk-n+1$	. $kn-k+1$

Таблица 2а.

			4		
1	2	3	4	25	26
5	6	7	8	27	28
9	10	11	12	29	30
13	14	15	16	31	32
17	18	19	20	33	34
21	22	23	24	35	26

Сумма: 84

Таблица 2б.

			4		
16	17	18	34	35	36
13	14	15	31	32	33
10	11	12	28	29	30
7	8	9	25	26	27
4	5	6	22	23	24
1	2	3	19	20	21

Сумма: 159

Пример (получающийся при преобразованиях $A \to A'$, $k \to n+1-k$ из таблицы 1*а*) изображен на таблице 1*б*. На таблицах 2, *а* и 2, *б* вы видите более наглядные числовые примеры для $n = 6$ и столбца с номером $k = 4$.

Н. Б. Васильев

Правильные решения некоторых из задач **М160 — М169** нам прислали (после фамилий указана последняя цифра номеров решенных задач): *П. Агаронов* (Баку) 7; *С. Актеричев* (Магнитогорск) 3; *Р. Али-заде* (п. Джебраил АзССР) 2; А. Асасян (Камо АрмССР) 1; Б. Ашавский (Москва) 3, 6, 7; *П. Баньковский* (Уральск) 3, 4, 7; *Г. Баядян* (Кировокан) 7; *О. Багларян* (Сисиан АрмССР) 3, 7, 9; *С. Белолипецкий* (Киржач) 7; *А. Блох* (Харьков) 2, 3, 6, 7, 9; *С. Бышкин* (Севастополь) 3; *А. Вальков* (Ташкент) 2, 3, 6—9; *А. Волков* (Челябинск) 1; *Г. Высоцкая* (Красноярск) 9; *Л. Генгринович* (Ташкент) 3, 4, 7; *С. Гераськин* (Воронеж) 7; *Л.* и *И. Готман* (Арзамас) 8; *А. Григорян* (Баку) 1—4, 6—9; *В. Гринберг* (Москва) 6—9; *Е. Гурвич* (Ташкент) 3, 4; *Е. Гусев* (Павлоград) 6; *Х. Гусейнов* (п. Джебраил АзССР) 1; *К. Данильченко* (Волгоград) 2, 6; *А. Даниэль* (Ленинград) 7; *В. Даушев* (Андижан УзССР) 7; *Н. Демчук* (Мытищи Московской обл.) 8; *Н. Денисов* (Тейково Ивановской обл.) 3; *М. Драчинский* (Тбилиси) 3; *Н. Евлампиев* (Казань) 2, 3; *Р. Егорян* (Раздан) 3; *В. Железный* (Ленинград) 2, 3; *С. Зайцев* (с. Судай Костромской обл.) 2, 3; *Г. Заргарян* (Тбилиси) 6, 7; *В. Зарубин* (п. Летний Отдых Московской обл.) 3; *А. Заславский* (Калинин) 2—4, 7, 9; *С. Зенович* (Ташкент) 3, 4, 7; *Л. Зильберман* (Москва) 9; *Е. Ильтеев* (Орджоникидзе) 7; *А. Калуцкий* (Иссык Алма-Атинской обл.) 4; *Е. Калячина* (Грозный) 3; *А. Карнаух* (Белгород) 3; *В. Квасницын* (п. Коркино Челябинской обл.) 3, 8; *В. Ковтунец* (с. Шостаков Ровенской обл.) 1, 3, 7, 8; *С. Конягин* (Саратов) 2, 3, 5; *В. Колосов* (Киев) 1, 3, 4, 6—8; *Е. Кривонос* (Чусовой) 3; *М. Левин* (Витебск) 3; *М. Лейдерман* (Могилев) 3; *Б. Лемберский* (Киев) 7; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) 3, 4; *А. Лукашев* (Москва) 1—3; *Г. Лутингер* (Черновцы) 6, 8; *А. Макаричев* (Львов) 2, 3, 9; *Г. Малощенок* (Львов) 1, 3, 4, 6—8; *И. Меджибовский* (Москва) 3; *А. Мехович* (Владивосток) 3; *О. Мясникова* (Умань) 4; *А. Насакин* (Курган) 3; *А. Николаев* (Москва) 6, 7, 9; *Б. Палатник* (Баку) 2, 3, 7, 8; *М. Панченко* (Бровары Киевской обл.) 4; *П. Парамонов* (Москва) 1—3, 6, 7; *М. Пастухов* (Свердловск) 3; *Е. Печатников* 2, *А. Печковский* (Москва) 7; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) 3; *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) 2; *А. Райнин* (Москва) 1, 2, 5, 9; *С. Родионов* (Саратов) 1—3, 5; *Р. Рожков* (Рязань) 2, 3; *Л. Рудицер* (Харьков) 2, 3, 6—8; *М. Сапир* (Свердловск) 3, 6, 7; *В. Сац* (Киев) 7; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) 2;

Т. Седрединов (с. Новый Куруш ДагАССР) 3; *С. Скоков* (д. Соковки, г. Слободской) 7; *В. Слепой* (Фрунзе) 3; *Б. Слепченко* (Челябинск) 2, 3, 7 9; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) 2, 3, 6—9; *А. Слинкин* (Москва) 2, 3, 7—9; *Е. Слободов* (Армавир) 4; *В. Смолко* (Кишинев) 4; *Я. Сойбельман* (Киев) 6, 7, 9; *Ю. Стецко* (Черновцы) 7; *А. Струков* (г. Тейково Ивановской обл.) 3; *С. Табачников* (Москва) 1—4, 6, 8; *А. Тагиев* (Баку) 3, 4; *Я. Тепер* (Ташкент) 1, 3, 5—7; *Э. Туркевич* (Черновцы) 0—2, 7—9; *Д. Тюкавкин* (Иркутск) 2, 3, 5; *И. Файнштейн* (Херсон) 2; *К. Хачатурян* (Москва) 1, 5, 7; *В. Хлебопрос* (Киев) 1—3, 6—8; *М. Хорошин* (Чернигов) 6, 7; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 3; *Н. Чернов* (Кривой Рог) 2—4; *В. Чертков* (Киев) 3; *А. Шестюк* (Николаев) 2, 7, 8; *А. Шляфер* (Томск) 1, 2, 7; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 1—3, 6, 7; *И. Шугалев* (Москва) 1, 3; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 1—3, 6—9.

Ю. П. Лысов

Ф183. *Динамометр, который скользит по гладкому горизонтальному столу, тянут с постоянной силой $F = 4$ н. Что показывает динамометр, если масса его пружины равна массе корпуса и отградуирован динамометр был в горизонтальном положении?*

Возникающая при растяжении пружины сила упругости пропорциональна удлинению пружины. Поэтому показание динамометра T равно

$$T = k\Delta L, \qquad (1)$$

где k — жесткость пружины, ΔL — ее удлинение.

В обычных условиях, когда динамометр неподвижен, сила упругости в любом сечении пружины одна и та же, то есть любые равные участки пружины удлиняются при растяжении на одну и ту же величину.

При движении динамометра дело обстоит не так. Рассмотрим сечение пружины, которое находится на расстоянии x от конца пружины, прикрепленного к корпусу динамометра (рис. 8). Сила упругости T_x сообщает ускорение корпусу динамометра и участку пружины длиной x. Масса участка пружины длиной x равна

$$M_x = \frac{M}{L}x, \qquad (2)$$

где M — масса и L — длина всей пружины.

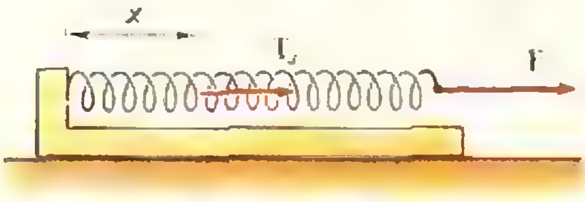


Рис. 8.

Если ускорение динамометра равно a, то, согласно второму закону Ньютона, силу упругости в сечении x можно записать так:

$$T_x = \left(M + M\frac{x}{L}\right)a. \qquad (3)$$

Так как ускорение динамометру сообщает сила F, то

$$a = \frac{F}{M+M} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}. \qquad (4)$$

Поэтому

$$T_x = \frac{1}{2}F\left(1+\frac{x}{L}\right). \qquad (5)$$

Итак, сила T_x непостоянна и меняется от сечения к сечению вдоль пружины.

Для того чтобы найти удлинение пружины, мысленно разобьем нерастянутую пружину на одинаковые маленькие пружинки длиной l такие, что силу упругости на протяжении каждой из них можно считать постоянной. Пусть таких пружин будет n ($n \gg 1$). Так как некоторая сила, действующая на n последовательно соединенных пружин, вызывает деформацию, в n раз большую деформации одной такой пружины *), то жесткость короткой пружинки в n раз больше жесткости пружины динамометра:

$$k' = kn.$$

Будем отсчитывать пружинки от конца пружины, прикрепленного к корпусу динамометра. Удлинение i-й пружинки равно

$$\Delta l_i = \frac{T_i}{k'} = \frac{T_i}{kn}.$$

Но, как следует из формулы (5),

$$T_i = \frac{1}{2}F\left(1+\frac{il}{nl}\right) = \frac{1}{2}F\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

Поэтому

$$\Delta l_i = \frac{1}{2kn}F\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

Полное удлинение пружины равно

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \frac{1}{2kn}F\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ представляет собой сумму членов арифметической прогрессии с разностью прогрессии $\frac{1}{n}$, то

---

*) Это следует из того факта, что сила упругости всех пружин при таком соединении одна и та же.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)=\frac{3n+1}{2},$$

и

$$\Delta L=\frac{F}{4k}\,\frac{3n+1}{n}.$$

Но $n\gg 1$, поэтому

$$\Delta L\approx\frac{F}{4k}\,\frac{3n}{n}=\frac{3}{4}\,\frac{F}{k}.$$

Подставив это выражение для ΔL в формулу (1), найдем показания динамометра

$$T=k\cdot\frac{3F}{4k}=\frac{3}{4}F=3\text{н}.$$

Ф184. *При передаче телевизионного изображения на Земле за одну секунду передается 25 кадров. Это означает, что один кадр передается за 1/25 секунды. В то же время, как известно, передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией «Луна» длилась 25 минут. Почему так велика разница во временах передачи одного кадра изображения в обоих случаях?*

Для передачи изображения необходимо прежде всего преобразовать его в электрический сигнал. Это происходит в передающей телевизионной трубке. Кадр изображения проецируется на светочувствительный мозаичный экран. Каждая из ячеек экрана заряжается, причем тем больше, чем больше ее освещенность. Так получается электрическое изображение передаваемого объекта. Затем электронный луч последовательно обегает различные участки этого изображения, двигаясь слева направо (вдоль строки) и сверху вниз (по строкам); электрическое изображение преобразуется в электрический сигнал.

Предположим, мы хотим передать картинку, показанную на рисунке 9. Яркость картинки по горизонтали меняется по синусоидальному закону. Пусть число максимумов яркости равно m; число строк, на которое разбивается картинка, равно n, а частота смены кадров — f_k. Электрический сигнал, несущий информацию о картинке, имеет форму, показанную на рисунке 10.

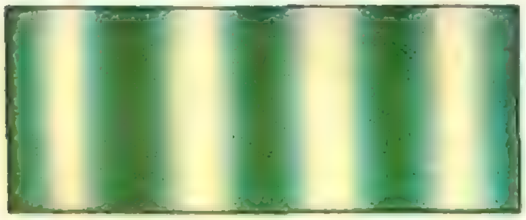


Рис. 9.

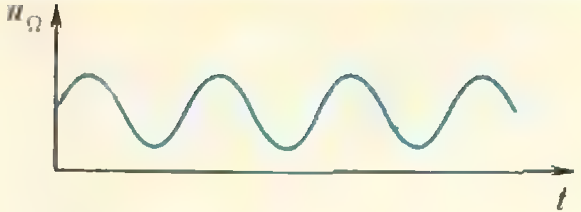


Рис. 10.

За время передачи одной строки сигнал имеет m максимумов, за время передачи одного кадра — nm максимумов, а за 1 секунду — nmf_k максимумов. Значит, циклическая частота сигнала Ω равна

$$\Omega=2\pi f=2\pi mnf_k.$$

Следовательно, частота сигнала Ω пропорциональна частоте смены кадров

$$\Omega\sim f_k.$$

Величина сигнала меняется со временем по синусоидальному закону, который можно записать так:

$$u_\Omega=U_0+U_1\sin\Omega t=U_0(1+k\sin\Omega t),$$

где $k=\frac{U_1}{U_0}$.

Для того чтобы передать этот низкочастотный сигнал на большие расстояния, им модулируют сигнал высокой частоты ω ($\omega\gg\Omega$), величина которого меняется по закону

$$u=U_0'\sin\omega t.$$

В результате модуляции амплитуда высокочастотного сигнала уже не постоянна, а меняется со временем так же, как модулирующий низкочастотный сигнал (рис. 11).

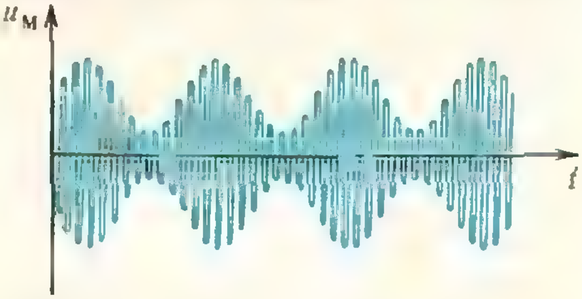


Рис. 11.

Таким образом,

$$u_\text{м}=U_0'(1+k\sin\Omega t)\sin\omega t$$

($u_\text{м}$ — величина амплитудно-модулированного сигнала).

После несложных тригонометрических преобразований получим

$$u_\text{м}=U_0'\sin\omega t+\frac{1}{2}kU_0'\sin(\omega+\Omega)t+\frac{1}{2}kU_0'\sin(\omega-\Omega)t.$$

Это означает, что в нашем случае амплитудно-модулированный сигнал представляет собой сумму трех синусоидальных сигналов с частотами ω, $\omega+\Omega$ и $\omega-\Omega$. Если же кадр является более сложным, то он передается в интервале частот шириной 2Ω. Чем больше частота смены кадров, тем шире указанный интервал частот. Телевизионный приемник, следовательно, должен принимать сигналы в некотором диапазоне частот.

Но наряду с сигналом, несущим данную информацию, в эфире всегда существуют всевозможные случайные сигналы, называемые шумами. Шумы имеют различные частоты и можно считать, что в каждом интервале частот их энергия примерно одинакова. Чем шире полоса частот, воспринимаемая приемником, тем сильнее шумы или, как говорят, выше уровень шумов. Если основной сигнал слаб, он может забиваться шумами, и мы не сможем его распознать.

На Земле передающие станции обладают достаточной мощностью, и уровень сигнала намного выше уровня шумов. Поэтому частота смены кадров может быть достаточно большой (что действительно необходимо для осуществления нормального зрительного восприятия телепередачи).

Иное дело в космосе. Мощности передатчиков на космических кораблях малы, уровень основного сигнала низок. Увеличивая же время передачи одного кадра, то есть сужая полосу частот, можно существенно уменьшить уровень шумов, что поможет выделить сигнал, несущий информацию.

Ф185. *Волейбольный мяч массой 200 г и объемом 8 л накачан до избыточного давления 0,2 атм. Мяч был подброшен на высоту 20 м и после падения на твердый грунт подскочил почти на ту же высоту. Оцените максимальную температуру воздуха в мяче в момент удара о грунт. Температура наружного воздуха 300° К, теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_v = 0{,}16$ кал/г · град.*

Так как мяч после удара о землю поднялся почти на ту же высоту, с которой он падал, потерями энергии при ударе можно пренебречь и считать, что сжатие воздуха в мяче во время удара происходит адиабатически.

Согласно закону сохранения энергии (первому закону термодинамики) изменение внутренней энергии газа ΔU равно

$$\Delta U = Q + A, \qquad (1)$$

где Q — количество тепла, сообщенного газу, и A — работа, совершенная над газом при его сжатии. Так как в данном случае $Q = 0$, то

$$\Delta U = A. \qquad (2)$$

Как известно, изменение внутренней энергии газа не зависит от процесса и равно

$$\Delta U = c_v m \Delta T = c_v m\,(T_{\max} - T), \qquad (3)$$

где T — начальная температура газа, m — его масса.

Работа по сжатию воздуха совершается за счет механической энергии мяча. Если пренебречь потенциальной энергией деформации камеры и грунта в момент наибольшего сжатия (когда температура воздуха максимальна, а мяч покоится), то работа A равна

$$A = Mgh, \qquad (4)$$

где M — масса мяча, h — высота, на которую он был подброшен.

Подставив выражения для ΔU и A в формулу (2), получим

$$c_v m\,(T_{\max} - T) = Mgh. \qquad (5)$$

Массу воздуха в мяче можно определить из уравнения газового состояния:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $P = P_{\text{атм}} + P_{\text{и}}$ ($P_{\text{атм}} = 1$ *атм* — атмосферное давление, $P_{\text{и}}$ — избыточное давление), V — объем мяча. Отсюда

$$m = \frac{(P_{\text{атм}} + P_{\text{и}})\,V\mu}{RT}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) находим

$$T_{\max} = T\left[1 + \frac{MghR}{\mu\,(P_{\text{атм}} + P_{\text{и}})\,Vc_v}\right] \approx$$
$$\approx 1{,}02T = 306^\circ\ \text{К}.$$

Ф186. *При повороте автобуса или автомобиля пассажиров отбрасывает в сторону, противоположную направлению поворота. В то же время поворот самолета совсем не ощущается его пассажирами. Объясните эту разницу.*

При повороте автомобиля пассажир продолжает двигаться по инерции прямолинейно. Он не вылетает из автомобиля только потому, что его удерживает, например, стенка автомобиля, которая сообщает необходимое центростремительное ускорение или пассажир держится за поручни. Подсчитаем эту удерживающую силу, действующую на пассажира массы $m = 50$ *кг*, если радиус поворота $R = 20$ *м* и скорость движения автомобиля $v = 36$ *км/ч*.

Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{v^2}{R} = \frac{50\ кг \cdot 100\ м^2/с^2}{20\ м} = 250\ н,$$

что составляет половину веса пассажира.

Теперь рассмотрим, что происходит при повороте самолета. На горизонтально летящий самолет в плоскости, перпендикулярной направлению его полета, действуют две силы: сила тяжести **P** и аэродинамическая подъемная сила **N**. При повороте самолета равнодействующая **F** этих сил должна быть направлена к центру окружности, по которой движется самолет. Это означает, что сила **N** не вертикальна, а составляет некоторый

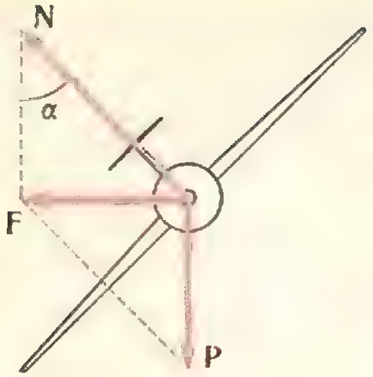


Рис. 12.

угол α с вертикалью (рис. 12). Но сила **N** — это сумма подъемных сил крыльев и она перпендикулярна крыльям, следовательно, корпус самолета наклонен в сторону поворота *).

Сила **F** *сообщает самолету необходимое* центростремительное ускорение.

Пассажир, находящийся в самолете, движется по окружности того же радиуса с тем же центростремительным ускорением. Это ускорение сообщает пассажиру равнодействующая силы тяжести mg и силы реакции самолетного кресла $\mathbf{N}_1$. Причем сила реакции должна составлять с вертикалью тоже угол α $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}\right)$. Отсюда следует, что положение пассажира относительно самолета точно такое же, как во время горизонтального полета самолета. При повороте меняется только величина и направление силы $\mathbf{N}_1$. При горизонтальном полете сила $\mathbf{N}_1$ вертикальна и равна по абсолютной величине силе тяжести, при повороте она составляет с вертикалью угол α и равна по абсолютной величине $\sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2}$, то есть увеличивается на

$$\Delta N_1 = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2} - mg$$

(v — скорость самолета, R — радиус поворота). При $m = 50$ *кг*, $v = 720$ *км/ч* и $R = 10$ *км* эта добавка составляет

$$\Delta N_1 \approx 50 \text{ н}.$$

Она много меньше веса пассажира и почти не ощущается им.

Ф187. *Тонкая металлическая пластинка площади S залита слоем жидкого диэлектрика с плотностью ρ и диэлектрической проницаемостью ε так, что толщина этого слоя много меньше линейных размеров пластины. Что произойдет с жидкостью, если пластине сообщить электрический заряд $+Q$?*

Заряженная пластина создает электрическое поле, напряженность которого в вакууме равна

$$E_0 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},$$

а в диэлектрике

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Ослабление поля в диэлектрике связано с поляризацией диэлектрика. При этом в тонком слое около пластины появляется заряд $-Q_1$, а на свободной поверхности диэлектрика — заряд $+Q_1$ (рис. 13). Внутри же диэлектрика отрицательные и положительные заряды диполей компенсируют друг друга. Наведенные заряды Q_1 и $-Q_1$ создают поле с напряженностью

$$E_1 = 2\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S},$$

направленное против поля пластины.

Согласно принципу суперпозиции

$$E = E_0 - E_1$$

или

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}.$$

Из этого уравнения можно найти величину заряда Q_1:

$$Q_1 = Q\,\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}.$$

На заряд Q_1 свободной поверхности жидкости действуют две электрические силы: сила притяжения к заряду $-Q_1$, равная

$$F_1 = Q_1 \cdot \frac{1}{2} E_1 = Q_1 \cdot \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right)^2,$$

и сила отталкивания от заряда пластины Q,

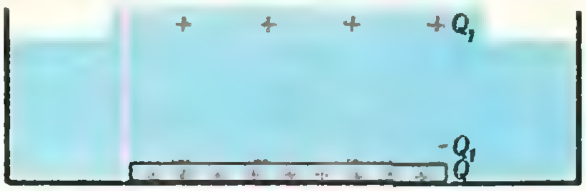


Рис. 13.

---

*) Такой наклон самолета получается благодаря тому, что при повороте руля направления из-за давления воздуха на киль самолет поворачивается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести самолета. При этом одно из крыльев самолета движется быстрее другого относительно набегающего потока воздуха. На это крыло действует большая аэродинамическая подъемная сила (она пропорциональна скорости движения), и самолет наклоняется в сторону поворота.

равная

$$F_2 = Q_1 \cdot E_0 = Q\,\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}\cdot\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}\right).$$

Силы F_1 и F_2 направлены в противоположные стороны.

Так как сила F_2 больше силы F_1 ($\varepsilon > 1$), то жидкость над пластиной будет подниматься. Пусть высота поднятия жидкости в сосуде равна h. Запишем условие равновесия поднявшейся жидкости:

$$(\rho h S)\,g = F_2 - F_1 = \frac{Q^2(\varepsilon^2-1)}{8\varepsilon_0 S\varepsilon^2}.$$

Отсюда

$$h = \frac{Q^2(\varepsilon^2-1)}{8\varepsilon_0 S^2\varepsilon^2\rho g}.$$

И. Ш. Слободецкий

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф178—Ф187**, успешно справились с задачами **Ф179** и **Ф186**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи): *С. Алехин* (Липецк) **5, 7**; *М. Азметов* (Уфа) **2, 5, 7**; *П. Анциферов* (Фатеж Курской обл.) **3**; *А. Амельченко* (Магнитогорск) **1**; *С. Аликов* (Сельск) **2**; *А. Бушмакин* (Иваново Брестской обл.) **2**; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) **3**; *А. Боржиевский* (Оршино) **3**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **0, 2, 4, 5, 7**; *Н. Василюк* (Кобрин) **2**; *О. Войнова* (п. Кош-Тегирмен Кирг. ССР) **4**; *Н. Головко* (Прохладный) **1**; *Е. Гусев* (Павлоград) **2**; *А. Григорян* (Баку) **3**; *С. Громик* (Дзержинск) **1**; *Д. Габриэлян* (Белая Калитва Ростовской обл.) **5**; *С. Герц* (Хуст УССР) **2**; *А. Даценко* (Кривой Рог) **0, 8**; *И. Дубинский* (Киев) **2**; *Н. Демчук* (Мытищи) **1**; *Ж. Дорофеева* (Цаган Аман) **4**; *А. Даниэл* (Москва) **3**; *В. Евсеев* (Новокузнецк) **2**; *Р. Егорян* (Раздан Арм. ССР) **8**; *В. Жук* (Грозный) **5**; *В. Железный* (Ленинград) **3**; *С. Жаров* (Ефремов Тульской обл.) **5, 8**; *С. Запесочный* (Ужгород) **8**; *В. Зозентаут* (Харьков) **1**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **5**; *О. Ильичева* (с. Чиберлей Пензенской обл.) **1**; *Л. Коган* (Черновцы УССР) **2, 5**; *С. Карпенко* (Киев) **3**; *Н. Кулешов* (Кременчуг) **5**; *И. Кисловский* (Иркутск) **2**; *С. Корнилов* (Грозный) **0, 3, 4, 5**; *С. Кондратьев* (Сызрань) **0**; *А. Кутлимуратов* (Хазарасп) **4**; *В. Колосов* (Киев) **0, 4**; *Я. Коган* (Глазов УАССР) **4**; *И. Куцык* (Ярославль) **5**; *Ю. Лурье* (Грозный) **1, 3, 5, 7, 8**; *С. Лукацук* (Челябинск) **8**; *А. Львов* (Саратов) **5**; *С. Лазебшей* (Житомир, п. Озерное) **5**; *А. Литовченко* (п/о Белокоровичи Житомирской обл.) **2**; *В. Меерсон* (Николаев) **2**; *С. Моргунов* (Баку) **4**; *А. Минибаев* (Уфа) **1, 2**; *И. Мацяс* (Макеевка) **1, 2**; *Р. Михайлов* (Геокчай Аз.ССР) **2**; *С. Мысотков* (Златоуст) **5**; *А. Марков* (Орджоникидзе) **5**; *А. Никонов* (Актюбинск) **8**; *А. Николаев* (Москва) **0, 2, 4**; *А. Опара* (Саратов) **8**; *Ю. Перфильев* (Саратов) **2, 8**; *Я. Певзнер* (Ленинград) **5**; *О. Повалеев* (Подольск) **5**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) **5**; *И. Парнета* (Кременчуг) **2**; *С. Прокопьева* (Темиртау Карагандинской обл.) **1, 2**; *А. Погуляй* (Уфа) **5**; *В. Поляков* (с. Октябрьское УССР) **3**; *А. Панин* (Гомель) **1**; *А. Резников* (Киев) **0, 6**; *Л. Рудицер* (Харьков) **2**; *М. Ригмант* (Магнитогорск) **1, 8**; *А. Солдатов* (п/о Юганец Горьковской обл.) **4**; *Я. Симкин* (Москва) **1, 8**; *М. Султангалиев* (с. Ваныш Башк. АССР) **4, 5**; *В. Спиридонов* (Владимир) **0, 2, 5**; *В. Сомило* (Инта) **3**; *К. Сеникян* (Ереван) **5**; *А. Степанян* (Сисиан Арм. ССР) **5**; *А. Стрекин* (Череповец) **2**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **5, 8**; *В. Татаринов* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **2**; *О. Теряев* (Днепропетровск) **3**; *Н. Торочкова* (Борисов Минской обл.) **2**; *О. Торонов* (Оренбург) **5**; *В. Удовыченко* (с. Ешень Читинской обл.) **0, 2**; *Н. Федин* (Омск) **3, 5, 7, 8**; *Д. Фушман* (Черновцы УССР) **5, 7**; *С. Хоменко* (Подольск) **2, 3, 5, 7, 8**; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) **2**; *Р. Хознев* (Глазов УАССР) **1, 4**; *Л. Циферблат* (Львов) **5**; *С. Черемшанцев*,(Ленинград) **8**; *В. Чертков* (Киев) **0, 8**; *В. Чистяков* (Буй) **4, 5**; *М. Шапошников* (Рязань) **5**; *В. Шендрик* (Алма-Ата) **1, 4, 5, 8**; *Ф. Шульгин* (Калинин) **1, 2, 8**; *К. Шварцман* (Кишинев) **5**; *А. Штокалов* (Северодонецк) **2**; *А. Шумахов* (Тула) **0, 1, 2**; *А. Шик* (Туапсе) **2**; *М. Шапиро* (Горький) **5**; *Е. Щемелев* (Горький) **2**; *С. Щукин* (Днепропетровск) **2, 8**; *Ю. Яковчук* (Николаев) **3**; *А. Яценко* (Первомайск УССР) **1, 2**.

С. Г. Семенчинский

В. В. Пекарскас

Геометрия комплексных чисел

В «Программе вступительных экзаменов по математике» имеется, в частности, такой пункт: «Комплексные числа и арифметические действия над ними. Модуль и аргумент комплексного числа». Строгого построения теории комплексных чисел от поступающих не требуется, но они должны владеть правилами действий с этими числами и знать их геометрическую интерпретацию.

В этой статье разбирается несколько задач, взятых из опыта приемных экзаменов. В каждой задаче по существу используются лишь основные определения и геометрическая интерпретация некоторых понятий, связанных с комплексными числами.

Задача 1. *Изобразить на плоскости точку, соответствующую числу* $z=\frac{2+i}{i-2}$.

Решение. Прежде всего представим данное число в алгебраической форме:

$$\frac{2+i}{i-2}=-\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=-\frac{3+4i}{5}=$$
$$=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\,i.$$

Теперь изобразить число z на комплексной плоскости уже нетрудно — получается точка в третьем квадранте (нарисуйте ее сами!).

Задача 2. *Комплексное число* $z=a+bi$ *изображается точкой* $M\,(a,\ b)$. *Где находится точка* $z_1=z+3-2i$?

Решение. Имеем

$$z+3-2i=(a+3)+(b-2)\,i.$$

Поэтому число $z_1=(a+3)+(b-2)\,i$ изображается точкой $M_1\,(a+3,\ b-2)$, которая получается из точки M сдвигом вправо на три единицы и вниз на две единицы.

Задача 3. *Рассматриваются комплексные числа* z *такие, что* $|z|=2$. *Где расположены точки* $2z-3i+1$?

Решение. Точки z, для которых $|z|=2$, расположены на окружности радиуса 2 с центром в точке (0, 0) (рис. 1). Тогда точки $2z$ будут лежать на концентрической окружности радиуса 4. В самом деле, точка $2z$ лежит на том же исходящем из начала координат луче, что и точка z, но отстоит от начала в 2 раза дальше, чем точка z.

Точка $2z+1-3i$ получается из точки $2z$ сдвигом вправо на единицу и сдвигом вниз на три единицы. Поэтому точки $2z+1-3i$, где $|z|=2$, образуют окружность с центром в точке (1, — 3) и радиуса 4.

Задача 4. *Какое множество точек комплексной плоскости задается условием* $2<|z+1-2i|\leqslant 3$?

Решение. Пусть $z_1=z+1-2i$; тогда данное условие принимает вид

$$2<|z_1|\leqslant 3. \qquad (1)$$

Точки z_1, удовлетворяющие условию $|z_1|=3$, лежат на окружности радиуса 3 с центром в начале координат. Условию $|z_1|<3$ удовлетворяют все внутренние точки круга радиуса 3 с центром в начале координат. Условию $|z_1|>2$ удовлетворяют все точки, лежащие вне

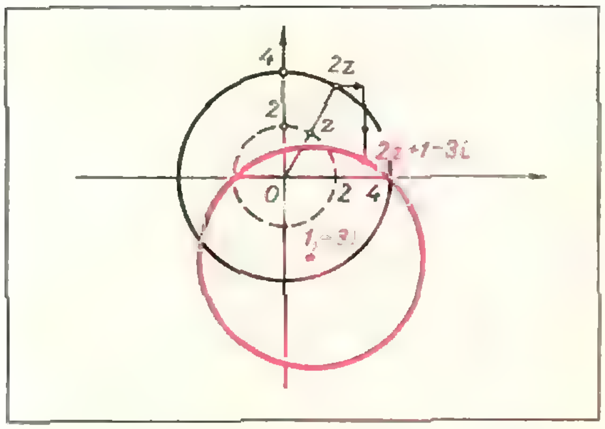


Рис. 1.

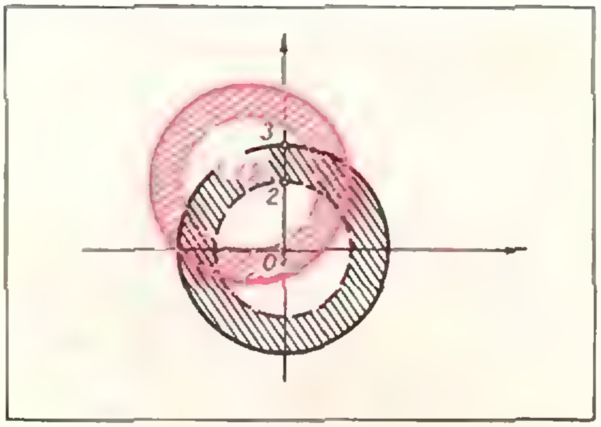


Рис. 2.

круга радиуса 2 с центром в начале координат. Таким образом, множество точек z_1, удовлетворяющих условию (1), есть кольцо между концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами 2 и 3 (рис. 2); точки внутренней окружности этому множеству не принадлежат.

Так как $z = z_1 - 1 + 2i$, то точка z получается из точки z_1 сдвигом на единицу влево и на две единицы вверх. Поэтому окончательно получается кольцо между концентрическими окружностями радиусов 2 и 3 с центрами в точке (—1, 2) (внутренняя окружность исключается).

Задача 5 (МГУ, экономический факультет, 1970). *Указать точки плоскости, соответствующие тем комплексным числам, которые удовлетворяют условию* $|z|\,i + z = 2+i$.

Решение. Пусть $z = a + bi$; тогда данное условие примет вид

$$i\sqrt{a^2+b^2} + a + bi = 2 + i.$$

По определению равенства комплексных чисел отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a = 2, \\ \sqrt{a^2+b^2} + b = 1, \end{cases}$$

которая легко решается. В результате находим удовлетворяющее условию задачи число $z = 2 - \frac{3}{2}i$.

Задача 6. *Найти множество точек, изображающих комплексные числа* $z = x + iy$, *для каждого из которых комплексное число в алгебраической форме*

$$\sqrt{3x-y} + i\sqrt{x-3y} \qquad (2)$$

лежит на окружности радиуса 2 с центром в начале координат.

Решение. Поскольку число (2) есть комплексное число в алгебраической форме, то x и y должны быть такими, чтобы $\sqrt{3x-y}$ и $\sqrt{x-3y}$ принимали действительные значения. Следовательно, должны выполняться неравенства

$$3x - y \geqslant 0, \qquad x - 3y \geqslant 0. \qquad (3)$$

Выделяемую этими неравенствами область плоскости xOy удобнее всего изобразить геометрически (рис. 3; искомая область отмечена двойной штриховкой).

Так как число (2) должно лежать на окружности радиуса 2 с центром в начале координат, то

$$\left|\sqrt{3x-y} + i\sqrt{x-3y}\right| = 2,$$

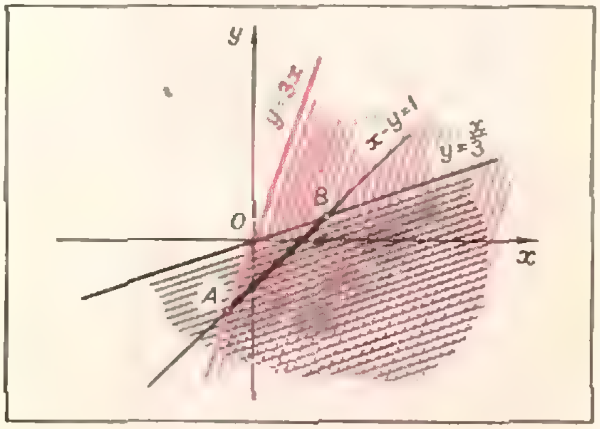


Рис. 3.

откуда, по определению модуля, получаем

$$2\sqrt{x-y}=2,$$

или

$$x-y=1.$$

Таким образом, искомые точки (x, y) должны удовлетворять равенству $x-y=1$ и лежать в отмеченной ранее области, определяемой уравнениями (3); легко убедиться, что всем этим условиям удовлетворяют точки отрезка AB (рис. 3).

Задача 7. *Комплексные числа z удовлетворяют условию*

$$|z+2+i|=|z-1-4i|. \qquad (4)$$

Где расположены точки, изображающие эти числа?

Решение. Как известно, $|z_1-z_2|$ есть расстояние между точками, изображающими комплексные числа z_1 и z_2. Поэтому число

$$|z+2+i|=|z-(-2-i)|$$

есть расстояние от точки, изображающей число z, до точки $M\,(-2,\ -1)$, а число

$$|z-1-4i|=|z-(1+4i)|$$

есть расстояние то точки, изображающей число z, до точки $N\,(1,\ 4)$. Условие (4) тогда означает, что искомые точки равноудалены от точек M и N. Следовательно, искомые точки лежат на прямой, перпендикулярной отрезку MN и проходящей через его середину.

Задача 8. *Указать множество точек, изображающих те комплексные числа, которые одновременно удовлетворяют двум условиям*

$$|z-2i|\leqslant\frac{3}{2}, \quad \frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2\pi}{3}. \quad (5)$$

Решение. Точки, изображающие те комплексные числа, которые удовлетворяют первому из условий (5), заполняют круг (включая окружность) радиуса $^3/_2$ с центром в точке (0,2) (рис. 4). Второму условию удовлетворяют комплексные числа, изображающиеся точками, которые расположены между лучами, выходящими из начала координат и составляющими углы $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ с осью абсцисс (исключая сами эти лучи). Следовательно, обоим условиям (5) удовлетворяют точки, принадлежащие одновременно двум указанным множествам (искомое множество на рис. 4 отмечено двойной штриховкой).

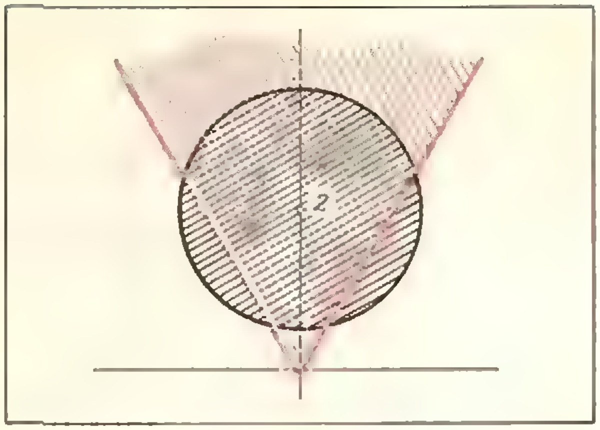


Рис. 4.

Задача 9 (МГУ, ф-т психологии, 1966). *Указать, где расположены точки, изображающие комплексные числа z, для которых*

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<2. \qquad (6)$$

Решение. Неравенство (6), согласно свойствам логарифмов, равносильно двойному неравенству

$$0<\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<3,$$

которое можно переписать (поскольку $2+|z|>0$ при любом z) в виде

$$0<|z|^2-|z|+1<6+3|z|.$$

Но неравенство $|z|^2-|z|+1>0$ справедливо при любом z (так как *дискриминант квадратного трехчлена* x^2-x+1 отрицателен), а неравенство $|z|^2-|z|+1<6+3|z|$, то есть $|z|^2-4|z|-5<0$ выполняется при $|z|<5$ (неравенство $x^2-4x-5<0$ выполняется при $-1<x<5$, но $|z|\geqslant 0$ при любом z). Поэтому условию (6) удовлетворяют комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|<5$; эти числа заполняют внутренность круга радиуса 5 с центром в начале координат.

Задача 10. *Где расположены комплексные числа z такие, что неравенство*

$$|z+2|a^2-2|z+2|a+1>0 \quad (7)$$

верно для всех действительных значений a?

Решение. Если $z=-2$, то неравенство (7) принимает вид $1>0$ и, очевидно, справедливо для всех действительных значений a. Если же $z\neq-2$, то (7) представляет собой неравенство второй степени относительно a. Так как в этом случае $|z+2|>0$, то это неравенство будет справедливо для всех a в тех и только в тех случаях, когда дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то есть если

$$|z+2|^2-|z+2|<0.$$

Отсюда немедленно получаем двойное неравенство

$$0<|z+2|<1.$$

Учитывая, что и при $|z+2|=0$ неравенство (7) выполняется при всех a, заключаем, что искомые комплексные числа заполняют внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (—2, 0).

Упражнения

1 (МГУ, геологический ф-т, 1961). При каких действительных значениях x и y числа $-3+ix^2y$ и x^2+y+4i изображаются точками, симметричными относительно оси абсцисс?

2 (МГУ, экономический ф-т, 1970). Где расположены комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|-z=1+2i$?

Указать, где расположены комплексные числа z, удовлетворяющие следующим соотношениям:

3. $|i-1-2z|\geqslant 9$;
4. $|z-i|=|z+i|=|z-1+i|$;
5. $|z-2|^2+|z+2|^2=26$,

6 $|z+3\pi-\pi\sqrt{3}i|=\pi, \arg z=\frac{5}{6}\pi$.

7 (МГУ, ф-т психологии, 1966). Где расположены комплексные числа z, для которых

$$\log_{1/2}|z-2|>\log_{1/2}|z|?$$

8 (МГУ, филологический ф-т, 1971). Где расположены комплексные числа z, для которых

$$\log_2(1+|z^2-i|)+\log_{16}\frac{1}{(1+|z^2+i|)^4}=0?$$

Геометрические задачи

1. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие 2.

2. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие n. Разберите два случая:

а) $n=2p$ (p — натуральное);

б) $n=2p+1$ (p — натуральное).

3. Доказать, что число

$$\frac{4p^3+9p^2+5p}{6}$$

целое при натуральных p.

4*. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие 20, и площадь которых — целое число.

5**. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие

а) $2p$ (p — натуральное),

б) $2p+1$ (p — натуральное),

и площадь которых — целое число.

6. Доказать, что в любом многоугольнике есть по крайней мере две стороны, отношение которых больше или равно 1 и меньше 2.

7. Точки P, Q, R, S делят стороны четырехугольника $ABCD$ так, что

$$AP:PB=DQ:QC=m$$

и

$$AR:RD=BS:SC=n.$$

Доказать, что отрезки PQ и RS делят друг друга в том же отношении.

Н. В.

Технические вузы с повышенной математической подготовкой

Сейчас в ряде вузов страны готовят специалистов по новой специальности «инженер-математик».
Что это за специальность и чем будут заниматься студенты, получившие эту квалификацию, после окончания института, рассказывает декан факультета прикладной математики МАИ профессор В. К. Саульев.
После статьи В. К. Саульева мы помещаем информации о некоторых вузах, в которых готовят инженеров-математиков.

О новой квалификации «инженер-математик»

В нынешнюю эпоху научно-технического прогресса роль математики все более и более возрастает. Если до войны была известна только математическая физика, то в послевоенные годы появились математическая экономика, математическая лингвистика, математическая биология и так далее вплоть до математической электрокардиологии. Эта тенденция к математизации наук будет далее расти.

Появление быстродействующих ЭВМ стимулировало развитие самой математики, особенно ее прикладных направлений. Так, за последние 20—25 лет созданы математическая теория надежности, теория информации, математическая теория оптимального управления, теория принятия решений в условиях неопределенности, теория массового обслуживания, теория планирования эксперимента, математическая теория управления запасами, теория математического программирования, теория исследования операции, теория статистического моделирования и т. д.

Трудно переоценить значение этих и им аналогичных математических теорий для народного хозяйства нашей страны. Однако у нас сейчас имеется большой дефицит специалистов по прикладной математике, в частности на специалистов по математическому обеспечению ЭВМ и АСУ. В связи с этим в ряде вузов страны организован выпуск специалистов по прикладной математике, получающих квалификацию инженера-математика.

Как показывает само название, инженеры-математики занимают промежуточное положение между математиками, которых готовят университеты, и традиционными инженерами. Тонкая прослойка из таких специалистов в инженерной среде безусловно оказывает на нее благотворное влияние (повышается уровень математической культуры, используются более точные формулы для расчетов, резко повышается к. п. д. работы ЭВМ). Аналогичную роль играют, например, инженеры-экономисты.

Типичная функция инженера-математика: в коллективе он, совместно с обычными инженерами соответствующих профилей, например разработчиками АСУ, решает конкретные технические задачи или задачи управления. При этом основной творческий вклад инженера-математика состоит в разработке приемлемых вычислительно-аналитических алгоритмов.

Более сложная и трудная функция инженера-математика состоит в построении математических моделей, например технологических процессов. «Разыгрывая» на ЭВМ разные варианты математической модели, инженер-математик может выбрать из них оптимальный, то есть наилучший в данных условиях. Здесь знания одной прикладной математики уже недостаточно. Необходимы некоторые инженерные знания, которых не дают университеты, выпускающие «чистых» математиков.

И, конечно же, инженер-математик должен в совершенстве уметь программировать на ЭВМ.

В. К. Саульев

Московский авиационный институт

МАИ имеет семь факультетов. Это факультет летательных аппаратов, факультет установок летательных аппаратов, факультет самолетостроения и вертолетостроения (специальности: самолетостроение, вертолетостроение, гидроаэродинамика), факультет двигателей летательных аппаратов (специальность: авиационные двигатели), факультет систем автоматического управления летательных аппаратов (специальности: авиаприборостроение, гироскопические приборы и устройства, автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, прикладная математика), радиотехнический факультет (специальности: радиотехника, конструирование и производство радиоаппаратуры), факультет экономики и организации производства летательных аппаратов (специальности: автоматические системы управления, экономика и организация машиностроительной промышленности, организация механизированной обработки экономической информации).

При МАИ имеется подготовительное отделение.

Ниже мы помещаем типичные варианты вступительных экзаменов в МАИ по математике и физике 1972 года.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3^{x-1}\cdot x^2+x\,(3^x-2^x)=2\,(2^x-3^{x-1}).$$

2. Доказать, что в любом треугольнике ABC

$$h_a=2p\,\frac{\sin B/2\cdot\sin C/2}{\cos A/2},$$

где h_a — высота, опущенная из вершины A, $2p$ — периметр треугольника.

3. Решить уравнение

$$\log_{\sin x}\frac{1}{4}(4\sin x-\cos x)=3.$$

4. Расстояние между городами A и B равно 60 *км*. Два поезда выходят одновременно: один из A в B; другой из B в A. Поезд, идущий из A в B, пройдя 20 *км*, стоит полчаса, затем отправляется дальше и через 4 минуты встречает поезд, идущий из B в A. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно. Определить скорости поездов.

5. Вершина правильной четырехугольной пирамиды лежит в центре грани куба, а ее основание — в плоскости противоположной грани, причем стороны основания пирамиды, равные $2\sqrt{2}$ *см*, параллельны диагоналям основания куба. Найти объем части пирамиды, находящейся вне куба, если ребро куба равно 1 *см*.

Вариант 2

1. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если один из его корней $z=a+bi$ $(b\geqslant 0)$ удовлетворяет уравнению

$$(z+2i)^2+4\,z-4i\bar{z}+17=0,$$

где

$$\bar{z}=a-bi.$$

2. При каких действительных значениях b система

$$\begin{cases}x^2-2\,x+y^2=0,\\ y-ax+ab=0\end{cases}$$

имеет действительные решения при любых действительных a?

3. Доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4\operatorname{tg}\beta$, если $5\sin\alpha=3\sin(\alpha+2\beta)$.

4. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA=DB$. Найти длину стороны BC.

5. Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найти отношение площади поверхности сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

Физика

Вариант 1

1. В чем состоят явления дифракции и интерференции?

2. Проводник длиной 10 *см* перемещают в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 *тл* так, что он составляет угол 60° с направлением поля. С каким ускорением нужно двигать проводник, чтобы разность потенциалов на концах проводника возрастала равномерно на 1 *в* за 1 *с*?

3. Какой энергией должен обладать протон, чтобы приблизиться к ядру атома азота на расстояние 10^{-16} *м*? Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, порядковый номер азота в таблице Менделеева 7, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*.

4. При 0° C стеклянная колба вмещает 680 *г* ртути, а при 100° C — 670 *г* ртути. Определить коэффициент линейного расширения стекла. Коэффициент объемного расширения ртути 0,00018 *град*$^{-1}$.

5. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. С какой высоты падало тело? Постройте график скорости от времени и укажите на нем рассматриваемые пути.

Р. Н. Молодежникова, И. И. Семенов

Московский институт электронной техники

Московский институт электронной техники (МИЭТ) является вузом с повышенной физико-математической подготовкой. На основных факультетах института курс высшей математики близок к курсу математики на физическом факультете МГУ и почти в два раза превышает объем курса математики, читаемого в технических вузах. На вступительных экзаменах математика является профилирующим предметом, и абитуриенты-медалисты, получившие оценку «пять» на экзаменах по математике (письменном и устном), зачисляются в институт без дальнейшей сдачи экзаменов.

На письменный экзамен по математике отводится четыре часа, варианты для письменного экзамена состоят из пяти задач, причем две из них по алгебре, две по тригонометрии и одна геометрическая задача. Обязательно в каждом варианте имеется пример на решение неравенства. Эти задачи подбираются так, чтобы они решались только с помощью методов и приемов, которые сообщаются учащимся в средней школе. Однако при этом требуется, чтобы в процессе решения были обоснованы все действия, были проведены необходимые исследования величин, входящих как в исходные данные задач, так и в их решения.

В билет для устного экзамена включается два теоретических вопроса (алгебра и геометрия); каждому абитуриенту предлагается ряд примеров (как правило, не менее трех) на построение графиков, на решение алгебраических и тригонометрических уравнений и неравенств, на свойства элементарных функций, на комплексные числа или по другим разделам программы.

В настоящее время при большинстве вузов страны, в том числе и при МИЭТ, имеются заочные и вечерние подготовительные курсы, организуются циклы лекций по подготовке в вуз. В нашем институте на заочных и вечерних подготовительных курсах обучается около 2300 человек. Слушатели заочных курсов могут получать устные или письменные консультации, на вечерних курсах — посещать лекции и практические занятия. Они получают методическую литературу, выполняют контрольные задания.

В заключение приведем два варианта вступительных экзаменов в МИЭТ в 1972 году.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_x 2x \leqslant \sqrt{\log_x (2x^3)}.$$

2. Известно, что сумма первых n членов некоторой числовой последовательности при любом n выражается формулой

$$S_n = 5n^2 - 2n.$$

Доказать, что эта последовательность — арифметическая прогрессия и найти ее 20-й член.

3. Решить уравнение

$$2 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x.$$

4. Проверить равенство

$$\cos(2\operatorname{arctg} 2) - \sin(4\operatorname{arctg} 3) = \frac{9}{25}.$$

5. Дан равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h. В него вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная основанию. Найти радиус окружности и длину отрезка касательной, заключенного между сторонами треугольника.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|,$$

где $z = x + iy$ — комплексное число.

2. При каких x три числа $\lg 2$, $\lg(3^x - 1)$ и $\lg(3^x + 3)$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

3. Решить неравенство

$$4\log_{16}\cos 2x + 2\log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0,$$

если $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

4. Решить уравнение

$$\frac{3(\cos 2x + \operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0 .$$

5. Острый угол прямоугольного треугольника равен α, радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений двух катетов, равен R. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

А. В. Ефимов

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Развитие науки, техники, производства ставит перед конструкторами новые задачи, требует инженеров новых специальностей. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики — один из новых вузов столицы. Институт готовит инженеров широкого профиля по следующим специальностям, охватывающим основные направления новой техники в области радиоэлектроники: радиотехника, конструирование и производство радиоаппаратуры, автоматика и телемеханика, автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, конструирование и производство электронно-вычислительной аппаратуры, полупроводниковые приборы, промышленная электроника, электронные приборы, электроакустика и ультразвуковая техника.

Дневное отделение МИРЭА имеет три факультета: радиотехнические системы и устройства (РТ), автоматизированные системы управления (АСУ), электронные и квантовые приборы (ЭКП).

Ниже мы приводим три варианта вступительного письменного экзамена по математике 1972 года в МИРЭА.

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 91, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\lg(3x - 5)}{\lg(3x^2 + 25)} = \frac{1}{2} .$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0,$$

$$|x| < \frac{\pi}{3} .$$

4. В треугольнике ABC на основании BC или на его продолжении взята произвольным образом точка D и около треугольников ACD и BAD описаны окружности. Доказать, что отношение радиусов этих окружностей есть величина постоянная. Найти такое положение точки D, для которого эти радиусы будут иметь наименьшую величину.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x - 3 > 0.$$

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3, \\[2mm] \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2} . \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$3^{2x+3} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^3 z \cdot \cos z - \sin z \cdot \cos^3 z = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad |z| < 0{,}2.$$

4. Расстояние между центрами двух пересекающихся кругов радиусов R и r равно d. Найти площадь их общей части.

5. Вычислить

$$a^{1972} + a^{\frac{1}{1972}}, \text{ если } a^2 + a + 1 = 0.$$

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 124, \\ x^2 + xy + y^2 = 31 . \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$3^{2-x} \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x .$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}, \quad |x| < \frac{\pi}{2} .$$

4. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место следующее соотношение:

$$\frac{a(a + c - b)}{b(b + c - a)} = \frac{1 - \cos A}{1 - \cos B} .$$

5. Найти $\log_3 10$, если известны: $\log_2 15 = a$, $\log_6 12 = b$.

О. П. Чопенко

«Математические досуги» Мартина Гарднера

В «Кванте» № 5 за 1972 год мы рассказывали о вышедшей книге яркого и своеобразного американского популяризатора математики и физики Мартина Гарднера *«Математические головоломки и развлечения»* *). Напомним, что эта книга содержит сорок шесть очерков на всевозможные математические темы, ранее публиковавшихся в разное время в журнале Scientific American (раздел «Математические игры»).

Сейчас издательство «Мир» выпустило в свет еще тридцать восемь очерков М. Гарднера, объединенных в одну книгу под названием *«Математические досуги»* **). Забегая вперед, скажем, что вторая книга нам понравилась еще больше, чем первая.

Сначала несколько слов о самом М. Гарднере.

В 1946 году занятия семинара известного американского философа Рудольфа Карнапа, специализирующегося главным образом в математической логике, теории вероятностей и физике, в числе прочих студентов посещал некто Мартин Гарднер, который спустя несколько лет явился к учителю с магнитофонными записями его выступлений и предложил себя в качестве ...редактора.

Р. Карнап не без долгих колебаний доверил Гарднеру эту работу и не ошибся. М. Гарднер обладает теми качествами, которых не хватало его учителю: умение ясно и четко излагать мысли, писать занимательно, ярким и простым языком.

Большое влияние на творчество М. Гарднера оказал известный многим читателям «Кванта» профессор Роберт Уильямс Вуд *), который в свободное от основной работы время с юношеским пылом метал бумеранги, решал геометрические задачи, помогал полиции раскрывать преступления, разоблачал псевдоученых, писал научно-фантастические рассказы и стихи, рисовал...

Постепенно Мартин Гарднер, который стал писать для зрелого, развитого читателя, не обязательно имеющего специальное математическое или физическое образование, пришел к нескольким творческим установкам, которые особенно ясно прослеживаются в его «Математических досугах».

Во-первых, в изложении идеи следует опираться лишь на то, что широкий читатель хорошо знает и что он сумеет самостоятельно, без ухищрений, воспроизвести. Чем большую работу читатель выполняет самостоятельно, чем неожиданней для него окажутся результаты и выводы, тем большее удовлетворение он получит.

Во-вторых, любой рассматриваемый факт, помимо того, что он занимателен, удивителен, забавен, должен быть непременно глубоко поучительным, важным с позиций науки.

В-третьих, Мартина Гарднера, как правило, мало волнуют проблемы утверждения своего приоритета. Он стремится продемонстрировать яркие идеи интересных авторов, почерпнутые им в архиве науки.

Это не означает, впрочем, что Гарднер пренебрегает историей. Она является прекрасным орнаментом в рассказах о задачах, когда, например, оказывается, что даже такой замечательный ученый, каким был Леонард Эйлер, изредка ошибался. (А читатель может избежать этой ошибки и разобраться в сути дела.)

Наконец, в-четвертых, математика и физика у Гарднера не выглядят изолированными, а предстают как часть мировой культуры. Поэтому его этюды представляют особую ценность для общего политехнического образования.

Идеи в книгах Гарднера не кажутся приглаженными и тщательно проработанными во всех деталях, приводящих к «круглому» ответу. Напротив, благодаря умышленным недомолвкам они напоминают в миниатюре задачи, которые ставит сама жизнь. Ясность достигается за счет подбора образных примеров, специального введения интермедий, подготавливающих читателя к переходам мысли, а также умеренности пользования символикой.

---

*) Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., «Мир», 1972.

**) Гарднер М. Математические досуги. М., «Мир», 1972.

---

*) См., например, «Квант» №№ 10, 11, 12, 1971.

Даже по небольшим выдержкам из «Математических досугов», которые мы печатаем в 5-м и 6-м номерах «Кванта», можно судить о том, насколько широк круг интересов Мартина Гарднера.

Мартин Гарднер по существу создал новый жанр популярной литературы. Его книги по праву можно назвать математическими развлечениями XX века.

Читая его новеллы, нельзя не получить удовольствия от раскрытия самых неожиданных связей между развлечениями и серьезной наукой и не удивиться остроумному применению математических понятий и вычислительной техники для анализа игр и головоломок.

Трудно да и незачем пересказывать содержание этой великолепной книги. Ее нужно прочесть.

В заключение мы приводим несколько отрывков из этой книги.

Казнь врасплох и связанный с ней логический парадокс

Осужденного бросили в тюрьму в субботу.

— Тебя повесят в полдень, — сказал ему судья, — в один из семи дней на следующей неделе. Но в какой именно день это должно произойти, ты узнаешь лишь утром в день казни.

Судья славился тем, что всегда держал свое слово. Осужденный вернулся в камеру в сопровождении адвоката. Как только их оставили вдвоем, защитник удовлетворенно ухмыльнулся.

— Неужели не понятно? — воскликнул он. — Ведь приговор судьи нельзя привести в исполнение!

— Как? Ничего не понимаю, — пробормотал узник.

— Сейчас объясню. Очевидно, что в следующую субботу тебя не могут повесить: суббота — последний день недели, и в пятницу днем ты бы уже знал наверняка, что тебя повесят в субботу. Таким образом, о дне казни тебе стало бы известно до официального уведомления в субботу утром, следовательно, приказ судьи был бы нарушен.

— Верно, — согласился заключенный.

— Итак, суббота, безусловно, отпадает, — продолжал адвокат, — поэтому пятница остается последним днем, когда тебя могут повесить. Однако и в пятницу повесить тебя нельзя, ибо после четверга осталось бы всего два дня — пятница и суббота. Поскольку суббота не может быть днем казни, повесить тебя должны лишь в пятницу. Но раз тебе об этом станет известно еще в четверг, то приказ судьи опять тоже отпадает. Итак, последний день, когда тебя еще могли бы казнить, это четверг. Однако четверг тоже не годится, потому что, оставшись в среду живым, ты сразу поймешь, что казнь должна состояться в четверг.

— Все понятно! — воскликнул заключенный, воспрянув духом. — Точно так же я могу исключить среду, вторник и понедельник. Остается только завтрашний день. Но завтра меня наверняка не повесят, потому что я знаю об этом уже сегодня!

И вдруг, к немалому удивлению осужденного, в четверг утром в камеру является палач. Осужденный, конечно, этого не ждал, но самое удивительное, что приговор оказался совершенно точным — его можно привести в исполнение в полном соответствии с формулировкой.

В чем же здесь противоречие?

Проблемы уличного движения в городе Флойдз-Ноб

Роберт Эббот предложил вниманию читателей лабиринт, изображенный на рисунке 1, сопроводив его следующим пояснением.

«В городке Флойдз-Ноб, штат Индиана, имеется лишь 37 зарегистрированных автомашин, и мэр городка решил назначить своего двоюродного брата Генри Стейблза, большого шутника, известного своей любовью к эксцентрическим поступкам, начальником отдела регулирования уличного движения, решив, что тот без труда справится с возложенными на него обязанностями. Вскоре мэр пожалел о принятом решении.

Проснувшись однажды утром, жители городка увидели множество новых дорожных знаков. Знаки эти были развешены так, что движение на некоторых улицах стало односторонним, а повороты на перекрестках — делом весьма сложным и запутанным.

Жители городка были за то, чтобы сорвать все дорожные знаки. Однако начальник полиции — второй двоюродный брат мэра — обнаружил, что водители настолько выходят из себя от такого обилия знаков, что рано или поздно совершают запрещенный поворот, и городская казна получает от штрафов за эти нарушения больше, чем от штрафов за

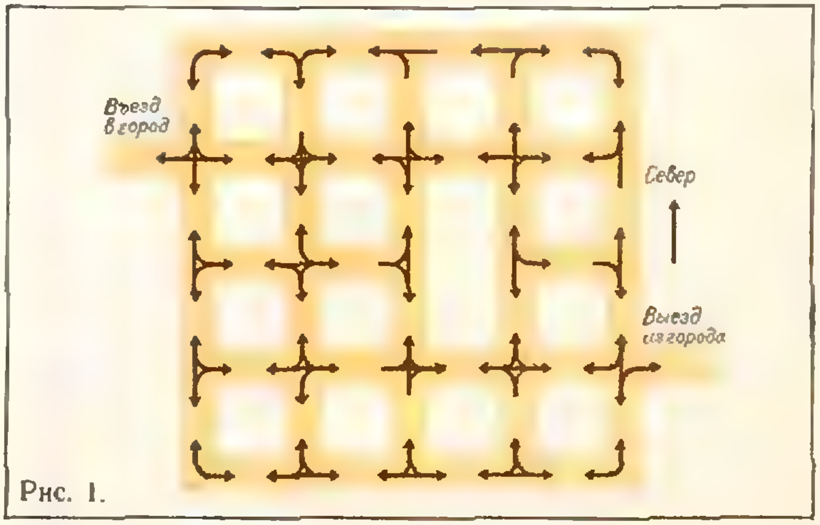


Рис. 1.

превышение скорости на пригородном шоссе.

Кроме того, жители городка не без злорадства ожидали, как на следующий день, в субботу, через город проследует Мозес Мак-Адам, самый богатый фермер вокруге, имевший обыкновение проводить конец недели в загородном доме. Все надеялись позабавиться над Мозесом, полагая, что проехать через город без единого нарушения невозможно. Но Мозес тайком раздобыл план города со всеми дорожными знаками и хорошенько изучил его. Когда настала суббота, он, к удивлению жителей, проехал через весь город без единого нарушения!»

Можете ли вы восстановить маршрут, по которому Мозес следовал через город? Очутившись на любом перекрестке, вы имеете право двигаться в направлении одной из стрелок, то есть поворачивать в нужную сторону разрешается лишь при условии, если имеется закругление, по которому можно свернуть, и следовательно, прямо — лишь при условии, если в нужную сторону идет прямая линия. Поворачивать, двигаясь задним ходом, запрещается. Нельзя разворачиваться и на 180°. Покидать перекресток разрешается только в направлении какой-нибудь из стрелок. Например, достигнув первого после въезда в город перекрестка, вы должны будете выбрать одну из двух возможностей: поехать на север или прямо (то есть на восток).

Если вы поедете прямо, то на следующем перекрестке сможете либо свернуть на юг, либо продолжить свой путь на восток. Хотя на втором перекрестке имеется закругление к северу, но стрелки, выходящей из него на север, нет, поэтому покидать второй перекресток, держа курс на север, воспрещается.

Игра в веревочку

Достойно сожаления, что искусство составления веревочных узоров не получило широкого распространения; особенно полезным оно могло бы оказаться в руках учителей начальных классов, медицинских сестер, ухаживающих за больными, вынужденными в течение длительного времени находиться в постели, и психиатров, рекомендующих ручной труд в качестве терапии.

Чтобы удовлетворить аппетиты читателей, я объясню, как сделать один из простейших и наиболее известных ромбических узоров. Его называют «ромбы осэджей», потому что этот узор впервые показал индеец из племени осэджей, однако в США его чаще называют «лестницей Якова». Читатель должен взять полтора метра мягкого шнура, связать его концы и «показать, на что он способен». Немного попрактиковавшись, вы сможете строить «лестницу Якова» менее чем за 10 секунд.

Исходное положение — такое же, как и в большинстве веревочных узоров: петля надета на большие пальцы и мизинцы обеих рук (рис. 2, *а*). Указательным пальцем правой руки подденьте участок шнура между мизинцем и большим пальцем левой руки и, не спуская шнура с пальца, отведите правую руку вправо. Указательным пальцем левой руки подденьте участок шнура между мизинцем и большим пальцем правой руки (указательный палец левой руки должен при этом пройти между участками шнура, наброшенного на указательный палец правой руки) и отведите левую руку влево. У вас получится фигура, показанная на рисунке 2, *б*. Освободив большие пальцы обеих рук и натянув шнур, вы получите фигуру, показанную на рисунке 2, *в*. Поверните руки ладонями от себя, чтобы вам легче было поддеть кончиками больших пальцев самый дальний участок шнура в точках, обозначенных на рисунке 2, *в* буквами *А*. Поддев, разверните руки в прежнее положение. При этом участок, который был самым дальним от вас, пройдет под всеми остальными участками шнура и станет самым ближним (рис. 2, *г*). Согните большие пальцы над ближайшими к ним участками шнура и подденьте ими следующий участок в точках, обозначенных буквами *А* на рисунке 2, *г*. Сбросьте петли с мизинцев. У вас получится веревочная фигура, изображенная на рисунке 2, *д*.

Согните теперь мизинцы над ближайшими к ним участками шнура, и тыльной стороной мизинцев подденьте шнур в точках, обозначенных буквами *А* на рисунке 2, *д*. Освободив большие пальцы, вы получите фигуру, изображенную на рисунке 2, *е*. Согните большие пальцы над двумя ближайшими к ним участками шнура и подденьте их тыльной стороной следующие (третьи от них) участки шнура в точках, обозначенных буквами *А* на рисунке 2, *е*. Верните большие пальцы в исходное положение. У вас получится фигура, изображенная на рисунке 2, *ж*.

Большим и указательным пальцами правой руки возьмите шнур в точке *А* (рис. 2, *ж*), потяните на себя и наденьте петлю на большой палец левой руки. Затем возьмите петлю, которая была уже надета на большой палец левой руки, в точке *В* (рис. 2, *ж*) и поднимите ее, тем самым вы спустите эту петлю с большого пальца. Этот обмен петель часто встречается в веревочных узорах. Левой рукой произведите аналогичный обмен петель на большом пальце правой руки. (Мастера веревочных узоров могут обменивать петли на обоих пальцах одновременно без помощи другой руки, но начинающему лучше придерживаться описанной выше последовательности.) После всех операций у вас должна получиться фигура, показанная на рисунке 2, *з*.

Теперь все готово для последнего движения. Согнув указательные пальцы, введите их кончики в маленькие треугольники, помеченные буквами *А* на рисунке 2, *з*. Высвободите мизинцы из петель и одновременно поверните обе руки ладонями от себя, как можно сильнее растопырив большие и указательные пальцы. (Выполняя заключительную операцию, следите за тем, чтобы шнур имел достаточно большую «слабину», иначе узор не раскроется полностью.) Туго натяните шнур. Если все было сделано правильно, вы увидите дорожку из ромбов, изображенную на рисунке 2, *и*. Внезапное появление красивых узоров из хаоса веревочных переплетений принадлежит к числу наиболее приятных особенностей большинства манипуляций с веревочкой.

Тем, кто в совершенстве овладел искусством составления веревочных узоров, может доставить удовольствие выступление в «парном разряде», когда одну и ту же петлю удерживают двое играющих: один — правой, другой — левой рукой. Играя вдвоем, нетрудно одновременно сплести два одинаковых узора на двух петлях (первая петля накинута на правую руку первого игрока и на левую руку второго, вторая петля — на левую руку первого игрока и на вторую руку второго). Гораздо труднее одновременно сплести два различных узора. Такой трюк требует огромного мастерства и точной координации движений.

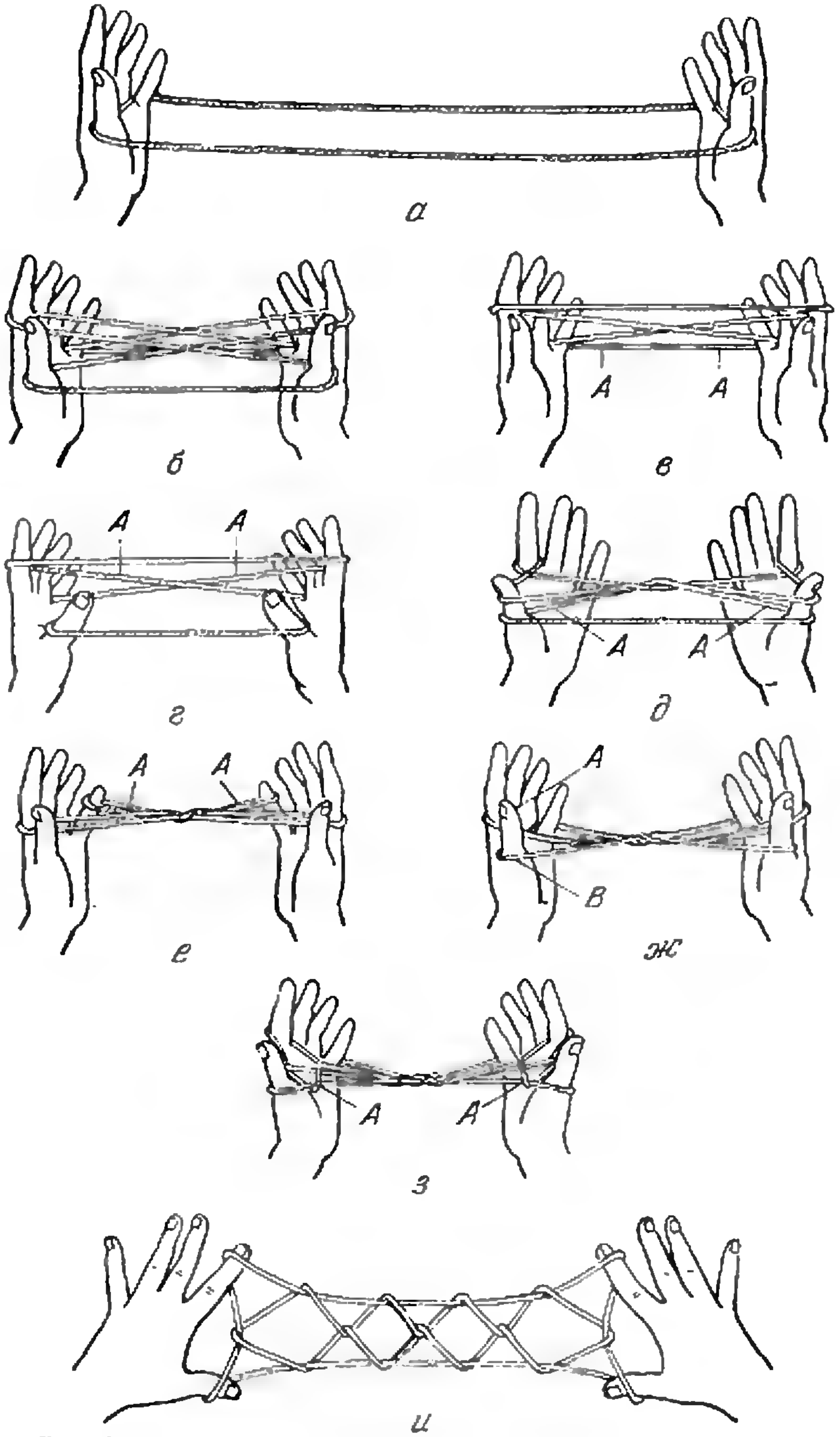


Рис. 2.

Еще одна задача на взвешивание

Из пяти данных предметов никакие два не весят одинаково. Эти пять предметов надо расположить в ряд по мере возрастания их веса. У нас есть рычажные весы с двумя чашами, но нет гирь. Как решить задачу, произведя не более семи взвешиваний?

Ясно, что для двух предметов достаточно одного взвешивания. Три предмета придется взвешивать трижды. Пускай первое взвешивание определит, что *A* тяжелее, чем *B*. Положим на весы *B* и *C*. Если *B* окажется тяжелее, то задача будет решена с помощью двух взвешиваний; если же тяжелее окажется *C*, то потребуется третье взвешивание, с помощью которого мы сравним между собой предметы *C* и *A*. Если перед вами четыре предмета, то можно легко обойтись пятью взвешиваниями.

Когда число предметов доходит до пяти, задача перестает быть правильной, а с дальнейшим ростом числа взвешиваемых предметов трудность задачи очень быстро увеличивается. Насколько мне известно, пока не существует общего метода для упорядочения *n* предметов с помощью наименьшего возможного числа взвешиваний.

В. Н. Березин.
М. Л. Смолянский

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1973 году и представляющие интерес для наших читателей.

В III квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга—почтой»):

Математика

Издательство «Наука»

1. Кириллов А. А. *Пределы.* (Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 15 к.)

В книге рассмотрен один из самых трудных разделов школьной программы — теория пределов.

На конкретных, хорошо подобранных примерах, автор ясно и очень доходчиво объясняет этот столь трудный раздел программы.

Книга предназначена для самостоятельно занимающихся математикой школьников 9—10 классов. Она также может быть использована учителями математики для внеклассной работы.

2. Панов Д. Ю. *Счетная линейка.* (Объем 11 л., тираж 200 000 экз., цена 39 к.)

В наше время умение пользоваться логарифмической линейкой необходимо каждому школьнику в самых разнообразных случаях.

Первая часть книги в простой и чрезвычайно наглядной форме учит начинающих производить простейшие вычисления с помощью логарифмической линейки (которые, однако, вполне достаточны для школьных целей).

Вторая часть книги служит более специальным целям и предназначена для читателей, уже умеющих считать на линейке.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

3. Солодовников А. С., Кантор И. Л. *Гиперкомплексные числа.* (Объем 7 л., тираж 35000 экз., цена 23 к.)

Авторы книги в популярной форме рассказывают об одном из обобщений комплексных чисел — гиперкомплексных числах.

Книга рассчитана на учащихся старших классов; она также представляет интерес для учителей математики, ведущих факультативные занятия.

4. Бескин И. М. *Деление отрезка в данном отношении.* (Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.)

В этой книге изложены некоторые вопросы, связанные с задачей о делении отрезков в данном отношении. В процессе изложения этого вопроса автор знакомит читателя с некоторыми вопросами аффинной и проективной геометрии.

Книга рассчитана на учащихся 8—10 классов. Она может быть также полезна учителям математики при проведении факультативных занятий.

Издательство «Просвещение»

5. Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И. *Математический анализ.* Пособие для учащихся математических школ. (Объем 31,7 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 10 к.)

Книга предназначена, в первую очередь, для учащихся физико-математических школ. В достаточно доступной форме, однако используя основные теоретико-множественные понятия, авторы излагают основные понятия математического анализа, представленные в программе средней школы. При изложении материала авторы широко используют наглядные представления. Большое число задач и упражнений помогают усвоению материала.

Физика

Издательство «Наука»

1. Коган Б. Ю., *Сто задач по механике.* (Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 к.)

Книга представляет собой сборник нестандартных задач по механике, носящих, в основном, занимательный характер. Ко всем задачам даны подробные решения.

Книга рассчитана на школьников старших классов, которые интересуются физикой. Она будет также полезна учителям физики, ведущим факультативные занятия.

7. *Физика. Часть I. Вселенная.* Под редакцией Ахматова А. С. (Объем 35 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 47 к.)

Эта книга является переводом американского учебника для средней школы по курсу общей физики. Полный курс состоит из четырех частей: «Вселенная», «Оптика и волны», «Механика», «Электричество и строение атома».

Публикуемая первая часть курса «Вселенная» знакомит читателя с фундаментальными физическими понятиями: время, пространство и так далее, а также с путями развития современной физики.

Книга является полезным дополнением к существующим учебникам по физике. Она рассчитана на широкий круг читателей: учащихся школ, студентов техникумов, лиц, занимающихся самообразованием, представляет большой интерес для преподавателей физики в средней школе.

8. Бишоп Р. *Колебания.* (Объем 10 л., тираж 15 000 экз., цена 70 к.)

В популярной и увлекательной форме рассказывается о колебаниях в природе и технике. Затрагивается широкий круг вопросов: колебания машин и приборов, колебания инженерных сооружений, термоупругие колебания, методы борьбы с вредными колебаниями и использование полезных колебаний. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров и фотографий.

Книга предназначена для широкого круга читателей, интересующихся техникой вообще и проблемой колебаний в частности.

9. Ферсман А. Е. *Рассказы о самоцветах.* (Объем 18 л., тираж 20 000 экз., цена 1 р. 10 к.)

Эта книга написана одним из самых крупных знатоков природы. Основываясь на своем богатейшем опыте и опираясь на сведения, почерпнутые из русских летописей, индейских и арабских лапидарий, автор вводит читателя в сложный и прекрасный мир цветных камней.

Написанная прекрасным языком, богато иллюстрированная, она несомненно вызовет интерес у самого широкого круга читателей.

Издательство «Мир»

10. Сиборг Г., Корлисс У. *Человек и атом.* (Объем 21 л., тираж 75 000 экз., цена 1 р. 26 к.)

В этой книге изложены практически все области применения атомной энергии — в медицине, биологии, энергетике и так далее. Популярное изложение материала делает эту книжку интересной для широкого круга читателей.

Атомиздат

11. Кюри Е. *Мария Кюри.* (Объем 20 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 20 к.)

Эта книга написана дочерью известной французской ученой Марии Кюри. Ева Кюри — младшая дочь Марии Кюри, журналистка — сумела очень ярко и занимательно изложить творческую биографию и жизненный путь Марии Кюри. Ни одна женщина в мире не пользовалась такой научной популярностью, как Мария Кюри. Она была членом шести научных учреждений, академий и научных обществ; она являлась дважды лауреатом Нобелевских премий (по физике и по химии).

Эта увлекательная книга, безусловно, будет интересна самому широкому кругу читателей.

Астрономия

Издательство «Наука»

12. *Астрономический календарь на 1974 год*, под ред. П. И. Бакулина. (Объем 15 л., тираж 20 000 экз., цена 70 к.)

Этот ежегодник рассчитан на участников астрономических кружков, любителей астрономии. Он содержит сведения об астрономических явлениях в 1974 году, статьи, посвященные достижениям в различных областях астрономии, инструкции для наблюдений, информацию о различных астрономических совещаниях и конференциях, материалы, посвященные юбилейным астрономическим датам.

13. Цесевич В. П. *Что и как наблюдать на небе.* (Объем 25 л., тираж 25 000 экз., цена 1 р.)

Книга является пособием для любительских научных наблюдений за небесными светилами. Содержит описание звездного неба, основных понятий астрономии и астрофизики, освещает современные данные о телах Солнечной системы — Луне и планетах, Солнце и звездах. Систематически излагаются способы наблюдений, доступных любителю астрономии, и обработки этих наблюдений.

Научная фантастика

Издательство «Мир»

1. Лем С. *Солярис. Эдем.* (Объем 21 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 13 к.).

Творчество Лема, автора ряда широко известных романов, хорошо известно нашему читателю.

В новом сборнике будут опубликованы его романы «Эдем» и «Солярис». В них рассказывается о покорении человечеством космоса, о проблемах, которые могут возникнуть перед людьми во время космических путешествий.

2. *Нежданно-негаданно.* Сборник научно-фантастических рассказов. (Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 46 к.).

В сборник включены рассказы, в которых авторы юмористически рассматривают последствия научных открытий, различных фантастических ситуаций и так далее.

Читатели познакомятся с новыми именами, с творчеством Ж. Стернберга, Х. Артьенса и других.

Все рассказы интересно и занимательно написаны.

3. Рассел Э. *Ниточка к сердцу.* (Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 76 к.).

Английский писатель Эрик Фрэнк Рассел считается одним из лучших фантастов своей страны. Его творчество характеризуется юмором и оптимизмом, лиричностью, сюжетной напряженностью и яркостью в обрисовке характеров. Научно-фантастические рассказы Э. Ф. Рассела отличаются высокими художественными достоинствами.

4. *Фантастика социалистических стран.* Сборник научно-фантастических рассказов. (Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 66 к.).

В сборнике публикуются новые произведения авторов социалистических стран. Читатель познакомится с рассказами болгарского автора С. Славчева, поляка С. Вайнфельда и других.

Для всех произведений характерен занимательный, напряженный сюжет, их авторы предлагают вниманию читателей увлекательные научно-фантастические гипотезы.

М. Л. Смолянский

Брошюры по физике

Издательство «Знание» уже около 20 лет выпускает серию брошюр под общим названием «Физика», рассчитанную на широкий круг читателей. Большая часть их рассказывает о современных проблемах теоретической и экспериментальной физики. Авторы этих брошюр — известные ученые, активно участвующие в разработке освещаемых ими проблем. Они обычно стремятся донести до читателя прежде всего основные физические идеи, лежащие в основе исследований, и потому почти не пользуются сложным математическим аппаратом. Тем не менее для полного понимания таких брошюр необходимо, как правило, предварительное знакомство с вузовским курсом общей физики. Но и увлеченные физикой старшеклассники найдут немало интересных сведений на страницах этих брошюр.

Почти каждый год среди брошюр этой серии встречаются и такие, которые вполне доступны старшеклассникам. Приведем несколько примеров.

В серии «Физика» выпускаются биографии выдающихся ученых, создавших новые разделы этой науки. Обычно выход в свет таких брошюр связан с юбилейными датами. Так, в работе академика Б. М. Понтекорво *«Энрико Ферми»* (№ 8, 1971) рассказывается о жизни и основных научных достижениях замечательного итальянского ученого. Брошюра тем более интересна, что автор ее много лет сотрудничал с Ферми и был одним из самых любимых его учеников.

Брошюра, выпущенная к 100-летию со дня рождения Эрнеста Резерфорда, называется *«О физике XX века»* (№ 6, 1971) и содержит три лекции Резерфорда, прочитанные им в 1909, 1923 и 1936 годах. Эти популярные лекции посвящены атомарному строению электричества, строению атома и искусственному превращению элементов. Лекциям предпослано предисловие академика П. Л. Капицы, который на протяжении почти 14 лет работал в Кембридже у Резерфорда.

Исключительная роль, которую физика играет в научно-технической революции, вызывает все возрастающий интерес к истории этой науки. Некоторые крупные ученые высказывают мнение о том, что нельзя рассчитывать на успех в предвидении путей развития физики в будущем, если мы не будем достаточно понимать ее прошлое. В связи с этим возникла идея создать антологию предисловий к выдающимся трудам ученых XVI—XX веков. Такой сборник *«Становление физики»* (№ 8, 1972) составил профессор С. П. Капица. Каждому предисловию предпослана краткая биография его автора. В брошюре приведены целиком или в выдержках предисловия к наиболее знаменитым трудам по физике русских и иностранных ученых: Гильберта, Ньютона, Ломоносова, Гельмгольца, Менделеева, Эйнштейна, Перрена, Планка, Дирака.

Некоторые брошюры серии «Физика» помогают читателям ориентироваться в фактах и событиях, относящихся к развитию физики и ее достижениям. Например, брошюра А. И. Баженова *«Физики-лауреаты»* (№ 11, 1971) рассказывает о физиках-лауреатах Нобелевской премии. Шесть известных советских физиков — академики И. Е. Тамм, И. М. Франк, П. А. Черенков, Л. Д. Ландау, Н. Г. Басов и А. М. Прохоров — были награждены Нобелевскими премиями. Основной раздел брошюры посвящен советским физикам-лауреатам и тем трудам, за которые им были присуждены эти премии. В брошюре дана также краткая справка о Нобелевских премиях и приведен полный список Нобелевских лауреатов по физике со времени основания премий.

Следует упомянуть и о брошюре академика П. Л. Капицы, стоящей несколько в стороне от основной тематики серии «Физика». Имеется в виду его сборник *«Физические задачи»* (№ 6, 1972). Он был выпущен в связи с пожеланиями многих читателей, особенно молодых. В этот сборник вошли также несколько статей П. Л. Капицы на тему о воспитании физиков.

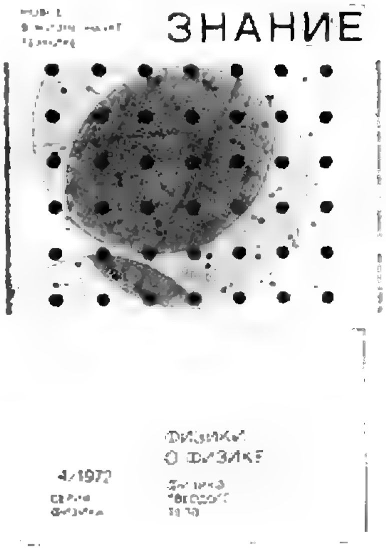
Помещенные в сборнике задачи во многом не похожи на обычные задачи по физике. Условия этих задач часто не содержат всех необходимых данных, и школьнику надо самому дополнять их сведениями из справочников и таблиц. Решение таких задач требует не только умения оперировать заученными формулами, но и глубокого понимания существа рассматриваемых физических явлений. Поясняя причины, побудившие его составить столь необычные задачи, автор пишет: «Хорошо известно, что для плодотворной научной работы требуется не только знание и понимание, но, главное, еще самостоятельное аналитическое и творческое мышление. Как одно из эффективных средств воспитания, выявления и оценки этих качеств при обучении молодежи и были составлены эти задачи».

Расскажем коротко о брошюрах, которые выйдут в 1973 году. Первые две брошюры содержат популярный обзор достижений в различных областях физики. Одна из них написана физиком-теоретиком, профессором М. И. Кагановым. Она называется *«Магноны и плазмоны»* (№ 1, 1973) и посвящена исследованиям так называемых квазичастиц. Автор пишет, что понятие «квазичастица», впервые выдвинутое еще в тридцатых годах советским физиком-теоретиком Я. И. Френкелем, оказалось очень плодотворным в физике твердого тела, где квазичастица прекрасно справляется с тем, ради чего она создана: с описанием движения атомных частиц в конденсированных средах.

В брошюре *«Электрические свойства плазмы»* (№ 2, 1973) доктор физико-математических наук В. Н. Цытович рассматривает проблемы использования плазмы как источника сильных электрических полей, в частности, для новых методов ускорения заряженных частиц. Автор рассказывает о развитии идей академика В. И. Векслера об ускорении сгустков заряженных частиц и перспективах создания новых мощных ускорителей, основанных на использовании плазмы.

ЭНРИКО ФЕРМИ

ЗНАНИЕ
СТАНОВЛЕНИЕ



Брошюру академика А. А. Логунова и В. А. Ярба *«Серпуховский ускоритель»* (№ 3, 1973) можно отнести к числу наиболее доступных школьникам брошюр этого года. В ней приводится краткое описание основных характеристик серпуховского ускорителя протонов с энергией, достигающей 76 миллиардов электрон-вольт. Авторы подробно рассказывают о результатах исследований в области физики высоких энергий, выполненных на этом ускорителе.

В 1973 году издательство «Знание» намечает выпустить в серии «Физика» ряд других брошюр по различным вопросам физики (о новейших достижениях в области изучения нейтрино, о проблемах гравитации, об успехах и перспективах термоядерных исследований, о проблемах квантовой электроники, оптики и физики атмосферы). Подготавливается также издание брошюры, составленной из статей, посвященных научной деятельности недавно умершего выдающегося советского физика-теоретика академика Игоря Евгеньевича Тамма.

Будет издан очередной сборник *«Физики о физике»*, содержащий статьи зарубежных физиков, опубликованные в последнее время в иностранной научно-популярной печати. Сборники «Физики о физике» выпускаются ежегодно и охватывают широкий круг физических проблем. Так, сборник, выпущенный в 1972 году (№ 4, 1972) был посвящен новым идеям и методам в физике твердого тела. Тема сборника «Физики о физике» 1973 года — астрофизика и физика плазмы.

Брошюры серии «Физика» выходят один раз в месяц и распространяются по предварительной подписке, как обычное подписное издание. Стоимость годовой подписки — 1 руб. 20 коп.

Ф. Кедров

Л. В. Кованцова

Киевская заочная физико-математическая школа

Всем известно, как велико значение математики для наук, занимающихся изучением окружающего нас мира. Ее развитие тесно связано с творчеством многих поколений ученых-математиков; эта постоянно развивающаяся наука вызывает все больший интерес, который с годами не ослабевает, а усиливается. Особенно радостно видеть, с какой заинтересованностью и любовью относятся к математике школьники, как тонко они чувствуют и понимают ее. В этом — большая заслуга преподавателей, раскрывающих перед учащимися загадочный мир математики, мир формул и теорем.

В последнее время очень много внимания уделяется вопросу улучшения форм школьного образования — введению целесообразной методики, использованию вспомогательных средств в процессе обучения. Обучение в заочной физико-математической школе — одна из новых форм изучения математики. Первая заочная математическая школа была открыта в 1963 году при Московском университете. Затем такие же школы были организованы при Ленинградском и Новосибирском университетах, а в 1968 году — при Киевском университете. В настоящее время в Киевской школе насчитывается более 2,5 тысяч учащихся.

Специализированные заочные школы строят работу независимо от планов, по которым работают обычные средние школы.

В задачах, которые даются в специализированных заочных физико-математических школах, должны быть такие элементы, которые создают активный запас математических знаний. Необходимо, чтобы учащийся, решая задачу, смог сам подумать над тем, чтобы число вводимых в нее данных не было ни избыточным, ни недостаточным.

Какие же темы разрабатывают учащиеся Киевской заочной физико-математической школы?

Это, прежде всего, метод координат, функции и их графики, элементы комбинаторики, пределы, производная, уравнения и неравенства, тригонометрические уравнения, геометрические преобразования, неевклидовы геометрии.

Эти вопросы охватывают полный курс школьного обучения, и в то же время они намного сложнее, объемнее. Так, метод координат в наших заданиях используется намного шире, чем это делается в средней школе. Учащиеся знакомятся с такими тонкими вопросами высшей математики, как аксиоматический метод, неевклидовы геометрии. Кроме элементарных форм геометрических преобразований, рассматриваемых в средней школе, учащимся сообщаются сведения о более сложных формах — проективных, аффинных, то есть учащиеся знакомятся с теоретико-групповыми основаниями в геометрии.

Мы считаем нужным давать учащимся специализированной школы элементы комбинаторики даже при условии, что они есть в программах обычной школы. Это становится тем более необходимым, когда эти элементы из программы исключены. Для учащихся специализированных школ элементы комбинаторики нужны не как самоцель, а как отправная точка для вырабатывания у них теоретико-вероятностного подхода к элементам реальной действительности.

Большую помощь в работе Киевской заочной школы оказывает Украинское телевидение, в тесном единении с которым школа работает с первых дней своего существования. Каждый понедельник в эфир выходят передачи для учащихся нашей школы, подготовленные и читаемые профессорами и преподавателями Киевского университета, учеными АН УССР.

Начиная с этого года, издательство «Вища школа» выпускает целую серию брошюр*) для учащихся, увлекающихся математикой. Здесь и «Метод координат», и «Геометрические преобразования», и «Производная», и многие другие. Все брошюры будут выходить на украинском языке.

Назначение такой литературы — закрепить школьные знания, выработать у школьника навыки математического мышления, и в некоторых случаях вывести читателя за пределы школьных программ и сообщить ему новые сведения, новые методы математического рассуждения.

---

*) См. «Квант» № 4, 1973, с. 66.

Ежегодно в январе школа проводит набор учащихся. В школе три курса. Набор проводится на 1-й и 2-й курсы.

Ниже приводятся задачи вступительной контрольной работы, предлагавшиеся в 1972 году.

7 класс

1. Некоторая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседании присутствовало по 10 человек, причем никакие двое из членов комиссии не были вместе на одном заседании более одного раза.

Доказать, что число членов комиссии более 60.

2. Плоскость разбита на квадратные клетки, в каждой из которых записано некоторое натуральное число. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в четырех соседних клетках.

Доказать, что все числа, вписанные в клетки, равны между собой.

3. Разложить на 4 множителя выражение $x^8 + x^4 + 1$.

4. Остаток от деления на 24 квадрата простого числа, большего 3, равен единице. Доказать это или опровергнуть.

5. Внутри треугольника найти такую точку, что линии, соединяющие ее с тремя вершинами треугольника, делят треугольник на три части, площади которых пропорциональны трем данным числам p, q и r.

6. Найти прямоугольный треугольник с заданным острым углом, в котором гипотенуза выражается тем же числом, что и площадь.

7. Куб, все грани которого выкрашены краской, распилили на 1000 одинаковых кубиков, полученные кубики сложили в ящик и тщательно перемешали. Каковы вероятности (доли случаев) вынуть наугад из ящика кубик с одной, двумя и тремя окрашенными гранями?

8. Найти частное от деления $a + a^2 + \ldots + a^{100}$ на $a^{-1} + a^{-2} + \ldots + a^{-100}$.

9. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

10. Какое наибольшее число тупых углов может быть в пятиугольнике?

11. В каких пределах может меняться угол при вершине равнобедренного треугольника, если основание остается меньше боковой стороны?

12. Доказать, что если три угла выпуклого четырехугольника тупые, то диагональ, исходящая из четвертого угла, длиннее, чем другая диагональ.

13. При каких значениях параметра a дробь

$$\frac{(a-1)^3}{a^5 - 3a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 3a - 1}$$

имеет максимальное значение?

8 класс

1. Через точку M на стороне AB треугольника ABC провести прямую так, чтобы она поделила площадь треугольника пополам.

2. При каких значениях n существует выпуклый n-угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

3. Доказать, что если обе стороны прямоугольника и его диагональ выражаются целыми числами, то площадь прямоугольника численно делится на 12.

4. Доказать, что сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не является целым числом ни при каком целом n.

5. 25 *м* ленты толщиной в 0,1 *мм* намотали на картонную трубку. Получился валик диаметром в 1 *дм*. Каков диаметр трубки?

6. Доказать, что если целое число n не делится на 17, то $n^8 - 1$ или $n^8 + 1$ делится на 17.

7. Найти сумму n членов

$$3 + 33 + 333 + \ldots + 333\ldots3$$

8. В трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ даны $AD = 57$, $BC = 33$, $\angle BAD = 60°$, E и F — середины сторон BC и AD. Площадь трапеции равна 180. Пусть AE и BF пересекаются в точке M, а ED и FC пересекаются в точке N. Найти площадь четырехугольника $FMEN$. Какие из данных задачи можно отбросить, чтобы при этом не изменился ответ?

9. К какому трехзначному числу можно приписать такие три цифры слева, что получится его квадрат? (Найти все такие числа.)

10. В $\triangle ABC$ провести прямую ab, параллельную стороне AB, так, чтобы площадь прямоугольника $abcd$ (точки c и d — основания перпендикуляров, опущенных из a и b на AB) была наибольшей.

11. Кусок перфоленты имеет форму прямоугольника со сторонами 30 и 90 *см*. На нем записана некоторая информация в двоичном коде, то есть в виде упорядоченной совокупности нулей и единиц. Цифры записаны на дорожках, расстояния между которыми 1 *см*. Расстояние между крайними дорожками и краями перфоленты составляет 1,5 *см*. Известно, что на участке дорожки длиной 3 *см* записаны хотя бы две единицы. Справедливо ли утверждение, что на всем куске перфоленты можно насчитать не менее 990 единиц?

12. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ABC имеет место соотношение $c^3 \geqslant 8RS$, где c — гипотенуза, R — радиус описанного круга, S — площадь треугольника.

VI Международная олимпиада по физике

В июле 1973 года состоится очередная Международная физическая олимпиада школьников. Предыдущая, VI Международная олимпиада, была проведена в 1972 году в Румынии, в Бухаресте. Мы помещаем здесь короткую информацию об этой олимпиаде.

Команду Советского Союза представляли: **Вайдман Лев** — учащийся 10 класса спецшколы-интерната № 45 г. Ленинграда, **Лягушин Сергей** — учащийся 10 класса средней школы № 23 г. Днепропетровска, **Мкртчян Рубен** — учащийся 10 класса физико-математической школы № 1 г. Еревана, **Плетнев Игорь** — учащийся 10 класса спецшколы-интерната № 18 г. Москвы, **Провоторов Сергей** — учащийся 10 класса спецшколы-интерната № 45 г. Ленинграда.

Все участники олимпиады должны были выполнить задания теоретического и экспериментального туров. Для решения четырех задач теоретического тура было дано 5 часов, для выполнения экспериментальной задачи — 4 часа.

На VI Международной олимпиаде были присуждены всего две первые премии. Одну из них (и спецпризы за четкое решение задач по механике и электричеству) получил школьник из Венгрии **Золтан Сабо**, другую — школьник из СССР **Сергей Провоторов**. По статуту Международной физической олимпиады командное первенство не определяется.

Результаты выступления участников команды СССР на VI Международной олимпиаде по физике:

Провоторов Сергей (54,6 балла)— I премия и спецприз за четкое решение задачи по оптике;

Лягушин Сергей (45,6 балла)— III премия;

Мкртчян Рубен (43,2 балла)— III премия;

Плетнев Игорь (37,2 балла)— похвальная грамота;

Вайдман Лев (36,0 балла)— похвальная грамота.

Ниже приводятся задачи I и II туров VI Международной физической олимпиады.

I тур

1. Три цилиндра одинаковой массы, одинаковой длины и одинакового внешнего радиуса положены на наклонную плоскость. В начальный момент они находятся в состоянии покоя. Коэффициент трения скольжения f по наклонной плоскости задан и одинаков для всех цилиндров.

Первый цилиндр полый (в виде трубы), второй — однородный, а третий имеет такую же полость, как первый, но закрытую крышками пренебрежимой массы и заполненную жидкостью такой же плотности, как и стенки. Трением между жидкостью и стенками пренебречь.

Плотность вещества первого цилиндра в n раз больше плотности вещества второго или третьего цилиндров. Найти:

1) Линейные ускорения осей цилиндров в том случае, когда скольжение отсутствует. Сравнить эти ускорения.

2) Каким должен быть угол наклона плоскости α, чтобы ни один цилиндр не скользил.

3) Взаимные отношения угловых ускорений в случае качения со скольжением всех цилиндров. Сравнить эти ускорения.

4) Силу взаимодействия между жидкостью и стенками в случае скольжения третьего цилиндра. Масса жидкости m известна.

2. Два цилиндра A и B одинаковых диаметров имеют свободно передвигающиеся поршни малой массы с общим стержнем. Стержень представляет собой короткую трубку, снабженную краном, который вначале закрыт. Цилиндр A вместе с поршнем теплоизолирован, а цилиндр B находится в термостате, имеющем температуру $t = 27^\circ$ C (см. рис. 1).

Вначале поршень цилиндра A закреплен и внутри цилиндра находится 32 *кг* аргона под давлением больше атмосферного. Цилиндр B объемом $V = 5{,}54$ *м*^{3} содержит некоторое количество кислорода под атмосферным давлением.

После освобождения поршень цилиндра A движется достаточно медленно (квазистатически). В состоянии равновесия объем аргона увеличился в 8 раз, а плотность кислорода в цилиндре B увеличилась в 2 раза. Известно количество теплоты $Q = 747{,}9 \times 10^4$ *дж*, переданное термостату. Молекулярная масса аргона $\mu = 40$ *кг/кмоль*. Требуется:

1) Доказать на основании кинетической теории газов, учитывая упругие столкновения молекул с поршнем, что процесс в

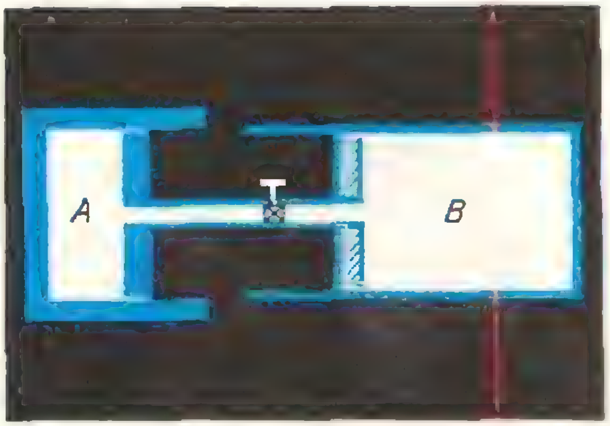


Рис. 1.

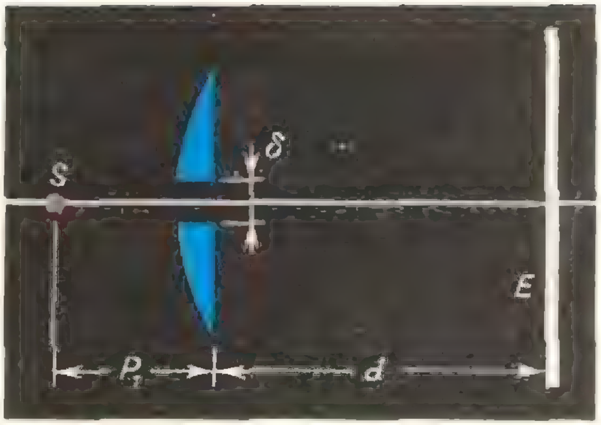


Рис. 2.

цилиндре A описывается уравнением $TV^{1/3} = \mathrm{const}$.

2) Определить параметры P, V, T аргона в начальном и конечном состояниях.

3) Вычислить конечное давление смеси газов, получающейся после открытия крана, соединяющего два цилиндра.

3. Плоский заряженный конденсатор с прямоугольными пластинами установлен в вертикальном положении так, чтобы нижняя сторона соприкасалась с диэлектрической жидкостью. Расстояние между пластинами гораздо меньше линейных размеров пластин. Известны: напряженность начального электрического поля E заряженного конденсатора, плотность ρ и относительная диэлектрическая постоянная ε жидкости, высота пластин конденсатора H.

Определить высоту поднятия жидкости между пластинами и объяснить это явление. Явлением капилярности пренебречь.

4. Тонкая плосковыпуклая линза диаметра $2r$ с радиусом кривизны R и коэффициентом преломления n_0 установлена в таком положении, чтобы слева находился воздух ($n_1 = 1$), а справа—прозрачная среда с коэффициентом преломления $n_2 \neq 1$ (выпуклая сторона обращена к воздуху). В воздухе на расстоянии p_1 от линзы на главной оптической оси установлен точечный источник монохроматического света.

1) Доказать следующее соотношение между положением изображения, отстоящего на расстоянии p_2 от линзы, и положением источника p_1 в приближении параксиальных пучков: $\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1$, где f_1 и f_2— фокусные расстояния в воздухе и в среде с коэффициентом преломления n_2 соответственно.

2) Линзу разрезают перпендикулярно плоской грани на две равные части, которые затем раздвигают на расстояние $\delta \ll r$ (билинза Бийе). На оси симметрии этой системы на расстоянии p_1 $(p_1 > f_1)$ от оси (см. рис. 2) установлен точечный источник света. Справа от системы на экране E, установленном параллельно линзе на расстоянии d, образуется N интерференционных полос, если справа находится тоже воздух.

Определить число интерференционных полос N в зависимости от длины волны λ.

Примечание. Все коэффициенты преломления являются абсолютными.

II тур

Экспериментальная задача

Даны два цилиндрических тела (одинаковые по внешней геометрической форме), изготовленные из одинакового вещества, линейка с делениями, деревянный брусок и сосуд с водой.

Известно, что одно тело однородно, а другое имеет внутреннюю полость со следующими характеристиками:

а) форма полости цилиндрическая,

б) ось полости параллельна оси тела,

в) длина полости практически равна длине тела.

Определить экспериментально и обосновать теоретически:

1) относительную плотность вещества тел (относительно воды),

2) радиус цилиндрической полости,

3) расстояние между осями полости и цилиндрического тела.

Указать источники погрешностей и оценить, какие из них оказывают наиболее существенное влияние на конечные результаты.

Попробуйте определить погрешности (например, среднеквадратичные) количественно.

Описать все найденные варианты решения задачи с использованием только имеющихся у вас средств.

М. Д. Карасев, Г. С. Тарасюк

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

1. В кружках треугольника на рисунке справа были расставлены все числа от 1 до 7 (каждое по одному разу), причем сумма чисел вдоль каждого отрезка прямой была одна и та же.

Определите, какое число было записано в вершине треугольника и чему равнялись указанные суммы.

2. В трех сообщающихся сосудах находится вода. Левый сосуд открыт. Одинаковое ли давление в точках A, B и C, если они лежат на одной горизонтали?

3. На рисунке справа изображена фигура в виде буквы T с четырьмя отмеченными клетками. Разделите эту фигуру по линиям сетки на четыре одинаковые части, причем так, чтобы в каждой из частей было по одной отмеченной клетке.

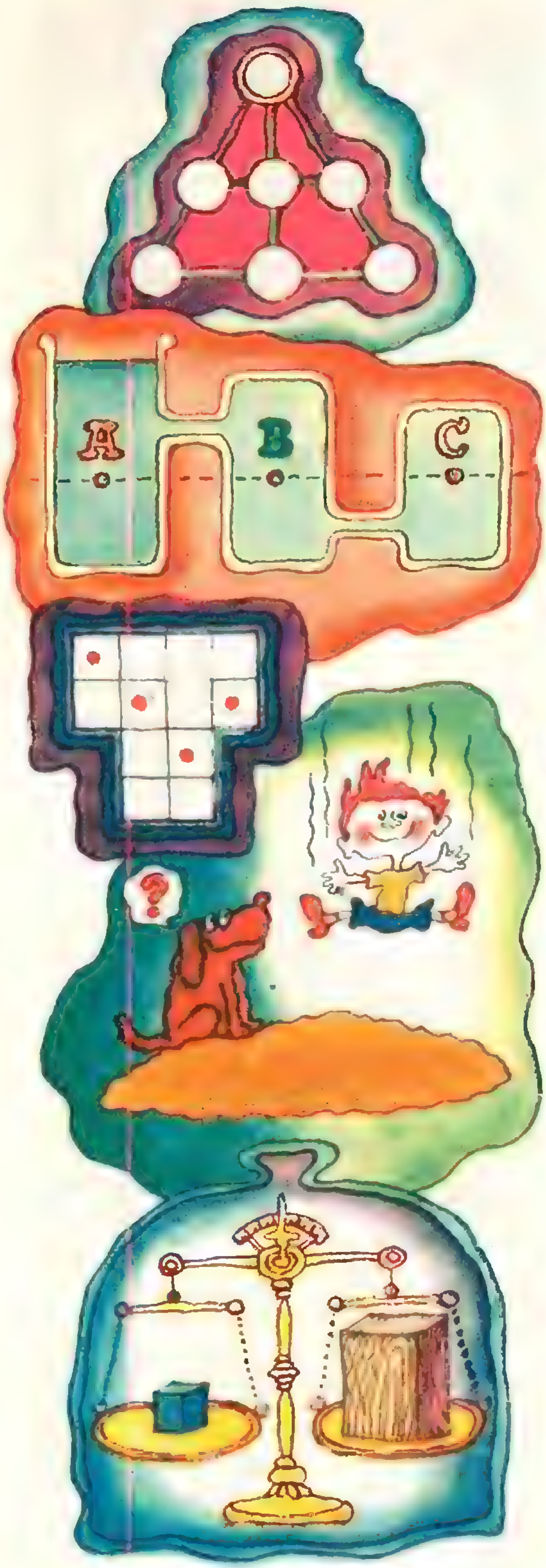
4. Прыгать с обрыва в песок безопаснее, чем на твердую землю. Почему?

5. Как объяснить следующие равенства:

$$09 = 0 \times 9 + (0 + 9),$$
$$19 = 1 \times 9 + (1 + 9),$$
$$29 = 2 \times 9 + (2 + 9),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$99 = 9 \times 9 + (9 + 9),$$
$$109 = 10 \times 9 + (10 + 9),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1239 = 123 \times 9 + (123 + 9)$$

и так далее?

6. Деревянный и чугунный бруски по отдельности уравновешены в воздухе гирей 10 *кг*. Что произойдет, если бруски положить на разные чашки весов, а весы поместить под стеклянный колпак и откачать воздух?



Пальцы — счетная машина

Считать люди научились давно, и антропологам еще предстоит найти первобытное общество, члены которого не умели считать. Долгое время среди ученых существовало мнение, что первобытные племена могли считать только до двух, так как для обозначения чисел у них были слова «один», «два» и «много». При этом поражала их сверхъестественная способность, просмотрев стадо овец, сказать, что одна овца пропала. Объясняли это феноменальной памятью древних людей, которая позволяла им запоминать «форму» всего стада или каждую овцу по ее виду. Более поздние исследования показали, что применение одного слова для всех чисел, больших двух, не означало, что люди ничего не знали о разнице между пятью и шестью камнями и что обозначение одним словом голубого и зеленого не означало, что они не видят разницы в цвете между зеленой травой и голубым небом. Племена с ограниченным запасом слов имели тщательно разработанные способы счета на пальцах рук и ног.

Первобытные общества различались не только своим выбором основания системы счисления, но и манерой счета. Так как у большинства людей правая рука более активная, то счет обычно начинали с большого пальца или мизинца левой руки, дотрагиваясь правой рукой до пальцев левой руки, либо загибая пальцы левой руки, либо отгибая пальцы, ранее сжатые в кулак. Известны и другие способы счета. Так, например, жители островов Бенгальского залива начинали счет с мизинца, дотрагиваясь до своего носа очередным пальцем, а на острове между Австралией и Новой Гвинеей люди считали до пяти, постукивая пальцами левой руки, а затем переходили не на правую руку, а на левое запястье, локоть, плечо, левую грудь и т. д. и продолжали счет, изменяя этот порядок на обратный, но уже с правой стороны тела. Математики заметили, что постукивание при счете применялось для обозначения порядковых чисел (первый, второй и т. д.), а когда пальцы поднимались сразу, то это обозначало количественные числа.

Хотя подавляющее большинство систем счета на пальцах имело в основании число десять (они были, как мы теперь говорим, десятичными), можно также легко считать на пальцах в системах с другими основаниями. Пальцы особенно удобны для счета в самой простой системе — двоичной *). Прямой и согнутый пальцы можно сравнить с триггером в современных вычислительных машинах, в которых используется двоичная система. При счете на пальцах в двоичной системе прямой палец может означать единицу, а согнутый — нуль. Тогда самое большое число, выраженное пальцами обеих рук, будет равно 1111111111, то есть $2^{10}-1 = 1023$ в десятичной системе, причем самая

---

*) Мы публикуем переработанную статью известного американского ученого-популяризатора М. Гарднера (Scientific American, 9, 1968, с. 218—230). Публикация подготовлена А. С. Варпаховским.

*) Двоичная система—это система, в основании которой лежит число 2. В двоичной системе участвуют только две цифры — 0 и 1, а число 2 представляет собой уже единицу следующего разряда. Так, число 2 записывается как 10, число 3 как 11, число 4 как 100, число 1000 как 1 111 101 000 и т. д.

Таблица сложения выглядит так: $0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 10$.

Таблица умножения имеет следующий вид: $0 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$.

Подробнее о двоичной системе счисления вы можете прочитать в книге Фомина С. В. «*Системы счисления*» М., «Наука», 1968.

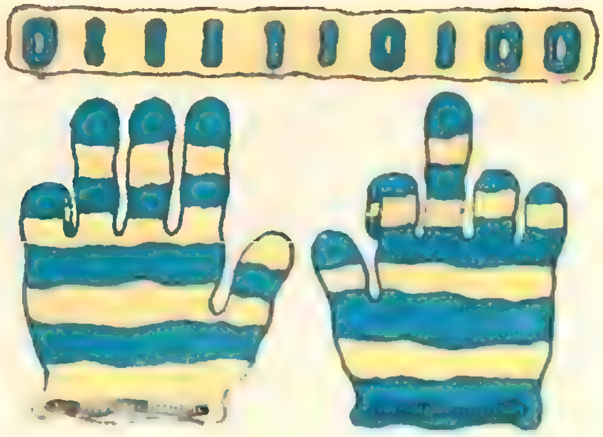


Рис. 1

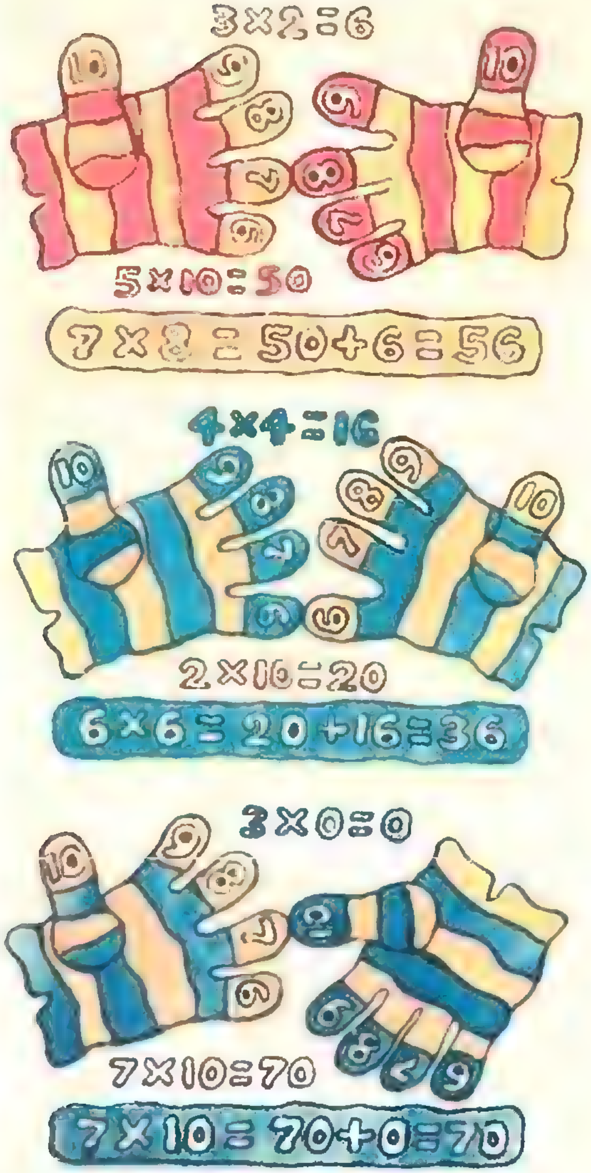


Рис. 2.

младшая единица соответствует мизинцу правой руки. Два в двоичной системе выражается как 10, то есть мизинец в согнутом состоянии, а безымянный палец — прямой. Если еще выпрямить и мизинец, то это будет означать 11, то есть три в десятичной системе. На рис. 1 показано, как на пальцах обеих рук представить 500 в двоичной системе. Если немного попрактиковаться, то можно легко научиться не только представлять на пальцах десятичные числа в двоичной системе, но и осуществлять сложение и вычитание в этой системе единиц.

Уже в средние века был известен метод умножения чисел от 6 до 10, то есть чисел, больших 5. В 1492 году было определено общее правило использования дополнения двух чисел до 10. (Дополнение числа n равно $10 - n$.) Для умножения 7 на 8 берутся их дополнения: 3 и 2. Разность между любым из двух исходных чисел и ему непарным дополнением определяет цифру десятков, то есть в нашем случае 5, а произведение дополнений определяет вторую цифру результата, то есть $2 \times 3 = 6$, окончательный результат $50+6=56$. Применение этого метода к умножению на пальцах сводилось к следующему. Пальцы каждой руки нумеруются от 6 до 10, начиная с мизинца. Для умножения 7 на 8 палец под номером 7 одной руки соединяется с пальцем под номером 8 другой руки (рис. 2). Дополнением 7 являются три верхних пальца левой руки, а дополнением 8 — два верхних пальца правой руки. Сумма всех остальных пальцев обеих рук определяет цифру десятков, то есть 5. К пятидесяти прибавляем произведение верхних пальцев 2 и 3, ответ равен 56. Этот простой способ использования пальцев для вычисления произведения любой пары чисел от 6 до 10 широко применялся в период Ренессанса и, говорят, до сих пор применяется крестьянами в некоторых районах Европы. Вместо использования дополнения до 10 можно представить 7 и 8 в виде биномов (5 + 2) и (5 + 3), а затем выполнить умножение

$$\begin{array}{r} 5+2 \\ 5+3 \\ \hline 25+10 \\ 15+6 \\ \hline 25+25+5=56 \end{array}$$

Способ умножения на пальцах можно легко обобщить и на следующие полудекады, хотя для всех полудекад, оканчивающихся на 5, применяется несколько другое правило. Рассмотрим полудекаду 11—15, и пусть надо перемножить 14 и 13. Пальцам присваиваются номера от 11 до 15 и пальцы с номерами перемножаемых чисел соединяются (рис. 3). Семь нижних пальцев умножаются на 10 и получают 70. Далее определяется произведение нижних пальцев 4×3 = 12 и 70+12=82. Затем прибавляют 100. Окончательный ответ 182. Можно по-разному объяснить такое правило умножения, но проще всего это сделать на примере перемножения биномов:

$$\begin{array}{r} 10+3 \\ 10+4 \\ \hline 100+30 \\ 40+12 \\ \hline 100+70+12=182 \end{array}$$

Если полудекада оканчивается на нуль, то сложение производится по первому способу! Для полудекады от 16 до 20 каждый нижний палец имеет значение 20 и добавлять нужно 200. Так, при умножении 17×19 (рис. 4) шесть нижних пальцев умножаются на 20, что даст 120. Произведение верхних пальцев равно 3, и, таким образом, получаем 17×19= =120+3+200=323.

На пальцах можно перемножить числа и из разных полудекад, но процедура в этом случае гораздо сложнее, так как одинаковые пальцы каждой руки имеют разные значения. Но всегда можно большое число разбить на малые числа, выполнить несколько умножений, а результат получить, просуммировав результаты умножений. Например, 9 × 13 = (9 × 6)+ + (9 × 7).

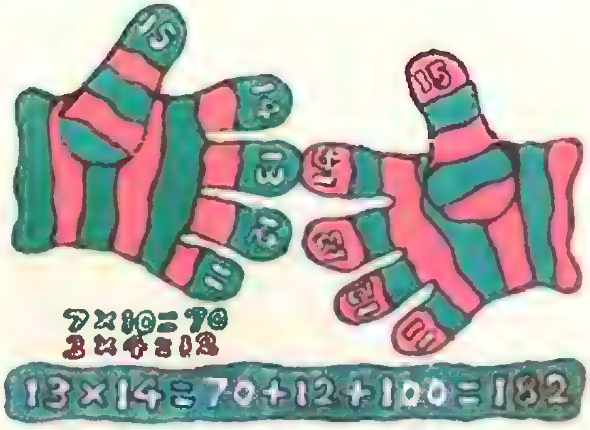


Рис. 3.

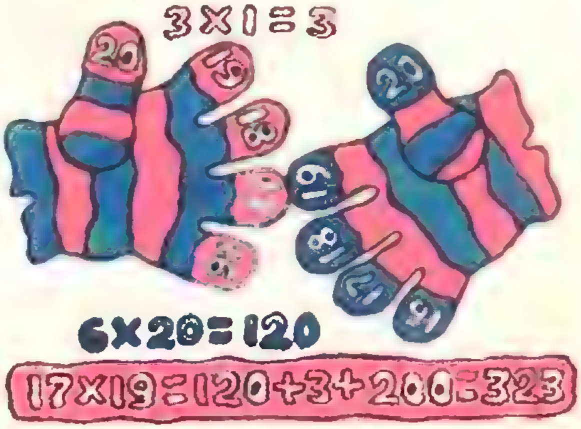


Рис. 4.

На первый взгляд может показаться, что считать на пальцах довольно сложно. Однако если немного попрактиковаться, то думаю, читатель убедится в том, что способ счета на пальцах весьма удобен.

К статье «О наполнении и закупоривании бутылок»

1. Указание. Легко уложиться в N^2 действий (если, следуя правилам, указанным в п. 4, для каждой очередной бутылки все сравнения производить заново: наименьшее из чисел $a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N$ ищется за $2N-1$ сравнение, затем строка, содержащая это число, вычеркивается; минимальное среди оставшихся чисел определяется за $2N-3$ сравнения и т. д.). Эту оценку можно, однако, сильно улучшить. Наилучшую оценку можно получить, если воспользоваться методом, описанным в статье «Кто поедет в Рио?» («Квант» № 8, 1972).

К статье «Геометрия комплексных чисел»

1. $x=1,\ y=-4$ и $x=-1,\ y=-4$. Указание. Данные комплексные числа должны быть комплексно-сопряженными.

2. $z=\dfrac{3}{2}-2i$.

3. Вне окружности (и на самой окружности) радиуса $\dfrac{9}{2}$ с центром в точке $(-{}^1/_2, {}^1/_2)$.

4. $z=\dfrac{1}{2}$. Указание. Если точка z удовлетворяет условию задачи, то она равноудалена от точек (0, 1), (0, —1) и (1, —1).

5. Окружность радиуса 3 с центром в начале координат. Указание. Положить $z=x+iy$ и привести данное соотношение к виду $x^2+y^2=9$.

6. $$z_1=-\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\pi i,$$
$$z_2=-\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\pi i.$$

7. Полуплоскость правее прямой $x=1$ (исключая эту прямую), за исключением точки (2, 0). Указание. Данное неравенство эквивалентно неравенству $0<|z-2|<|z|$. Неравенству $|z-2|<|z|$ удовлетворяют все такие точки плоскости, расстояние от которых до точки (2, 0) меньше, чем до начала координат.

8. Действительная и мнимая оси. Указание. Данное соотношение привести к виду $|z^2-i|=|z^2+i|$ и, положив $z=x+iy$, воспользоваться определением модуля комплексного числа.

К «Геометрическим задачам»

см. стр. 57

1—3. Пусть длина наибольшей стороны равна a. Длины других сторон обозначим через x, y; они должны удовлетворять соотношениям $0<x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $x+y>a$. На координатной плоскости этим треугольникам соответствуют точки в части квадрата $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, причем x и y — целые. Подсчитав число таких точек и учитывая, что точек с координатами, удовлетворяющими уравнению $x+y>a$, столько же, сколько точек, удовлетворяющих уравнению $x+y<a$, причем точкам, симметричным относительно диагонали квадрата (прямой $y=x$), соответствуют одинаковые треугольники, получим

$$\frac{a(a+1)}{4}+\frac{\left[\frac{a+1}{2}\right]}{2}$$

треугольников ([ ]— целая часть числа). Просуммировав число треугольников от $a=1$ до $a=2p$, получим искомое число треугольников:

$$\frac{4p^3+9p^2+5p}{6}$$

(для $n=2p+1$ подсчитайте сумму самостоятельно).

6. Предположим, что таких сторон нет. Расположим стороны по убыванию: $r_1\geqslant r_2\geqslant\ldots\geqslant r_n>0$. Тогда $r_1\geqslant 2r_2$, $r_2\geqslant 2r_3$, …, $r_{n-1}\geqslant 2r_n$. Сложив эти неравенства и приведя подобные члены, получим: $r_1\geqslant r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}+2r_n>r_2+\ldots+r_n$. Это противоречит тому, что $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — стороны многоугольника.

7. а) Поместить веса в точки A — 1, B — m, C — mn и D — n и найти двумя способами центр тяжести этой системы.

б) Обозначим точку пересечения PQ и RS через T. Выберем точку D' так, чтобы $ABCD'$ был параллелограммом. Построим в нем аналогично точки Q', R' и T'. Для него доказываемая теорема верна (проверьте!), далее рассмотрите отрезок $T'T''\parallel QQ'\parallel RR'$ и докажите, что T'' и T совпадают.

К статье «Московский авиационный институт»

Математика

Вариант 1

1. Поделив обе части уравнения на 3^{x-1}, получим $(x+2)\left[x+1-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]=0$, откуда $x_1=-2$, $x_2=1$.

2. Умножить левую часть доказываемого равенства на $\cos\dfrac{A}{2}$ и преобразовать получившееся выражение, учитывая, что центр вписанного в треугольник круга лежит в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

3. $\frac{\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ n=0,\ \pm 1,$ $\pm 2, \ldots$

4. 60 *км/ч*, 40 *км/ч*.

5. 23/12 $см^3$.

Вариант 2

1. $x^2+4x+5=0$.

2. $0 \leqslant b \leqslant 2$.

4. $\sqrt{b(b+c)}$.

5. $\frac{\pi(5\sqrt{2}-6)}{7}$.

Физика

2. При движении проводника длиной l со скоростью v в магнитном поле с индукцией B на концах проводника возникает э. д. с. индукции, равная

$$E = Blv \sin\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между проводником и полем. Так как движение проводника ускоренное, то

$$v = at. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим

$$a = \frac{E}{Blt\sin\alpha} = \frac{1}{0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx$$

$$\approx 116\ (м/с^2).$$

3. $$W = \frac{q\cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Ze\cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r};$$

$$W = \frac{7\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{1\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-15}} =$$

$$= 1{,}6\cdot 10^{-12}\ (дж).$$

4. $$\alpha_{ст} = \frac{m(1+\beta_{рт}t)-m_0}{3m_0 t} =$$

$$= \frac{0{,}67(1+0{,}00018\cdot 100)-0{,}68}{3\cdot 0{,}68\cdot 100} =$$

$$= 0{,}00001\ (град^{-1}).$$

5. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь

$$H_1 = H_t - H_{t-\Delta t} = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\Delta t)^2}{2},$$

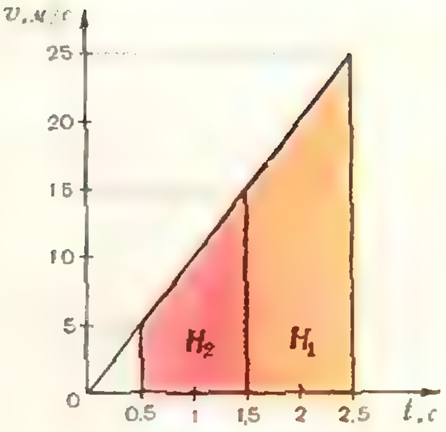
а в предыдущую секунду —

$$H_2 = H_{t-\Delta t} - H_{t-2\Delta t} =$$

$$= \frac{g(t-\Delta t)^2}{2} - \frac{g(t-2\Delta t)^2}{2}.$$

По условию задачи

$$H_1 = 2H_2,$$



откуда

$$t = \frac{5}{2}\Delta t = 2{,}5\ с;\quad H_1 = \frac{gt^2}{2} \approx 30{,}6\ м.$$

График зависимости скорости тела от времени приведен на рисунке.

К статье «Московский институт электронной техники»

Вариант 1

1. $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $x \geqslant 2$.

2. $a_{20} = 193$.

3. $x = k\pi$ и $x = \frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

5. $$r = \frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}},$$

$$l = \frac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}.$$

Вариант 2

1. $z = \frac{7+5i}{6}$.

2. $x = \log_3 5$.

3. $0 < x < \frac{\pi}{24}$ и $\frac{5\pi}{24} < x < \frac{\pi}{4}$.

4. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$

5. $$c = \frac{R\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

К статье «Московский институт радиотехники, электроники и автоматики»

Вариант 1

1. $x_1 = 3,\ y_1 = 4;\ x_2 = 4,\ y_2 = 3$.

2. $x = 5$.

3. $x = \frac{2k\pi}{11}$, $k = 0, \pm 1$.

4. Воспользоваться теоремой синусов. Радиусы минимальны, когда AD — высота треугольника ABC.

5. $x < -\frac{7}{9}$.

Вариант 2

1. $x_1 = 2$, $y_1 = 6$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3$.

2. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$.

3. $z = -\frac{\pi}{16}$.

4. Пусть $R \geqslant r$. Тогда $S = \pi r^2$ при $R - r \geqslant d$; $S = R^2\alpha + r^2\beta - 2S_\Delta$, где S_Δ — площадь треугольника со сторонами R, r, d, $\alpha = \arcsin \frac{2S_\Delta}{Rd}$, $\beta = \arcsin \frac{2S_\Delta}{rd}$ при $R + r \geqslant d \geqslant \sqrt{R^2 - r^2}$; при $\sqrt{R^2 - r^2} \geqslant d \geqslant R - r$ надо в выражении для S писать $\pi - \beta$ вместо β.

5. -1. Указание. $a^3 = 1$, так как (комплексные) корни данного уравнения являются также корнями уравнения

$$(a^2 + a + 1)(a - 1) = a^3 - 1 = 0.$$

Вариант 3

1. $x_1 = 5$, $y_1 = 1$; $x_2 = -1$, $y_2 = -5$.

2. $x = \log_{2/3} \frac{2}{9}$.

Указание. Положить $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

3. $x = \frac{\pi}{6}$.

4. Указание. Домножить числитель и знаменатель правой части на $(a + b - c)$ и воспользоваться теоремой косинусов.

5. $\log_3 10 = \frac{(b - 1)(a + 2) - 1}{2 - b}$.

К задачам

(*см. стр. 39*)

1. Точка R лежит на прямой. Указание. Взять систему координат, связанную с точкой P; точка R получается поворотом отрезка PQ вокруг точки P на угол CAB и растяжением с коэффициентом $\frac{CA}{AB}$.

2. $\frac{\varphi(n)}{2} - 1$. Указание. Разделить окружность на n равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Многоугольник имеет вид

$$A_1 A_{r+1} A_{2r+1} \ldots A_{(n-1)r+1} A_{nr+1}$$

(при этом, если $kr + 1 > n$, то надо брать остаток от деления $kr + 1$ на n, то есть $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2 \ldots$, а $A_{nr+1} = A_1$). Чтобы получился именно n-угольник, r должно быть взаимно простым с n. Многоугольники $A_1 A_{r+1} \ldots$ и $A_1 A_{n-r+1} \ldots$ совпадают (они отличаются лишь направлением обхода), а при $r = 1$ (и $r = n - 1$) получается не звездчатый многоугольник.

3. Воспользоваться теоремой Птолемея.

4. Указание. Поместить треугольники так, чтобы точки A, D и B, E совпали, а C и F лежали по одну сторону от AB. Рассмотреть $\angle FBC$.

5. Легко показать, что площади треугольников ABC и ADC равны. Из формулы Герона следует, что $|AB - BC| = |AD - DC|$. Учитывая, что $AB + BC = AD + DC$, находим, что либо $AB = AD$, $BC = DC$, либо $AB = DC$, $BC = AD$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 5, 1973*)

1. Представить данное выражение в виде $36\,(6^n - 1)^2$.

2. Привяжите гирьку на веревочке к динамометру и медленно опускайте ее поочередно в каждый сосуд. При движении гирьки в сосуде с керосином показания динамометра не изменяются. Во втором сосуде при прохождении границы керосин — вода сила, которую показывает динамометр, скачком уменьшается, так как плотность керосина меньше плотности воды.

3. Сумма цифр нечетных чисел больше на 49.

4. Автомобиль не может проходить каждый километр на 1 минуту быстрее и, тем более, на 2 минуты быстрее. Если считать, что максимальная скорость, развиваемая автомобилем, равна 180 *км/ч*, то каждый километр можно проходить быстрее на 40 секунд.

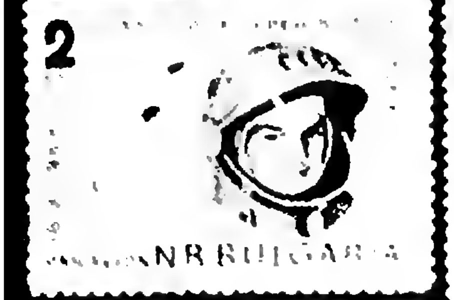
5. $77 \cdot 713 \cdot 13 = 713\,713$.

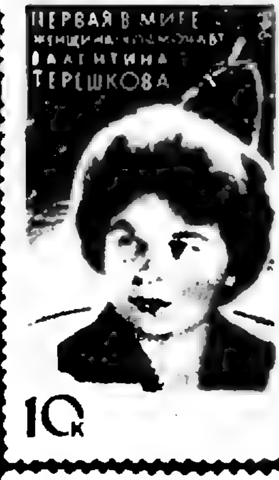
6. Здесь действует правило рычага: чем меньше плечо, тем большую силу нужно приложить. Если бы ручка была привинчена близко к оси вращения двери, необходимо было бы приложить значительно большее усилие, чтобы открыть дверь.

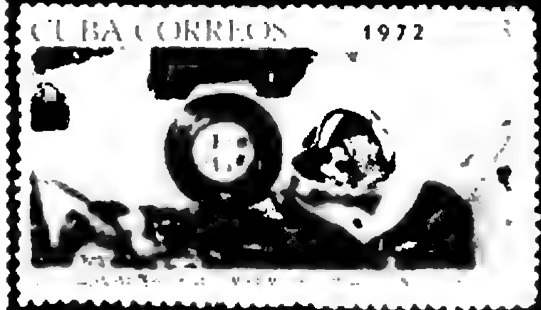
Корректор *Е. В. Сидоркина*
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 6/III 1973 г. Подписано в печать 20/IV 1973 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,17 Тираж 182550 экз.
Т-05741 Цена 30 коп. Заказ 378

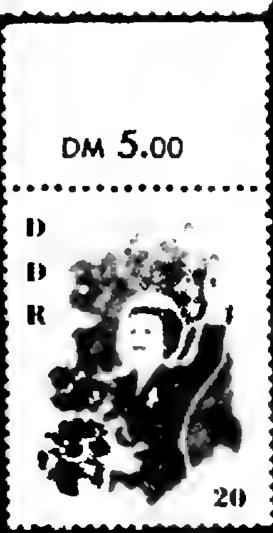
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области
Рукописи не возвращаются

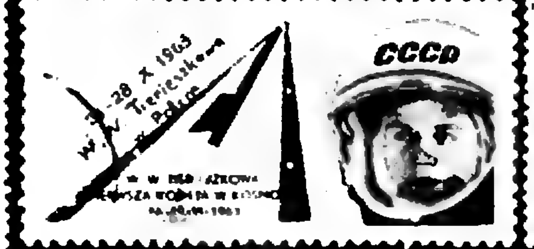
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

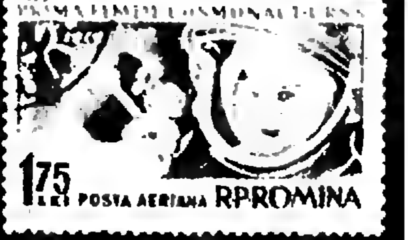

2
NR BULGARIA

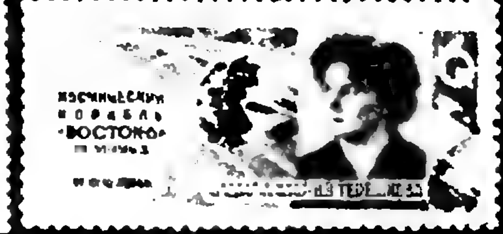

ПЕРВАЯ В МИРЕ ЖЕНЩИНА-КОСМОНАВТ ВАЛЕНТИНА ТЕРЕШКОВА
10к

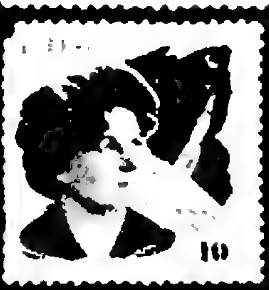

CUBA CORREOS
1972


DM 5.00
DDR
20


28 X 1963
W. V. Tiereszkowa
w Polsce
СССР


PRIMA FEMEIE COSMONAUT
1,75 LEI
POSTA AERIANA
R.P.ROMINA


КОСМИЧЕСКИЙ КОРАБЛЬ «ВОСТОК-6»
В. ТЕРЕШКОВА

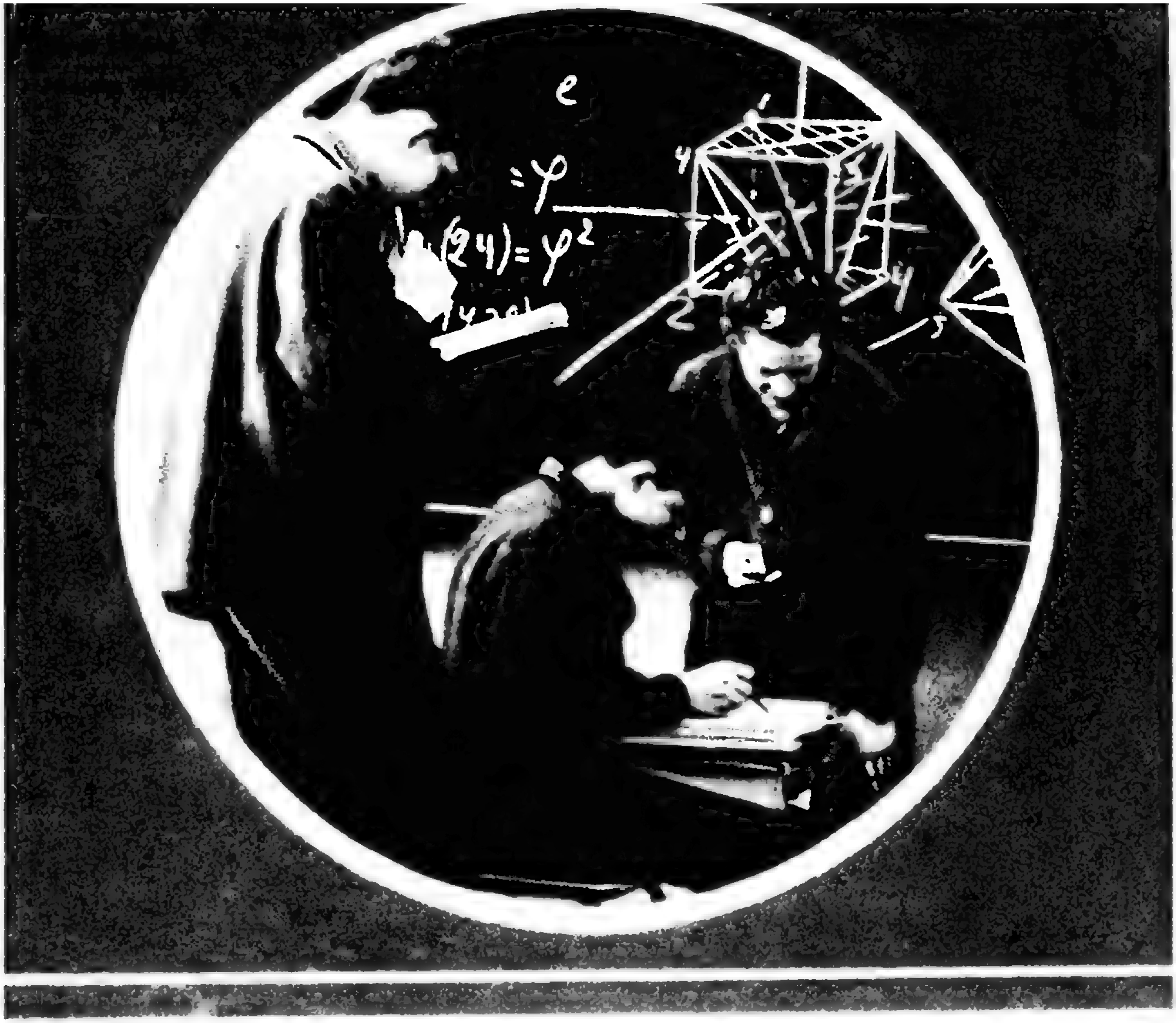


МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ПЕРВОЙ ЖЕНЩИНЕ-КОСМОНАВТУ

Десять лет тому назад, 16 июня 1963 года, на космическом корабле «Восток-6» стартовала с Земли первая женщина-космонавт Валентина Владимировна Терешкова. Программа ее полета была рассчитана на одни сутки. Однако прекрасная предварительная подготовка и отличное здоровье Валентины Терешковой позволили увеличить этот срок втрое. В парном полете с «Ястребом» — космонавтом-5 Валерием Федоровичем Быковским — «Чайка» — космонавт-6 Терешкова совершила более 48 оборотов вокруг Земли и пролетела около двух миллионов километров. Космонавты успешно выполнили обширную программу научных исследований. Одна из основных задач совместного полета Быковского и Терешковой состояла в том, чтобы изучить и сравнить реакцию мужского и женского организмов на сложные условия космического полета. Ведь в будущих дальних космических экспедициях наряду с мужчинами несомненно будут участвовать и женщины, организм которых имеет немало особенностей.

Отдавая дань глубокого уважения подвигу первой женщины-космонавта, многие страны выпустили почтовые марки, посвященные этому полету. Мы воспроизводим здесь марки СССР, Болгарии, ГДР, Кубы, Польши и Румынии.

В. А. Лешковцев



Продолжается подписка на второе полугодие 1973 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

НОМЕР
7

Основан в 1970 году

квант

1973
7

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
М. Д. Миллионщиков,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
И. Б. Мамулова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *С. Г. Гиндикин.* Сколько существует операций над множествами?
11 *Л. Г. Асламазов.* Поверхностное натяжение

Математический кружок

21 *А. Л. Тоом.* Решения задач вступительной контрольной работы ВЗМШ 1973 года

Задачник «Кванта»

24 Задачи М211—М215; Ф223—Ф227
26 Решения задач М171—М173; Ф188—Ф192

Практикум абитуриента

30 *В. Е. Белонучкин, С. М. Козел.* Закон сохранения энергии
35 *И. А. Столяров.* Движение заряженных частиц в электрическом поле
42 *В. И. Давыдов, И. А. Дьяконов, П. Т. Дыбов, И. И. Наслузов.* Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы
44 Вступительные экзамены в вузы.
44 *В. М. Камышлина.* Московский энергетический институт
45 *А. Н. Рублев, В. А. Тонян.* Московский институт электронного машиностроения
48 *В. В. Гольдберг, Л. Г. Дымбицкая.* Московский институт стали и сплавов
49 *В. И. Малахов.* Московский институт инженеров железнодорожного транспорта
51 *Э. А. Голубов.* Уральский государственный университет имени А. М. Горького
53 *Е. В. Веретенникова, В. И. Крупич.* Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина

«Квант» для младших школьников

56 Задачи
57 *Т. С. Петрова.* Огонь в решете
58 **Ответы, указания, решения**
Уголок коллекционера *(3-я стр. обложки)*
В. А. Лешковцев. На марках — спутники связи «Молния»
Смесь *(стр 43, 55)*

© *«Квант», 1973 год*

С. Г. Гиндикин

Сколько существует операций над множествами?

Множества могут состоять не только из чисел, но и из людей, машин, животных, растений и т. д. В жизни множества обычно называются по-разному. Так, например, говорят не множество коров, а стадо коров, не множество лошадей, а табун лошадей, не множество инструментов, а набор инструментов и т. д.

Эти слова взяты из учебника математики для IV класса. Вы наверняка знаете, что над множествами можно производить операции объединения и пересечения, которые иногда называются сложением и умножением множеств. Приходилось ли вам слышать о каких-нибудь других операциях над множествами? Может быть, вы знаете, что такое разность множеств или их симметрическая разность? А много ли вообще существует операций над множествами? Конечно или бесконечно их число? Для того чтобы ответить на эти вопросы, прежде всего надо дать себе отчет в том, что же следует называть операцией над множествами? Мы дадим общее определение таких операций и расскажем о некоторых их интересных свойствах. О более трудных вещах рассказывается в тексте, набранном мелким шрифтом (при первом чтении эту часть текста можно опустить).

1. Объединение и пересечение

Напомним, что объединение $A \cup B$ множеств A, B состоит из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A, B, а пересечение $A \cap B$ состоит из элементов, которые входят в оба эти множества. Образование объединения и пересечения иллюстрируется рисунком 1, на котором «круги» символизируют множества, над которыми производится операция, а закрашенная область отвечает множеству, которое получается в результате операции. Замечательно, что множества могут быть самой разнообразной природы, и тем не менее эти диаграммы очень удобны при изучении операций над ними.

Обе рассматриваемые операции обладают следующими двумя свойствами:

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность),

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность).

Коммутативность очевидна из определений (см. рис. 1). Доказать ассоциативность вам поможет рисунок 2. Расстановка скобок предписывает порядок, в котором должны выполняться операции. Рисунок подсказывает, что в каком бы из указанных выше порядков не выполнялись операции объединения, в результате получится множество, состоящее из

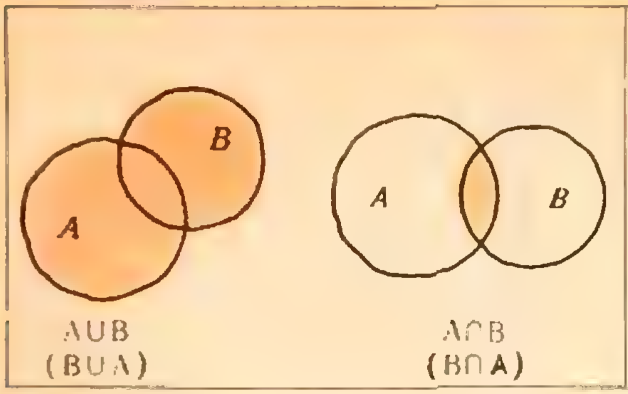


Рис. 1.

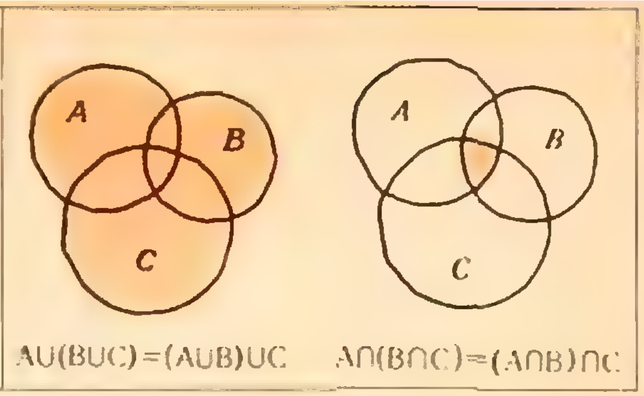


Рис. 2.

элементов, входящих хотя бы в одно из наших множеств. Аналогично в случае пересечения получается множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из наших множеств. Мы советуем читателю провести аккуратные рассуждения, и не исключено, что будет не слишком легко перевести на язык слов то, что очевидно из рисунков.

Ассоциативность позволяет, например, в случае объединения при многократном проведении операции над множествами $A_1, \ldots, A_n$ не фиксировать при помощи скобок порядок, в котором производятся операции, и говорить просто об объединении n множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$; это множество состоит из элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Коммутативный же закон показывает, что можно как угодно менять порядок $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

В числовом случае сложение и умножение связаны между собой следующим соотношением: $a(b+c) = ab + ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения). Это соотношение позволяет выносить общий множитель за скобку и раскрывать скобки. Для множеств таких соотношений два:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (2)$$

На рисунке 3 приведены диаграммы, иллюстрирующие эти соотношения. Для доказательства, например, первого из них достаточно заметить, что множество, стоящее и справа и слева, состоит из элементов, входящих в множество A и по крайней мере в одно из множеств B или C. Отметим, что в числовом случае второе соотношение имело бы вид $a + bc = (a+b)(a+c)$, что, разумеется, неверно.

Первое из соотношений (2) показывает, что любую последовательность объединений и пересечений можно преобразовать в такую последовательность этих операций, что сначала выполняются все пересечения, а потом объединения. Убедитесь, например, что $(A \cup B) \cap ((C \cap D) \cup E)$ можно преобразовать в $(A \cap C \cap D) \cup (A \cap E) \cup (B \cap C \cap D) \cup (B \cap E)$. Можно сделать и так, что вначале будут выполняться все объединения (пользуясь вторым соотношением). Продумайте аналоги этих преобразований в числовом случае.

2. Разность и симметрическая разность

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов A, которые не входят в B (рис. 4). Разность не яв-

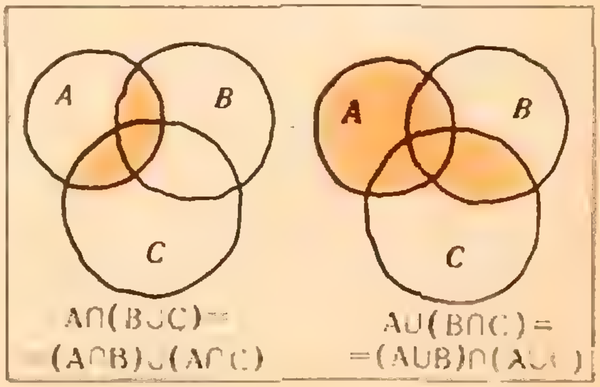


Рис. 3.

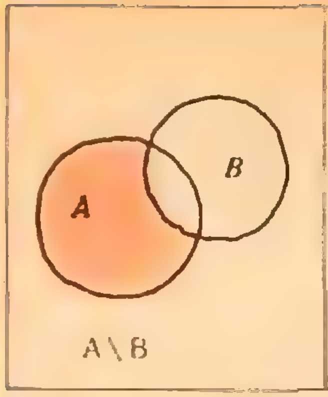


Рис. 4.

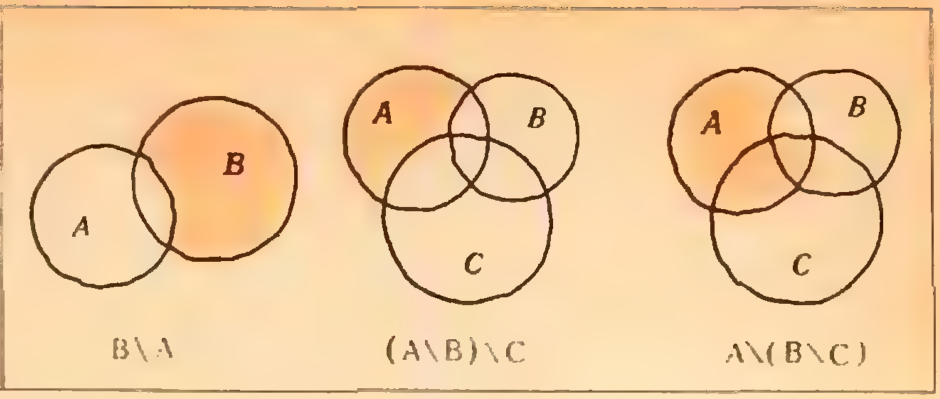


Рис. 5.

ляется ни коммутативной, ни ассоциативной операцией. Доказать это вам поможет рисунок 5. Заметьте также, что разность не является операцией, обратной объединению (которое, как мы уже говорили, иногда называют сложением множеств). Вы убедитесь в этом, доказав следующие соотношения:

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B;$$
$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A.$$

Симметрическая разность $A \triangle B$ множеств A и B состоит из элементов, входящих в одно и только одно из множеств A и B (рис. 6): $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Симметрическая разность является коммутативной и ассоциативной операцией. Докажите это, воспользовавшись рисунком 7. Для симметрической разности и пересечения выполняется дистрибутивное соотношение: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (см. рис. 8). Однако $A \triangle (B \cap C)$ может не совпадать с $(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$ (см. рис. 9). Ситуация аналогична числовой. Для этого, как мы увидим, имеются глубокие причины.

3. Универсальное множество и дополнения множеств

Будем предполагать в дальнейшем, что все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества. Мы будем называть его **универсальным** множеством и обозначать через I. Обычно такое множество можно выделить естественным образом. Если, например, рассматриваются множества точек на плоскости, то универсальным является множество всех точек на плоскости; если рассматриваются множества натуральных чисел, то универсальным является множество всех натуральных чисел.

Если фиксировано универсальное множество I, то можно говорить о дополнении $\bar{A}$ множества A (до I): $\bar{A} = I \setminus A$, то есть $\bar{A}$ состоит из элементов I, не входящих в A

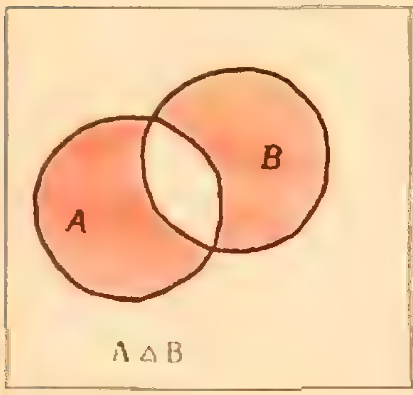


Рис. 6.

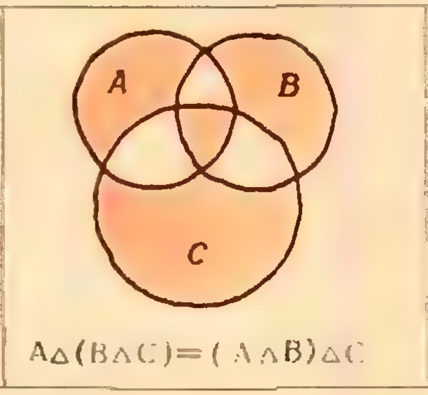


Рис. 7.

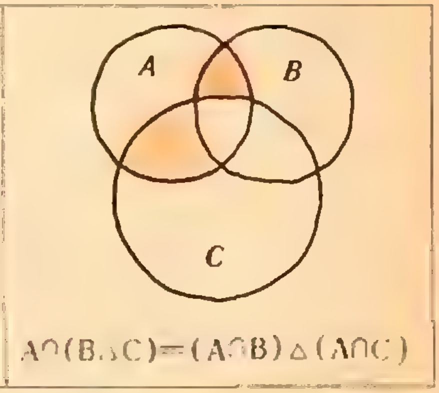


Рис. 8.

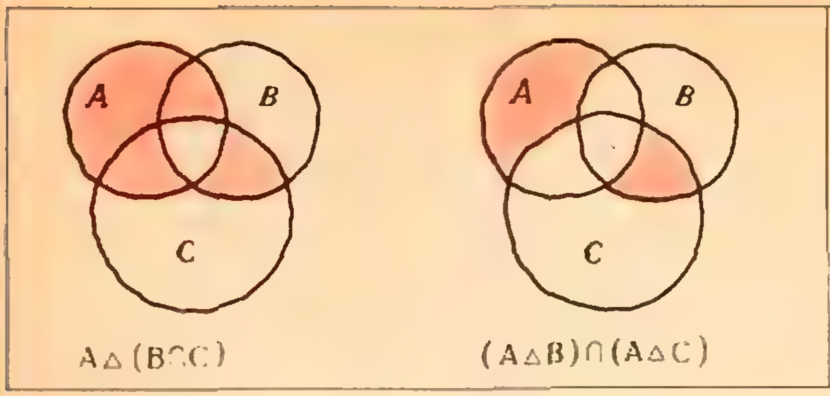


Рис. 9.

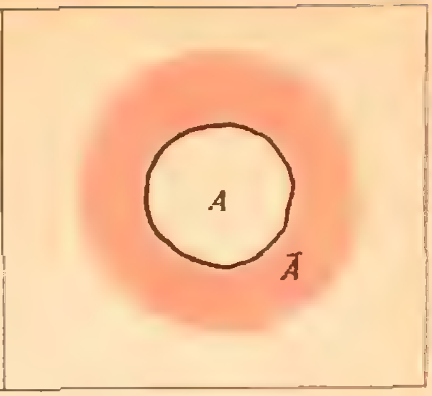


Рис. 10.

(см. рис. 10). Дополнение универсального множества пусто: $\bar{I} = 0$ (пустое множество).

Операция дополнения позволяет связать операции объединения и пересечения следующим образом: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Действительно, $\bar{A} \cap \bar{B}$ состоит из элементов, входящих в $\bar{A}$ и $\bar{B}$, то есть не входящих ни в A, ни в B, или, что то же, не входящих в объединение $A \cup B$, что и утверждается. Из полученного соотношения следует, что

$$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}, \quad A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}. \tag{3}$$

Для получения первого из этих соотношений достаточно заметить, что из совпадения множеств следует совпадение их дополнений и что $\bar{\bar{C}} = C$ (дополнение к дополнению совпадает с исходным множеством). Для получения второго нужно учесть, что поскольку $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ для любых A и B, то можно в качестве этих множеств взять $\bar{A}$, $\bar{B}$: $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B$. Соотношения (3) носят название законов де Моргана. Они показывают, что объединение можно выразить через пересечение и дополнение, а пересечение — через объединение и дополнение.

Отметим, что $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, а значит, $A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

4. Закон двойственности

Изучение операций над множествами состоит в получении различных тождеств, связывающих операции. Имеются в виду утверждения следующего вида. Над множествами $A_1, \ldots, A_n$ двумя способами выполняются какие-то последовательности операций и утверждается, что эти комбинации операций всегда (для любых $A_1, \ldots, A_n$) приводят к совпадающим множествам. Все законы (1), (2), (3) являются такого рода тождествами. Важно уметь получать из уже имеющихся тождеств новые. Например, мы уже фактически пользовались тем, что если в тождестве заменить $A_1, \ldots, A_n$ на $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ или перейти к дополнениям в обеих частях тождества, то также получим тождество.

Сейчас мы укажем очень важный способ преобразования тождеств, содержащих операции объединения, пересечения и дополнения (и только эти операции).

Закон двойственности. Если в тождестве, содержащем только операции объединения, пересечения и дополнения, заменить все пересечения на объединения, а все объединения — на пересечения, то вновь получится тождество.

Проверьте, что таким образом из коммутативности и ассоциативности объединения получаются коммутативность и ассоциативность пересечения, и обратно, и из одного дистрибутивного соотношения (2) — другое

Мы не будем приводить здесь доказательство этого утверждения, и поясним на примере, как оно может быть получено.

Рассмотрим тождество

$$A_1 \cap ((A_2 \cup \bar{A}_3) \cap \overline{(\bar{A}_4 \cap A_5)}) = A_1 \cap \overline{(\bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_4 \cap A_5)}.$$

его легко проверить, пользуясь законами де Моргана. Перейдем в обеих частях тождества к дополнениям и заменим все $A_1, \ldots, A_5$ на $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_5$:

$$\overline{\bar{A}_1 \cap ((\bar{A}_2 \cup A_3) \cap \overline{(A_4 \cap \bar{A}_5)})} = \overline{\bar{A}_1 \cap \overline{(A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_4 \cap \bar{A}_5)}}.$$

Заменим теперь все операции объединения и пересечения при помощи (3). Если мы упростим полученное тождество, пользуясь тем, что две черты над одним выражением можно уничтожить, то получим нужное тождество:

$$A_1 \cup ((A_2 \cap \overline{A}_3) \cup \overline{(\overline{A}_4 \cup A_5)}) = $$
$$= A_1 \cup \overline{(\overline{A}_2 \cup A_3) \cap (\overline{A}_4 \cup A_5)}.$$

Строгое доказательство проводится из таких же соображений.

5. Что такое операция над множествами?

Попытайтесь сами дать ответ на этот вопрос, а затем сравните ваши выводы с тем, что рассказывается ниже.

Задать операцию над множествами — это прежде всего значит указать способ по двум заданным множествам A и B строить третье множество; обозначим его через $A \bigcirc B$ *). Если мы остановимся в определении на этом месте, то получим необозримое количество операций. Но, может быть, вам удалось подметить, что во всех операциях, которые мы пока рассматривали, вопрос о том, входит ли какой-либо элемент в $A \bigcirc B$, полностью решался исходя только из того, в какие из множеств A, B он входит, а в какие — нет. Включим это требование в определение операции. Сформулируем его более подробно.

Если заданы два множества A и B, то возникает разбиение универсального множества I на четыре непересекающихся подмножества: множество $A \cap B$, состоящее из элементов, содержащихся в обоих множествах A и B; множество $\overline{A} \cap \overline{B}$, состоящее из элементов, не попавших ни в одно из этих множеств; множество $\overline{A} \cap B$, состоящее из элементов, попавших в B, но не попавших в A, и множество $A \cap \overline{B}$, состоящее из элементов, входящих в A, но не входящих в B. Будем называть эти множества **дольками**. Наше дополнительное требование на операцию состоит в том, что *если два элемента находятся в одной дольке, то они или оба входят в $A \bigcirc B$, или оба не входят*. Другими словами, *$A \bigcirc B$ является объединением некоторого числа долек*. Разбиение на дольки хорошо иллюстрируется диаграммами, которые мы рисовали (на рис. 11 соответствующие области окрашены в разные цвета); в этом и заключается причина, по которой диаграммы удобны при изучении операций.

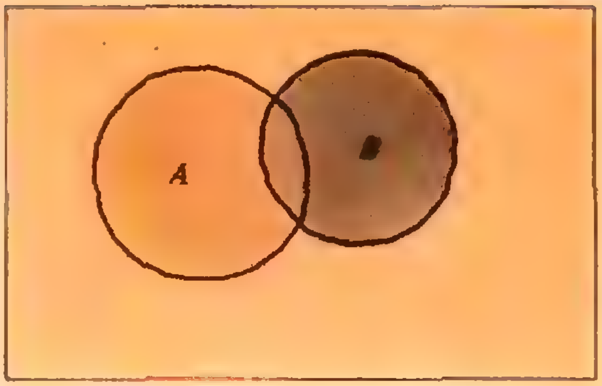


Рис. 11.

6. Сколько существует операций над парой множеств?

Теперь мы можем легко ответить на этот вопрос. Различных операций столько, сколько существует различных способов выбрать дольки, составляющие $A \bigcirc B$. Имеется 4 дольки, а различных способов образования $A \bigcirc B$ — 16. Столько же имеется и различных подмножеств в множестве из 4 элементов (считая пустое множество и все множество). Эти вычисления можно провести непосредственно, а можно воспользоваться следующей комбинаторной леммой, которая нам пригодится в дальнейшем.

Лемма. *В множестве из n элементов имеется 2^n различных подмножеств.*

Доказательство. Пусть N — такое множество. Занумеруем каким-то образом его элементы. Поставим в соответствие каждому подмножеству M в N набор из нулей и единиц длины n, причем на k-м месте мы ставим 1, если k-й элемент множества N входит в M, и 0 — в противном случае. Такие наборы называются двоичными. Между подмножествами в N и двоичными наборами длины n возникает взаимно однозначное соответствие. При этом набору из одних нулей отвечает пустое множество, а набору из одних единиц — все множество N. Итак, число подмножеств в N совпадает с числом двоичных наборов длины n. Докажем по индукции, что это число $f(n)$ равно 2^n. При $n = 1$ это очевидно; пусть $f(n-1) = 2^{n-1}$. Каждый набор длины n получается из набора длины $n-1$ добавлением 0 или 1, то есть из каждого набора длины $n-1$ получается два набора длины n, а значит, $f(n) = 2f(n-1) = 2^n$.

---

*) Разумеется, $A \bigcirc B$, как и A, и B должно содержаться в универсальном множестве I.

Полагая $n = 4$, мы получаем, что существует 16 подмножеств в множестве из 4 элементов и, следовательно, 16 операций над двумя множествами. В число этих операций попадают операции $A \bigcirc B = 0$ (пустое множество) для любых A и B ($A \bigcirc B$ не содержит ни одной дольки) и $A \bigcirc B = I$ при любых A и B ($A \bigcirc B$ — объединение всех долек). Эти операции мы будем обозначать через **0** и **I** соответственно. В число операций попадут также $A \bigcirc B = A$, $A \bigcirc B = B$, $A \bigcirc B = \overline{A}$, $A \bigcirc B = \overline{B}$, так как во всех четырех случаях множество, стоящее справа, является объединением двух долек (например, $\overline{A} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$). Перечислим остальные операции:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$,
$A \triangle B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \setminus B}$,
$\overline{B \setminus A}$, $\overline{A \triangle B}$.

Заметим, что в число операций вошли операции образования долек *). Из того, что каждая операция является объединением долек, следует, что *каждая операция может быть выражена через объединение, пересечение и дополнение.*

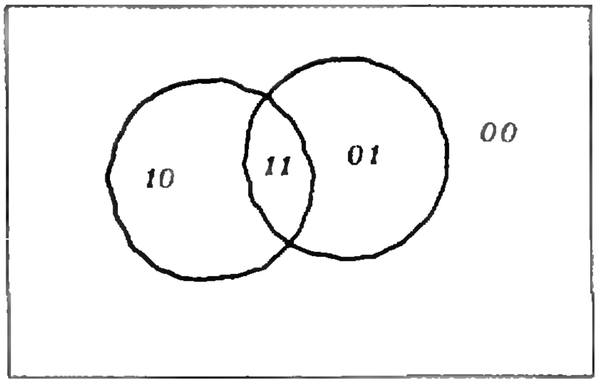


Рис. 12.

Укажем еще одно представление операций через указанные три. Назовем дополнение к дольке довеском. В силу (3) довескам отвечают операции $\overline{A} \cup \overline{B}$, $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$. (В этом также легко убедиться, рисуя диаграммы). Задавая операцию $A \bigcirc B$, можно вместо того, чтобы перечислять, какие дольки входят в $A \bigcirc B$, указать, какие дольки не входят в него, и тогда $A \bigcirc B$ будет пересечением довесков, соответствующих этим долькам. Например, $\overline{A} \cap B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$ рассмотрите самостоятельно и другие примеры. Представление операций в виде пересечения довесков *) можно получить из представления в виде объединения долек при помощи закона двойственности (проделайте это!).

7. Двоичные таблицы для операций

Поставим в соответствие каждой дольке двоичный набор из двух элементов: $A \cap B \Rightarrow (1, 1)$, $\overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow (0, 0)$, $\overline{A} \cup B \Rightarrow (0, 1)$, $A \cup \overline{B} \Rightarrow (1, 0)$. Здесь 1 указывает на то, что долька входит в соответствующее множество (A или B), а 0 — что не входит и, значит, входит в дополнение (см. рис. 12). При задании операции $A \bigcirc B$ поставим в соответствие каждой дольке, закодированной таким набором, 1, если эта долька

---

*) Для представления операций, которое мы несколько легкомысленно называем «разбиением на дольки», существует вполне серьезный термин «совершенная дизъюнктивная нормальная форма», а дольки при этом называются «полными правильными элементарными конъюнкциями».

*) И для этого представления есть серьезное наименование: «совершенная конъюнктивная нормальная форма».

Операции Дольки		$A\cup B$	$A\cap B$	A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	0	1	$A\setminus B$	$B\setminus A$	$A\triangle B$	$\overline{A\cup B}$	$\overline{A\cap B}$	$\overline{A\setminus B}$	$\overline{B\setminus A}$	$\overline{A\triangle B}$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1

входит в $A \bigcirc B$, и 0, если не входит. Все это можно записать в виде таблицы, в которой строки будут отвечать долькам, и строку, например, 1,0|0 следует воспринимать как закодированную запись фразы: если некоторый элемент входит в первое множество (A) и не входит во второе (B), то он не входит в $A \bigcirc B$. Такая таблица называется двоичной или булевой таблицей операции, и она полностью задает операцию. Выше приведена сводная двоичная таблица всех операций над парой множеств.

Обратите внимание на столбцы таблицы, отвечающие $A \cap B$, $A \triangle B$ и $\overline{A}$. Если (x, y) — набор, отвечающий дольке, то в столбце для $A \cap B$ стоит просто xy, в столбце для $A \triangle B$ — остаток от деления $x + y$ на 2, а в столбце для $\overline{A}$ — остаток от деления $x + 1$ на 2. Эти действия над элементами $x, y = 0,1$ носят название арифметических операций по модулю 2, и для них сохраняются все основные законы обычных арифметических операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность умножения относительно сложения) *). Этот факт поясняет замеченные нами свойства симметрической разности.

8. Операции над *n* множествами

С такими операциями мы уже фактически имели дело, но они всегда были выражены через операции над парами множеств. Сейчас мы дадим общее определение. Задать операцию над n множествами — это значит задать закон построения по набору из любых n множеств $A_1, \ldots, A_n$ однозначно определенного множества $f(A_1, \ldots, A_n)$, причем вопрос о вхождении некоторого элемента в $f(A_1, \ldots, A_n)$ полностью определяется тем, в какие из множеств $A_1, \ldots, A_n$ этот элемент входит, а в какие — нет. Положим $A^\sigma = A$ при $\sigma = 1$ и $A^\sigma = \overline{A}$ при $\sigma = 0$. Заметим, что множество $A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \ldots \cap A_n^{\sigma_n}$ состоит из всех элементов, входящих в A_j, если $\sigma_j = 1$, и не входящих в A_j, если $\sigma_j = 0$. Операцию $A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \ldots \cap A_n^{\sigma_n}$ будем, как и при $n = 2$, называть долькой, отвечающей набору $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Долек существует столько, сколько существует двоичных наборов длины n, то есть (по лемме) 2^n. На рисунке 13 вы видите разбиение на дольки при $n = 3$.

Из определения операции следует, что *каждая операция $f(A_1, \ldots, A_n)$ является объединением некоторого числа долек.* Для задания операции каждой дольке, закодированной двоич-

---

*) Об операциях по модулю (арифметике остатков) можно прочитать в журнале «Квант» № 5 за 1970 г.

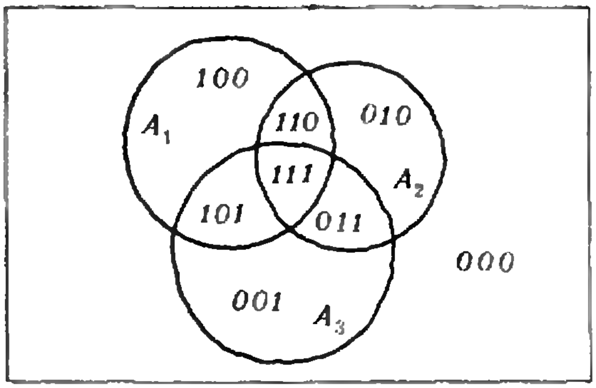


Рис. 13.

ным набором σ, поставим в соответствие 1 или 0, смотря по тому, входит эта долька в $f(A_1, \ldots, A_n)$ или нет. В результате операции отвечает двоичный набор длины 2^n (столько имеется долек), а значит, существует — $2^{(2^n)}$ различных операций над множествами. Поскольку во всех случаях $f(A_1, \ldots, A_n)$ является объединением долек, одновременно мы получаем, что *каждая операция выражается через объединения, пересечения и дополнения.* Другое представление мы получим, если рассмотрим довески — дополнения к долькам, они имеют вид $A_1^{\sigma_1} \cup \ldots \cup A_n^{\sigma_n}$. Всякая операция может быть представлена в виде пересечения довесков.

Итак, оказалось, что, во-первых, имеется конечное число операций над n множествами, а, во-вторых, все эти операции могут быть выражены через операции над парами множеств — объединение, пересечение и дополнение *). Этим и объясняется, что во многих вопросах теории множеств ограничиваются рассмотрением этих трех операций. Впрочем, учитывая (3), можно ограничиться двумя операциями: объединением и дополнением или пересечением и дополнением.

Существуют и другие возможности выбирать основные операции, через которые выражаются все остальные операции. Рассмотрим, например, операцию $\overline{A \cap B}$. Если взять в качестве A и B одно и то же множество C, то мы получим $\overline{C}$. Проделав последовательно эти две операции, мы получим $A \cap B$. Но через пересечение и дополнение можно выразить любую операцию. Значит, любую операцию можно выразить через единственную операцию $\overline{A \cap B}$. Проверьте, что и через операцию $\overline{A \cup B}$ тоже можно выразить все операции. Эти две замечательные операции носят название операций Шеффера. Докажите, что в качестве систем основных операций можно выбрать $\overline{A} \cup B$, $\overline{C}$ или $\overline{A} \cup B$, 0.

9. Монотонные операции.

А все ли операции можно выразить через объединения и пересечения, не прибегая к дополнению? Оказывается, нет. Для того чтобы убедиться в этом, надо найти какое-то свойство, которым все операции, представляющиеся через объединение и пересечение, обладают, но есть операции, которые этим свойством не обладают. Как мы заметили в п. 1 при обсуждении соотношения (2), всегда можно так изменить порядок объединений и пересечений, что вначале будут выполняться пересечения, а затем объединения. Возможность такого представления накладывает сильное ограничение на множество долек, из которых может состоять $f(A_1, \ldots, A_n)$, если $f(A_1, \ldots, A_n)$ выражается через объединения и пересечения. Набор этих долек должен быть устроен следующим образом: имеются подмножества $M_1, \ldots, M_k$ в множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и долька, отвечающая $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, входит в $f(A_1, \ldots, A_n)$ тогда и только тогда, когда или $\sigma_j = 1$ при всех $j \in M_1$, или $\sigma_j = 1$ при всех $j \in M_2$, и так далее. Например, в случае $(A_1 \cap A_3 \cap A_5) \cup A_4 \cup (A_2 \cap A_5)$ имеем: $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{4\}$, $M_3 = \{2, 5\}$. Нетрудно убедиться, что такие совокупности наборов σ характеризуются тем, что в них вместе с каждым набором σ входят все наборы σ', у которых на всех тех местах, на которых у σ стоят единицы, также стоят единицы (будем это символически обозначать так: $\sigma' \geqslant \sigma$). Теперь ясно, что, например, операция $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ не обладает этим свойством: она совпадает с единственной долькой, отвечающей набору $(1, 0)$, а $(1, 1) \geqslant (1, 0)$ отвечает дольке, не входящей в $A \setminus B$. Операции, которые выражаются через объединения и пересечения, а также 0, 1 будем называть монотонными. Очевидно, что дополнение — также немонотонная операция: считая $n = 1$, мы видим, что $\overline{A}$ совпадает с долькой для $\sigma = (0) \leqslant \sigma' = (1)$.

---

*) Дополнение естественно считать операцией над одним множеством ($n = 1$).

10. Линейные операции

Всякую операцию можно выразить через $A \cap B$, $A \triangle B$, **I**. Действительно, $\overline{A} = A \triangle I$, $A \cup B = (A \cap B) \triangle (A \triangle B)$, а в п. 8 мы доказали, что любая операция выражается через пересечение и дополнение. Исследуем этот факт с точки зрения арифметической интерпретации операций. Пусть $f(A_1, \ldots, A_n)$ — произвольная операция; рассмотрим ее двоичную таблицу (см. п. 7). Обозначим через $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ значение в этой таблице, отвечающее двоичному набору $(x_1, \ldots, x_n)$. Если мы выразим f через $A \cap B$, $A \triangle B$, I, то для $\tilde{f}$ возникнет выражение через арифметические операции по модулю 2. Раскрыв скобки и приводя подобные члены, мы получим представление для $\tilde{f}$ в виде многочлена от $x_1, \ldots, x_n$. Учитывая, что x_j принимают значения 0, 1, а в результате берется лишь остаток от деления значения многочлена на 2, мы можем сильно упростить вид многочлена. Во-первых, можно считать, что все ненулевые коэффициенты равны 1 ($2x$ делится на 2), во-вторых, переменные x_j будут входить в одночлены не выше чем в первой степени ($x^2 = x$ при $x = 0, 1$).

Исследуем теперь операции такого вида: $f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$. (В записи мы воспользовались коммутативностью и ассоциативностью $A \triangle B$; см. п. 2.) Полученное в результате множество состоит из таких элементов, которые входят в нечетное число множеств $A_1, \ldots, A_n$, а потому эти операции будем называть индикаторами нечетности. Проверку этого утверждения легко осуществить непосредственно (при $n = 2, 3$, см. рис. 6, 7), и можно заметить, что в этом случае $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ по модулю 2. Отсюда видно, что через симметрическую разность нельзя выразить, например, пересечение $A \cap B$, так как $A \cap B$ состоит из элементов, попавших в два множества. Если добавить операцию **I**, то мы получим еще индикаторы четности $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n \triangle I$; им отвечают полиномы первой степени $x_1 + \ldots + x_n + 1$. Пересечение мы опять выразить не сможем, так как элементы, не входящие ни в A, ни в B, не входят и в $A \cap B$. Будем называть операции, выражающиеся через $A \triangle B$ и **I** (то есть индикаторы четности и нечетности), линейными операциями, а остальные операции — нелинейными. Эти термины связаны с отвечающими этим операциям полиномами.

11. Описание систем основных операций

Будем понимать под системой основных операций такие системы операций, что все остальные операции через них выражаются. У нас уже имеется несколько примеров систем основных операций. Кроме того, в предыдущих двух пунктах мы доказали, что наборы $\{A \cap B, A \cup B\}$, $\{A \triangle B, \mathbf{I}\}$ нельзя принять за системы основных операций. При этом мы получили необходимые условия на такие системы: они обязательно должны содержать нелинейные и немонотонные операции. Замечательно, что в таких же терминах можно дать необходимые и достаточные условия. Мы сделаем это не в самой общей ситуации. Будем говорить, что *для системы операций выполняется предположение* **0I**, *если эта система содержит* **0** *и* **I**.

Теорема Поста. *Систему операций, удовлетворяющую предположению* **0I**, *можно принять за систему основных операций тогда и только тогда, когда она содержит немонотонную и нелинейную операции.*

Имеется общая формулировка теоремы Поста для любых систем (без предположения **0I**); при этом число условий возрастает *).

Что касается необходимости условий сформулированной теоремы, то без предположения **0I** они доказаны в пп. 9, 10. Очевидно, что они сохраняются и при условии **0I**, так как **0** и **I** являются монотонными и линейными операциями ($A \triangle A = 0$).

Достаточность будет следовать из двух приводимых ниже задач.

Задача 1. *Доказать, что в предположении* **0I** *из всякой немонотонной операции можно получить операцию дополнения.*

Пусть f — немонотонная операция и в $f(A_1, \ldots, A_n)$ входит долька, отвечающая σ, а долька, отвечающая $\sigma' \geq \sigma$, не входит. Тогда, если на j-м месте и в σ и σ' стоит 0, то вместо A_j подставляем пустое множество, если же и тут и там стоит 1, то подставляем универсальное множество I. На остальных местах, поскольку $\sigma' \geq \sigma$, в σ стоит 0, а в σ' — 1. Подставим вместо этих A_j одно и то же множество A. Тогда долька, отвечающая σ, превратится в $\overline{A}$, а долька, отвечающая σ', — в A. Операция $\varphi(A)$, которая получится в результате, будет совпадать с $\overline{A}$, так как $\varphi(A)$ содержит $\overline{A}$ и не содержит A.

Задача 2. *Доказать, что в предположении* **0I** *через всякую нелинейную операцию и дополнение можно выразить пересечение.*

Эту задачу попробуйте решить самостоятельно. Наше решение приведено на с. 58.

---

*) См. книгу Гиндикин С. Г., Алгебра логики в задачах, М., «Наука», 1972.

Поверхностное натяжение

Л. Г. Асламазов

Удивительно разнообразны проявления поверхностного натяжения жидкостей в природе и технике. Оно собирает воду в капли, благодаря ему мы можем выдуть мыльный пузырь и писать ручкой. Поверхностное натяжение играет важную роль в физиологии нашего организма. Его используют в космической технике. Почему же поверхность жидкости ведет себя подобно растянутой упругой пленке? Попробуем в этом разобраться.

Поверхностная энергия

Молекулы, расположенные в тонком слое жидкости вблизи поверхности, находятся в особых условиях. Они имеют одинаковых с ними соседей только с одной стороны поверхности, в отличие от молекул внутри жидкости, окруженных со всех сторон такими же молекулами. Поэтому результирующая сила, действующая на молекулу в поверхностном слое, отлична от нуля. Например, на свободной поверхности жидкости (рис. 1) эта сила направлена внутрь жидкости, так как молекула на поверхности испытывает значительно большее притяжение со стороны молекул жидкости, чем со стороны молекул воздуха.

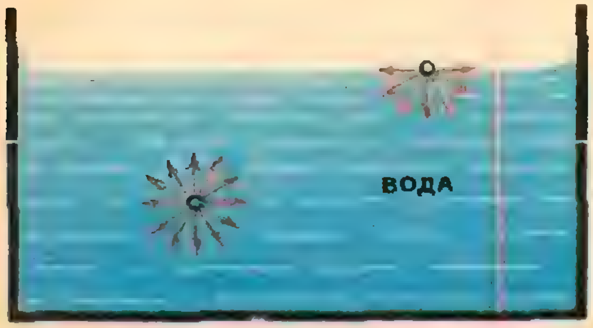


Рис. 1.

При перемещении молекулы с поверхности в объем жидкости совершается положительная работа. Это означает, что молекулы в поверхностном слое обладают избыточной потенциальной энергией по сравнению с молекулами внутри жидкости. Разумеется, молекулы жидкости находятся в непрерывном тепловом движении — одни молекулы уходят с поверхности, другие, наоборот, попадают на нее. Но можно говорить о средней добавочной энергии поверхностного слоя жидкости — о поверхностной энергии, пропорциональной площади поверхности жидкости.

Известно, что из всех возможных состояний системы устойчивым является то, в котором энергия системы минимальна. В частности, и поверхность жидкости стремится принять такую форму, при которой ее поверхностная энергия будет минимальна. Как говорят, жидкость обладает поверхностным натяжением, стремящимся сократить, уменьшить ее поверхность. Коэффициентом поверхностного натяжения называют поверхностную энергию, приходящуюся на единицу площади, или силу, приходящуюся на единицу длины границы поверхности. Легко доказать (сделайте это сами), что оба определения коэффициента поверхностного натяжения эквивалентны.

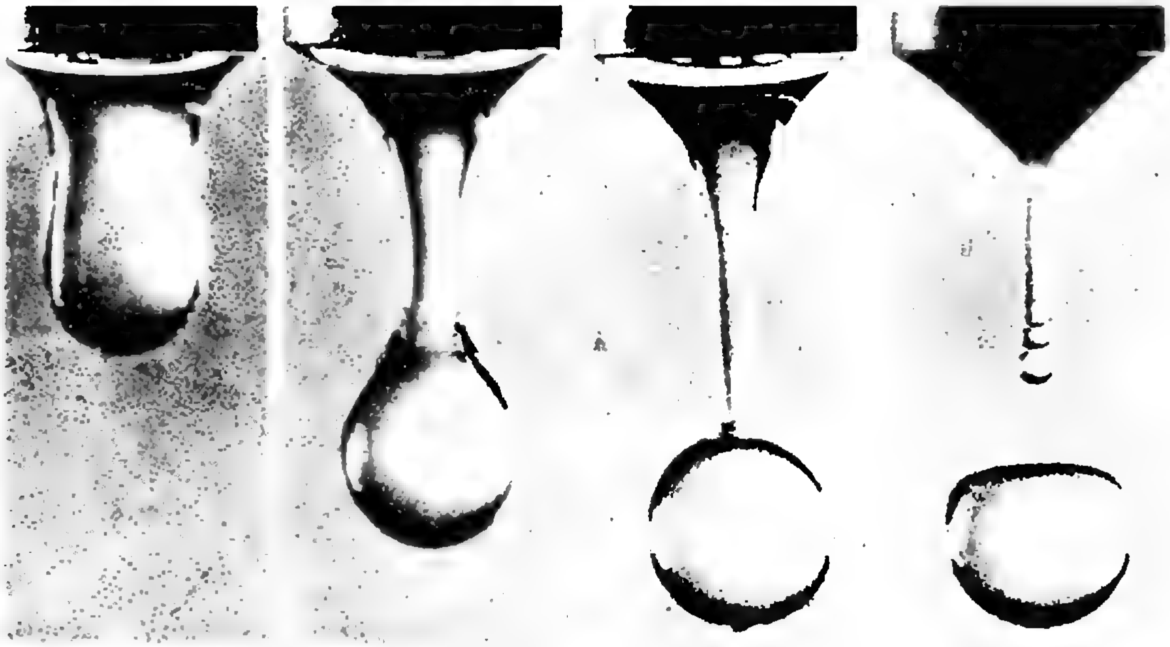


Рис. 2.

Стремлению поверхностного натяжения уменьшить поверхность жидкости обычно противодействуют другие силы. Например, капля жидкости почти никогда не является шаром, хотя шар имеет наименьшую из всех фигур поверхность при заданном объеме. Когда капля покоится на неподвижной горизонтальной поверхности, она оказывается сплющенной. Сложную форму имеет и падающая в воздухе капля. И только капля, находящаяся в невесомости, принимает совершенную сферическую форму.

Устранить действие силы тяжести при изучении поверхностного натяжения жидкостей впервые догадался в середине прошлого века бельгийский ученый Ж. Плато. Разумеется, в то время и не мечтали о настоящей невесомости, и Плато просто предложил уравновесить силу тяжести архимедовой выталкивающей силой. Он поместил исследуемую жидкость (масло) в раствор, обладающий такой же плотностью, и, как пишет его биограф, «с удивлением увидел, что масло приняло сферическую форму; он тотчас же применил свое правило «вовремя удивляться», и это явление послужило затем для него предметом долгих размышлений».

Свой метод Плато применил для исследования различных явлений. Например, он изучил процесс образования и отрыва капли жидкости на конце трубки.

Обычно, как бы медленно мы ни растили каплю, она отрывается от трубки так быстро, что глаз не может уследить за деталями этого процесса. Плато помещал конец трубки в жидкость, плотность которой была только немного меньше плотности капли. Действие силы тяжести при этом ослаблено, можно вырастить очень большую каплю и увидеть, как она отрывается от трубки.

На рисунке 2 приведены фотографии, на которых показаны различные стадии красивого процесса образования и отрыва капли (фотографии получены современным методом — с помощью скоростной киносъемки). Попробуем объяснить это явление. Пока капля растет медленно, можно считать, что в каждый момент времени она находится в равновесии. Тогда при заданном объеме капли ее форма определяется из условия, что сумма поверхностной энергии и потенциальной энергии капли, обусловленной силой тяжести, минимальна. Поверхностное натяжение вызывает сокращение поверхности капли, она стремится придать капле сферическую форму. Сила тяжести, наоборот, стремится расположить центр тяжести капли как можно ниже. В результате капля оказывается вытянутой.

Чем больше капля, тем большую роль играет потенциальная энергия силы тяжести. Основная масса по мере роста капли собирается внизу, и у капли образуется шейка (вторая фотография на рисунке 2). Сила поверхностного натяжения направлена вертикально по касательной к шейке. Она уравновешивает силу тяжести, действующую на каплю. Теперь достаточно капле совсем немного увеличиться, и силы поверхностного натяжения уже не смогут уравновесить силу тяжести. Шейка капли быстро сужается (третья фотография на рисунке 2), и в результате капля отрывается (четвертая фотография). При этом от шейки капли отделяется маленькая капля, которая падает вслед за большой. Вторичная капелька образуется всегда (ее называют шариком Плато), но так как процесс отрыва капли — очень быстрый, обычно мы этой вторичной капельки не замечаем.

Отрыв капли используют для измерения величины поверхностного натяжения жидкостей. Когда капля еще висит на шейке, сила тяжести уравновешена силами поверхностного натяжения, действующими по периметру поперечного сечения шейки:

$$mg = 2\pi r\sigma,$$

где r — радиус самого узкого места шейки, в котором силы поверхностного натяжения направлены вертикально, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Масса висящей на шейке капли m, как уже отмечалось, практически равна массе отрывающейся капли. Поэтому, измеряя радиус шейки r и определяя массу оторвавшейся капли m взвешиванием, можно найти величину поверхностного натяжения жидкости:

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r}.$$

Для большей точности обычно набирают в сосуд много капель и, разделив их общую массу на число капель, находят среднюю массу капли m. Для более точного определения радиуса шейки r, при котором капля еще не отрывается, ее освещают расходящимся пучком света и по размерам тени на экране и коэффициенту увеличения определяют размер шейки.

Мыльные пленки

Прекрасным объектом для изучения поверхностного натяжения являются мыльные пленки. Сила тяжести здесь почти не играет роли, так как пленки чрезвычайно тонки и их масса совершенно ничтожна. Основную роль здесь играет поверхностная энергия, и поэтому у мыльных пленок форма поверхности всегда такова, что ее площадь минимальна.

Наверное, всем доводилось видеть мыльные пузыри. Они могут свободно парить в воздухе и совершенно сферичны.

Давление внутри пузыря больше атмосферного давления, причем чем меньше радиус пузыря R, тем больше избыточное давление внутри пузыря. Это избыточное давление $\Delta p_{сф}$ (для сферического пузыря) определяется по известной формуле Лапласа:

$$\Delta p_{сф} = \frac{2\sigma'}{R},$$

где $\sigma' = 2\sigma$ — удвоенный коэффициент поверхностного натяжения жидкости (у пленки — две поверхности).

Величина, обратная радиусу сферы, называется ее кривизной: $\rho = \frac{1}{R}$.

Написанная выше формула означает, что избыточное давление пропорционально кривизне сферы.

Шар — не единственная форма, которую можно придать мыльному пузырю. Если поместить пузырь между двумя кольцами, то его можно растягивать, пока он не примет форму цилиндра со сферическими «шапками» (рис. 3).

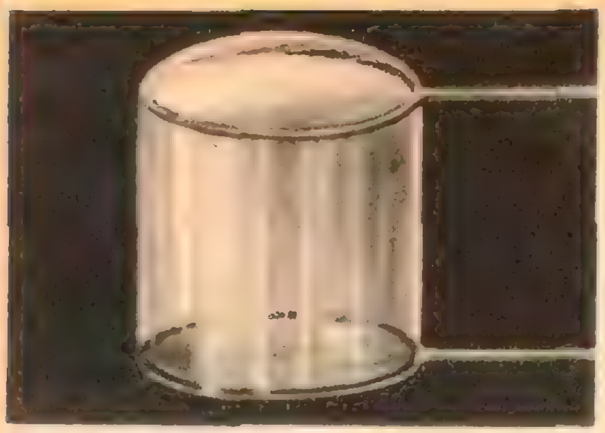


Рис. 3.

Чему равно избыточное давление внутри такого пузыря? У цилиндрической поверхности кривизна по разным направлениям различна. Вдоль образующей цилиндра кривизна равна нулю (образующая — прямая линия) *), а в сечении, перпендикулярном оси цилиндра, его кривизна равна $1/R$, где R — радиус цилиндра. Какое же значение ρ мы должны подставить в предыдущую формулу? Оказывается, разность давлений по разные стороны любой поверхности определяется ее средней кривизной. Что это за величина?

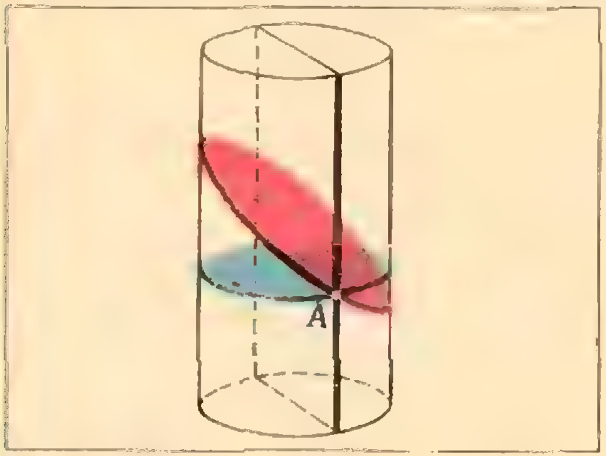


Рис. 4.

Проведем через нормаль к поверхности в точке A плоскости. Сечения цилиндрической поверхности этими плоскостями (они называются нормальными сечениями) могут быть окружностью, эллипсом или прямой (рис. 4). Легко видеть, что кривизны этих сечений в точке A различны: максимальной кривизной обладает поперечное сечение — окружность, а минимальной, равной нулю, — прямая (продольное сечение). Средняя кривизна $\rho_{\text{сред}}$ определяется как полусумма максимальной и минимальной кривизн нормальных сечений:

$$\rho_{\text{сред}} = \frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2}.$$

Это определение годится не только для цилиндра, и так можно определить среднюю кривизну в данной точке любой поверхности.

У цилиндрической поверхности в любой точке максимальная кривизна $\rho_{\max} = \frac{1}{R}$, где R — радиус поперечного сечения цилиндра, а $\rho_{\min} = 0$. Поэтому средняя кривизна $\rho_{\text{цил}} = \frac{1}{2R}$, а избыточное давление внутри цилиндрического пузыря $\Delta p_{\text{цил}} = \frac{\sigma'}{R}$.

Как видно, у цилиндрического пузыря избыточное давление — такое же, как у сферического пузыря вдвое большего радиуса. Поэтому радиус сферических «шапок» у цилиндрического пузыря будет вдвое больше, чем радиус цилиндра, и они являются сферическими сегментами, а не полусферами.

А что если вообще уничтожить избыточное давление в таком пузыре, заставив, например, лопнуть «шапки»? Казалось бы, так как внутри пузыря нет никакого избыточного давления, поверхность его не должна иметь кривизны. А тем не менее стенки пузыря изгибаются внутрь и пузырь принимает форму катеноида (от ла-

---

*) Что такое кривизна плоской кривой? Кривизна окружности определяется так же, как и кривизна сферы: $\rho_{\text{окр}} = 1/R$, где R — радиус окружности. Если же кривая не является окружностью, то тем не менее ее отдельные маленькие участки можно приближенно считать дугами окружностей определенных радиусов. Величины, обратные этим радиусам, и называются кривизнами плоской кривой в различных ее точках.

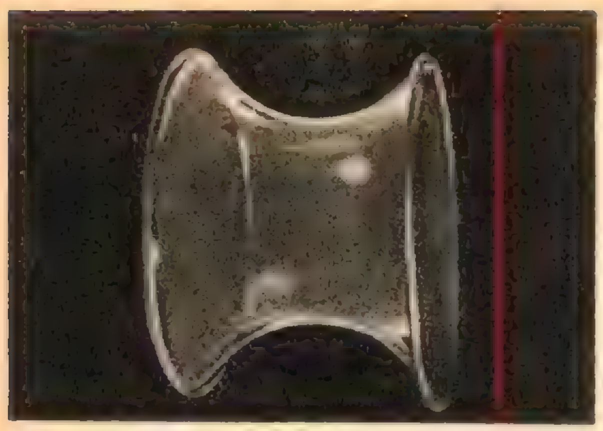


Рис. 5.

тинского слова «катена»— цепь; эту поверхность можно получить вращением вокруг оси кривой, имеющей форму подвешенной горизонтально за концы цепи — цепной линии). В чем же тут дело?

Присмотритесь к этой поверхности (рис. 5). Обратите внимание на ее узкое место — перехват. Легко видеть, что этот перехват является одновременно и выпуклым, и вогнутым. Его поперечное сечение — окружность, а продольное — цепная линия. Кривизна направления внутрь должна увеличивать давление внутри пузыря, кривизна же направления наружу должна уменьшать его. (Давление под вогнутой поверхностью больше, чем над ней). В случае катеноида эти кривизны одинаковы по величине, и так как направлены они в противоположные стороны, средняя кривизна равна нулю. Следовательно, внутри такого пузыря нет избыточного давления.

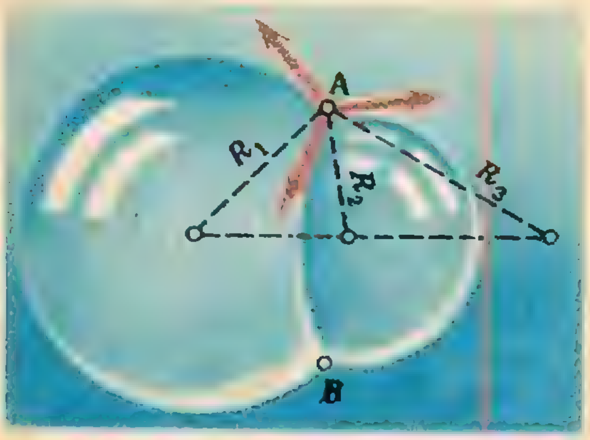


Рис. 6.

Существует множество других поверхностей, которые кажутся кривыми во всех направлениях, но тем не менее их средняя кривизна равна нулю, и эти поверхности не производят никакого давления. Чтобы получить их, нужно лишь взять любую гнутую проволочную рамку и погрузить ее в мыльную воду. Вынимая рамку, можно увидеть разнообразные поверхности с нулевой средней кривизной, форма которых зависит от формы рамки. Однако катеноид — единственная, кроме плоскости, поверхность вращения с нулевой средней кривизной.

Одной из задач специальной математической науки дифференциальной геометрии является отыскание таких поверхностей с нулевой средней кривизной, натянутых на замкнутые пространственные кривые. Существует точная математическая теорема, утверждающая, что площадь таких поверхностей всегда минимальна, и она нам покажется теперь очевидной.

Мыльные пузыри могут соединяться друг с другом, образуя пену. Несмотря на кажущуюся хаотичность в расположении мыльных пленок в пене, всегда выполняется такой закон: пленки пересекают друг друга лишь под равными углами (см. фото на обложке).

Рассмотрим, например, два пузыря, находящихся в контакте друг с другом и имеющих общую перегородку. Избыточные (по сравнению с атмосферным) давления внутри пузырей различны и определяются формулой Лапласа:

$$\Delta p_1 = \frac{2\sigma'}{R_1}, \qquad \Delta p_2 = \frac{2\sigma'}{R_2}.$$

Поэтому перегородка должна быть такой, чтобы создавать дополнительное давление, равное разности давлений внутри пузырей. Следовательно, она должна обладать определенной кривизной. Радиус R_3 кривизны перегородки определяется из соотношения

$$\frac{2\sigma'}{R_3} = \frac{2\sigma'}{R_2} - \frac{2\sigma'}{R_1},$$

то есть

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

На рисунке 6 изображен разрез пузырей в плоскости, проходящей через их центры. Точки *A* и *B* представляют собой точки пересечения с плоскостью чертежа окружности, по которой соприкасаются два пузыря. В любой точке этой окружности встречаются три пленки. Так как их поверхностное натяжение одинаково, то они могут «уравновесить» друг друга лишь в том случае, когда углы, под которыми они пересекаются, равны между собой и, следовательно, каждый равен 120°.

Капиллярность

Поверхностной энергией обладает не только свободная поверхность жидкости, но и граница двух жидкостей, поверхность раздела жидкости и твердого тела, свободная поверхность твердого тела. Во всех этих случаях можно говорить о поверхностной энергии как о разности между энергией всех молекул вблизи поверхности раздела и той энергией, которую эти молекулы имели бы, если бы они находились внутри соответствующих граничащих сред.

Величина поверхностной энергии определяется свойствами обеих сред. Например, если на границе воды с воздухом коэффициент поверхностного натяжения равен 73 *дн/см* (при 20° С и нормальном атмосферном давлении), то у границы воды с эфиром от всего около 12 *дн/см*, а на границе воды с ртутью 427 *дн/см*. Поверхностное натяжение обычно уменьшается с увеличением температуры. В частности, на границе жидкости с ее насыщенным паром в критической точке оно вообще обращается в нуль, так как при этом исчезает различие между жидкостью и паром.

Рассмотрим жидкость, находящуюся в сосуде. На краю поверхности жидкости мы имеем дело с соприкосновением трех сред — твердой стенки, жидкости и газа. Поверхностные явления в этом случае называют явлениями капиллярности. Полная поверхностная энергия, как обычно, стремится быть минимальной. Поэтому, если поверхностная энергия на границе стенки и жидкости меньше, чем на границе стенки с газом (на единицу площади), то жидкость стремится увеличить площадь контакта со стенкой, и ее край поднимается. (Такой случай имеет место на границе воды и чистого стекла.)

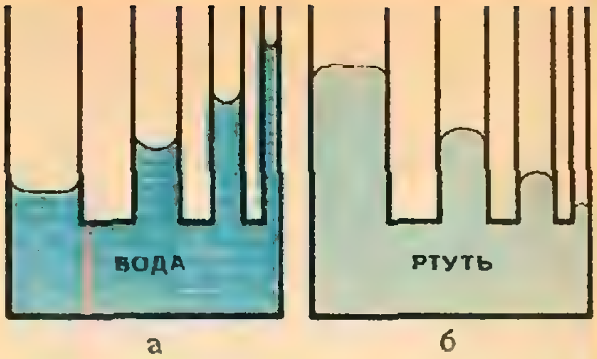


Рис. 7.

Однако поднятие жидкости сопровождается увеличением ее потенциальной энергии. Если сосуд широкий, то форма поверхности жидкости в основном определяется силой тяжести. Жидкость приподнимается только у краев, а большая часть ее поверхности будет плоской и горизонтальной. Если же сосуд узкий, то искривляется вся поверхность жидкости — образуется мениск, и жидкость может подняться на некоторую высоту (рис. 7а). Мениск имеет сферическую форму, так как при этом минимальна поверхностная энергия на границе жидкость — газ (название «мениск» происходит от латинского слова «menisk» — маленькая луна).

На границе стекла и ртути поверхностная энергия больше, чем на свободной поверхности стекла. Поэтому ртуть в стеклянном сосуде стремится уменьшить площадь контакта со стеклом и у краев опускается (рис. 7б). Говорят, что ртуть не смачивает стекло, а вода, наоборот, его смачивает.

Величина поверхностного натяжения на границе жидкости и твердого тела определяется силой взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердого тела. Если бы молекулы жидкости и твердого тела не взаимодействовали между собой, то поверхностная энергия границы твердого тела с жидкостью была бы равна сумме энергий на границах твердого тела и жидкости с газом (на единицу площади поверхности): $\sigma_{т-ж} = \sigma_{т-г} + \sigma_{ж-г}$ (работа по перемещению молекулы из объема на поверхность — одна и та же, граничит ли среда с газом или с другой практически не взаимодействующей с ней средой). В этом случае $\sigma_{т-ж} > \sigma_{т-г}$, и жидкость не смачивала бы твердое тело.

Реально молекулы жидкости и твердого тела всегда притягиваются друг к другу. Поэтому поверхностная энергия границы твердого тела с жидкостью меньше суммы энергий границ с газом: $\sigma_{т-ж} = \sigma_{т-г} + \sigma_{ж-г} - \Delta\sigma$ (вследствие притяжения к другой среде работа по переносу молекулы из объема на поверхность, очевидно, уменьшается). Если притяжение между молекулами граничащих сред достаточно велико, то $\Delta\sigma > \sigma_{ж-г}$. В этом случае $\sigma_{т-ж} < \sigma_{т-г}$, *и жидкость уже смачивает твердую поверхность*.

При дальнейшем усилении взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела $\Delta\sigma$ станет равным $2\sigma_{ж-г}$, и соответственно, $\sigma_{т-ж} = \sigma_{т-г} - \sigma_{ж-г}$. В этом случае тонкая пленка жидкости может образоваться на всей поверхности твердого тела, так как проигрыш в поверхностной энергии вследствие увеличения границы жидкости с газом компенсируется увеличением площади ее контакта с твердым телом: $\sigma_{ж-г} = \sigma_{т-г} - \sigma_{т-ж}$ (увеличение потенциальной энергии при этом ничтожно мало, если пленка достаточно тонкая). Край жидкости непрерывным образом переходит в образующуюся на стенке пленку, и угол между поверхностью жидкости и стенкой равен нулю. Как говорят, жидкость полностью смачивает твердое тело.

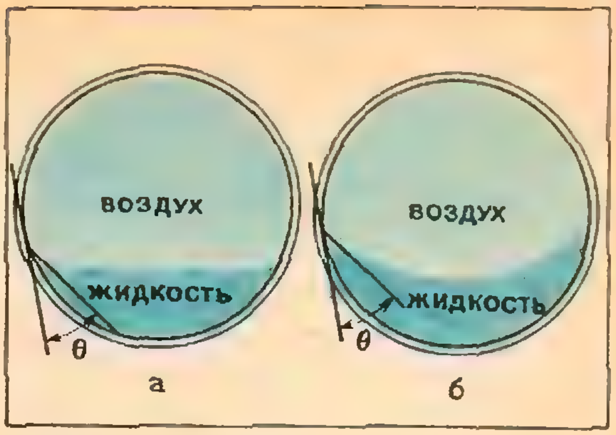


Рис. 8.

Особенно ярко капиллярные явления проявляются в невесомости. Первым в мире исследовал жидкость в состоянии космической невесомости космонавт П. С. Попович на корабле «Восток-3». В его кабине находилась стеклянная сферическая колба с водой. На Земле вода наполовину заполняла колбу. В состоянии невесомости — при движении корабля по орбите вокруг Земли — вода «расползлась» по всей внутренней поверхности стенок колбы и замкнула внутри себя воздух в виде шара. Поверхности раздела вода — воздух и вода — стекло при этом увеличились. Однако исчезла граница между воздухом и стеклом, и в данном случае это оказалось энергетически выгоднее.

Наших знаний оказывается достаточно для того, чтобы объяснить это явление. Если жидкость смачивает поверхность колбы, то в земных условиях, как мы уже разобрались, она слегка поднимается у краев, образуя некоторый краевой угол θ между поверхностью жидкости и стенками колбы (рис. 8, а).

В невесомости поверхность жидкости уже не должна быть плоской. Поэтому вода, смачивая стенки колбы, будет подниматься, увеличивая поверхность соприкосновения со стеклом Однако замечательно, что в равновесии краевой угол θ между *поверхностью жидкости и стенками колбы* должен остаться тем же, каким он был на Земле.

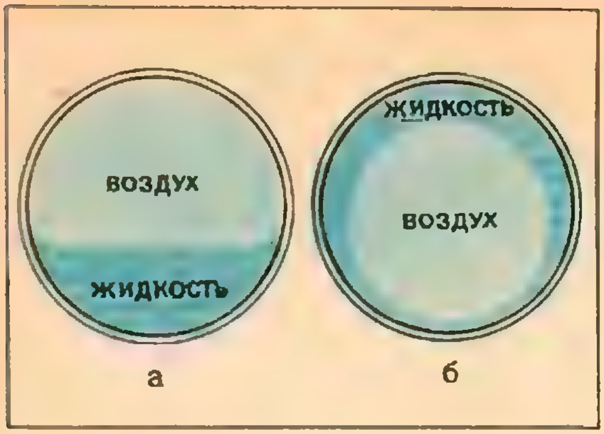


Рис. 9.

В самом деле, на единицу длины окружности, по которой происходит соприкосновение воды со стенками колбы, действуют только три силы поверхностного натяжения: σ_{2-3} — поверхностное натяжение на границе воздуха и воды, σ_{1-2} — натяжение на границе воды и стекла и σ_{3-1} — натяжение на границе стекла с воздухом. В равновесии поверхность жидкости образует такой краевой угол со стенкой, чтобы равнодействующая этих трех сил не имела составляющей вдоль стенки: $\sigma_{1-3} = \sigma_{1-2} + \sigma_{2-3} \cos\theta$ (перпендикулярная составляющая уравновешивается силой реакции стенки). Поэтому

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{1-3} - \sigma_{1-2}}{\sigma_{2-3}}$$

Мы видим, что краевой угол зависит только от природы трех соприкасающихся сред, а именно от поверхностного натяжения на их границах. Он не зависит от величины силы тяжести и от формы сосуда.

Поверхность жидкости, граничащая с воздухом, в невесомости должна быть минимальной, а потому сферичной. Тогда становится ясной конечная картина расположения жидкости в колбе в невесомости. Сферическая поверхность жидкости охватывает воздух у стенок колбы так, чтобы сохранился краевой угол θ (рис. 8б). Разумеется, понятия верха и низа в невесомости отсутствуют, и эту картину можно повернуть как угодно.

Почему же вода в стеклянной колбе окружала пузырь со всех сторон, отрывая его от стенок колбы? Это легко понять — ведь чистая вода полностью смачивает чистое стекло (рис. 9, а). Краевой угол равен нулю, и жидкость заключает воздух в сферический пузырь, который должен касаться своей поверхностью стенок колбы. Но тогда он может от них оторваться и расположиться внутри жидкости (рис. 9, б).

Конечно, такое исследование поведения жидкости в невесомости имеет только качественный характер, и настоящие расчеты — сложная физическая и математическая задача. Однако такое качественное исследование помогло нам правильно представить себе поведение «невесомой» жидкости.

Как моет мыло?

При растворении даже незначительного количества мыла или стирального порошка в воде ее моющее действие значительно усиливается. Это свойство объясняется тем, что мыло, скап-

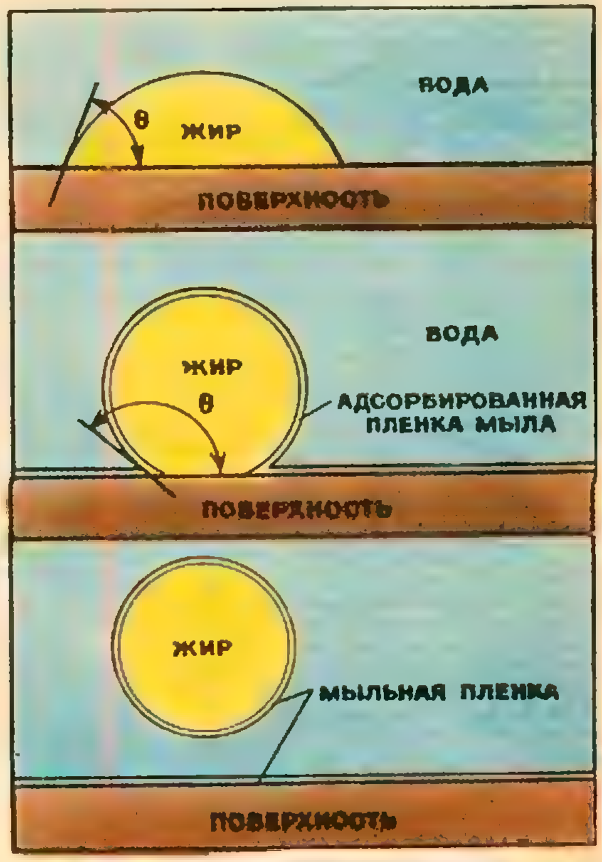


Рис. 10.

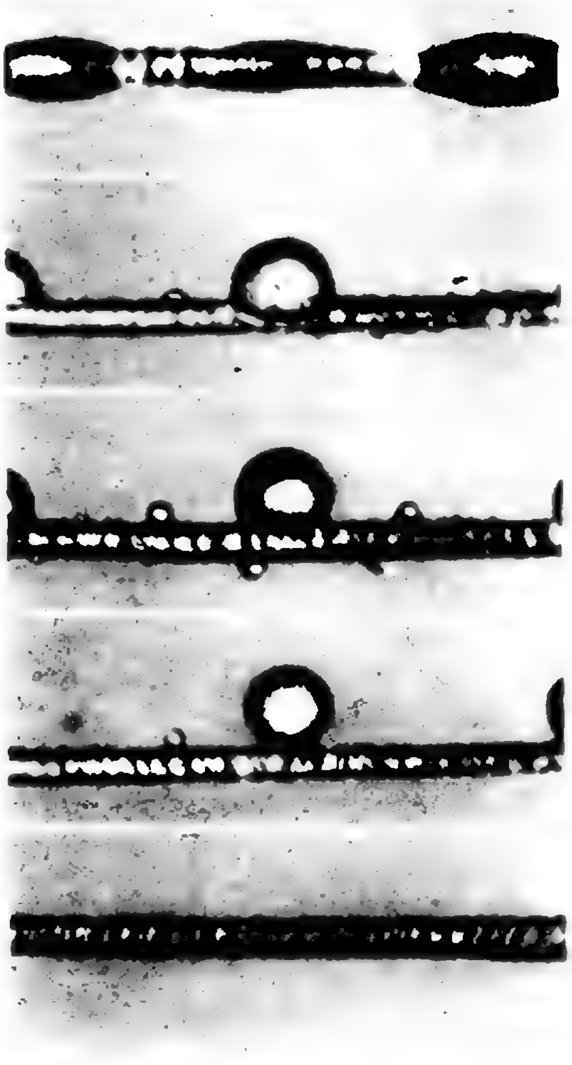


Рис. 11.

ливаясь (адсорбируясь) на границе воды с отмываемой поверхностью или тканью, значительно уменьшает поверхностное натяжение. В результате ослабляется прилипание частичек жира и грязи к поверхности.

Пусть, например, на поверхности имеется капелька жира, который смачивает ее (рис. 10). Краевой угол θ определяется, как нам уже известно, коэффициентами поверхностного натяжения на границах раздела. Если в воду добавить мыло, то молекулы мыла, адсорбируясь на границах вода — жир и вода — поверхность, значительно уменьшают коэффициенты $\sigma_{в-ж}$ и $\sigma_{в-п}$. Натяжение $\sigma_{в-п}$ оказывается меньшим, чем $\sigma_{ж-п}$, и соответственно, $\cos\theta < 0$, то есть $\theta > 90°$. Жидкость перестает смачивать поверхность. Уменьшение коэффициента $\sigma_{в-ж}$ при этом, как легко видеть, также увеличивает краевой угол.

При краевом угле $\theta = 180°$ жир абсолютно не смачивает поверхность, и капелька жира сама отрывается от нее. Если же уменьшение поверхностного натяжения не столь велико, то во всяком случае после увеличения краевого угла θ капли легко отрываются от поверхности при механических воздействиях во время мойки или стирки.

На рисунке 11 показана серия увеличенных фотографий шерстяной нити. На первой фотографии — нить, испачканная жидким парафином. Три следующие фотографии показывают очищающее действие раствора стирального порошка. Ясно видно, как увеличивается краевой угол поверхности парафина с нитью. Парафиновый жир сворачивается в глобулы и уносится водой. Последняя фотография показывает уже совсем чистую нить.

Адсорбированные молекулы мыла окружают капельки жира и отмываемую поверхность плотно заполненным одинарным (мономолекулярным) слоем, который обладает высокой механической прочностью. Молекулы мыла сильно связаны друг с другом, и разорвать пленку очень трудно. Поэтому при стирке пленки из адсорбированных молекул не разрушаются и препятствуют обратному прилипанию уже оторвавшихся капелек жира к поверхности и слиянию капелек друг с другом.

Оторвавшиеся при стирке твердые частички грязи также оказываются окруженными молекулами мыла, которые препятствуют их обратному прилипанию к поверхности. Проигрыш в поверхностной энергии при отрыве частицы с поверхности в мыльный раствор $E = S(\sigma_{ч-в} + \sigma_{п-в} - \sigma_{ч-п})$ (S — площадь контакта с поверхностью), очевидно, меньше, чем если бы частичка оказалась в чистой воде; таким образом, адсорбция ослабляет прилипание твердых частичек к поверхности. Взвешенные в воде частички грязи и капельки жира удаляются вместе с ней.

Интересно, что образование устойчивой пены — это только побочный эффект уменьшения поверхностного натяжения при растворении моющих веществ. Пена образуется из пузырьков воздуха, которые попадают внутрь воды (при перемешивании, со струей воды). Затем они всплывают к ее поверхности и оказываются окруженными пленкой жидкости. Если поверхностное натяжение невелико, то мало и избыточное давление внутри пузырька, и он долго не лопается. Немалую роль тут, конечно, играет и высокая прочность мыльных пленок.

Механизм моющего действия, который был здесь разобран, представляет интерес и в связи с другими важными техническими задачами — покрытием поверхностей лаками и красками, склеиванием, окраской тканей суспензиями, изготовлением непромокаемых тканей.

Например, для того чтобы сделать ткань водоотталкивающей, ее обрабатывают специальным веществом, которое образует вокруг каждого волокна тонкую пленку. Эта пленка значительно увеличивает поверхностное натяжение на границе вода — ткань, но мало меняет натяжение на границе ткань — воздух. Если обратиться к формуле для краевого угла θ, то легко увидеть, что угол θ при этом возрастает. В результате вода не смачивает ткань, а собирается на ней в капли, которые скатываются с материала.

Адсорбционные пленки используют для уменьшения испарения воды с поверхности водоемов, что является важной проблемой в засушливых районах. Защитную пленку легко создать по всей поверхности водоема, так как адсорбция всегда уменьшает поверхностное натяжение (в противном случае адсорбция вообще не произошла бы, так как при этом увеличилась бы поверхностная энергия). На границу пленки действует сила поверхностного натяжения чистой воды, стремящаяся растянуть пленку, и сила натяжения самой пленки, направленная в противоположную сторону. Поверхностное натяжение чистой воды больше, и в результате пленка покрывает всю чистую поверхность.

Для создания защитных пленок используют специальное вещество — гексадеканол. В обычных условиях это — твердое вещество, оно плавает на поверхности воды. Если при этом вся поверхность воды покрыта адсорбированным мономолекулярным слоем, то вещество не расходуется. Однако, стоит пленке где-либо испортиться, как поверхностное натяжение в этом месте увеличится, стянет пленку с соседних участков и т. д. В результате нарушается пленка и возле плавающего кусочка вещества, которое и восстанавливает пленку.

Было найдено, что для создания защитной пленки на площади в 1 *га* необходимо около 20 *г* гексадеканола, а потери в среднем равны 2—3 мономолекулярным слоям в день. Поэтому расход вещества для поддержания пленки составляет всего около 60 *г* в день на 1 *га*, и такой способ оказывается экономически выгодным. Например, в Австралии с его помощью ежегодно сохраняется около 10 миллионов литров воды с каждого гектара водной поверхности.

Упражнения

1. Известно, что некоторые насекомые не только удерживаются на поверхности воды за счет поверхностного натяжения, но и передвигаются по ней, выделяя особую жидкость, уменьшающую поверхностное натяжение воды. Как должно насекомое выпускать жидкость, чтобы двигаться вперед?
2. Два одинаковых мыльных пузыря соединены трубкой. Будет ли их равновесие устойчивым?
3. Нарисуйте график зависимости давления от высоты в капиллярной трубке, опущенной одним концом а) в воду, б) в ртуть.
4. Почему спички, плавающие на поверхности воды вблизи друг от друга, притягиваются? Как будут взаимодействовать спички, если их предварительно окунуть в парафин? (Вода смачивает дерево, но не смачивает парафин.)
5. В сферической колбе находится жидкость, не смачивающая стенки колбы. Краевой угол равен θ. Как расположится жидкость в невесомости?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Решения задач вступительной контрольной работы ВЗМШ 1973 года

А. Л. Тоом

В этом номере мы публикуем решения наиболее интересных задач из вступительной работы в ВЗМШ 1973 года (см. «Квант» № 1, 1973, с. 49).

Задача 2. *Существуют ли целые числа такие, что при зачеркивании первой цифры они уменьшаются в 57 раз?*

Пусть нам удалось найти такое $(k+1)$-значное число. Обозначим первую его цифру через x, а число, оставшееся после ее зачеркивания, — через y. Тогда исходное число равно $10^k x+y$. Оно совпадает по условию с $57y$:

$$10^k x = 56y.$$

Поскольку 56 делится на 7, то x делится на 7. Но x — цифра, значит, $x=7$, а $y=10^k/8$.

При $k\geqslant 3$ число y получается целым. Полагая $k=3$, получаем один из возможных ответов:

$$10^k x+y=7125.$$

Задача 5. *На доске было написано 4 числа. Их сложили всевозможными способами по два и получили следующие шесть сумм:* 2, 4, 9, 9, 14, 16. *Какие числа были написаны на доске?*

Обозначим наименьшее из искомых чисел через A, следующее по величине — через B, следующее — через C, самое большое — через D. Итак, $A\geqslant B\geqslant C\geqslant D$. Тогда между их суммами по два заведомо имеются следующие неравенства:

$$\underset{\substack{\|\\ 2}}{A+B}\leqslant\underset{\substack{\|\\ 4}}{A+C}\left\{\begin{matrix}\leqslant\overset{\substack{9\\ \|}}{A+D}\leqslant\\ \leqslant\underset{\substack{\|\\ 9}}{B+C}\leqslant\end{matrix}\right\}\underset{\substack{\|\\ 14}}{B+D}\leqslant$$

$$\leqslant C+D=16$$

Пользуясь этими неравенствами, легко однозначно распределить между суммами числовые значения, данные в условии, что и сделано. Из четырех из них находим ответ:

$$A=-1{,}5;\qquad B=3{,}5;$$

$$C=5{,}5;\qquad D=10{,}5.$$

Необходимо проверить, что остальные две суммы — тоже такие, как сказано в условии.

Задача 6. *Можно ли расставить 9 чисел:* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась бы на 3 и была: а) больше* 9; *б) больше* 12?

а) Можно. Например: 1, 9, 2, 7, 3, 5, 4, 6, 8.

б) Нельзя. Пусть сумма в каждой тройке соседних чисел не меньше 15. Тогда, поскольку сумма всех девяти чисел от 1 до 9 равна 45, сумма в каждой тройке равна 15. Но тогда числа, отстоящие на три места, должны быть равны, что невозможно.

Задача 7. *Треугольник ABC после поворота около вершины A заняв положение AB_1C_1. Докажите, что если прямая AC делит пополам отрезок BB_1, то прямая AB_1 делит пополам отрезок CC_1.*

Обозначим через M точку пересечения прямых AC и BB_1. Рассмотрим два случая.

а) M совпадает с A. Тогда A — центр отрезка BB_1, и, значит, угол поворота составляет 180°. Но тогда A — центр отрезка CC_1, и, конечно, AB_1 делит CC_1 пополам.

б) M не совпадает с A. Тогда $\triangle ABM = \triangle AB_1M$ по трем сторонам. Поэтому $\angle MAB = \angle MAB_1$.

Если точка C лежит с той же стороны от A, что и точка M, то углы $\angle CAB$ и $\angle CAB_1$ совпадают с этими углами. Если точка C лежит с противоположной стороны, то углы $\angle CAB$ и $\angle CAB_1$ — смежные с ними. В обоих случаях

$$\angle CAB_1 = \angle CAB = \angle C_1AB_1,$$

то есть AB_1 — биссектриса угла A в $\triangle CAC_1$. Поскольку он равнобедренный, то AB_1 — также и медиана, что и требовалось доказать.

Задача 8. *Представьте число 203 в виде суммы нескольких положительных слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых тоже равнялось 203.*

Искомые числа можно даже взять целыми:

$$203 = 29 + 7 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{167\ \text{раз}} = 29\cdot 7\cdot \underbrace{1\cdot \ldots \cdot 1}_{167\ \text{раз}}.$$

(С нецелыми числами существует и много других ответов).

Задача 10. *На сколько частей могут делить плоскость 4 различные прямые? Для каждого случая нарисуйте пример.*

Если все прямые параллельны, то частей пять. Докажем, что во всех остальных случаях частей не меньше восьми. Проведем такую большую окружность, чтобы все точки пересечения оказались внутри нее (см. рис. 1, где все, что внутри окружности, для ясности не проведено). Из нее выходят наружу восемь непересекающихся лучей; они делят все, что вне окружности, на восемь областей. Докажем, что все эти области принадлежат разным частям. Допустим, что две области принадлежат одной части (области A и B на рис. 1). Тогда четыре луча, их ограничивающие, принадлежат двум параллельным прямым (см. рис. 1). Но тогда какая-то другая прямая их пересекает и все же отделяет A от B.

Оценим теперь наибольшее возможное число частей. Будем проводить прямые по очереди. Проще рассуждать в общем виде: пусть на плоскости

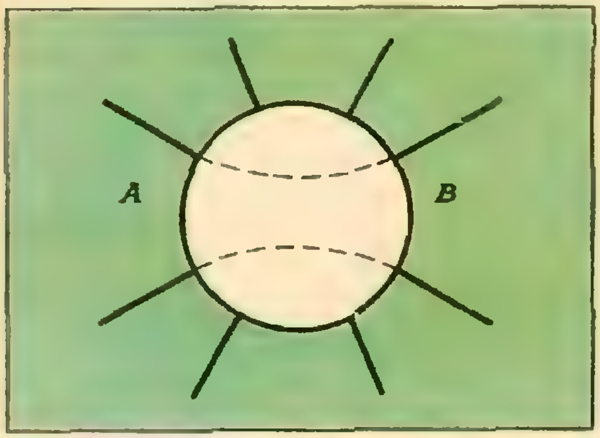


Рис. 1.

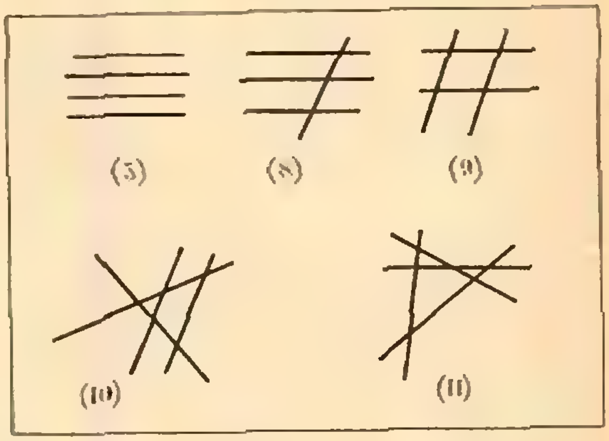


Рис. 2.

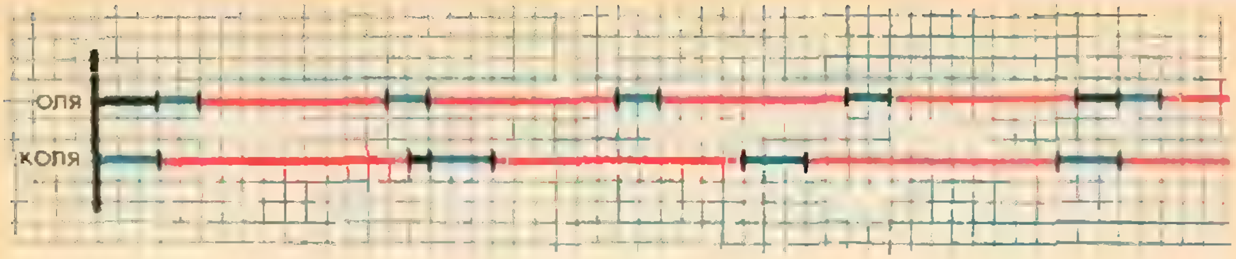


Рис. 3.

уже проведено n прямых и мы проводим $n+1$-ю. Очевидно, из ней не более чем n точек пересечения, делящих ее не более чем на $n+1$ кусок. Каждый кусок делит какую-то часть на две. Таким образом, число частей увеличивается не более чем на $n+1$. Для одной прямой частей всегда две, поэтому для четырех прямых частей не больше

$$2+2+3+4=11.$$

Итак, частей либо пять, либо не менее восьми и не более одиннадцати. Примеры на рисунке 2 показывают, что все эти случаи возможны.

Примечание. Возможны другие способы решения: тот или иной перебор случаев. Наши рассуждения без труда переносятся на случай n прямых и позволяют доказать, что число частей либо равно $n+1$, либо не меньше $2n$ и не больше $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$. Однако для больших n уже не все числа в этом промежутке возможны. (И то, какие числа возможны, а какие нет — не известно).

Задача 11. *Утром Коля и Оля решили полить огород. Коля открыл кран, наполнил свою лейку, и сразу вслед за ним Оля подставила свою лейку под струю. Колина лейка наполняется за 15 с, а Олина за 10 с. Наполнив свою лейку, каждый из детей тут же начинает поливать огород. Из Колиной лейки вода выливается 60 с, а из Олиной — 45 с. Как только лейка оказывается пустой, каждый из них мгновенно подставляет ее под струю воды, а если в этот момент набирает воду другой, то дожидается, пока кран не освободится, и сразу же начинает наполнять свою лейку. Когда никто не набирает воду, она льется в бочку, стоящую под краном. Если бы никто не забирал воду, бочка наполнилась бы за 15 мин. За сколько времени после включения крана наполнится бочка, если Коля и Оля все это время поливают огород? Кто первый будет набирать воду после того, как вода польется через край бочки?*

Эту задачу удобно решать с помощью графика. Начертим график действий Коли и Оли. Наполнение лейки будем обозначать синим, поливание — красным, ожидание — черным. Масштаб удобно взять такой: в одной клеточке 5 секунд. Начало графика изображено на рисунке 3. Если вы достроите график до 50-й клетки, то заметите, что 48-я клетка совпадает по существу со 2-й (Коля 5 с наполняет лейку, а Оля ждет); 49-я совпадает с 3-ей; 50-я — с 4-й и так далее. Поэтому действия Коли и Оли будут периодически повторяться через каждые 46 клеток (230 с). Из графика видно, что в течение одного периода вода льется в бочку на протяжении 29 клеток. Поскольку 15 мин соответствуют 180 клеткам, а $180 = 6 \cdot 29 + 6$, то должно пройти 6 полных периодов и часть седьмого, пока бочка заполнится.

Пользуясь графиком первого периода, определяем, что эта часть составляет 11 клеточек. Всего, пока бочка наполнится, пройдет $6 \cdot 46 + 11 = 287$ клеточек, то есть 23 мин 55 с. Пользуясь тем же графиком, видим, что первой после наполнения бочки воду в лейку будет набирать Оля.

задачник кванта

В этом номере мы публикуем задачи, которые предлагались на VII Всесоюзных олимпиадах школьников по математике и физике.

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 сентября 1973 года по адресу: 117071, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», *М 206, М 207* или ....*Ф 218*».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике или ... новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

Задачи М211-М215; Ф223-Ф227

М211. Дано n точек, $n>4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждый две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении). (8 кл.)

Г. Ш. Фридман

М212. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что семь из них — фальшивые, остальные — настоящие, причем узнал, какие именно фальшивые, а какие — настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно являются фальшивыми, а остальные — настоящими. Сможет ли он это сделать? (8, 9 кл.)

Р. В. Фрейвальд

М213. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C

Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$. (9, 10 кл.)

Е. В. Саллинен

М214. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней. (10 кл.)

Ю. И. Ионин

М215.* На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2 \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки k и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то k становится белой, если две или три из них были черными,— то черной).

а) Доказать, что через конечное время на листе не останется черных клеток.

б) Доказать, что черные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$. (10 кл.)

А. Л. Тоом

Ф223. Модели корабля толчком сообщили скорость $v_0 = 10$ *м/с*. При движении модели на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости: $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. а) Найти путь, пройденный моделью за время, в течение которого ее скорость уменьшилась вдвое. б) Найти путь, пройденный моделью до полной остановки. Считать $k = 0{,}5$ *кг/с*. Масса модели $m = 0{,}5$ *кг*. (8 кл.)

Ф224. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует направить веревку, чтобы с наименьшим усилием втаскивать ящик: а) равномерно, б) с заданным ускорением a? (8, 10 кл.)

Ф225. В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод CCl_4 и вода. При нормальном атмосферном давлении CCl_4 кипит при 76,7° С, вода — при 100° С. При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5° С. Определить, какая из жидкостей быстрей выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенных паров воды при 65,5° С составляет 192 *мм рт. ст.* (9, 10 кл.)

Ф226. Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью v_1 при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью v_0. С какой скоростью будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь. (10 кл.)

Ф227. На тороидальный сердечник из феррита с магнитной проницаемостью $\mu = 2000$ намотаны две катушки: первичная, содержащая $n_1 = 2000$ витков, и вторичная с $n_2 = 4000$ витков. Когда на первичную катушку было подано напряжение $U_1 = 100{,}0$ *в*, на разомкнутой вторичной было $U_2 = 199{,}0$ *в*. Найти, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной катушке, если сердечник заменить на сердечник того же размера, но из феррита с $\mu' = 20$. Рассеяние магнитного потока и потери в сердечнике не учитывать. (10 кл.)

Решения задач

М170—М173; Ф188—Ф192

М170. *а) Пусть M и N — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами AB и AC, P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Докажите, что угол BPC прямой.*

б). Докажите более общий факт: если точка O, расположенная внутри треугольника, такова, что $\measuredangle BOC - \measuredangle BAO = 90°$, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB и AC, P — точка пересечения прямых BO и MN, то $\measuredangle BPC = 90°$ (рис. 1).

Задача а), действительно, частный случай б): если O — центр вписанной окружности, то BOC в сумме с углами OCB и OBC равен 180°, а $\measuredangle BAO$ в сумме с теми же углами равен половине суммы углов треугольника, то есть 90°.

Поэтому решим сразу задачу б). Пусть для определенности точка P лежит на продолжении отрезка MN за точку N, как на нашем рисунке. (Другие случаи разбираются аналогично, вы без труда справитесь с ними самостоятельно.) По условию $\measuredangle OMA = \measuredangle ONA = 90°$, поэтому вокруг четырехугольника $OMNA$ можно описать окружность, следовательно,

$$\measuredangle ONM = \measuredangle OAM = \measuredangle BAO.$$

Покажем теперь, что точки O, N, P и C лежат на одной окружности. Действительно,

$$\measuredangle CNP = \measuredangle MNA = 90° - \measuredangle MNO = 90° - \measuredangle BAO, \ \measuredangle COP = 180° - \measuredangle BOC.$$

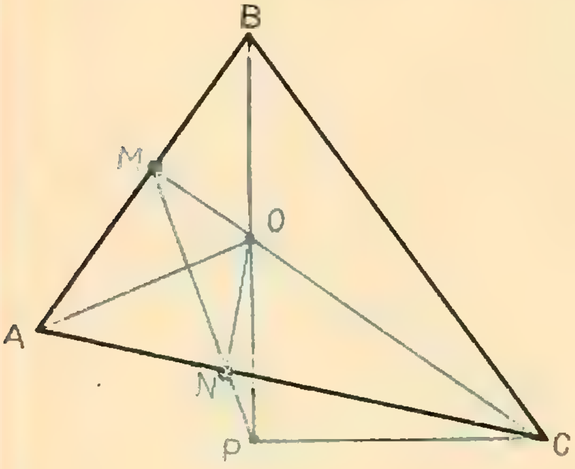


Рис. 1.

Используя условие задачи: $\measuredangle BOC - \measuredangle BAO = 90°$, получаем

$$\measuredangle CNP = \measuredangle COP.$$

Наконец, из того, что четырехугольник $CONP$ вписанный, следует нужное нам равенство

$$\measuredangle CPO = \measuredangle CNO = 90°.$$

И. Ф. Шарыгин

М171. *На плоскости нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи только линейки построить отрезок длины $\sqrt{7}$.*

Вы без труда докажете, что длина красных отрезков на рисунке 2 равна $\sqrt{7}$.

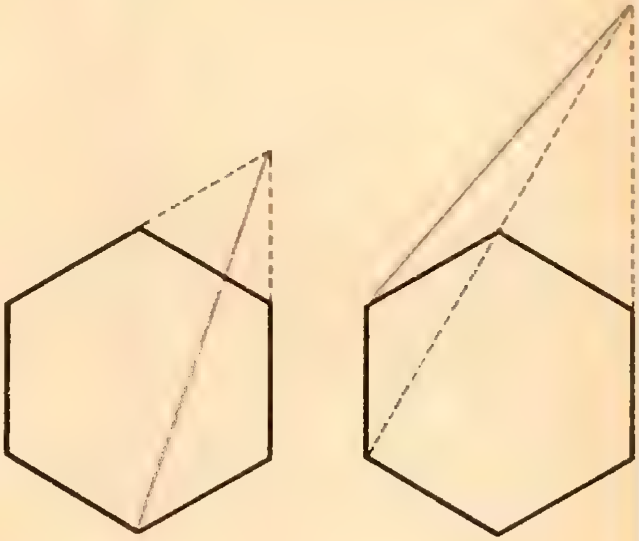


Рис. 2.

М172. *Докажите, что при любом простом p число* $\underbrace{11\ldots1}_{p}\,\underbrace{22\ldots2}_{p}\,\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$ *делится на p.*

Введем следующие обозначения:

$$123456789 = A,\quad \underbrace{11\ldots1}_{p}\,\underbrace{22\ldots2}_{p}\,\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} = B,$$

$$1\,\underbrace{0\ldots02}_{p}\,\underbrace{0\ldots03}_{p}\ldots\underbrace{0\ldots08}_{p}\,\underbrace{0\ldots09}_{p} = 10^{8p} + 2\cdot10^{7p} + 3\cdot10^{6p} + \ldots + 8\cdot10^{p} + 9 = C,\quad \underbrace{11\ldots1}_{p} = E.$$

Ясно, что $B = E\cdot C$, $C - A =$

$$= (10^{8p} - 10^{8}) + 2\,(10^{7p} - 10^{7}) + 3\,(10^{6p} - 10^{6}) + \ldots + 8\,(10^{p} - 10),$$

$$10^{p} - 10 = (9\cdot E + 1) - 10 = 9\,(E - 1).$$

Согласно малой теореме Ферма (см. «Квант» №10 (1972)) число $n^{p} - n$ делится на p при любом простом p и любом натуральном n. В частности, 10^p-10, $10^{2p}-10^2$, . . . , $10^{8p}-10^8$ делятся на p. Значит, $C-A$ делится на p, и $9(E-1)$ делится на p.

Так как сумма цифр числа A равна 45, то A делится на 9, и значит, $A(E-1)$ делится на $9(E-1)$. Следовательно, $A(E-1)$ делится на p.

Тем самым, $B-A=EC-AE+AE-A=E(C-A)+A(E-1)$ делится на p, что и требовалось доказать.

М. Л. Гервер

М173. *В квадратной таблице* 4 × 4 *расставлены числа* 1, 2, 3, . . . , 16 *так, что сумма четырех чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей равна одному и тому же числу, причем* 1 *и* 16 *стоят в противоположных углах таблицы. Докажите, что в этом «магическом квадрате» сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, — одна и та же.*

Легко сообразить, что в любом магическом квадрате 4 × 4 сумма чисел, стоящих в каждой строке, столбце или диагонали, равна 34. Действительно, общая сумма всех стоящих в квадрате чисел равна $\frac{17.16}{2}=34\times4$, а суммы чисел, стоящих, например, в строках, равны между собой.

Поэтому нам нужно доказать, что в квадратах, удовлетворяющих нашему условию (числа 1 и 16 стоят в противоположных углах), сумма чисел, симметричных относительно центра, равна 17. Для чисел 1 и 16 это так по условию. Будем считать, что 1 стоит в верхнем левом углу, а 16 — в правом нижнем, тогда два других числа на этой же диагонали — обозначим их через a и a' — удовлетворяют равенству $a+a'=17$. Условимся всегда число, дополняющее число x до 17, обозначать через x': $x'=17-x$.

Воспользуемся теперь обозначениями, приведенными на рисунке 3 (S_i обозначают суммы чисел в соответствующих клетках). Верны следующие равенства:

$$S_1+c+d+a+a'+S_2+S_3+c+d+a+a'+S_4+2(b+c+d+e)=34\cdot6$$

(это — сумма чисел в двух средних столбцах, двух средних строках и дважды — по диагонали),

$$1+S_1+b+b+S_3+16+16+S_2+e+e+S_4+1=34\cdot4$$

(это — сумма чисел в первой строке, в четвертом столбце, в четвертой строке и в первом столбце).

Из этих равенств мы получаем, что $4(c+d)=34\cdot2$. Значит, $c+d=17$, а поэтому и $b+e=17$, то есть $d=c'$, $e=b'$.

Перейдем теперь к рисунку 4. Ясно, что $y\neq x'$, поскольку $b\neq1'$. Теперь мы хотим убедиться, что x' или y' не может стоять ни в красной, ни в желтой клетке. Заметим, что x' и y' не могут попасть на одноцветные клетки; если эти клетки — красные, то, складывая числа в первой строке и первом столбце, мы получим, что

$$34\cdot2=34+2+17,$$

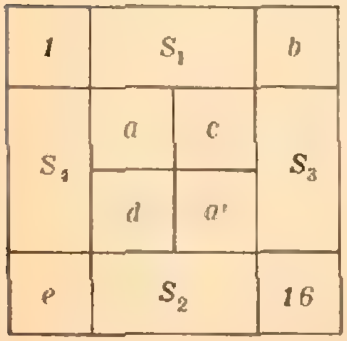
а если эти клетки — желтые, то, складывая числа в первой строке и четвертом столбце, мы получим, что

$$34\cdot2=34+2b+17$$

— оба эти равенства неверны. Пусть теперь x' стоит в красной клетке (случай, когда в нее попадает y', разбирается аналогично), второе число в красной клетке обозначим через z. Тогда, складывая число в первой строке и в первом столбце, получим $34\cdot2=2+17+17+y+z$, откуда $y+z=32$, что невозможно. Таким образом, ни x', ни y' не может попасть в красную клетку, а вместе они не могут попасть в желтые клетки. Значит, либо x', либо y' стоит на месте u или v. Пусть это x' (случай, когда туда попадает y', разбирается аналогично). Но $x'\neq u$, поскольку $a\neq c$, значит, $x'=v$, тогда $y'=u$, а числа, стоящие в желтых клетках, дополняют числа, стоящие в красных клетках (проверьте).

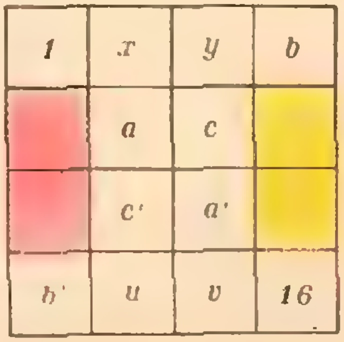
В заключение на рисунке 5 приведен пример магического квадрата, удовлетворяющего условию задачи (из наших рассуждений существование такого квадрата, разумеется, не следует).

Л. Г. Лиманов



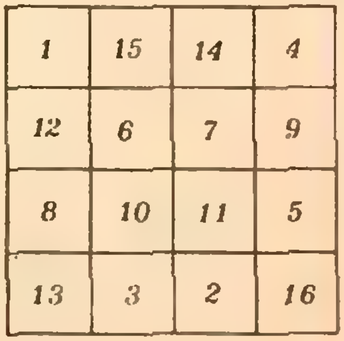
1	S_1		b
S_4	a	c	S_3
	d	a'	
e	S_2		16

Рис. 3.



1	x	y	b
🟥	a	c	🟨
🟥	c'	a'	🟨
b'	u	v	16

Рис. 4.



1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Рис. 5.

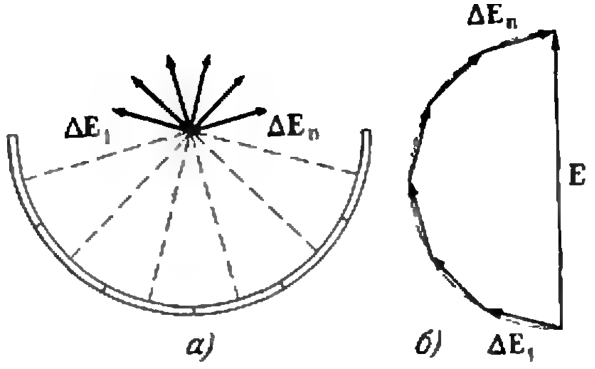


Рис. 6.

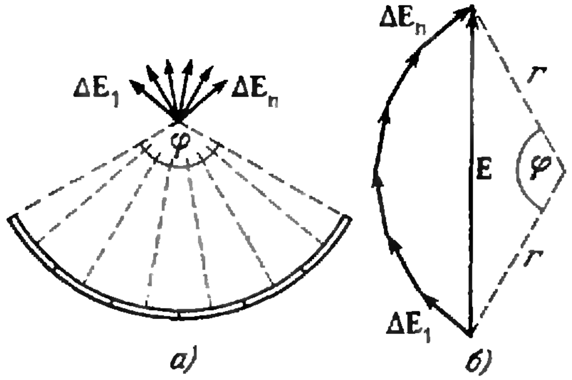


Рис. 7.

Ф188. *Холодильник мощностью P за время τ превратил в лед n литров воды, которая первоначально имела температуру $t°$ С. Какое количество тепла выделилось в комнате за это время?*

Из принципа работы любой холодильной установки следует, что в тепло переходит как вся энергия, потребляемая холодильником от сети, так и та энергия, которую отдают охлаждаемые продукты (в данном случае — вода). Это означает, что количество тепла, выделившегося в комнате за время τ,

$$Q = P\tau + c_{в} m_{в} t° + \lambda m_{в},$$

где $m_в = n$ — масса воды, выраженная в *кг*, $c_в$ — удельная теплоемкость воды и λ — удельная теплота плавления льда.

И. Ш. Слободецкий

Ф189. *Заряд $q = 10^{-8}$ к равномерно распределен по дуге окружности радиуса $R = 1$ см с углом раствора а) π радиан, б) $2/3\,\pi$ радиан. Определите напряженность электрического поля в центре окружности.*

а) Разобьем дугу на n равных частей, каждая из которых имеет заряд q/n. При достаточно большом n ($\pi R/n \ll R$) эти заряды можно считать точечными. Каждый из зарядов создает в центре окружности поле с напряженностью $\Delta \mathbf{E}_i$, равной по величине

$$\Delta E_i = k \frac{q}{nR^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ $нм^2/к^2$. Направления векторов $\Delta \mathbf{E}_i$ показаны на рисунке 6,а.

Чтобы найти напряженность суммарного поля $\mathbf{E} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta \mathbf{E}_i$, будем последовательно складывать эти векторы, приставляя начало каждого из векторов к концу предыдущего (рис. 6,б). Точность определения величины $\mathbf{E}$ тем выше, чем больше n.

Легко заметить, что при достаточно большом n ломаную, которую образуют при сложении векторы $\Delta \mathbf{E}_i$, можно заменить полуокружностью, причем величина вектора $\mathbf{E}$ численно равна ее диаметру. Длина полуокружности l равна

$$l = n\,\Delta E_i = n \frac{kq}{nR^2} = \frac{kq}{R^2}.$$

С другой стороны, $l = \pi E/2$.

Отсюда

$$E = \frac{2l}{\pi} = \frac{2kq}{\pi R^2} = 5{,}7 \cdot 10^5 \text{ в/м}.$$

б) Задача для дуги с произвольным углом раствора φ решается аналогично. В этом случае вектор $\mathbf{E}$ является хордой дуги окружности (рис. 7,б). Длина дуги $l = n\,\Delta E_i$, центральный угол — φ (*рад*) (φ — максимальный угол между векторами $\Delta \mathbf{E}_i$).

Обозначим радиус окружности r и выразим через него длину дуги l и хорды E:

$$l = r\varphi, \quad E = 2r \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Но $l = n\,\Delta E_i = kq/R^2$, следовательно,

$$E = 2\frac{kq}{\varphi R^2} \sin\frac{\varphi}{2}.$$

При $\varphi = 2/3\,\pi$ получим

$$E = 7{,}4 \cdot 10^5 \text{ в/м}.$$

В. Г. Светозаров

Ф190. *Груз привязан на веревке к брусу квадратного сечения с ребром a (рис. 8). Длина веревки $l = na$ (n — целое число). Грузу сообщена скорость V в направлении, перпендикулярном веревке. За какое время вся веревка намотается на брус?*

Рассмотрим случай, когда в начальный момент веревка параллельна одной из боковых граней бруса ($\alpha = 0$). Груз начинает двигаться вокруг ребра A по окружности радиуса l с линейной скоростью V. Через четверть оборота веревка коснется грани бруса, груз станет двигаться с прежней линейной скоростью по окружности радиуса $l - a$. Еще через четверть оборота радиус окружности станет $l - 2a$ и т. д.

Веревка намотается на брус за время

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_n = \frac{2\pi l}{4V} + \frac{2\pi(l-a)}{4V} + \dots + \frac{2\pi[l-(n-1)a]}{4V} = \frac{\pi n}{4V}\Big[2l-(n-1)a\Big] = \frac{\pi n}{4V}a(n+1).$$

Если в начальный момент веревка составляет с плоскостью боковой грани бруса угол α (*рад*), как показано на рисунке 8, то время t равно

$$t = \frac{\pi n}{4V}a(n+1) + \frac{\alpha a n}{V}.$$

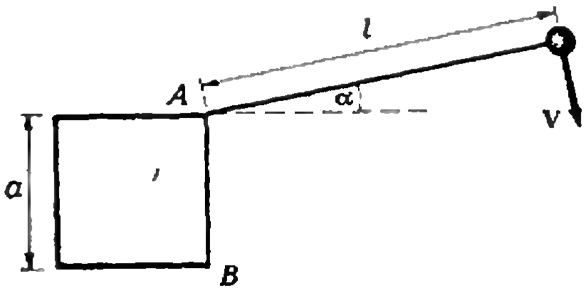


Рис. 8.

Ф191. *С какой максимальной постоянной скоростью может двигаться автомобиль по мосту с радиусом кривизны R, если длина моста l и коэффициент трения шин о дорогу k?*

Так как автомобиль движется с постоянной скоростью, то составляющая силы тяжести, касательная к окружности, должна быть равна по абсолютной величине силе трения покоя шин о дорогу (рис. 9)

$$mg\sin\alpha = F_{\text{тр}}.$$

Но $F_{\text{тр}} \leqslant kN$, где N — сила реакции дороги. Следовательно,

$$mg\sin\alpha \leqslant kN. \qquad (1).$$

Так как автомобиль движется по окружности, то он имеет центростремительное ускорение $a = V^2/R$, которое ему сообщает равнодействующая силы N и радиальной составляющей силы тяжести, то есть

$$mg\cos\alpha - N = mV^2/R.$$

Найдем отсюда силу N, подставим ее значение в неравенство (1) и получим

$$V \leqslant \sqrt{\frac{gR}{k}(k\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

При $\alpha = \alpha_0 = \dfrac{l}{2R}$ значение $\sin\alpha$ максимально, а $\cos\alpha$ минимально.

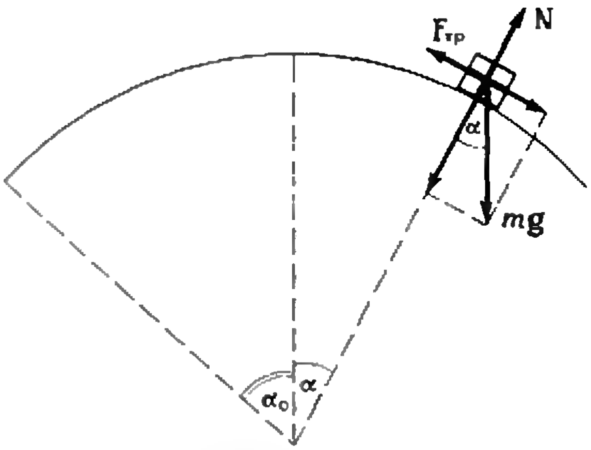


Рис. 9.

Поэтому максимальная скорость, с которой может двигаться автомобиль, равна

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{gR}{k}(k\cos\alpha_0 - \sin\alpha_0)} = \sqrt{\frac{gR}{k}\left(k\cos\frac{l}{2R} - \sin\frac{l}{2R}\right)}.$$

Ф192. *По водопроводной трубе течет вода со скоростью v = 10 м/с. Каким будет давление на кран, если его быстро закрыть?*

Для простоты будем считать, что кран представляет собой круглую заслонку с площадью S, равной площади сечения трубы. При закрывании такого крана частицы воды, попавшие на заслонку, останавливаются, передавая свой импульс заслонке. В результате этого у заслонки образуется область с повышенной плотностью, в которой вода покоится. Граница этой области перемещается по трубе со скоростью звука c (с этой скоростью распространяется любое упругое возмущение в жидкости). Значит, за время Δt остановятся те частицы, которые находятся в объеме $V = S c \Delta t$.

Масса этого объема воды $m = \rho S c \Delta t$ (ρ — плотность воды), изменение скорости $\Delta v = v$, а изменение импульса $\Delta(mv) = \rho S c v \Delta t$.

Следовательно, на воду (согласно II закону Ньютона) подействовала сила

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \rho S c v.$$

Такая же по абсолютной величине сила действует со стороны воды на заслонку, поэтому давление на заслонку равно

$$P = \frac{F}{S} = \rho c v.$$

Подставляя значения $\rho = 10^3$ *кг/м³*, $c = 1500$ *м/с* и $v = 10$ *м/с*, получим

$$P = 1{,}5 \cdot 10^7\ \textit{н/м}^2.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Закон сохранения энергии

В. Е. Белонучкин, С. М. Козел

Закон сохранения и превращения энергии — один из фундаментальных законов природы. Он утверждает, что энергия не возникает и не исчезает; в любых физических процессах она только превращается из одного вида в другой или переходит от одних тел к другим. Можно сказать, что этот закон устанавливает условие энергетического баланса физических процессов.

Закон сохранения энергии не является следствием каких-либо других физических законов. Он получен в результате обобщения всей совокупности опытных фактов, которые охватывают как грандиозные явления космических масштабов, так и события, происходящие в мире молекул, атомов и элементарных частиц. Факты, характеризующие механические, тепловые, электромагнитные, ядерные, химические, биологические процессы, не дают оснований сомневаться в справедливости закона сохранения энергии.

Математически в наиболее общей форме этот закон можно записать так:

$$\Delta E + \Delta U = A + Q. \qquad (1)$$

Здесь ΔE — изменение механической энергии системы, равное сумме изменений кинетической и потенциальной энергий тел, входящих в рассматриваемую систему; ΔU — изменение внутренней энергии тел системы; A — работа внешних сил; Q — тепло, получаемое системой.

При рассмотрении каких-либо конкретных процессов закон сохранения энергии часто записывается в более простой форме. Так, при решении механических задач обычно не принимается во внимание теплопередача ($Q = 0$). В этом случае выполняется равенство:

$$\Delta E + \Delta U = A.$$

Если, кроме того, рассматриваемая система изолирована ($A = 0$), то можно записать

$$\Delta E + \Delta U = 0.$$

Примером такого процесса, в котором механическая энергия превращается во внутреннюю, является неупругий удар.

Если в системе действуют механические силы, зависящие только от взаимного расположения тел, то

$$\Delta E = A,$$

а в изолированных системах

$$\Delta E = 0.$$

Два последних равенства могут быть получены непосредственно из законов Ньютона. (Рассмотрите, например, свободное падение тела в поле тяжести, как это сделано в школьном учебнике физики для 8 класса). Поэтому можно сказать, что закон сохранения энергии в механике не является самостоятельным, хотя общий закон сохранения и превращения энергии (заметим это еще раз) нельзя вывести ни из каких других физических законов.

В теории тепловых процессов обычно рассматриваются такие задачи, в которых можно пренебречь изменением механической энергии системы. Из этого следует, что

$$\Delta U = A + Q.$$

Закон сохранения энергии в таком виде называют первым началом термодинамики *). Для теплоизолированных систем $Q = 0$, и потому

$$\Delta U = A.$$

В некоторых задачах на электромагнитные явления также упрощается запись закона сохранения энергии, например, когда $\Delta E = 0$ или $Q = 0$. При этом следует помнить, что энергия электрического и магнитного полей, существующих в данной системе, входит во внутреннюю энергию системы.

Закон сохранения энергии (наряду с законом сохранения импульса и другими известными в физике законами сохранения, которые в средней школе не изучаются) — мощное орудие для решения физических задач. Главная причина этого состоит в том, что закон сохранения энергии справедлив всегда, независимо от хода процесса и от характера действующих сил. Этот закон может быть использован и тогда, когда ход процесса вообще неизвестен — известны лишь начальное и конечное состояния системы. Так обстоит дело, например, в физике элементарных частиц.

Теперь разберем несколько задач, в которых применение закона сохранения энергии позволит разобраться в ситуации, в которой динамические закономерности приводят к весьма сложным математическим выкладкам, а иногда и вовсе заводят в тупик.

Все задачи взяты из письменных работ на приемных экзаменах в МФТИ в 1970—1972 годах.

Задача 1. *По наклонной плоскости с высоты h скатывается без проскальзывания тонкий обруч. Определить его скорость в конце наклонной плоскости.*

Эту задачу можно решить, используя только законы Ньютона. Но такое решение в рамках школьного курса практически неосуществимо.

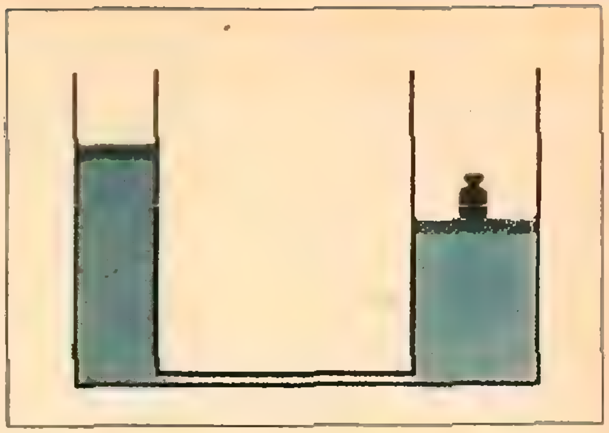


Рис. 1.

Воспользуемся законом сохранения энергии.

Вначале обруч обладал потенциальной энергией mgh (m — масса обруча); к концу пути по наклонной плоскости вся эта энергия перешла в кинетическую, которая складывается из энергии поступательного движения $\frac{mv^2}{2}$ (v — конечная скорость центра масс обруча) и энергии вращательного движения. Так как обруч не проскальзывает, линейная скорость всех его точек равна скорости поступательного движения обруча как целого, то есть v. Поэтому кинетическая энергия вращательного движения, как и поступательного, равна $\frac{mv^2}{2}$.

Таким образом,

$$2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mgh$$

и

$$v = \sqrt{gh}.$$

Задача 2. *Два сообщающихся сосуда с площадью сечения $S_1 = 100$ см² и $S_2 = 200$ см² заполнены водой и закрыты легкими поршнями. Система находится в равновесии. В этом положении на больший поршень помещают гирю массы $m = 1$ кг. Определить, сколько тепла выделится в системе при переходе в новое положение равновесия (рис. 1).*

---

*) Часто первым началом называют более общее соотношение (1).

Под действием веса груза вся система придет в движение. Можно непосредственно подсчитать количество тепла, выделившегося при движении, но для этого необходимо знать много дополнительных данных — количество воды, ее вязкость, форму соединительной трубки, характер движения воды и т. д. Решение существенно упрощается, если воспользоваться законом сохранения энергии.

Поскольку в начальный и конечный моменты и вода и гиря покоились, тепло может выделиться только за счет уменьшения потенциальной энергии системы W

$$Q = W_{н} - W_{к}, \qquad (1)$$

где $W_{н}$ и $W_{к}$ — начальное и конечное значения потенциальной энергии. Нетрудно видеть, что потенциальная энергия гири уменьшилась, а воды — увеличилась.

Запишем выражения для $W_{н}$ и $W_{к}$ (за нулевой уровень примем дно сосудов):

$$W_{н} = \rho g \frac{h^2}{2}(S_1 + S_2) + mgh \qquad (2)$$

(h — начальный уровень воды в обоих сосудах),

$$W_{к} = \rho g \frac{h_1^2}{2} S_1 + \rho g \frac{h_2^2}{2} S_2 + mgh_2 \qquad (3)$$

(h_1 и h_2 — конечные уровни воды в первом и втором сосудах соответственно).

Величины h_1 и h_2 можно найти из условий равновесия системы и неизменности массы воды:

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 + \frac{mg}{S_2}, \qquad (4)$$

$$\rho h_1 S_1 + \rho h_2 S_2 = \rho h (S_1 + S_2). \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (1)—(5), *найдем*

$$Q = \frac{m^2 g S_1}{2\rho S_2 (S_1 + S_2)} \approx 0{,}08 \text{ } дж.$$

Задача 3. *Какое тепло выделится в цепи, изображенной на рисунке 2, при переключении ключа K из положения 1 в положение 2?*

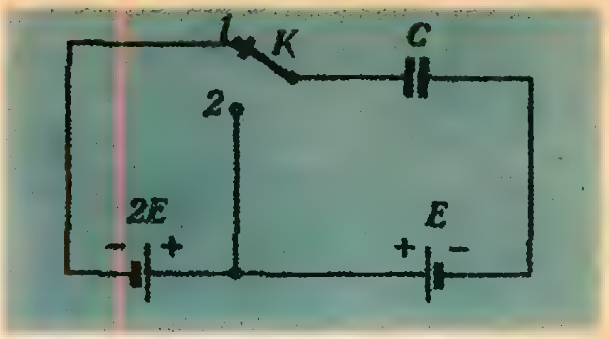


Рис. 2.

Эта задача, на первый взгляд не имеющая ничего общего с предыдущей, очень похожа на нее своим решением.

При первом положении ключа левая пластина конденсатора была заряжена отрицательно, правая — положительно, а при втором положении — наоборот. Следовательно, произошел процесс перезарядки конденсатора, и по цепи прошел электрический ток. Если известны сопротивления проводов и источников тока, то можно определить ток как функцию времени и вычислить выделившееся в цепи тепло.

Закон сохранения энергии позволяет получить ответ, даже не зная величин сопротивлений. По окончании процесса заряд, а значит, и энергия конденсатора *не изменились* (в первом случае, как и во втором, суммарная э. д. с. источников, заряжающих конденсатор, равна E). Поэтому вся работа, совершенная источниками тока, должна перейти в тепло. А работу эту подсчитать нетрудно. Источник, обладающий э. д. с. $2E$, никакой работы не совершает, так как в *положении 2* он отключен от цепи. Источник же с э. д. с. E совершает работу по перенесению заряда $q = 2CE$.

Таким образом, выделившееся в цепи тепло равно

$$Q = A = E \cdot 2CE = 2CE^2.$$

Задача 4. *Конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкф заряжен до разности потенциалов $U_0 = 300$ в. К*

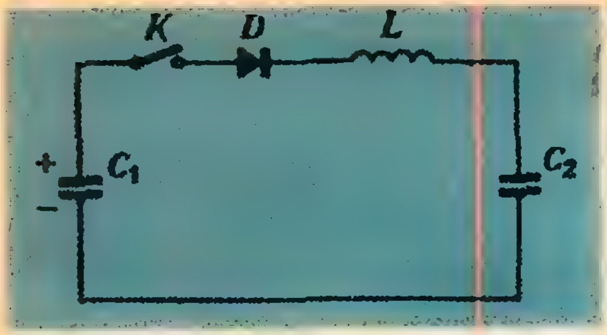


Рис. 3.

нему через диод D и индуктивность L подключают незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 2$ *мкф* (рис. 3). *До какой разности потенциалов он зарядится после замыкания ключа K? Сопротивление проводов пренебрежимо мало. Сопротивление диода в прямом направлении можно считать равным нулю, а в обратном — бесконечно большим. Величина индуктивности L достаточно велика, так что процесс перезарядки происходит медленно.*

В начальный момент заряженный конденсатор обладает запасом электрической энергии $\frac{C_1U_0^2}{2}$.

После замыкания ключа в цепи возникает электрический ток; заряд, а значит, и энергия первого конденсатора уменьшаются, а второго — увеличиваются. По окончании процесса, когда ток в цепи прекратится, конденсаторы будут обладать электрической энергией $\frac{C_1U_1^2}{2}$ и $\frac{C_2U_2^2}{2}$ соответственно.

Тепловыми потерями в системе во время процесса можно пренебречь, так как ничтожно мало сопротивление цепи. Излучение энергии в пространство пренебрежимо мало, так как процесс перезарядки происходит медленно в связи с наличием в цепи большой индуктивности.

Поэтому закон сохранения энергии можно записать в таком виде:

$$\frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} = \frac{C_1U_0^2}{2}. \qquad (1)$$

Кроме того, в системе, конечно, сохраняется заряд, то есть

$$C_1U_1 + C_2U_2 = C_1U_0. \qquad (2)$$

Из системы уравнений (1) и (2) получим искомую величину

$$U_2 = \frac{2C_1U_0}{C_1 + C_2} = 200 \text{ в}.$$

Замечание. Подсчитайте напряжение на первом конденсаторе U_1 и объясните полученный результат.

Задача 5. *Тепловой фотоприемник* (рис. 4) *представляет собой полую камеру с площадью внутренней поверхности* $S = 2$ *см*^{2}, *имеющую небольшое отверстие площади* $\sigma = 1$ *мм*^{2}. *Внутренняя поверхность камеры незначительную часть света поглощает* (*коэффициент поглощения* $k = 0{,}01$), *а остальную часть рассеивает. Какая часть светового потока, попадающего на входное отверстие камеры, выходит через него обратно?*

Качественно поведение светового излучения внутри камеры можно описать так. Свет попал на стенку, один процент его *энергии поглотился*, остальная энергия рассеялась. Часть рассеянного света выйдет через отверстие, остальное вновь упадет на поверхность фотоприемника, причем один процент от этой энергии (уже меньшей, чем начальная) поглотится, а 99 процентов рассеется, и т. д.

Так как отверстие мало и мал коэффициент поглощения, то каждая небольшая «порция» света, прежде чем она выйдет обратно через отвер-

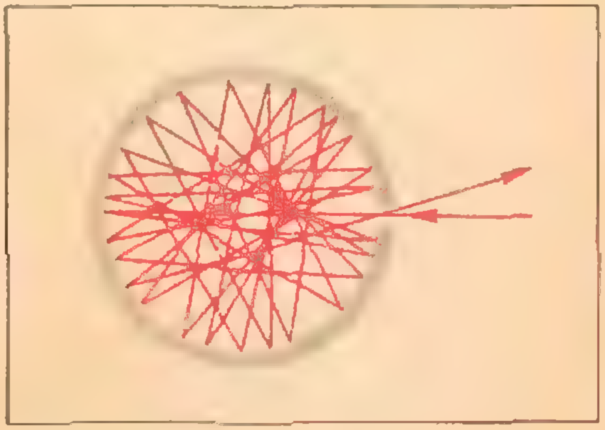


Рис. 4.

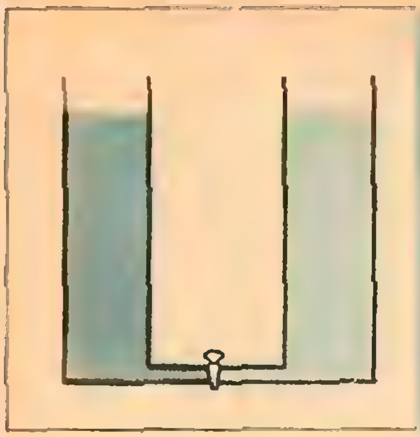


Рис. 5.

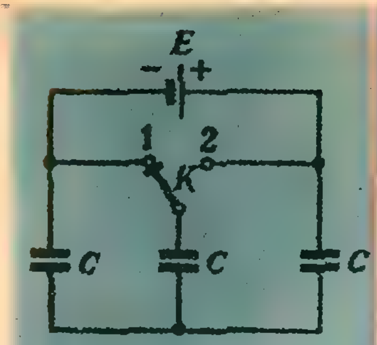


Рис. 6.

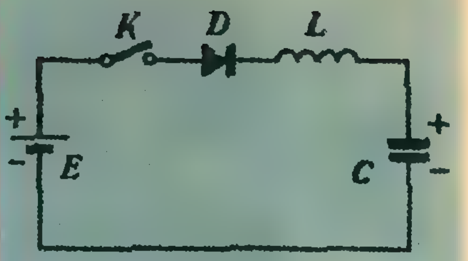


Рис. 7.

стие или будет поглощена стенками, как правило, много раз пересечет по различным направлениям полость приемника. Поскольку направление рассеяния света определяется случайными факторами, потоки энергии по различным направлениям должны выровняться. В камере возникает изотропное (равномерно распределенное по всем направлениям) излучение.

Запишем условие энергетического баланса для такого излучения. Пусть в камеру попадает световой поток (энергия в единицу времени) P_0, выходит обратно поток P_1 и поглощается — P_2. Согласно закону сохранения энергии

$$P_0 = P_1 + P_2. \qquad (1)$$

Выразим P_2 через P_1. Так как излучение изотропно, то на любую площадку падает световой поток, пропорциональный величине этой площадки. Если через отверстие площадью σ выходит поток P_1, то на стенки камеры площадью $S - \sigma$ приходится поток, равный $\frac{P_1}{\sigma}(S-\sigma)$.

Поэтому

$$P_2 = k\frac{P_1}{\sigma}(S-\sigma) \approx kP_1\frac{S}{\sigma}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим искомую величину

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{1 + k\frac{S}{\sigma}} = \frac{1}{3}.$$

В заключение предлагаем решить самостоятельно задачи, аналогичные разобранным в статье.

Упражнения

1. Два одинаковых сосуда сечения $S = 10$ *см*^{2} заполнены до высоты $h = 1$ *м* несмешивающимися жидкостями (рис. 5). Плотность жидкости в одном из сосудов $\rho_1 = 1$ *г/см*^{3}, в другом $\rho_2 = 2$ *г/см*^{3}. В тонкой трубке, соединяющей сосуды, открывают кран. Какое количество тепла выделится при переходе системы в положение равновесия?

2. Какое тепло выделится в цепи, изображенной на рисунке 6, при переключении ключа K из положения 1 в положение 2?

3. В схеме, изображенной на рисунке 7, конденсатор емкостью C заряжен вначале зарядом q_0 (знак заряда указан на рисунке). До какой разности потенциалов зарядится конденсатор, если замкнуть ключ K? Э. д. с. батареи равна E. Внутреннее сопротивление батареи и сопротивление проводов пренебрежимо малы. Диод D можно считать идеальным — в прямом направлении его сопротивление ничтожно мало, в обратном — бесконечно велико. Индуктивность L достаточно велика, так что процесс зарядки идет медленно.

И. А. Столяров

Движение заряженных частиц в электрическом поле

Характер движения тела (вид его траектории, формулы, выражающие зависимость перемещения и скорости тела от времени и т. д.) не зависит от природы действующей на тело силы. Он определяется только тем, как эта сила зависит от координат тела и от времени. Поэтому различные по внешнему виду задачи, в которых зависимости силы, например, от координат, одинаковы, решаются совершенно одинаково. Это позволяет при решении многих задач на движение заряженных частиц в электрическом поле воспользоваться тем, что нам известно о движении тел в других «аналогичных» полях.

Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 1. *На расстоянии d от бесконечной плоской тонкой горизонтальной равномерно заряженной пластины скорость электрона была равна v_0, причем вектор v_0 составлял угол α с вертикалью* (*рис.* 1). *Плотность заряда пластины равна σ. Какова траектория движения электрона, если пластина проницаема для него? Какой будет скорость электрона, когда он будет находиться на расстоянии b ниже пластины?*

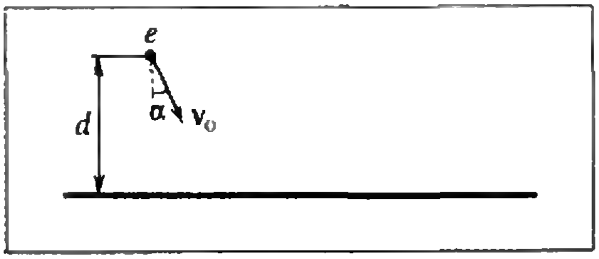


Рис. 1.

При решении задачи пренебречь силой тяжести и влиянием электрона на распределение заряда по пластине.

Решение. Бесконечная плоскость, заряженная равномерно с поверхностной плотностью зарядов σ, создает однородное поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

причем выше и ниже пластины вектор напряженности поля будет направлен в разные стороны. Поэтому, рассматривая движение электрона, удобно отдельно рассмотреть движение электрона выше и ниже пластины.

В однородном электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}$ на электрон действует постоянная сила

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E},$$

(где $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к* — заряд электрона). Эта сила сообщает электрону постоянное ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{e}{m}\mathbf{E},$$

$$a = \frac{e}{m}E = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0 m} \qquad (2)$$

(m — масса электрона). Но, как мы знаем, с постоянным ускорением движется частица вблизи поверхности Земли, где силу тяготения можно считать постоянной. Поэтому электрон в нашем случае будет двигаться так же, как движется частица, брошенная с Земли под углом к горизонту. В частности, это означает, что траекторией движения электрона будет парабола. Точнее, не парабола, а две параболы, составленные вместе:

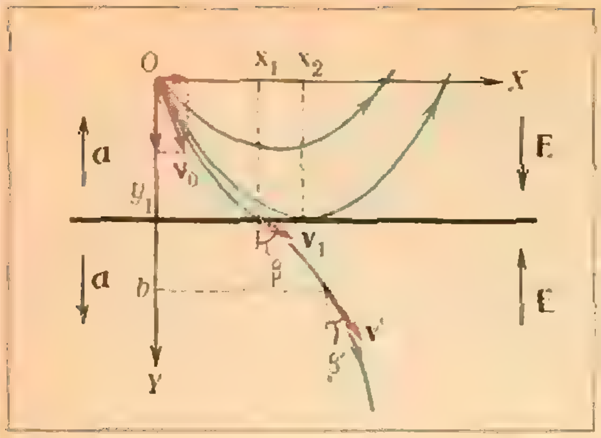


Рис. 2.

одна — выше плоскости, а другая — ниже. Роль ускорения свободного падения **g** играет ускорение **a**. Для того чтобы ответить на другие вопросы задачи, нужно рассмотреть два случая: а) пластина заряжена отрицательно и б) пластина заряжена положительно.

Рассмотрим случай а). В этом случае вектор напряженности электрического поля направлен к пластинке, а ускорение **a** электрона — от пластины. Несколько возможных траекторий движения электрона (для разных значений σ) показаны на рисунке 2. Если ускорение «свободного падения» **a** велико, то электрон может и не достигнуть пластины. Так как вертикальная составляющая начальной скорости электрона равна $v_y = v_0 \cos \alpha$, то максимальная высота H его «подъема» равна

$$H = \frac{v_y^2}{2a} = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{2a} = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2 \varepsilon_0 m}{e\sigma}. \tag{3}$$

Если $H < d$, то это значит, что электрон не долетит до пластины. В этом случае минимальное расстояние, на которое электрон приблизится к пластине, равно

$$h = d - H = d - \frac{(v_0 \cos \alpha)^2 \varepsilon_0 m}{e\sigma}.$$

При $H = d$ траектория электрона касается пластины, а при $H > d$ электрон пролетит пластину. Ниже пластины траекторией движения электрона будет другая парабола. И так как здесь ускорение направлено от пластины, то электрон будет все время удаляться от нее.

Найдем, в какой точке электрон пролетит через пластину и скорость его в этот момент времени. Для этого запишем уравнения движения электрона. Проекция скорости электрона на ось X (рис. 2) постоянна и равна $v_x = v_0 \sin \alpha$. Поэтому координата x электрона меняется со временем по закону

$$x = v_x t = v_0 \sin \alpha \cdot t. \tag{4}$$

Так как ускорение электрона a направлено вдоль оси Y, то координата y меняется со временем так:

$$y = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{at^2}{2}. \tag{5}$$

В момент времени $t = t_1$, в который электрон пересекает пластину, $y = y_1 = d$ и $x = x_1$. Подставив эти значения t, x и y в уравнения (4) и (5), получим:

$$x_1 = v_0 \sin \alpha \cdot t_1,$$

$$d = v_0 \cos \alpha \cdot t_1 + \frac{at_1^2}{2}. \tag{6}$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$t_1 = \frac{-v_0 \cos \alpha + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + 2ad}}{a} \;{}^{*)},$$

$$x_1 = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{-v_0 \cos \alpha + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + 2ad}}{a} \tag{7}$$

---

*) Решая второе из уравнений (6), мы отбросили второй, больший корень для t_1. Это уравнение позволит определить те моменты времени, когда частица имела координату y, равную d. Если бы пластина находилась далеко и электрон не пересекал бы ее при своем движении, то это значение y повторялось бы дважды: первый раз, когда электрон «поднимался», и второй раз, когда — «падал». Значению координаты $y = d$ при «возвращении» электрона и соответствует второй корень для t_1, равный

$$\frac{-v_0 \cos \alpha - \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + 2ad}}{a}$$

При $H = d$ $(2ad = -v_0^2\cos^2\alpha)$ траектория электрона касается пластины в точке $x_2 = -\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{a} = -\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2a}$. Это — половина дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту.

Для того чтобы найти скорость электрона в *любой момент времени*, нужно найти только вертикальную составляющую v_y его скорости в этот момент, так как $v_x = \text{const}$. Величина v_y меняется со временем по формуле

$$v_y = v_0\cos\alpha + at.$$

В момент времени $t = t_1$

$$v_y = v_0\cos\alpha + at_1 = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2ad}.$$

Скорость электрона в этот момент равна

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2ad} = \sqrt{v_0^2 + \frac{e\sigma d}{\varepsilon_0 m}}. \qquad (8)$$

Для того чтобы найти скорость электрона, можно было бы поступить и иначе — воспользоваться тем, что изменение кинетической энергии тела всегда равно работе действующей на тело силы. Это означает, что

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Eed. \qquad (9)$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Eed}{m}} = \sqrt{v_0^2 + \frac{e\sigma d}{\varepsilon_0 m}}.$$

Эта скорость составляет с вертикалью угол β такой, что

$$\sin\beta = \frac{v_x}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{e\sigma d}{\varepsilon_0 m}}}\sin\alpha.$$

Точно так же можно найти скорость v' электрона в тот момент, когда он находится ниже пластины на расстоянии b от нее. Так как ниже пластины сила, действующая на электрон, направлена от пластины и работа этой силы равна $-Eeb$, то

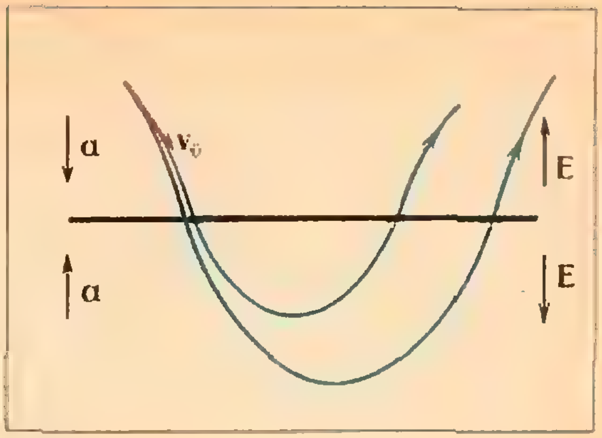


Рис. 3.

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Eed - Eeb. \qquad (10)$$

Отсюда

$$v' = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Ee(d-b)}{m}},$$

$$\sin\beta' = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2Ee(d-b)}{m}}}\sin\alpha.$$

Теперь, когда мы столь подробно разобрали эту задачу, вам будет нетрудно самостоятельно разобрать случай, когда пластина заряжена положительно. Две возможные траектории движения электрона для этого случая показаны на рисунке 3.

Решим еще одну очень распространенную задачу.

Задача 2. *Электрон влетает в середину плоского конденсатора со скоростью v_0, направленной параллельно обкладкам конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора равно d, длина пластин L. На какое расстояние l относительно первоначального направления движения сместится электрон при вылете из конденсатора, если конденсатор заряжен до разности потенциалов U? Какой будет скорость v электрона при вылете из конденсатора? Силой тяжести пренебречь.*

Решение. Поле конденсатора однородно. Поэтому внутри конденсатора электрон движется так же, как движется тело, брошенное горизон-

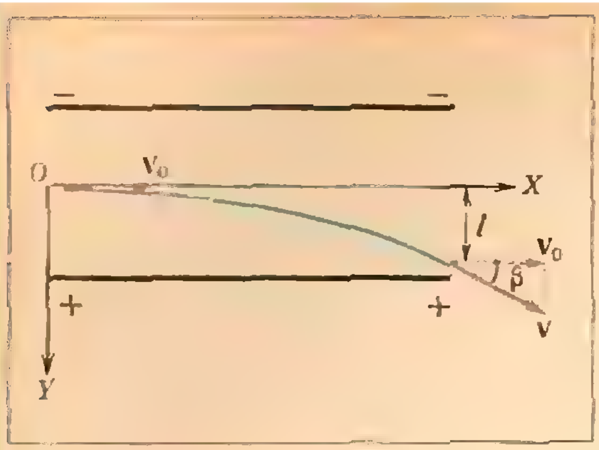


Рис. 4.

тально в однородном поле тяжести. Ускорение свободного падения направлено вдоль оси Y (рис. 4) и равно

$$a = \frac{eE}{m} = -\frac{e}{m}\frac{U}{d}\,(E<0).$$

Вдоль оси X электрон движется с постоянной скоростью $v_x = v_0$. Поэтому электрон вылетит из конденсатора через время

$$t = \frac{L}{v_0}.$$

Вдоль оси Y за это время он сместится на расстояние

$$l = \frac{at^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{eU}{md}\left(\frac{L}{v_0}\right)^2.$$

Скорость электрона в момент вылета из конденсатора найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Eel,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Eel}{m}} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eUL}{mdv_0}\right)^2}.$$

Вектор скорости $\mathbf{v}$ составляет с направлением вектора $\mathbf{v}_0$ угол β такой, что

$$\cos\beta = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eUL}{mdv_0}\right)^2}}.$$

Как видите, задача о движении заряженной частицы в конденсаторе ничем не отличается от рассмотренной нами ранее задачи. В конденсаторе поле тоже однородно, и на заряженную частицу в любой точке действует одна и та же сила.

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы в неоднородном электрическом поле. Частный случай такого поля — это поле точечного заряда Q. В этом поле на заряд q согласно закону Кулона действует сила

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2},$$

где r — расстояние между зарядами. Эта сила направлена вдоль линии, соединяющей заряды, и сообщает заряду q ускорение

$$a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2 m}$$

(m — масса заряда q).

Сила F обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Но точно так же зависит от расстояния сила всемирного тяготения. Это означает, что в поле закрепленного точечного заряда заряженная частица движется так же, как движется тело в поле тяготения на большом расстоянии от притягивающего центра — по окружности, эллипсу, параболе или гиперболе в зависимости от скорости частицы.

В подавляющем большинстве задач, которые могут встретиться на экзаменах, траектория движения — окружность. Решать такие задачи нужно точно так же, как и любые другие задачи на движение тела по окружности — записать уравнение движения (уравнение II закона Ньютона), воспользовавшись тем, что при движении тела по окружности радиуса R со скоростью v его центростремительное ускорение равно

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

Рассмотрим пример.

Задача 3. *В модели атома водорода Бора — Резерфорда электрон вращается по окружности вокруг*

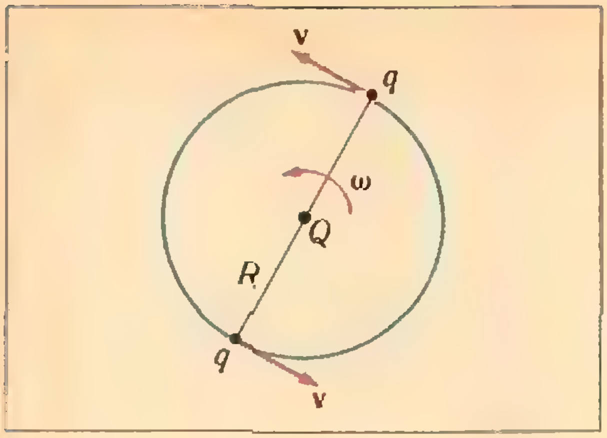


Рис. 5.

положительно заряженного ядра. Заряд ядра $|e|$. Определить скорость и ускорение электрона в атоме, если радиус атома водорода $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение. Запишем уравнение движения электрона:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

где m — масса электрона и v — его скорость. Отсюда найдем

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}} \approx 2{,}2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$a = \frac{v^2}{r} \approx 9{,}7 \cdot 10^{22} \text{ м/с}^2.$$

Задача 4. *Два одинаковых точечных заряда q движутся по окружности радиуса R вокруг заряда Q. При этом заряды q находятся на концах одного диаметра (рис. 5). Найти угловые скорости вращения зарядов q и отношение общей кинетической энергии зарядов к потенциальной.*

Решение. Заряды Q и q должны иметь различные знаки, иначе заряды q разлетятся. На каждый из зарядов q действует сила

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Qq}{R^2} - \frac{q^2}{(2R)^2}\right).$$

Эта сила сообщает каждому заряду центростремительное ускорение, равное $\frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения. Поэтому

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Qq}{R^2} - \frac{q^2}{(2R)^2}\right) = m\omega^2 R.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Qq}{R^2} - \frac{q^2}{4R^2}\right)\frac{1}{mR}} =$$

$$= \frac{1}{4R}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 mR}(4Qq - q^2)}.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий зарядов q:

$$W_{\text{кин}} = 2\frac{mv^2}{2} = m(\omega R)^2 =$$

$$= \frac{1}{16\pi\varepsilon_0 R}(4Qq - q^2).$$

Потенциальная энергия системы численно равна работе, необходимой для переноса зарядов q из бесконечности на расстояние R от заряда Q. *Для переноса одного из зарядов в поле* заряда Q необходимо совершить работу

$$A_1 = -\varphi \cdot q = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}q,$$

(φ — потенциал поля заряда Q на расстояние R от заряда), а для переноса второго заряда (теперь уже в поле зарядов Q и q) необходимо совершить работу

$$A_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}q + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2R}q.$$

Поэтому потенциальная энергия системы равна

$$W_{\text{пот}} = A_1 + A_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2R} - 2\frac{Qq}{R}\right),$$

и

$$\frac{W_{\text{кин}}}{W_{\text{пот}}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 5. *Заряжённая частица массы m вращается вокруг закрепленного точечного заряда Q по эллиптической орбите (рис. 6). Заряд частицы равен q. Минимальное расстояние между зарядом Q и частицей равно r, а максимальное — R. За какое время T частица делает полный оборот вокруг заряда Q?*

Решение. Сила, с которой заряд Q действует на частицу с зарядом q, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Таким же образом зависит сила притяжения между планетой и Солнцем от расстояния между ними. Согласно III закону Кеплера квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит. Очевидно, закон Кеплера справедлив и для движения зарядов вокруг тяжелого или закрепленного заряда Q. Таким образом, если мы найдем период вращения заряда по окружности любого заданного радиуса, то сможем найти ответ на задачу.

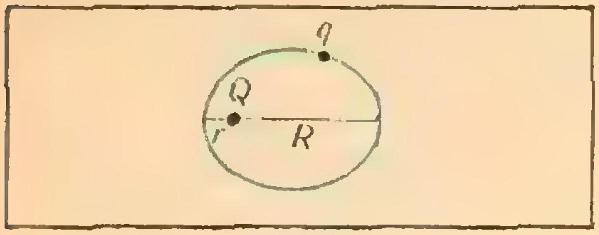


Рис. 6.

Очевидно, что частицы, траектории которых имеют одинаковые большие полуоси, имеют одинаковые периоды обращения по этим траекториям. Это означает, что период обращения частицы в нашей задаче равен периоду обращения частицы по окружности радиуса $\frac{R+r}{2}$. Найдем его.

Если заряд q движется по окружности радиуса $\frac{R+r}{2}$, то центростремительное ускорение $a=\omega^2\left(\frac{R+r}{2}\right)$ ему сообщает сила $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times$ $\times\frac{Qq}{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2}$. Поэтому

$$m\omega^2\left(\frac{R+r}{2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\omega=\sqrt{\frac{2Qq}{\pi\varepsilon_0 m\,(R+r)^3}},$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m\,(R+r)^3}{2Qq}}.$$

Во многих задачах на движение заряженных частиц в неоднородном электрическом поле требуется при заданных начальных условиях (координаты, скорости) определить скорости частиц, когда они занимают определенное положение, или найти положение частиц, когда они имеют определенные значения скоростей. Такие задачи лучше всего решать, пользуясь законами сохранения энергии и импульса.

Рассмотрим примеры.

Задача 6. *На металлический изолированный шарик радиуса R пустили «протяженный» пучок заряженных частиц, имеющих массы m и заряды q. Скорости частиц очень далеко от шара равны v_0 и направлены к центру шарика. Сколько частиц смогут достигнуть поверхности шара, если при попадании на шар частица «прилипает» к нему?*

Решение. Частицы не смогут достигнуть поверхности шара, когда заряд шара $Q_{\max}$ будет создавать такое электрическое поле, что кинетическая энергия зарядов далеко от шара будет меньше их потенциальной энергии на поверхности шара, то есть

$$\frac{mv_0^2}{2}\leqslant\frac{Q_{\max}q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Отсюда найдем, что

$$Q_{\max}=\frac{4\pi\varepsilon_0 mv_0^2 R}{2q}.$$

Этот заряд создают «прилипшие» к шару частицы, число которых равно

$$n=\frac{Q_{\max}}{q}=\frac{2\pi\varepsilon_0 mv_0^2 R}{q^2}\;{}^{*)}.$$

В заключение решим еще одну задачу.

Задача 7. *В однородное электрическое поле с напряженностью* **E** *помещены неподвижный заряд* $+Q$

---

*) Приведенное решение верно при $Q_{\max}\gg q$. В противном случае необходимо учитывать действие частиц пучка на распределение «прилипшего» заряда на шаре.

и на расстоянии l от него заряд $+q$ (рис. 7). Заряд q отпускают. Какую максимальную скорость он получит?

Решение. На заряд q действуют две силы — сила F_1 взаимодействия с зарядом Q: $F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}$ (x — расстояние между зарядами), и сила F_2 взаимодействия с полем **E**:

$$F_2 = Eq.$$

Если в начальный момент $F_1 > F_2$, то есть $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{l^2} > Eq$, то после того, как заряд q отпустили, он будет двигаться вправо, а если $F_1 < F_2$ — влево. Рассмотрим для определенности случай $F_1 > F_2$. Равнодействующая сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ сообщает заряду q ускорение $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m}$, направленное в начале движения по линии действия силы F_1 $\left(a = \frac{F_1 - F_2}{2}\right)$. Сила F_2 не зависит от положения заряда, а сила F_1 убывает с увеличением расстояния между зарядами. Когда величина F_1 станет меньше величины F_2, равнодействующая сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ будет направлена к заряду Q и будет вызывать уменьшение скорости заряда q. Очевидно, что скорость заряда q максимальна, когда $F_1 = F_2$, то есть при

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x_1^2} = Eq.$$

Расстояние между зарядами q и Q в этот момент равно

$$x_1 = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E}}.$$

Чтобы найти скорость заряда q в этот момент времени, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$-\Delta W_{\text{пот}} = \Delta W_{\text{кин}}$$

или

$$(\varphi_1 - \varphi_2)\, q = \frac{mv^2}{2},$$

где φ_1, φ_2 — потенциалы точек $x = l$ и $x = x_1$. Но

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -E(x_1 - l) +$$

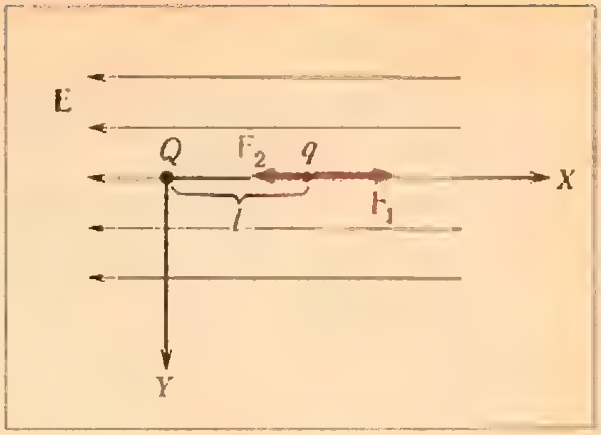


Рис. 7.

$$+\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1}\right) =$$

$$= (x_1 - l)\left(-E + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1 l}\right) =$$

$$\left(\sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E}} - l\right)\left(-E + \frac{1}{l}\sqrt{\frac{QE}{4\pi\varepsilon_0}}\right).$$

Поэтому

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(\sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E}} - l\right) \times}$$

$$\times \sqrt{\left(-E + \frac{1}{l}\sqrt{\frac{QE}{4\pi\varepsilon_0}}\right)}.$$

Упражнения

1. Во сколько раз изменится период колебаний математического маятника, если его шарик массы m зарядить зарядом q и маятник поместить в однородное электрическое поле с напряженностью E (поле вертикально или горизонтально)?

2. При какой минимальной относительной скорости протоны, находящиеся на расстоянии $l_1 = 5$ *см* друг от друга, могут сблизиться до расстояния $l_2 = 10^{-4}$ *см*?

3. Одна из пластин плоского конденсатора с расстоянием между пластинами $d = 10$ *мм* «освещается» рентгеновскими лучами, вырывающими из нее фотоэлектроны, имеющие скорость $v = 10^6$ *м/с.* Электроны собираются на второй пластине. Через какое время фототок прекратится, если с каждого квадратного сантиметра пластины вырывается $n = 10^{13}$ электронов в секунду?

4. В заряженной закрепленной сфере радиуса R имеется маленькое отверстие, через которое в нее влетает заряд q, движущийся вдоль радиуса сферы. Какую скорость будет иметь этот заряд в центре сферы, если на расстоянии l от сферы его скорость равна v и заряд сферы равен Q?

Телевизионнные физико-математические курсы для поступающих в вузы

В мае этого года для слушателей курсов проходили очные зачеты по физике и математике.

В этом номере мы публикуем некоторые задачи, предлагавшиеся на зачетах.

Физика

1. Определить ток, текущий через источник E_2, в схеме, указанной на рисунке 1, если

$$E_1 = 10\ в;\ r_1 = 2{,}5\ ом;$$
$$E_2 = 8{,}0\ в;\ r_2 = 10\ ом;\ R = 10\ ом.$$

2. Проводник длиной $L = 80$ *см* и сопротивлением $R = 3{,}5$ *ом* движется с постоянной скоростью V перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля, индукция которого $B = 0{,}45$ *тл* (рис. 2). Проводник соединен с источником тока гибкими проводами, сопротивлением которых можно пренебречь. В цепи течет ток $I = 4{,}0$ *а*. Определить V.

3. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U, влетает в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}80$ *тл* (линии индукции перпендикулярны направлению движения электрона), и описывает в нем окружность радиуса $R = 1{,}5$ *см*. Найти U.

4. Рассчитать положение изображения точки A в системе двух собирающих и одной рассеивающей тонких линз. Главные оптические оси линз совпадают. Фокусные расстояния линз равны: $F_1 = 10$ *см*, $F_2 = 15$ *см* и $F_3 = -10$ *см* соответственно, а расстояния между линзами равны: $O_1O_2 = 20$ *см* и $O_2O_3 = 8$ *см*. Точка A расположена на главной оптической оси слева от первой линзы на расстоянии $AO_1 = 15$ *см*.

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси двояковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ *см* на расстоянии $d = 30$ *см* от линзы. После того как линзу передвинули вправо на $l = 5{,}0$ *см* и, разрезав, раздвинули ее половинки симметрично относительно оси, расстояние между двумя изображениями источника света стало равным $L = 6{,}0$ *см*. Найти расстояние S, на которое раздвинуты половинки линзы.

6. На дне сосуда, заполненного водой до высоты $H = 6{,}0$ *см*, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластинка, радиус которой $R = 10$ *см*. Центр пластинки находится над источником света. На поверхность воды наливают слой масла. Определить толщину этого слоя h, при которой луч от источника выйдет из масла. Плотность материала пластинки меньше плотности масла. Показатель преломления воды $n_1 = 1{,}39$, масла — $n_2 = 1{,}51$.

7. Перпендикулярно главной оптической оси двояковыпуклой линзы расположен предмет на расстоянии $d = 16$ *см* от линзы. Предмет погружен в тонкостенный сосуд с жидкостью, коэффициент преломления которой $n = 1{,}5$. Расстояние от линзы до стенок сосуда $a = 12$ *см*. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна стенкам сосуда. Полученное изображение находится на расстоянии $f = 8{,}0$ *см* от линзы и имеет линейный размер $l' = 3{,}0$ *см*. Определить линейный размер предмета l

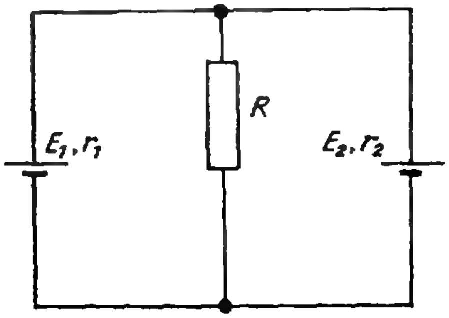


Рис. 1.

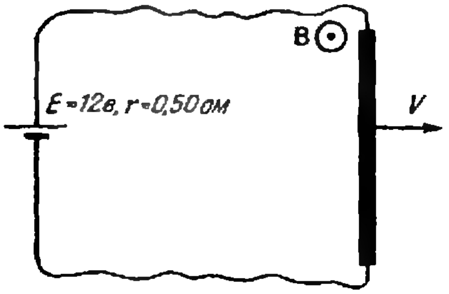


Рис. 2.

Математика

Контрольная работа №1

Решить уравнения и системы уравнений:

1. $\log_{27x} x^5 + \log_{\frac{x}{3}} \sqrt[3]{x} = 3;$

2. $2^{2x+1} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} + 4000 = 0;$

3. $\begin{cases} x^3 - x^2y - 4xy^2 + 4y^3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 = 12; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 32^{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} (x+y)} = 2, \\ 2 \log_3 (x+y) = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - y^2) = 2. \end{cases}$

5. Найти шестизначное число по следующим условиям: если вместо первых трех цифр поставить число 1130, то получится число в 9 раз больше искомого; логарифм по основанию 5 числа, получающегося при отбрасывании последних трех цифр, на единицу больше логарифма по основанию 25 числа, остающегося при отбрасывании первых трех цифр.

6. Площади боковых граней трехгранной пирамиды равны F_1, F_2, F_3; площадь основания равна F_0. Длины перпендикуляров, опущенных из вершины пирамиды на стороны основания, равны между собой. Найти объем пирамиды.

Контрольная работа № 2

1. Около шара описан усеченный конус, основания которого являются большими кругами двух других шаров. Определить площадь полной поверхности усеченного конуса, если сумма площадей поверхностей трех шаров равна S.

2. Определить объем тела вращения, полученного вращением треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, но не пересекающей его, если площадь треугольника равна S, а расстояние от точки пересечения его медиан до оси вращения равно r.

3. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равна r. Радиус шара, проведенный в точку этой окружности, наклонен к ее плоскости под углом α. Найти объем конуса.

4. Прямая, соединяющая середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, служит осью цилиндра, окружности оснований которого касаются граней тетраэдра в их центрах. Найти отношение объема цилиндра к объему тетраэдра.

5. Шар касается всех ребер куба. Найти отношение объема той части шара, которая находится вне куба, к объему куба.

В. И. Давыдов, И. А. Дьяконов,
П. Т. Дыбов, И. И. Наслузов

Ребусы

1. Вагон
+ Вагон
Вагон
Состав
(1 решение)

2. Доска
+ Доска
Доска
Лодка
(1 решение)

3. Цветок
+ Цветок
Цветок
Букетик
(1 решение)

4. Атака
+ Удар
Удар
Нокаут
(1 решение)

5. Домна
+ Домна
Домна
Завод
(1 решение)

6. Парус
Парус
+ Парус
Парус
Регата
(1 решение)

7. Слово
Слово
Слово
+ Слово
Слово
Слово
Слово
Фраза
(1 решение)

Вступительные экзамены в вузы

В этом номере мы продолжаем публиковать информацию о ряде институтов и университетов и предлагаем вниманию читателей варианты вступительных экзаменов по физике и математике в эти вузы.

Московский энергетический институт

В Московском ордена Ленина энергетическом институте (МЭИ) имеется девять факультетов, готовящих специалистов для работы во всех отраслях современной энергетики.

Студенты изучают различные способы получения энергии, вплоть до атомных электростанций и МГД-генераторов; технику передачи энергии, включая кибернетику больших энергетических систем, охватывающих всю страну или даже ряд стран.

Не менее важны проблемы использования энергии в промышленности, на транспорте и в других областях народного хозяйства. Это — создание всех видов электродвигателей (от микродвигателей до сверхмощных моторов), получение высоких и низких температур, применение сверхпроводимости и т. д. Из неэнергетических специальностей следует назвать радиотехнику, автоматику, вычислительную технику, промышленную электронику, электронные приборы, светотехнику.

Ряд специальностей носит инженерно-физический характер: инженерная электрофизика, инженерная теплофизика, радиофизика и оптико-электронные приборы (при кафедре физики).

Характерным для МЭИ является широкое привлечение студентов к научно-исследовательской работе на кафедрах. Для подготовки к этой работе уже много лет в учебный план включаются учебно-исследовательские работы, выполняемые под руководством преподавателей.

Ежегодно организуются студенческие научные конференции и конкурсы на лучшую работу.

Ниже мы приводим билеты устного вступительного экзамена по физике 1972 года.

Билет 1

1. Вывод уравнения равнопеременного движения.

2. Магнитное взаимодействие проводников с током. Сила, действующая на проводник с током, помещенный в магнитное поле.

Индукция магнитного поля. Единица измерения индукции магнитного поля в системе СИ.

3. Баллон, содержащий 1 *кг* азота, при испытании взорвался при температуре 350° С. Какое количество водорода (в граммах) можно хранить в этом баллоне при 20° *С*, имея пятикратный запас прочности.

Плотность азота при нормальных условиях равна 0,00125 *г/см*^{3}, плотность водорода при нормальных условиях — 0,00009 *г/см*^{3}.

Билет 2

1. Последовательное соединение проводников в цепи постоянного тока. Последовательное соединение источников тока. Закон Ома для полной цепи.

2. Законы преломления света. Мнимое изображение, даваемое линзами. Построение изображения. Применение формулы линзы Лупа.

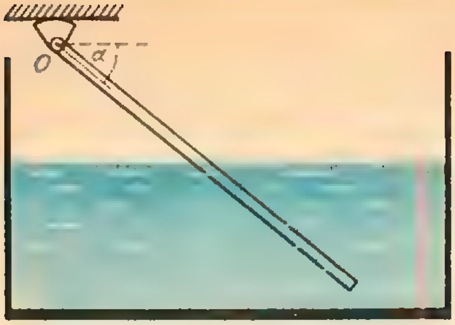


Рис. 1.

3. По наклонной плоскости снизу вверх пускают тело с начальной скоростью $v_0 = 2$ *м/с*. Поднявшись на некоторую высоту, тело соскальзывает по наклонной плоскости вниз. Какова будет скорость тела, когда оно вернется в исходную точку? Коэффициент трения тела о плоскость равен 0,6. Угол наклона плоскости $\alpha = 45°$.

Билет 3

1. Закон всемирного тяготения. Ускорение силы тяжести. Искусственные спутники Земли.

2. Напряженность электрического поля. Силовые линии. Поле точечного заряда. Однородное электрическое поле.

3. Тонкий однородный цилиндрический стержень верхним концом крепится к шарниру. Снизу под стержень подводится ванна с водой. Стержень наклоняется так, что в воде находится половина его длины (рис. 1). Определить плотность материала стержня.

Билет 4

1. Работа силы. Механическая энергия. Связь работы с изменением энергии тела. Единицы измерения энергии и работы.

2. Строение атома. Составные части атомного ядра. Электронная оболочка. Поглощение и излучение энергии атомом. Фотон.

3. Каково должно быть сопротивление R, включенное в схему, изображенную на рисунке 2, чтобы напряженность электростатического поля в плоском конденсаторе была $E = 2250$ *в/м*. Э. д. с. батареи $E_Б = 5$ *в*, внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ *ом*. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 0{,}2$ *см*.

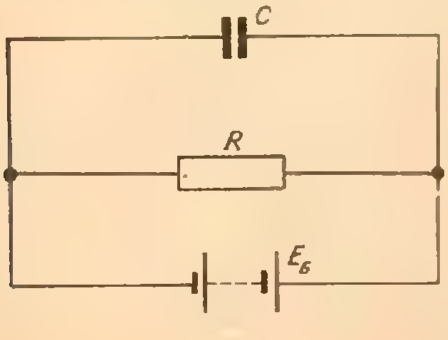


Рис. 2.

Билет 5

1. Насыщенные пары. Условия их получения и свойства. Изотермы насыщенных паров. Сопоставление зависимости давления от температуры для насыщенных и ненасыщенных паров.

2. Дисперсия света. Ход лучей в спектроскопе. Спектры и их характеристики. Спектральный анализ.

3. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки, индуктивность которой $L = 2\cdot10^{-3}$ *гн*, и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ *см*, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами, $\varepsilon = 3{,}1$ и площадь пластин $S = 800$ *см*^{2}.

В. М. Камшилина

Московский институт электронного машиностроения

Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ) является одним из самых молодых вузов Москвы; он создан в 1962 году и готовит высококвалифицированных специалистов для электронной и радиопромышленности. Его создание — следствие бурного развития радиоэлектронной техники, потребовавшего значительного количества специалистов, сочетающих глубокие инженерные знания с серьезной физико-математической подготовкой.

МИЭМ имеет факультеты полупроводникового и электровакуумного машиностроения, автоматики и вычислительной техники, радиотехнический, прикладной математики, вечерний и два специальных факультета прикладной математики и автоматизированных систем управления.

Факультет полупроводникового и электровакуумного машиностроения готовит инженеров-механиков для работы по созданию и эксплуатации нового технологического оборудования электронной промышленности, а также по разработке прогрессивных методов изготовления приборов автоматизации производственных процессов. Специалисты, окончившие этот факультет, могут также самостоятельно решать современные задачи сварочного производства изделий электронной техники.

Факультет автоматики и вычислительной техники выпускает инженеров-электриков, специализирующихся в области проектирования ЭВМ, систем телеуправления и телеконтроля, информационно-измерительных автоматических устройств с применением современных вычислительных машин дискретного и непрерывного действия. Инженеры, окончившие МИЭМ по этой специальности, могут рассчитывать и конструировать элементы ЭВМ, в том числе создавать и использовать машинные методы расчета элементов. Они также могут проводить исследование технологических процессов изготовления элементов с целью поиска оптимальных режимов.

Радиотехнический факультет готовит инженеров-конструкторов радиоаппаратуры. Окончившие этот факультет могут работать инженерами-конструкторами и технологами на предприятиях радиоэлектронной промышленности, вести разработку и организовывать выпуск средств радиоизмерительной техники в ОКБ, институтах и на заводах, работать инженерами-технологами при создании и производстве радиоаппаратуры и элементов в микроминиатюрном исполнении.

Расскажем несколько подробнее о факультете и специальности «прикладная математика». Московский институт электронного машиностроения является первым в нашей стране инженерно-техническим вузом, в составе которого в 1967 году был организован факультет прикладной математики с дневным и вечерним отделениями. Вслед за МИЭМ факультеты прикладной математики были организованы в МФТИ, МАИ, МИФИ и во многих университетах.

Учебный план специальности «прикладная математика» предусматривает подготовку инженеров-математиков по математическому обеспечению электронных вычислительных машин, автоматизированных систем управления (АСУ) и по применению средств вычислительной техники.

На факультете прикладной математики МИЭМ имеются кафедры алгебры и анализа, прикладной математики, теории вероятностей и математической статистики, кибернетики, механики. Кафедры факультета имеют тесную связь с отраслевыми НИИ и ведут интенсивную научную работу по проблемам математического обеспечения ЭВМ и АСУ, а также по использованию ЭВМ в народном хозяйстве. На факультете работают научные семинары по математике и ее приложениям, в которых активное участие принимают студенты факультета; издаются тематические сборники научных трудов молодых ученых факультета; ведется подготовка аспирантов по математике и кибернетике.

В настоящее время на факультете прикладной математики МИЭМ обучается свыше тысячи студентов; основная масса из них специализируется по математическому обеспечению ЭВМ, их комплексов и АСУ, а также по применению средств вычислительной техники, а сотни выпускников МИЭМ уже работают в организациях, разрабатывающих ЭВМ, АСУ или применяющих средства вычислительной техники в определенных отраслях науки и техники.

Расширяется на факультете и подготовка инженеров-системотехников по специальности «автоматизированные системы управления», включающей три специализации:

1) проектирование и эксплуатация АСУ;

2) проектирование и эксплуатация средств передачи информации;

3) проектирование и эксплуатация средств отображения информации.

Основной принцип подготовки инженеров-математиков и инженеров-системотехников на факультете прикладной математики МИЭМ состоит в сочетании фундаментального и прикладного характера образования, предусматривающего высокую математическую подготовку и глубокие знания специальных дисциплин.

Современные ЭВМ представляют собой сложный комплекс: они способны реализовать в короткий срок не только сложнейшие вычислительные, но и логические операции, осуществлять упорядочивание массивов информации и классифицировать информацию. Но для эффективного использования возможностей ЭВМ необходимо задать машине программу, обеспечивающую автоматическое планирование работы ее отдельных устройств и организацию ее работы в целом. Для этого необходимо разрабатывать математическое обеспечение ЭВМ, представляющее собой совокупность трансляторов, операционной системы, библиотеки стандартных подпрограмм и других программных элементов.

Характерной особенностью плана подготовки инженеров-математиков и инженеров-системотехников является то, что с первых же дней обучения в институте студент, наряду с классическими разделами математики, изучает программирование для ЭВМ, математическую логику, методы решения задач на ЭВМ и целый ряд специальных математических дисциплин. Этот план предусматривает возможность уже на первом курсе выполнять семестровый практикум по численным методам и алгоритмам, включающий в себя решение задач на применение вычислительных методов линейной алгебры, интерполирование функций, вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений. При этом вычислительные методы и алгоритмы обсуждаются с точки зрения их реализации на ЭВМ.

Существующая в МИЭМ система математического образования инженеров-математиков и системотехников является фактором, определяющим повышенную математическую подготовку студентов всех специальностей института.

Естественно, что это обстоятельство учитывается при отборе абитуриентов на вступительных экзаменах. Но не надо думать, что варианты письменных или вопросы устных экзаменов выходят за рамки школьной программы. Напротив, с ними может успешно справиться любой абитуриент, твердо усвоивший школьную программу.

Ниже приводятся варианты, предлагавшиеся на письменном вступительном экзамене по математике в 1972 году.

Вариант 1

1. Две фабрики должны совместно переработать некоторое количество сырья. Если бы производительность труда на второй фабрике повысилась вдвое, то время, необходимое фабрикам для выполнения работы, уменьшилось бы на $^2/_{18}$ части времени, необходимого для выполнения работы одной первой фабрикой. На какой из фабрик производительность выше и во сколько раз, если известно, что каждая фабрика переработала не меньше одной третьей части сырья.

2. Решить уравнение

$\sin^4 x - \cos^4 x = a(\sin^6 x - \cos^6 x)$.

3. Найти область определения и область значений функции

$$y = \lg\left(\frac{3x+1}{x-2} - 2\right).$$

4. Решить неравенство

$$(9^x - 2\cdot 3^x - 3)\log_2^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0.$$

5. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определить площадь сечения, зная сторону a основания пирамиды и угол α, образованный сечением с плоскостью основания.

Вариант 2

1. Найти натуральные решения системы

$$\begin{cases} m = n + 2, \\ mn \leqslant 17, \\ \dfrac{n+1}{m+2} < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$(4^{2x} - 2\cdot 4^x - 3)(4\cdot 3^x - 9)^2 < 0.$

3. Найти значения φ, при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (\sin\varphi - 1)x - \frac{1}{2}\cos^2\varphi = 0$$

будет наибольшей.

4. Решить уравнение

$\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 4x.$

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании ($\alpha > 45°$). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. В этой пирамиде проведена плоскость через ее высоту и вершину одного из углов α. Найти площадь сечения.

А. Н. Рублев, В. А. Тонян

Московский институт стали и сплавов

Московский институт стали и сплавов является ведущим вузом страны по подготовке инженерных и научных кадров и проведению исследований в области металлургии и автоматизации производства черных, цветных, редких и радиоактивных металлов, обработки металлов и сплавов и физики металлов.

В институте обучается 5800 студентов, в том числе 4300 на дневном отделении. За время обучения студенты получают большую физико-химическую и математическую подготовку, необходимую для овладения наукой о металлах и сплавах и полупроводниковых материалах, освоения теории и практики современных методов производства обработки черных, цветных и редких металлов, автоматизации управления металлургическими процессами.

Институт ведет также подготовку кадров через аспирантуру, которая является одной из самых крупных в стране — в ней обучается 548 человек.

В институте имеются факультеты: металлургии черных металлов и сплавов (МЧМиС), металлургии цветных и редких металлов и сплавов (МЦРМиС), физико-химический (ФХ), полупроводниковых материалов и приборов (ПМП) и вечерний факультет. При институте имеется дневное подготовительное отделение и вечерние подготовительные курсы в Москве и в пяти промышленных центрах: Бекабаде, Запорожье, Орске, Усть-Каменогорске, Череповце. При институте работают физико-математическая школа, воскресный лекторий.

На факультеты ФХ и ПМП поступающие сдают математику (письменно и устно), физику (устно), русский язык и литературу (письменно); на факультеты МЧМиС, МЦРМиС и вечерний — математику (письменно), физику (устно), химию (устно), русский язык и литературу (письменно).

Ниже приводятся типичные варианты вступительного письменного экзамена по математике 1972 года.

Факультет ФХ и ПМП

Вариант 1

1. Определить объем пирамиды, зная, что ее высота h лежит вне пирамиды, а две противоположные грани — равнобедренные треугольники, составляющие с ее квадратным основанием углы α и β.

2. Упростить выражение:

$$\frac{a + \sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}}.$$

3. Найти все значения a, при которых неравенство

$\log_{2a+1}(2x-1) + \log_a(x+3) < 0$

одновременно выполняется при $x = 1$ и $x = 4$.

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}.$$

Вариант 2

1. Основание прямой треугольной призмы — равнобедренный треугольник, у которого стороны, равные a, образуют угол α. Диагональ грани, противолежащей этому углу, образует с другой боковой гранью угол φ. Найти объем призмы.

2. Упростить выражение:

$$\frac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{4}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}} - 3\sqrt[12]{128}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

3. Известно, что неравенство:

$\log_a(x^2 + x + 2) < \log_a(2x^3 - 18)$

удовлетворяется при $x = -3{,}5$. Решить неравенство.

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}.$$

Вариант 3

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна a, и боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найти боковую поверхность пирамиды.

2. Решить уравнение:

$$\left(\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Решить неравенство:

$$(0{,}7)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{x^2+x-6}{x-4}}<\frac{x^2-16}{x-4}-x-3.$$

4. Доказать тождество:

$$\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Вариант 4

1. Основанием пирамиды служит квадрат; две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, две другие ее боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы, каждый из которых равен α. Высота пирамиды равна h. Определить боковую поверхность пирамиды.

2. Решить неравенство:

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)<1+\lg(2^{x-2}+1).$$

3. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 1, 1, 3 и 9, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

4. Решить уравнение:

$$\cos^6\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^6\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sin 2x}{4}.$$

В. В. Гольдберг
Л. Г. Дымбицкая

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта является одним из старейших вузов Советского Союза, а сейчас и одним из ведущих технических вузов страны.

Научно-техническая революция, происходящая по всей стране и в частности — на железнодорожном транспорте, определила качественный скачок в развитии МИИТа и открыла новые широкие перспективы перед выпускниками института, которым приходится решать важные как инженерные, так и научные задачи: увеличение объема перевозок, резкое повышение скоростей движения, разработка и внедрение новых современных конструкций вагонов, тепловозов, электровозов, внедрение современных методов и средств строительства железнодорожных путей, инженерных сооружений, мостов и тоннелей, изменение характера управления процессом перевозки грузов, широкое внедрение автоматики, телемеханики, электроники, счетно-решающей техники и математических методов планирования и оптимизации перевозок. В связи с широтой профиля выпускаемых специалистов МИИТ превратился по существу в крупнейший политехнический институт.

В институте 10 факультетов, готовящих специалистов по 19 специальностям: автоматизированные системы управления; автоматика и телемеханика (в промышленности); автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте; бухгалтерский учет; вагоностроение и вагонное хозяйство; локомотивостроение; мосты и тоннели; организация механизированной обработки экономической информации; прикладная математика; промышленная теплоэнергетика; промышленное и гражданское строительство; строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство; строительные и дорожные машины и оборудование; тепловозы и тепловозное хозяйство; экономика и организация железнодорожного транспорта; экономика и организация строительства (на железных дорогах); эксплуатация железных дорог; электрификация железнодорожного транспорта; электронные вычислительные машины.

Абитуриенты сдают следующие экзамены: математику (письменно и устно), физику (устно), русский язык и литературу (письменно).

Вступительный экзамен по математике на всех факультетах МИИТа состоит из письменной работы, на выполнение которой отводится четыре астрономических часа, и устного экзамена. Исключение составляет специальность «бухгалтерский учет», где проводится только устный экзамен по математике.

Как показывает опыт, именно письменный экзамен наиболее труден для абитуриентов, несмотря на то, что экзаменационная комиссия включает в билеты задачи, требующие лишь твердых и прочных знаний школьного курса математики.

Билеты устных экзаменов состоят из двух теоретических вопросов по алгебре, геометрии или тригонометрии и одной задачи на решение алгебраического уравнения, неравенства или системы уравнений, тригонометрического уравнения или тождества, исследования функции или построения графика.

Варианты письменных работ и задач устного экзамена делятся по сложности на три концерна, в зависимости от требований к знаниям основ математики на разных специальностях. Наиболее трудные задачи предлагались на специальности «прикладная математика». Это вполне понятно, к будущим инженерам-математикам предъявляются более высокие требования в знании основ математики.

Следующие по трудности варианты предлагались на специальностях: автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, автоматика и телемеханика в промышленности.

Варианты третьего концерна, а их было большинство, предлагались абитуриентам всех остальных специальностей.

Ниже приведены варианты 1972 года.

Вариант 1

(специальности: промышленное и гражданское строительство, эксплуатация транспорта, экономика строительства, экономика транспорта, строительство железных дорог, мосты и тоннели).

1. Двое рабочих одновременно начали выполнять некоторую работу. Через 2 часа они прекратили работу и подсчитали, что оставшуюся часть работы один из них может выполнить, работая отдельно, за 3,2 часа, а другой — за 4,8 часа. За сколько времени каждый из них сможет выполнить данную работу работая в отдельности?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 10, \\ \sqrt{xy} = 16. \end{cases}$$

3. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S, а боковое ребро образует угол α с плоскостью основания.

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{2}\cos x \cdot \operatorname{ctg} x + \sqrt{6}\cos x - \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}.$$

Вариант 2

(специальности: автоматика, телемеханика и связь, электрификация транспорта, локомотивостроение, автоматизированные системы управления).

1. По наклонной плоскости некоторой длины катятся два цилиндра, один из которых имеет окружность 2 *см*, другой — 3 *см*. Первый цилиндр сделал на 10 оборотов больше, чем второй, скатившись по наклонной плоскости. Окружности обоих цилиндров были увеличены на одно и то же число сантиметров, после чего один из них сделал на 3 оборота больше, чем второй. Какова длина наклонной плоскости и на сколько были увеличены длины окружностей цилиндров?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{y}{2}, \\ \log_3 (x+2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x-2y) = 1. \end{cases}$$

3. В прямоугольном треугольнике даны острый угол α и расстояние a от вершины другого острого угла до центра вписанного круга. Определить площадь треугольника.

4. Найти $\cos(70° + \alpha)$, если $\sin(40° + \alpha) = b$ и $0° < \alpha < 45°$.

Вариант 3

(специальности: прикладная математика, электронные вычислительные машины, математическая обработка экономической информации).

1. Несколько человек взялись сделать определенную работу и если бы работали вместе, то закончили работу через 8 часов. Однако они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени и каждый продолжал работу до ее окончания. Последняя часть работы (начиная с момента

приступления к работе последнего рабочего) продолжалась только половину указанного выше промежутка времени. Производительность каждого рабочего одна и та же. Сколько времени продолжалась работа, если первый приступивший к работе проработал в 7 раз больше, чем последний?

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны S_1 и S_2. Найти длину основания.

3. Решить уравнение:

$$\log_a x^2 + 2 \log_a (x + 2) = 1.$$

4. Решить уравнение:

$$3 (\sin x + \cos x) = 2 \sin 2x.$$

В. И. Малахов

Уральский государственный университет имени А. М. Горького

Уральский государственный университет имени А. М. Горького — один из крупнейших учебных и научных центров Урала; он был открыт в октябре 1920 года по декрету, подписанному Владимиром Ильичем Лениным.

В настоящее время в Уральском университете 8 факультетов, в том числе математико-механический и физический.

Математико-механический факультет готовит высококвалифицированных математиков-вычислителей, способных решать прикладные задачи, а также специалистов, которые могут вести самостоятельные научные исследования, разрабатывая и решая чисто математические проблемы.

На первых двух курсах все студенты факультета осваивают общетеоретические дисциплины, с третьего курса начинается специализация, на пятом курсе студенты факультета проходят длительную производственную практику в крупных вычислительных центрах и научно-исследовательских институтах страны, в лабораториях и конструкторских бюро заводов.

Математико-механический факультет предоставляет своим студентам широкие возможности для изучения теории и ее приложений. Под руководством ведущих ученых студенты приобретают навыки самостоятельного исследования. В процессе обучения они активно участвуют в научной жизни всех шести кафедр факультета.

При факультете работает Вычислительный центр. На современных вычислительных машинах студенты решают задачи прикладного характера.

Выпускники математико-механического факультета распределяются на работу в вычислительные центры, в научно-исследовательские институты, в лаборатории и конструкторские бюро крупных заводов, на преподавательскую работу в вузы и техникумы.

Физический факультет университета, имеющий кафедры теоретической физики, физики твердого тела, физики магнитных явлений, оптики полупроводников и радиоспектроскопии, а также кафедру астрономии и геодезии, выпускает специалистов широкого профиля.

Кафедра теоретической физики готовит физиков-теоретиков, в основном занимающихся проблемами физики твердого тела. Во время учебы студенты знакомятся с применением современных математических методов для решения физических и технических задач в указанной области физики. Часть студентов-теоретиков проходит производственную практику и выполняет курсовые и дипломные работы непосредственно в теоретическом отделе и лабораториях Института физики металлов АН СССР.

Кафедра физики твердого тела готовит физиков для работы в области теоретических и экспериментальных исследований. Будущие специалисты знакомятся с различными методами анализа состояний твердых тел и изменений, происходящих в них. Особое место занимает обучение рентгеноструктурному и рентгенографическому анализам, а также различным методам испытаний механических и других свойств металлов и их сплавов.

Кафедра физики магнитных явлений готовит специалистов в области магнитных явлений в металлах и сплавах, имеющей большое научное и промышленное значение. С использованием магнитных материалов связано развитие электротехники, радиотехники, автоматики и т. п.

Кафедра оптики полупроводников и радиоспектроскопии готовит специалистов для работы в области радиоспектроскопии, атомной и молекулярной спектроскопии и физики полупроводников.

При кафедрах имеются лаборатории, оборудованные современными аппаратами и приборами, где студенты старших курсов приобретают опыт научно-исследовательской работы, участвуют непосредственно в выполнении научной программы кафедр.

Кафедра астрономии и геодезии готовит астрономов широкого профиля. Здесь имеются обсерватория и различные лаборатории: астрофизики, астрометрии, службы времени и другие.

На отделении астрономии специализация начинается с первого курса, а на остальных кафедрах факультета — с третьего.

На первых курсах студенты получают хорошую математическую подготовку, которая затем углубляется специальными математическими дисциплинами на старших курсах. Все студенты знакомятся с методами современной вычислительной техники и с работой на электронно-вычислительных машинах.

Выпускники физического факультета работают в научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро, в заводских лабораториях, а также преподают физику в вузах, техникумах и средних школах.

Ниже мы помещаем варианты вступительных экзаменов 1972 года.

Математико-механический факультет

Математика

1. Из аэропорта к центру города выехал автомобиль-такси, и одновременно из центра города в аэропорт выехал автобус-экспресс. Когда автомобиль-такси проехал половину пути, автобусу оставалось до конца маршрута 19,2 *км*, а когда автобус проехал половину пути, такси оставалось до конца маршрута 12 *км*. Найти отношение скоростей такси и автобуса, если эти скорости на всем пути одинаковы.

2. Диаметр шара является высотой правильного тетраэдра с ребром a. Какая часть площади поверхности тетраэдра содержится внутри шара?

3. Решить неравенство

$$\lg|x^2-x-1|\geqslant\lg|x^2+x-2|.$$

4. При каких значениях α система

$$\begin{cases}8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0,\\ x+y=\alpha\end{cases}$$

имеет решение?

Физика

Билет 1

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Центростремительная сила и центростремительное ускорение (примеры).

2. Электрический ток в газах. Ионизация газов через столкновения. Различные виды разрядов в газах.

3. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оптической оси. За линзой перпендикулярно оптической оси помещено плоское зеркало. Лучи света, пройдя через линзу, отражаются от зеркала, вторично проходят через линзу и выходят из нее параллельным пучком. Определить расстояние от линзы до зеркала.

Билет 2

1. Испарение и конденсация. Насыщающие и ненасыщающие пары, их свойства. Зависимость давления паров от температуры.

2. Формула линзы. Построение изображения в линзах.

3. Резиновый мяч массы m и радиуса R погружают в воду на глубину h и отпускают. На какую высоту от поверхности воды подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха не учитывать.

Билет 3

1. Первый закон Ньютона. Примеры.

2. Передача электроэнергии на расстояние. Трансформатор, принципы его устройства и работы.

3. Барометр дает неверные показания из-за присутствия небольшого количества воздуха над столбиком ртути. При давлении 755 *мм рт. ст.* он показывает 748 *мм*, а при давлении 740 *мм* — 736 *мм*. Найти длину трубки барометра, считая от поверхности ртути в сосуде.

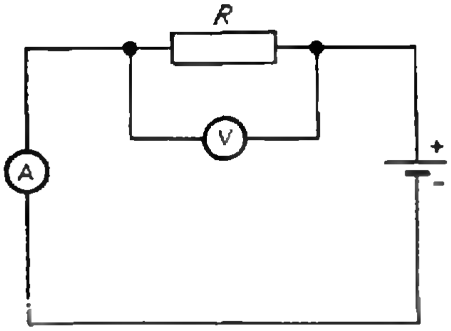


Рис. 3.

Билет 4

1. Плавление. Удельная теплота плавления.

2. Световой поток. Сила света. Освещенность. Единицы измерения этих величин.

3. Какую относительную ошибку совершают, вычисляя сопротивление R по показаниям вольтметра и амперметра (рис. 3) без учета силы тока, идущего через вольтметр? Амперметр показывает 2,4 *а*, вольтметр — 7,2 *в*. Сопротивление вольтметра 1000 *ом*.

Физический факультет

Математика

1. Из сосуда емкостью 64 *л*, наполненного спиртом, отлили некоторую часть, а затем сосуд долили водой до прежней емкости. Далее, отлили такое же количество смеси и снова долили сосуд таким же количеством воды. Затем процедуру переливания повторили еще раз, после чего в сосуде осталось 27 *л* спирта. Сколько спирта отлили в первый раз?

2. Отношение радиуса основания прямого кругового конуса к радиусу вписанного в конус шара равно b. Найти отношение объема конуса к объему шара.

3. Решить неравенство:

$$2+\log_{\frac{1}{2}}(9^{x+1}+7)<\log_{\frac{1}{2}}(3^{x+1}+1).$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin(x+y), \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$$

Физика

Билет 1

1. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Закон сообщающихся сосудов. Принцип устройства гидравлического пресса.

2. Какими способами можно размагнитить намагниченный кусок железа?

3. Из стекла с показателем преломления 1,6 необходимо изготовить двояковыпуклую линзу с фокусным расстоянием 20 *см*. Каковы должны быть радиусы кривизны поверхностей линзы, если один из них в 1,5 раза больше другого?

Билет 2

1. Магнитный поток. Электромагнитная индукция. Э. д. с. индукции. Закон Ленца. Устройство генератора переменного тока.

2. Из двух часовых стекол склеили выпуклую линзу. Как будет действовать эта линза на пучок лучей в воде?

3. При изготовлении некоторого физического прибора оказалось необходимым обеспечить постоянство разности длин железного и медного цилиндров при любых изменениях температуры. Какой длины должны быть эти цилиндры при 0°C, чтобы разность их длин при всех температурах была равна 10 *см*? Коэффициент линейного расширения железа равен $1{,}2\cdot10^{-5}$ *град*$^{-1}$, меди — $1{,}7\cdot10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

Билет 3

1. Удельная теплоемкость и единицы ее измерения. Определение удельной теплоемкости опытным путем. Теплотворная способность топлива. Коэффициент полезного действия нагревателя.

2. Почему не удается встать со стула, не наклоняя вперед корпус тела?

3. Протон, летящий по направлению к ядру атома гелия, в некоторой точке поля, образованного этим ядром, где напряженность равна 100 *в/см*, имеет скорость 10^6 *см/с*. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру?
($\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ *ф/м*; $m_p = 1{,}67\cdot10^{-24}$ *г*; $q_p = 1{,}60\cdot10^{-19}$ *к*).

Билет 4

1. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

2. Какую нужно приложить силу, чтобы оторвать от дна озера тело кубической формы с длиной ребра L, имеющее плотность ρ, если глубина озера H?

3. Вольтметр со шкалой, рассчитанной на 10 *в*, имеет внутреннее сопротивление 400 *ом*. Определить величину добавочного сопротивления, которое необходимо подключить к вольтметру, чтобы измерять напряжения до 100 *в*.

Э. А. Голубов

Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина (математический факультет)

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт имени В. И. Ленина является старейшим высшим педагогическим учебным заведением страны. Институт создан на базе Высших женских курсов, организованных в Москве в 1872 году.

Факультет готовит учителей средней школы по двум специальностям: учитель математики и учитель математики с правом преподавания на иностранном языке (английский, французский).

При факультете имеется вечернее отделение, которое готовит преподавателей математики средней школы. Срок обучения на дневном и вечернем отделениях — 5 лет.

В состав математического факультета входят кафедры: математического анализа, алгебры, геометрии, теории чисел, вычислительной математики и программирования, методики преподавания математики и физики для нефизических специальностей.

На отделении «математика» готовятся учителя математики для IV—X классов средней школы; на отделении «математика на иностранном языке» готовятся учителя математики для специальных средних школ с преподаванием на английском и французском языках.

Студенты этих двух отделений проходят педагогическую практику в средних школах Москвы и производственную практику на электронных вычислительных машинах.

На всех кафедрах факультета созданы специальные кабинеты и лаборатории. При кафедре вычислительной математики и программирования имеется электронно-вычислительный комплекс.

За годы обучения на факультете студенты изучают дифференциальное и интегральное исчисление, алгебру, геометрию (аналитическую, дифференциальную, проективную, основания геометрии и др.), теорию чисел, математическую логику, теорию алгоритмов, теорию функций действительного и комплексного переменного, теорию вероятностей, вычислительные машины и программирование, уравнения математической физики, методику преподавания математики, общую физику, теоретическую механику и т. д. Студенты изучают также общественно-политические и психолого-педагогические дисциплины.

Студенты математического факультета участвуют в спецсеминарах и слушают спецкурсы по различным разделам общей алгебры, линейному программированию, функциональному анализу, дифференцируемым многообразиям, теории групп, теории Галуа, ассоциативной алгебре, алгебраической теории чисел, общей и алгебраической топологии, многомерной геометрии, теории относительности, квантовой теории поля, теории случайных процессов и др.

На факультете работает студенческое научное общество. Студенты факультета привлекаются к научной работе по математике и ведут научно-экспериментальную работу по вопросам преподавания математики в средней школе. Лучшие студенты, проявившие способность к научно-исследовательской работе, как правило, рекомендуются в аспирантуру. Подготовка аспирантов ведется на всех кафедрах факультета.

Вступительный экзамен по математике на математическом факультете состоит из письменной работы и устного экзамена.

В письменную работу включаются четыре задачи, требующие хорошего и сознательного владения школьной программой и, конечно, определенных способностей к математике. В билеты устного экзамена включаются по два теоретических вопроса в соответствии с программой по математике для средней школы.

Чтобы дать представление о содержании и характере письменной работы по математике, ниже приводятся варианты 1972 года.

Вариант I

1. Решить неравенство:

$$\log_{x-3}(x-1)<2.$$

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{ctg}(\pi+x)+2\cdot\cos x=2+\frac{1}{\sin x}.$$

3. Дана правильная n-угольная пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, боковые ребра которой образуют угол α с плоскостью основания. Вычислить тангенс половины двугранного угла, образованного смежными боковыми гранями пирамиды.

4. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 рублей. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, и поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 рубль больше. Сколько стоил магнитофон?

Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$\log_3(4\cdot 3^x - 1) > 2x + 1.$$

2. Решить уравнение:

$$2\sin x - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 3.$$

3. Трехгранный угол образован тремя плоскостями α, β и γ. Две плоскости α и β перпендикулярны к плоскости γ, а между собой они образуют угол φ. Сфера S касается плоскости γ и пересекает плоскости α и β по окружностям радиуса r. Расстояние центра сферы от вершины трехгранного угла равно l. Определить радиус сферы R.

4. Изделие высшего сорта на столько же дороже изделия первого сорта, на сколько изделие первого сорта дороже изделия второго сорта, но эта разница в цене не превышает 40 процентов от цены изделия первого сорта. Предприятие заплатило 9600 рублей за изделия высшего сорта и столько же за изделия второго сорта. Общее количество всех этих купленных изделий составило 1400. Известно, что цена изделия каждого сорта выражается целым числом рублей. Сколько стоит изделие первого сорта?

Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$\log_{6+8x}(-2-3x) > 2.$$

2. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x - \sin 2x + \cos 2x - \cos 3x = 1.$$

3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Каждое боковое ребро равно K и наклонено к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

4. На листе клетчатой бумаги, клетки которой — квадраты со стороной 0,5 *см*, нарисован прямоугольник. Стороны его идут по линейкам, а вершины расположены в узлах клеток. Периметр прямоугольника равен 74 *см*, а площадь больше 270 *см*^{2}, но меньше 280 *см*^{2}. Найти стороны прямоугольника.

Е. В. Веретенникова,
В. И. Крупич

Новые автоморфные числа

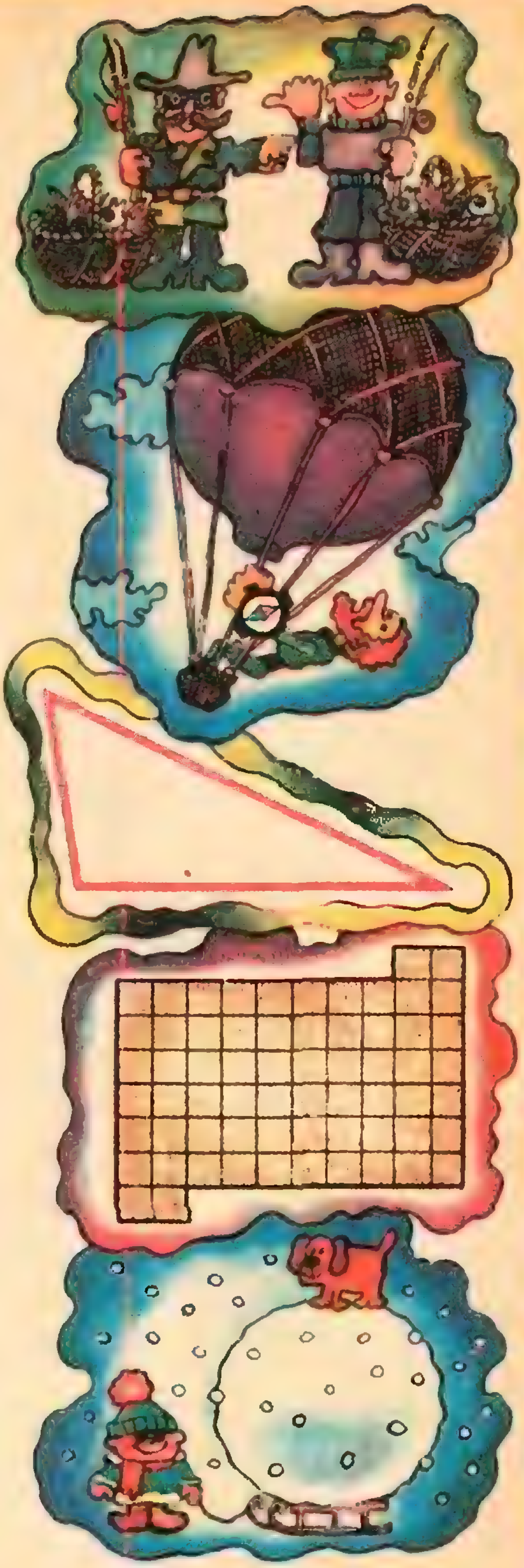
В «Кванте» № 1 за 1973 год (стр. 33) было рассказано об автоморфных числах и приводилось 100-значное автоморфное число. Применение ЭВМ позволяет без труда получать гораздо большие автоморфные числа. Нами с помощью ЭВМ «Минск-32» была вычислена пара 1035-значных автоморфных чисел и 1035 старших разрядов их квадратов. Вычисления заняли 1,5 минуты. Программа позволяет находить 45000-значные автоморфные числа, предполагаемое время счета — 1,5 часа. Вот одно из 1035-значных автоморфных чисел.

611190197744642421025136748
701117131278125400133690086
034889084364023875765936821
979626181917833520492704199
324875237825867148278905344
897440142612317035699548419
499444610608146207254036559
998271588356035049327795540
741961849280952093753026852
390937562839148571612367351
970609224242398777007574955
787271559767413458997537695
515862718887941516307569668
816352155048898271704378508
028434084412644126821848514
157729916034497017892335796
684991447389566001932545827
678000618329854426232827257
556110733160697015864984222
291255485729879337147866323
172405515756102352543994999
345608083801190741530060056
055744818709692785099775918
050075416428527708162011350
246806058163276171676765260
937528056844214486193960499
834472806721906670417240094
234466197812426690787535944
616698508064636137166384049
029219341881909581659524477
861846140912878298438431703
248173428886572737663146519
104988029447960814673760503
957196893714671801375619055
462996814764263903953007319
108169802938509890062166509
580863811000557423423230896
109004106619977392256259918
212890625.

И. М. Блих, Б. К. Ивин

«Квант» для младших школьников

Художник Э. В. Назаров



1. У двух рыбаков спросили: «Сколько рыбы в ваших корзинах?» «В моей корзине половина числа рыб, находящихся в корзине у него, да еще 10», — ответил первый. «А у меня в корзине столько рыб, сколько у него, да еще 20», — сказал второй. Сколько же рыб у обоих?

2. Ветер уносит воздушный шар в северном направлении. В какую сторону при этом отклоняется флажок, прикрепленный к вершине гондолы?

3. К треугольнику на рисунке пристроили равнобедренный треугольник так, что получился новый треугольник. Сколькими способами это можно сделать?

4. Даны два совершенно одинаковых длинных железных стержня. Один из них намагничен. Как определить, какой из двух стержней намагничен, не пользуясь никакими другими предметами?

5. В кладовке я нашел кусок фанеры прямоугольной формы, расчерченный на 64 клетки (см. рисунок). «Хорошо бы из нее сделать шахматную доску» — подумал я. Но как? Помогите мне разрезать этот кусок фанеры на 2 части так, чтобы из них можно было склеить шахматную доску.

6. Из тающего снега снежки лепить легко, а когда температура снега намного ниже 0° С, снежки лепятся очень плохо. Почему?

Огонь в решете

Опыт, который мы предлагаем вам проделать, — почти фокус. Чтобы показать этот фокус, вам понадобится гладкий металлический стержень, бумага, свечка и спички.

Вырежьте узкую полоску бумаги и намотайте ее винтом на металлический стержень. Сделать это надо так, чтобы бумага везде плотно прилегала к металлу. Теперь зажгите свечку и внесите в ее пламя стержень, обмотанный бумагой. Бумага не горит! Уже руке горячо держать стержень, а бумага все не горит. И пройдет достаточно времени, пока она загорится.

В чем же дело? Ведь бумага «сама по себе» прекрасно горит.

Объясняется этот «фокус» высокой теплопроводностью металла. Металлический стержень быстро «отнимает» тепло у бумаги и в течение нескольких минут не дает ей нагреться до такой температуры, при которой она может загореться.

Свойство металлов хорошо проводить тепло очень наглядно демонстрируется и таким опытом. Возьмем сделанную из медной проволоки сетку (в местах переплетения проволочки должны соприкасаться очень плотно). Поместим эту сетку над газовой горелкой. Если при открытом кране горелки вы зажжете газ над сеткой, то газ под сеткой не воспламенится. Если зажечь газ под сеткой, то через сетку пламя не «просочится».

Теперь вы, вероятно, уже сами сможете объяснить, почему это происходит.

В те времена, когда еще не было электрических шахтерских лампочек, шахтеры пользовались так называемой лампой Дэви. В самом простом виде — это свеча, «посаженная» в маленькую металлическую клетку. И даже если шахта полна легковоспламеняющимися газами, горящая лампа Дэви не вызовет взрыва — пламя не «выходит» за пределы лампы благодаря металлической сетке.

Т. С. Петрова

К статье «Сколько существует операций над множествами?»

Пусть f — нелинейная операция; рассмотрим отвечающий ей многочлен $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$. В него обязательно будут входить одночлены выше первой степени. Их может быть несколько. Выберем один из них, который имеет минимальную степень (но большую 1). Пусть это $x_1 \ldots x_k$, $k \geqslant 2$. Подставим вместо $A_3, A_4, \ldots, A_k$ универсальное множество I, и вместо $A_{k+1}, \ldots, A_n$ — пустое множество 0. Возникнет операция над парой множеств A_1, A_2, которой будет отвечать многочлен вида $x_1x_2 + ax_1 + bx_2 + c$, где a, b, c могут принимать значения 0, 1 (в $\tilde{f}$ нужно подставить $x_3 = x_4 = \ldots = x_k = 1$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$; покажите, что при этом все одночлены выше первой степени, отличные от $x_1 \ldots x_k$, обратятся в 0 ввиду минимальности степени k). *Подставляя в случае необходимости* $A_1 = \overline{B_1}$, $A_2 = \overline{B_2}$ (соответственно $x_1 = y_1 + 1$, $x_2 = y_2 + 1$), мы можем обратить в нуль коэффициенты a и b, то есть получим или $B_1 \cap B_2$, или $\overline{B_1 \cap B_2}$. В последнем случае можно или, воспользовавшись дополнением, получить операцию $B_1 \cap B_2$, или вспомнить, что функция Шеффера $\overline{A \cap B}$ позволяет выразить через неё *все операции (п. 8)*.

К статье «Поверхностное натяжение»

1. За собой. Тогда на участок поверхности воды, на котором находится насекомое, будет спереди (перед насекомым) действовать большая сила поверхностного натяжения чистой воды.

2. Предположим, что в силу каких-то случайных причин радиус одного пузыря уменьшился, а радиус другого увеличился (рис. 1, а). Тогда согласно закону Лапласа давление в меньшем пузыре станет бóльшим, и воздух начнет перетекать в больший пузырь. Меньший пузырь будет дальше уменьшаться, оставаясь при этом частью сферической поверхности. С того момента, когда радиус этой сферы станет равным радиусу

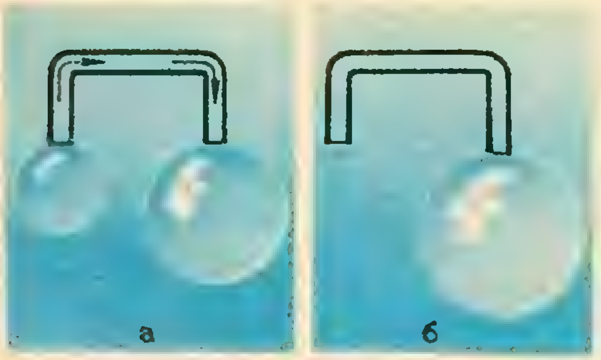


Рис. 1.

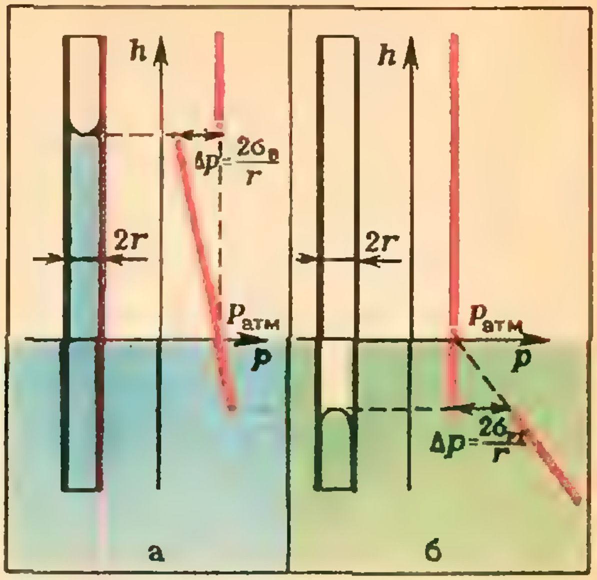

h
$\Delta p = \frac{2\sigma_B}{r}$
2r
$p_{атм}$
p
а
h
2r
$p_{атм}$
p
$\Delta p = \frac{2\sigma_B}{r}$
б

Рис. 2.

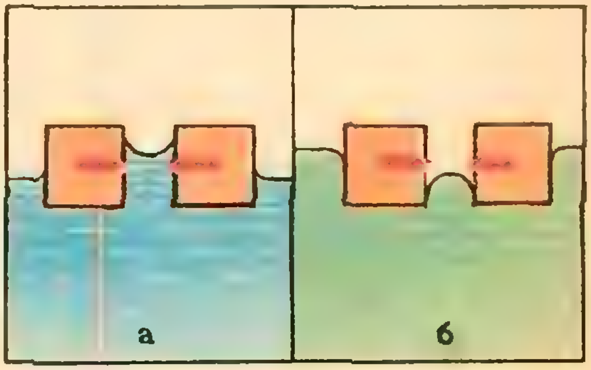


Рис. 3.

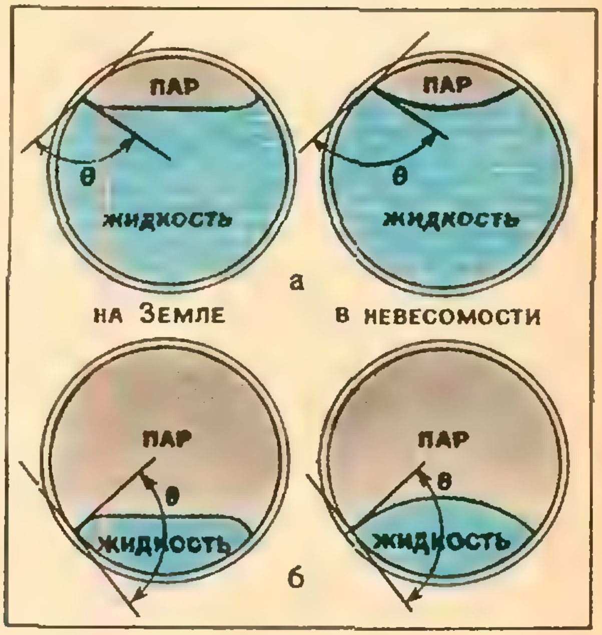


Рис. 4.

трубочки, дальнейшее уменьшение объема маленького пузыря будет вызывать увеличение его радиуса кривизны. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока радиусы кривизн обоих пузырей не сравняются (рис. 1, б). Это положение будет положением устойчивого равновесия.

3. См. рисунок 2.

4. В случае смачивания (рис. 3, а) вода между спичками поднимается на бóльшую высоту, чем у внешней стороны спички. Давление на спичку со стороны поднявшейся воды меньше атмосферного (см. зад. 3). Поэтому на внешнюю сторону спички действует бóльшая сила, чем на внутреннюю, и спички притягиваются. В случае несмачивания поверхность воды примет форму, показанную на рисунке 3, б, и аналогичное рассуждение приводит к тому же ответу.

5. См. рисунок 4.

К статье «Закон сохранения энергии».

1. $Q = \frac{1}{8}\rho_1 g S h^2 = 1{,}25$ *дж.*

2. $Q = \frac{1}{3} C E^2$.

3. $U = 2E - \frac{q_0}{C}\left(\text{при } E > \frac{q_0}{C}\right)$.

К статье «Движение заряженных частиц в электрическом поле»

1. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}$,

где $a = g + \frac{qE}{m}$, если вектор **E** вертикален, и $a = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}$, если вектор **E** горизонтален; $\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{a}}$.

2. $v = |e|\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{m l_1 l_2}}$.

3. Электроны не будут попадать на пластину, когда заряд конденсатора станет таким, что $\frac{mv^2}{2} = -eU$, где $U = \frac{Q}{c} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$, то есть при $\frac{mv^2}{2} = -\frac{Qed}{\varepsilon_0 S}$. Отсюда $Q = -\frac{mv^2 S\varepsilon_0}{2ed} = -netS$ и $t = \frac{\varepsilon_0 mv^2}{2e^2 \pi d}$.

4. Из закона сохранения энергии следует, что $\frac{mv^2}{2} + \frac{Qq}{\varepsilon_0 l} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Qq}{\varepsilon_0 R}$.

Отсюда $v' = \sqrt{v^2 - \frac{Qq}{m}\frac{(l-R)}{\varepsilon_0 lR}}$.

К статье «Московский энергетический институт»

Билет 1

$m \approx 31$ *г.*

Примечание. При решении задачи можно воспользоваться или объединенным газовым законом, или уравнением Клапейрона—Менделеева.

Билет 2

$$v = v_0\sqrt{\frac{1 - k\operatorname{ctg}\alpha}{1 + k\operatorname{ctg}\alpha}} = 1 \text{ м/с}.$$

Билет 3

$$\rho = \frac{3}{4}\rho_в,$$

где $\rho_в$ — плотность воды.

Билет 4

$$R = \frac{Edr}{E_б - Ed} = 4{,}5 \text{ ом}.$$

Билет 5

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{L\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}} \approx 1256 \text{ м}$$

($c = 3\cdot 10^8$ *м/с* — скорость света).

К статье «Московский институт электронного машиностроения»

Вариант I

1. Нас интересует лишь отношение производительностей труда, поэтому можно принять общий объем работы за 1, время, необходимое фабрикам для ее выполнения (до повышения производительности), тоже за 1, а производительности обозначить через v_1 и v_2. По условиям задачи

$$v_1 + v_2 = 1,$$

$$(v_1 + 2v_2)\left(1 - \frac{2}{15}\frac{1}{v_1}\right) = 1.$$

Каково же отношение $k = v_2 : v_1$? Подставим $v_2 = kv_1$ в первое уравнение. Получим $v_1 + kv_1 = 1$, откуда $v_1 = \frac{1}{1+k}$.

Подставляя $v_2 = \frac{k}{1+k}$ и $v_1 = \frac{1}{1+k}$ во второе уравнение, находим:

$$\left(\frac{1}{1+k} + 2\frac{k}{1+k}\right)\left(1 - \frac{2(1+k)}{15}\right) = 1,$$

откуда $4k^2 - 9k + 2 = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{4}$.

Далее, поскольку каждая фабрика переработала не менее 1/3 сырья (то есть первая фабрика переработала от 1/3 до 2/3 сырья), имеем ограничение на k:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{1+k} \leqslant \frac{2}{3},$$

откуда $1/2 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $k = 2$. Проверка показывает, что все величины, входящие в условие задачи, имеют смысл.

Ответ: $v_2 : v_1 = 2$.

2. Имеем: $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$;

$\sin^8 x - \cos^8 x = (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x)$;

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \times \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x)$.

Исходное уравнение приводится к виду:

$$\cos 2x = a \cdot \cos 2x \cdot \frac{1}{4}(3 + \cos 4x).$$

Остается рассмотреть два случая:

1) $\cos 2x = 0$;

2) $a(3 + \cos 4x) = 4$.

Ответ: если $a \geqslant 2$ или $a < 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; если $a = 1$, то $x = \frac{n\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; если $1 < a < 2$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{4}{a} - 3\right) + \frac{n\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (всюду k, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

3. Область определения мы находим из условия

$$z = \frac{3x+1}{x-2} - 2 > 0.$$

Отсюда получаем: $x > 2$ или $x < -5$. При этих значениях x функция $z = \frac{x+5}{x-2}$ принимает любые положительные значения, кроме 1 $\left(\text{так как } x = \frac{2z+5}{z-1}\right)$, а потому $\lg z$ принимает любые значения, кроме 0.

Ответ: область определения: $x > 2$ или $x < -5$;

область значений: любые действительные числа, кроме 0.

4. Неравенству удовлетворяют все значения x, для которых:

а) $9^x - 2\cdot 3^x - 3 \leqslant 0$, $x - \frac{1}{2} > 0$;

б) $\log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

В первом случае $-1 \leqslant 3^x \leqslant 3$, $x > \frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$; во втором $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ или $x = \frac{3}{2}$.

5. Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$.

Вариант 2

1. Из первого и третьего условий имеем: $\frac{n+1}{n+4} < \frac{1}{2}$, откуда $2(n+1) < n+4$, $n < 2$. Проверка показывает, что $n = 1, m = 3$ — единственное решение.

2. Рассматриваемое неравенство равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 4^{2x} - 2\cdot 4^x - 3 < 0, \\ 4\cdot 3^x - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Из первого условия получим: $-\infty < x < \log_4 3$; из второго имеем: $x \neq 2 - \log_3 4$.

Теперь необходимо проверить, попадает ли число $2 - \log_3 4$ в интервал $(-\infty, \log_4 3)$. С этой целью воспользуемся очевидным неравенством $\log_4 3 + \log_3 4 > 2$ $\left(a + \frac{1}{a} > 2, \text{ если } a > 0 \text{ и } a \neq 1\right)$. Отсюда $2 - \log_3 4 < \log_4 3$.

Ответ: $-\infty < x < \log_4 3$; $x \neq 2 - \log_3 4$.

3. Обозначим корни данного квадратного уравнения через x_1 и x_2. Тогда имеем, согласно теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = 1 - \sin\varphi, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}\cos^2\varphi.$$

Преобразуем сумму квадратов корней следующим образом:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 2 - 2\sin\varphi.$$

Отсюда видно, что эта сумма будет наибольшей при $\sin\varphi = -1$. Легко проверить, что при этом уравнение имеет два действительных корня.

Ответ: $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Ответ: если $|a| < \frac{1}{2}$, то решений нет;

если $a=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{4}\times$ $\times\arcsin\frac{3}{5}$; если $a=-\frac{1}{2}$, то $x=$ $=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{5}$;

если $a>\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{4}(-1)^n\times$

$$\times\arcsin\frac{5}{\sqrt{64a^2+9}}+$$

$$+\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{\sqrt{64a^2+9}}+\frac{n\pi}{4};$$

если $a<-\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{4}\times$

$$\times(-1)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{64a^2+9}}+\frac{\pi}{4}-$$

$$-\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{\sqrt{64a^2+9}}+$$

$$+\frac{n\pi}{4}\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

5. $S=-\frac{a^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos 3\alpha}$.

К статье «Московский институт стали и сплавов»

Вариант 1

1. $V=\frac{h^3\sin^2(\alpha+\beta)}{3\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

2. $-\sqrt[3]{a}-1$. Указание. $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=-\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}=-\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}$, т. к. $2-\sqrt{5}<0$, и $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$.

3. $1/2<a<1$. Указание. Подставив $x=1$ в неравенство, получите, что $0<a<1$. Отсюда $2a+1>1$. Далее перейдите к основанию 7.

4. $x=\pm\frac{1}{6}+n\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$.

Указание. Из уравнения вытекает, что $\cos 2\pi x=\frac{1}{2}+3k$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

Покажите, что $k=0$.

Вариант 2

1. $V=\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\varphi}\times\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}$.

2. $-\sqrt[4]{2}$.

3. $-4<x<-3$; $3<x<5$. Указание. Подставив $x=-3{,}5$, убедитесь, что $0<a<1$.

4. $x_1=-2$; $x_2=-\frac{1}{2}$; $x_{3,4}=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$; $x_5=1$. Указание. Получив

$$x=\frac{7-3k\pm\sqrt{(7-3k)^2-4(3k-1)^2}}{2(3k-1)},$$

где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$, убедитесь, что действительным x будет только при $k=-1,0,1$.

Вариант 3

1. $S_{\text{бок}}=3a^2\sqrt{3}\cos\alpha$.

2. $x=1$. Указание. ОДЗ: $x\geqslant1$.

3. $-3<x<-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}<x<2$.

Вариант 4

1. $S_{\text{бок}}=\frac{2h^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. $2<x<4$.

3. 1, 3, 5, 7. Указание. Числа, составляющие геометрическую прогрессию, запишите в виде a; aq; aq^2; aq^3. Тогда в силу условий задачи числа $a-1$, $aq-1$, aq^2-3, aq^3-9 составляют арифметическую прогрессию. Далее воспользуйтесь основным свойством арифметической прогрессии.

4. $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\pi$, где $k,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

К статье «Московский институт инженеров железнодорожного транспорта»

Вариант 1

1. Один может выполнить работу за $6\frac{8}{15}$ часа, другой — за $9\frac{4}{5}$ часа.

2. $x_1=4$, $y_1=64$, $x_2=64$, $y_2=4$.

Указание. Необходимо представить $x-y$ как $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ и далее воспользоваться теоремой Виета.

3. $V=\frac{2}{3}S\sqrt{\frac{S}{\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

Указание. Выразить площадь диагонального сечения S и высоту пирамиды h через сторону основания.

4. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,$

где k и n — любые целые числа.

Вариант 2

1. Длина наклонной плоскости 60 *см*, увеличение длины окружности на 2 *см*.
2. $x = 2, \; y = 1/2.$
3. $\frac{1}{2} a^2 \cos\alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$
4. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3(1-b^2)} - b\right).$

Указание. Представить $70° + \alpha$ как $(40° + \alpha) + 30°$.

Вариант 3

1. 14 часов.

Указание. За x часов обозначить время выполнения всей работы одним рабочим, за t часов — промежуток времени, через который приступали рабочие к работе, тогда $\frac{t}{2}$ — время работы последнего рабочего.

2. $2\,\frac{\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2 - S_2^2}}.$

3. При $0<a<1$ $x_1 = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_3 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$,

при $a>1$ $x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$.

Указание. Перейти к уравнению в форме $2\log_a|x| + 2\log_a(x+2) = 1$

4. $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi k,$

где k — любое целое число.

Указание. Наиболее просто уравнение решается, если использовать равенство $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$.

К статье «Уральский государственный университет»

Математико-механический факультет

Математика

1. $\frac{5}{4}.$
2. $\frac{2(2\sqrt{3}\pi + 9)}{81}.$
3. $x < -2; \; -2 < x \leqslant -\sqrt{\frac{3}{2}};$

$\frac{1}{2} < x < 1; \; 1 < x \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}.$

4. $\alpha = \pi n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Физика

Билет 1

$d = 1{,}5\,F.$

Билет 2

$$H = h\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho_в}{m} - 1\right).$$

Билет 3

$l = 764$ *мм*.

Билет 4

$$\delta = \frac{\Delta R}{R}\cdot 100\% = 0{,}3\%.$$

Физический факультет

Математика

1. 16 *л*.
2. $\frac{V_к}{V_ш} = \frac{b^4}{2(b^2-1)}.$
3. $x < -1; \; x > 0.$
4. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \; \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$

$(-1, 0); \; (0, 1); \; (0, -1); \; (1, 0)$

Физика

Билет 1

$R_1 = 30$ *см*; $R_2 = 20$ *см*.

Билет 2

$l_1 = 34$ *см*; $l_2 = 24$ *см*.

Билет 3

$r_2 \approx 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ *см*.

Билет 4

$R_{доб} = 3600$ *ом*.

К статье «Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина»

Вариант 1

1. $3 < x < 4, \; x > 5.$
2. $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \; x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, n, k — любые целые числа.
3. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sin\alpha}.$
4. Пусть x — стоимость магнитофона (в рублях), y — число студентов. Тогда: $\frac{x}{y-2} - \frac{x}{y} = 1; \; 2x = y^2 - 2y; \; y = 1 + \sqrt{1+2x}$, так как $y = 1 - \sqrt{1+2x} < 0$

и, следовательно, не подходит. Значит, y — натуральное число, удовлетворяющее двойному неравенству:

$$1+\sqrt{341}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{391}.$$

Единственным подходящим значением является $y=20$. Значит, $2x=360$: $x=180$.

Вариант 2

1. $-1<x<0$.

2. $x=(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+$ $+n\pi$, n — любое целое число.

3. $R=\sqrt{\dfrac{l^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+r^2}{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$.

4. Пусть x — цена изделия первого сорта (в рублях); y — разница в цене (в рублях). По условию $y\leqslant\frac{2}{5}x$, где x и y — целые числа. Составим уравнение: $\frac{9600}{x+y}+$ $+\frac{9600}{x-y}=1400$. Отсюда: $96x=7(x^2-y^2)$, значит, $7x^2-96x=7y^2$. Кроме этого уравнения удовлетворяются еще два неравенства: $0<y\leqslant\frac{2}{5}x$, значит, $0<7x^2-96x\leqslant$ $\leqslant 7\left(\frac{2}{5}x\right)^2$. Из неравенства $7x^2-96x>0$ получаем: $x(7x-96)>0$, и так как $x>0$, то $7x-96>0$, $7x>96$, $x>13$. Из неравенства $7x^2-96x\leqslant 7\left(\frac{2}{5}x\right)^2$ получаем: $147x^2-$ $-96\cdot 25x\leqslant 0$, $x(147x-96\cdot 25)\leqslant 0$, и так как $x>0$, то $147x-96\cdot 25\leqslant 0$, $x\leqslant 16$.

Значит, возможными значениями x будут числа 14, 15, 16. Однако y получает целое значение только при $x=14$, так как $7y^2=7x^2-96x$. Поэтому изделие первого сорта стоит 14 рублей. Впрочем, последнюю часть рассуждений можно сократить, если заметить, что из неравенства $x(7x-96)=7y^2$ следует, что x должно делиться на 7. Значит, $x=14$.

Вариант 3

1. $-\frac{5}{6}<x<-\frac{3}{4}$.

2. $x=2n\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2n\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, n — любое целое число.

3. $V=\frac{K^3}{6}\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos\beta$.

4. Пусть x — длина одной из сторон прямоугольника (в *см*), тогда $(37-x)$ — длина другой стороны. При этом x должно быть равно $\frac{k}{2}$, где k — натуральное число (по условию). Тогда получаем:

$$270<x(37-x)<280,$$
$$270<37x-x^2<280.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x^2-37x+270<0,\\ x^2-37x+280>0.\end{cases}$$

Из этой системы неравенств следует, что заведомо $10<x<11$ или $26<x<27$. Условию задачи удовлетворяют только два значения: $x=10{,}5$ и $x=26{,}5$.

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы»

Физика

1. $I_2=\frac{E_2r_1+E_2R-E_1R}{r_1r_2+r_1R+r_2R}=0$.

2. $V=\frac{1}{LB}(Ir+IR-E)=11{,}1$ *м/с*.

3. $U=\frac{eB^2R^2}{2m_e}=1{,}26\cdot 10^7$ *в*.

4. $l_3=-\frac{5}{3}$ *см*.

5. $S=\frac{L(d+l-F)}{d+l}=3{,}4$ *см*.

6. $h=\sqrt{n_2^2-1}\left(R-H\frac{1}{\sqrt{n_1^2-1}}\right)\approx$ $\approx 4{,}3$ *см*.

7. $l\approx 5{,}4$ *см*.

Математика

Контрольная работа № 1

1. 27; $3\sqrt[7]{9}$. Указание: При решении удобно перейти к логарифмам по основанию x.

2. $x=3$.

3. Первое уравнение раскладывается на множители:

$$(x-y)(x+2y)(x-2y)=0.$$

Остается решить совокупность трех систем уравнений:

$$\begin{cases} x=y,\\ 2x^2+y^2=12,\end{cases}\qquad \begin{cases} x=2y,\\ 2x^2+y^2=12,\end{cases}$$
$$\begin{cases} x=-2y,\\ 2x^2+y^2=12.\end{cases}$$

Ответ: (2; 2); $(-2;\ -2)$; $\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $x = 5;\quad y = 4$.

5. 125625. Указание: Если обозначить через x первые три цифры, а через y — последние три цифры искомого числа, то условиям задачи соответствует система

$$\begin{cases} 1130000 + y = 9(1000x + y), \\ \log_5 x - \log_{25} y = 1. \end{cases}$$

6. $$V = \frac{1}{3}\sqrt{F_0\left(F^2 - F_0^2\right)} \times$$
$$\times \sqrt[4]{\frac{(F - 2F_1)(F - 2F_2)(F - 2F_3)}{F^3}},$$

где $F = F_1 + F_2 + F_3$. Указание. Из условий задачи следует, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в треугольник, лежащий в основании пирамиды.

Контрольная работа № 2

1. $S_{\text{полн}} = \frac{S}{2}$.

2. $V = 2\pi rS$.

3. $$V = \frac{2\pi r^3 \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha}.$$

4. $\frac{\pi}{18}$. Указание. Следует построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через ось цилиндра и боковое ребро тетраэдра, пересекаемое этой осью. Затем доказать, что: а) две из четырех точек касания цилиндра с тетраэдром лежат на сторонах треугольника, получившегося в сечении, они будут концами диаметра круга, являющегося одним из оснований цилиндра; б) центр круга, который является одним из оснований цилиндра, совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника. И, наконец, выразить объемы цилиндра и тетраэдра через длину ребра тетраэдра.

5. $\frac{\pi(4\sqrt{2} - 5)}{4}$.

К ребусам

1. 94 183 3 = 282 549. 2. 29 750·3 = 89 250. 3. 834 970·3 = 2 504 910. 4. 93 989 + 7 492 + + 7 492 = 108 973. 5. 12 607·3 = 37 821. 6. 26 159·4 = 104 636. 7. 13 606·7 = 95 242.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 6, 1973)

1. Четыре. Указание. Сложить числа на всех прямых; получится удвоенная сумма чисел от 1 до 7 плюс число в вершине. С другой стороны, эта сумма должна делиться на пять.

2. Давления в точках A, B и C различны.

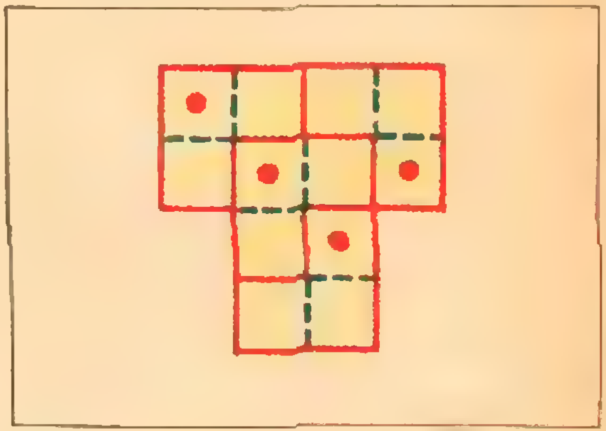


Рис. 5.

3. См. рисунок 5.

4. При прыжке в песок скорость гасится за более продолжительное время.

5. $10n + 9 = n \cdot 9 + (n + 9)$.

6. В воздухе весы уравновешены. Если же воздух откачать, перевесит та чашка, на которой лежит деревянный брусок, так как по закону Архимеда в воздухе на него действовала бóльшая выталкивающая сила

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 6/IV 1973 г.
Подписано в печать 23/V 1973 г. Заказ 585
Бумага 70×100$^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,2
Уч.-изд. л. 6,02 Тираж 348 210 экз. Т-08452
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

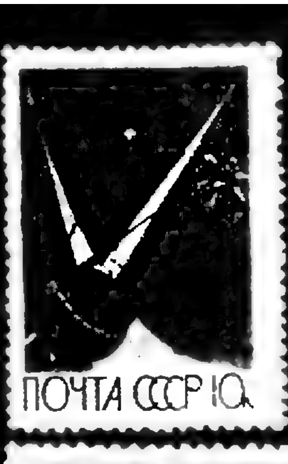
НА МАРКАХ — СПУТНИКИ СВЯЗИ «МОЛНИЯ»

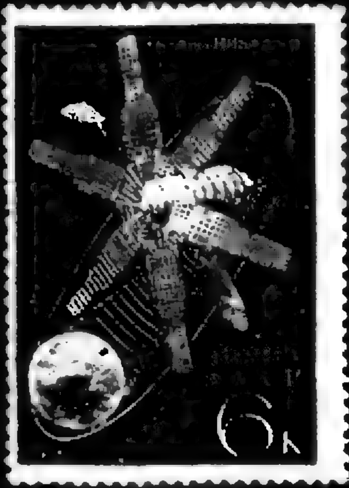
Успешное развитие космической техники позволило поставить на службу связи искусственные спутники Земли. Восемь лет тому назад, 23 апреля 1965 года в Советском Союзе был осуществлен запуск первого спутника связи «Молния-1». Спутник был выведен на орбиту, с которой он раз в сутки был «виден» одновременно из Москвы и Владивостока во время сеансов связи продолжительностью более 9 часов каждый. В это время он ретранслировал телевизионные передачи (черно-белые и цветные), телефонные переговоры, телеграфные и фототелеграфные сообщения. Запуску этого спутника посвящены изображенные здесь марки СССР, Болгарии, Венгрии и Монголии.

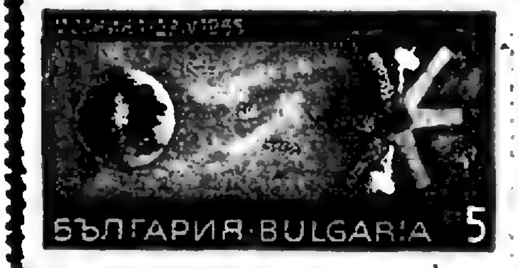
С тех пор запуски искусственных спутников «Молния» производятся регулярно по специальной программе. На изображенной здесь советской марке показан IV спутник этой серии, запущенный 20 октября 1966 года.

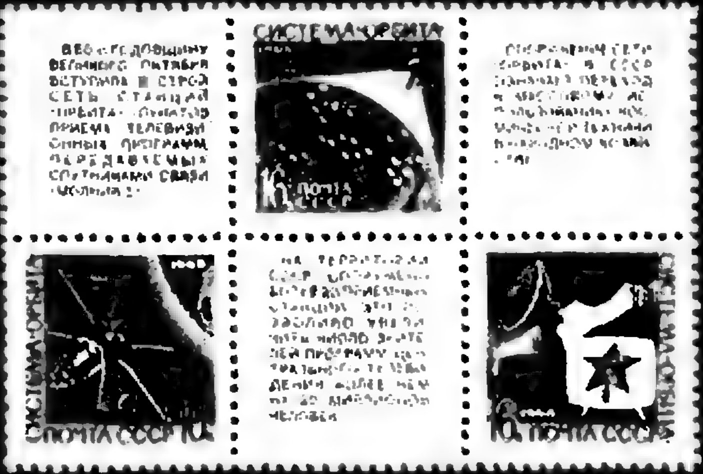
К пятидесятой годовщине Великой Октябрьской Социалистической Революции в нашей стране начала работать сеть специальных станций «Орбита», осуществляющих прием передач Центрального телевидения более чем в 20 отдаленных районах Советского Союза. Создание системы «Орбита» увеличило число зрителей Центрального телевидения на 20 миллионов человек.

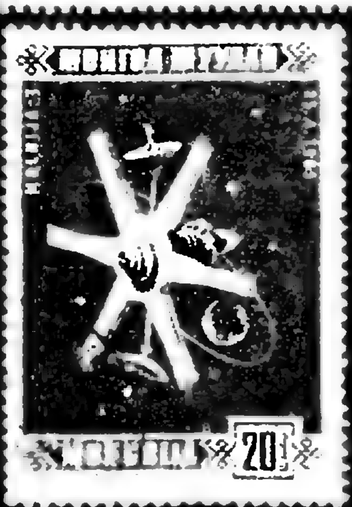
Мы приводим здесь почтовый блок из трех марок, посвященный созданию этой системы.

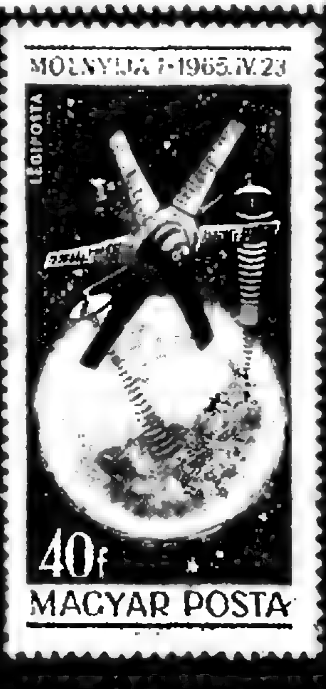

ПОЧТА СССР 10к




БЪЛГАРИЯ·BULGARIA
5


СИСТЕМА «ОРБИТА»
10к ПОЧТА СССР
СИСТЕМА «ОРБИТА»
ПОЧТА СССР 10к
10к ПОЧТА СССР

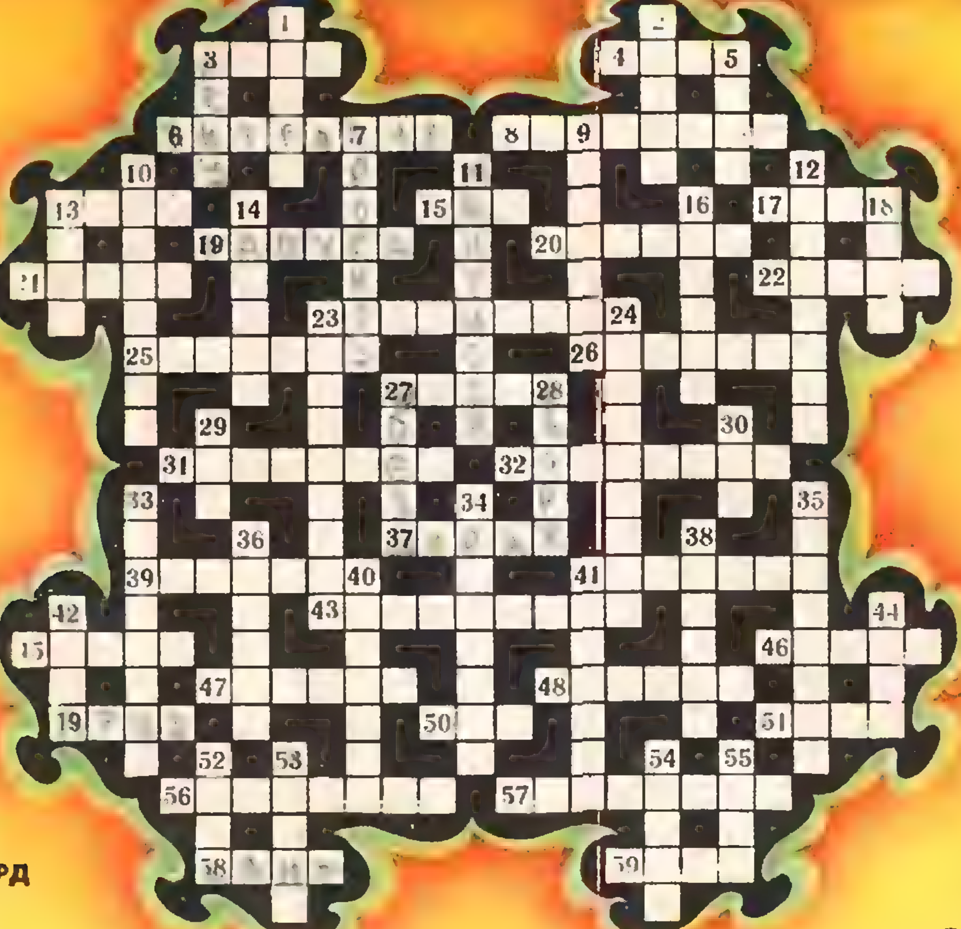



MOLNYIJA-1-1965.IV.23
LÉGIPOSTA
40f
MAGYAR POSTA

Цена 30 коп.

27/1-42

1



КРОССВОРД

По горизонтали

3. Расплавленная минеральная масса. 4. Исследователь Арктики. 6. Мера неопределенности. 8. Источник звука. 13. Неожиданная неудача. 15. Единица давления. 17. Кристаллы воды. 19. Оптическое атмосферное явление. 20. Погрешность. 21. Основное понятие, используемое при измерении и счете. 22. Французский математик XVIII века, написавший первую научную работу в 12 лет. 23. Множество действительных чисел. 25. Вывод. 26. Специалист в одной из молодых областей математики. 27. Крупинки минералов. 31. Мера длины. 32. Воздействие силы на поверхность. 37. Английский физик, один из основателей квантовой механики. 39. Вид энергии. 41. Древнегреческий математик. 43. Вид противоречия. 45. Заданные условия работы прибора. 46. Набросок. 47. Английский математик, который ввел знак равенства. 48. Разделение ядра на составные части. 49. Награда победителю. 50. Немецкий физик. 51. Геометрическая фигура. 56. Итальянский физик XIX века. 57. Полюс гальванического элемента. 58. Выдающийся немецкий философ. 59. Группа советских ученых и инженеров, изучавших в 1932—1934 гг. реактивное движение.

По вертикали

1. Минерал. 2. Знак для записи чисел. 3. Русский физик, исследовавший переход электрической энергии в тепловую. 5. Результат. 7. Предсказание. 9. Путь следования. 10. Вспомогательные вычисления. 11. Дробная часть десятичного логарифма. 12. Сходство. 13. Квантовая характеристика элементарной частицы. 14. Шлюп для метеорологических наблюдений, построенный в России в XIX веке. 16. Вид изменения. 18. Единица измерения частоты колебаний. 23. Постоянная. 24. Изменение параметров высокочастотных колебаний для радиосвязи. 27. Упорядоченное множество из локомотива и вагонов. 28. Гипотетическая частица с дробным зарядом. 29. Английский ученый, один из создателей волновой теории света. 30. Французский физик XIX века, исследователь магнитного поля. 33. Качество, необходимое для творческой деятельности. 34. Изобретатель громоотвода. 35. Механический компас. 36. Летательный аппарат. 38. Единица измерения углов. 40. Металлический барометр. 41. Электрические батареи или аккумуляторы. 42. Марка телевизора. 44. Круг, разделенный по окружности на градусы. 52. Колебание, воспринимаемое на слух. 53. Одно из первых открытий человечества. 54. Понижение уровня моря. 55. Воздушный шар метеорологов.

НОМЕР
8

Основан в 1970 году

Квант

1973

8

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
И. Б. Мамулова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 Михаил Дмитриевич Миллионщиков

4 *С. Г. Гиндикин.* Блез Паскаль (К 350-летию со дня рождения)

19 *Блез Паскаль.* Трактат о равновесии жидкостей

22 *А. Д. Бендукидзе.* Золотое сечение

28 *О. Н. Карпухин.* Физика химического взаимодействия

35 *Л. Я. Шевелев.* Объем тел вращения

38 *М. Л. Милг.* Что сказал проводник?

47 *И. Ф. Шарыгин.* Об одном геометрическом месте точек

Математический кружок

49 *Л. Ю. Березина.* О графах с цветными ребрами

54 **У нас в гостях журнал «Альфа»**

55 *В. Фосс.* Элементы теории графов

Задачник «Кванта»

60 Задачи М216—М220; Ф228—Ф232

62 Решения задач М174—М178

Информация

69 *А. Н. Виленкин.* VII городская научная конференция школьников Киева

«Квант» для младших школьников

70 Задачи

71 *Л. Фладе.* Маленькие слова с большим значением

78 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(стр. 18, 21, 33, 54)*

На первой странице обложки изображена раковина ископаемого головоногого моллюска — аммонита. Форма раковины связана с золотым сечением, о котором вы можете прочитать в статье А. Д. Бендукидзе (см. с. 22).

© «Квант», 1973 год

27 мая 1973 года скончался член редакционной коллегии журнала «Квант», один из крупнейших советских ученых, выдающийся организатор науки и общественный деятель, Председатель Верховного Совета РСФСР, вице-президент Академии наук СССР, заместитель директора Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, заместитель председателя Совета по координации деятельности академий наук союзных республик, главный редактор журнала «Вестник Академии наук СССР», председатель научного совета по комплексной проблеме «Методы прямого преобразования тепловой энергии в электрическую», Герой Социалистического труда, лауреат Ленинской и Государственных премий, академик Михаил Дмитриевич Миллионщиков.

Михаил Дмитриевич МИЛЛИОНЩИКОВ

М. Д. Миллионщиков родился 16 января 1913 года в городе Грозном. В 1932 году он окончил Грозненский нефтяной институт, а в 1938 году — аспирантуру Московского авиационного института. В дальнейшем он работал в Центральном аэрогидродинамическом институте имени Н. Е. Жуковского, а с 1949 года и до последних дней жизни — в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова.

Михаил Дмитриевич рано начал самостоятельные научные исследования. Еще в двадцатилетнем возрасте он исследовал ряд проблем теории фильтрации нефти и газа в пористой среде, непосредственно связанных с нуждами развивающейся нефтяной промышленности Советского Союза. В период учебы и работы в Московском авиационном институте М. Д. Миллионщиков начал заниматься теорией турбулентности под руководством академика А. Н. Колмогорова. Турбулентное движение жидкостей и газов является весьма распространенным природным явлением. При таком движении частицы среды движутся неупорядоченно, образуя вихри. Турбулентное движение играет важнейшую роль во многих технических процессах (обтекание крыла самолета или корпуса корабля, движение жидкостей по трубам и т. п.). Однако теоретический анализ такого движения связан с большими трудностями. М. Д. Миллионщиков разработал тонкий математический аппарат, который позволил существенно продвинуть вперед изучение турбулентности.

В 1949 году, по приглашению академика И. В. Курчатова, М. Д. Миллионщиков включился в разработку проблем использования ядерной энергии. Проведенные им исследования внесли существенный вклад в развитие советской атомной техники. В частности, им были получены очень важные результаты в области создания высокотемпературных атомных реакторов.

М. Д. Миллионщиков много занимался вопросами магнитной гидродинамики, то есть изучением движения проводящих газов в магнитном поле. Исследования этих вопросов имеют большое значение при разработке методов прямого преобразования тепловой энергии в электрическую.

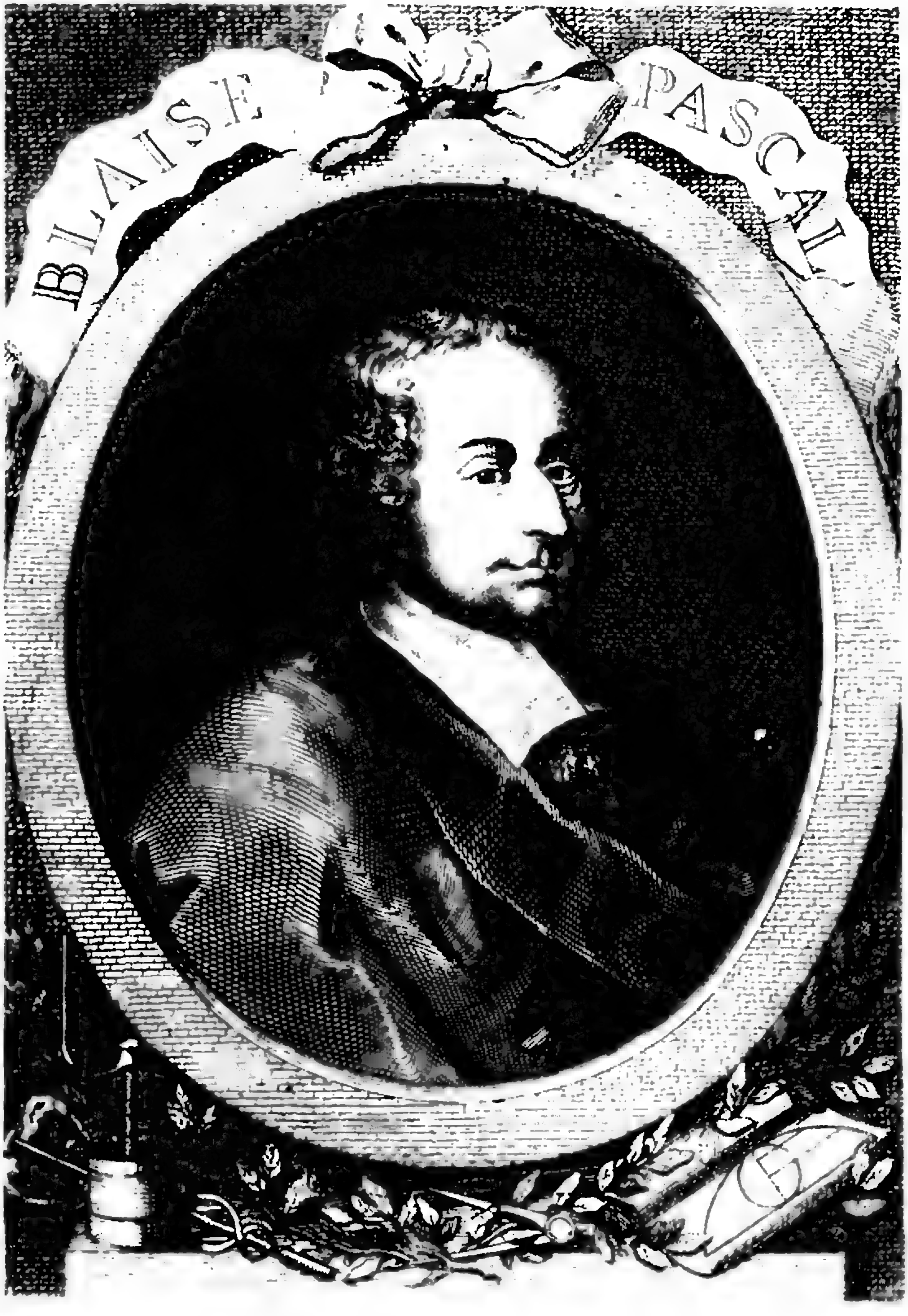
В работах М. Д. Миллионщикова счастливо сочетались интуиция инженера с глубокой математической культурой.

Учитывая крупный вклад, внесенный М. Д. Миллионщиковым в науку, Академия наук СССР избрала его в 1953 году своим членом-корреспондентом. В 1962 году он был избран академиком и вице-президентом Академии.

Более тридцати лет М. Д. Миллионщиков преподавал в ряде высших учебных заведений, занимаясь подготовкой научных работников.

Международной известностью пользовалась деятельность М. Д. Миллионщикова на посту Председателя Верховного Совета РСФСР, а также на посту председателя Советского Пагуошского комитета, объединяющего ученых в борьбе за мир, разоружение и разрядку международной напряженности.

Светлая память о Михаиле Дмитриевиче Миллионщикове навсегда сохранится в сердцах советских людей.


BLAISE PASCAL

Блез Паскаль (1623—1662)

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

К 350-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

С. Г. Гиндикин

> *Паскаль носил в душе водоворот без дна.*
> *Ш. Бодлер. «Пропасть»* *)

19 июня 1973 года исполняется 350 лет со дня рождения Блеза Паскаля — одного из самых знаменитых людей в истории человечества. Паскаль входит в число великих французов, портреты которых воспроизведены на ассигнациях (наряду с Корнелем, Расином, Вольтером и Пастером). Очень внушительно выглядит собрание высказываний великих людей о Паскале, и соблазнительно хотя бы перечислить некоторые из них, но нас останавливает предостережение самого Паскаля: «...когда мы цитируем авторов, мы цитируем их доказательства, а не их имена...». Мы лишь заметим, что разные люди в разные времена воспринимали Паскаля — мыслителя и писателя — как своего современника.

Правильно оценить Паскаля — математика и физика — можно лишь в исторической перспективе. Сегодня об открытиях Паскаля рассказывается на страницах школьных учебников. Для того, чтобы понять величие этих открытий, нужно научиться удивляться тому, чему удивлялись его современники. Заодно мы можем заметить, сколь различаются скорости «старения» естественно-научных и гуманитарных открытий.

Упомянем еще об одной грани наследия Паскаля — его практических достижениях. Некоторые из них удостоились высшего отличия — сегодня мало кто знает имя их автора. Многим ли известно, что самую обыкновенную тачку изобрел Паскаль (а не безымянный умелец в Древнем Египте или Китае)? А еще Паскалю принадлежит идея омнибусов — общедоступных карет («за 5 су») с фиксированными маршрутами — первого вида регулярного городского транспорта.

1. Палочки и монетки

Когда мы учимся рисовать графики, то в калейдоскопе безымянных кривых иногда появляются кривые, имеющие какое-то название или носящие чье-то имя: спираль Архимеда, трезубец Ньютона, конхоида Никомеда, лист Декарта, локон Марии Аньезе, улитка Паскаля (рис. 1)... Редко, кто усомнится в том, что это тот же Паскаль, которому принадлежит «закон Паскаля». Однако в названии замечательной кривой 4-го порядка увековечено имя Этьена Паскаля (1588—1651) — отца Блеза Паскаля. Э. Паскаль, как было принято в роде Паскалей, служил в парламенте (суде) города Клермон-Феррана. Совмещение юридической деятельности с занятиями науками, далекими от юриспруденции, было делом

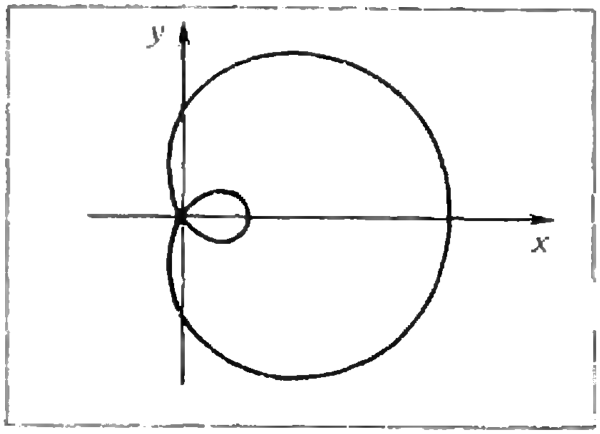


Рис. 1.

---

*) Перевод К. Бальмонта.

нередким. Примерно в это же время посвящал математике свой досуг советник тулузского парламента Пьер Ферма (1601—1665). Хотя собственные достижения Э. Паскаля были скромными, его основательные познания позволяли ему поддерживать профессиональные контакты с большинством французских математиков.

С великим Ферма он обменивался трудными задачами на построение треугольников; в споре Ферма с Рене Декартом (1596—1650) о задачах на максимум и минимум Паскаль выступал на стороне Ферма. Б. Паскаль унаследовал добрые отношения отца со многими математиками, но вместе с тем к нему перешли и напряженные отношения с Декартом.

Рано овдовев, Этьен Паскаль посвящает себя главным образом воспитанию своих детей (кроме сына, у него были две дочери — Жильберта и Жаклина). У маленького Блеза очень рано обнаруживается поразительное дарование, но, как это часто бывает, в сочетании с плохим здоровьем. (Всю жизнь с Б. Паскалем случались странные происшествия; в раннем детстве он едва не погиб от непонятной болезни, сопровождавшейся припадками, которую семейная легенда связывает с колдуньей, сглазившей мальчика.)

Этьен Паскаль тщательно продумывает систему воспитания детей. На первых порах он решительно исключает математику из числа предметов, которым обучает Блеза: отец боялся, что увлеченность математикой помешает гармоничному развитию, а неизбежные напряженные размышления повредят слабому здоровью сына. Однако 12-летний мальчик, узнав о существовании таинственной геометрии, которой занимался отец, уговорил его рассказать немного о запретной науке. Полученных сведений оказалось достаточно для того, чтобы начать увлекательную «игру в геометрию», доказывать теорему за теоремой. В этой игре участвовали «монетки» — круги, «треуголки» — треугольники, «столы» — прямоугольники, «палочки» — отрезки. Мальчик был застигнут отцом в тот момент когда он обнаружил, что углы треуголки составляют столько же, сколько два угла стола. Э. Паскаль без труда узнал знаменитое 32-е предложение первой книги Евклида — теорему о сумме углов треугольника. Результатом были слезы на глазах отца и доступ к шкафам с математическими книгами.

История о том, как Паскаль сам построил евклидову геометрию, известна по восторженному рассказу его сестры Жильберты. Этот рассказ породил очень распространенное заблуждение, заключающееся в том, что раз Паскаль открыл 32-е предложение «Начал» Евклида, то он открыл перед этим все предыдущие теоремы и все аксиомы. Нередко это воспринималось как аргумент в пользу того, что аксиоматика Евклида — единственно возможная. На самом же деле, вероятно, геометрия у Паскаля находилась на «доевклидовском» уровне, когда интуитивно неочевидные утверждения доказываются путем сведения к очевидным, причем набор последних никак не фиксируется и не ограничивается. Лишь на следующем, существенно более высоком уровне делается великое открытие, что можно ограничиться конечным сравнительно небольшим набором очевидных утверждений — аксиом, предположив истинность которых можно остальные геометрические утверждения доказать. При этом, наряду с неочевидными утверждениями (такими, как, например, теоремы о замечательных точках треугольника), приходится доказывать «очевидные» теоремы, в справедливость которых легко поверить (например, простейшие признаки равенства треугольников). Собственно 32-е предложение — первое неочевидное в этом смысле предложение «Начал». Нет сомнения, что у юного Паскаля не было ни времени для огромной работы по отбору аксиом, ни, скорее всего, потребности в ней.

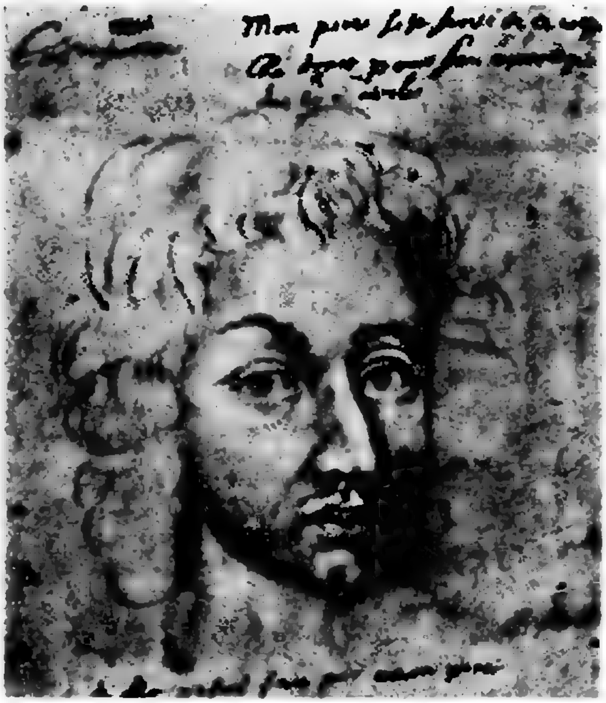
Это интересно сопоставить со свидетельством А. Эйнштейна, который в те же 12 лет в значительной степени самостоятельно постигал геометрию (в частности, нашел доказательство теоремы Пифагора, о которой узнал от дяди): «Вообще мне было достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной».

Примерно в 10 лет Б. Паскаль сделал первую физическую работу: заинтересовавшись причиной звучания фаянсовой тарелки и проведя поразительно хорошо организованную серию экспериментов при помощи подручных средств, он объяснил заинтересовавшее его явление колебанием частичек воздуха.

2. «Мистический шестивершинник» или «великая паскалева теорема».

В 13 лет Б. Паскаль уже имеет доступ в математический кружок Мерсенна, в который входило большинство парижских математиков, в том числе Э. Паскаль (Паскали жили в Париже с 1631 года).

Францисканский монах Марен Мерсенн (1588—1648) сыграл в истории науки большую и своеобразную роль ученого-организатора*). Его основная заслуга состояла в том, что он вел обширную переписку с большинством крупных ученых мира (у него было несколько сот корреспондентов). Мерсенн умело концентрировал информацию и сообщал ее заинтересованным ученым. Эта деятельность требовала своеобразного дарования: умения быстро понимать новое, хорошо ставить задачи. Обладающий высокими нравственными качествами, Мерсенн пользовался доверием корреспондентов. Наряду с заочным коллективом корреспондентов существовал и очный кружок — «четверги Мерсенна», — в который и попал Блез Паскаль. Здесь он нашел себе достойного учителя. Им был Жерар Дезарг (1593—1662), инженер и архитектор, создатель оригинальной теории перспективы. Его главное сочинение «Черновой набросок вторжения в область того, что происходит при встрече конуса с плоскостью» (1639 г.) нашло лишь нескольких читателей и среди них особое место занимает Б. Паскаль, сумевший существенно продвинуться вперед.



Блез Паскаль в юности

Рисунок Жана Дока.

Хотя в то время Декарт прокладывал в геометрии совершенно новые пути, создавая аналитическую геометрию, в основном геометрия едва достигла уровня, на котором она находилась в Древней Греции. Многое из наследия греческих геометров оставалось неясным. Это прежде всего относилось к теории конических сечений. Самое выдающееся сочинение на эту тему — 8 книг «Konika» Аполлония — было известно лишь частично. Предпринимались попытки дать модернизированные изложения теории, среди которых наиболее известное принадлежит Клоду Мидоржу (1585—1647), члену кружка Мерсенна, но это сочинение фактически не содержало новых идей. Дезарг заметил, что систематическое применение метода перспективы позволяет построить теорию конических сечений с совершенно новых позиций.

Рассмотрим центральную проекцию из некоторой точки O картинок на плоскости α на плоскость β (рис. 2). Применять такое преобразование в теории конических сечений очень естественно, поскольку само их определение — как сечений прямого кругового конуса — можно перефразировать так (рис. 3): все они получаются при центральном проектировании из вершины конуса на различные плоскости одного из них (например, окружность). Далее, заметив, что при центральном проектировании пересекающиеся прямые могут перейти или в пересекающиеся или в параллельные, объединим два последних свойства в одно, считая, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной «бесконечно удаленной точке»; разные лучи параллельных прямых дают разные бесконечно удаленные точки; все бесконечно удаленные точки плоскости заполняют «бесконечно удаленную прямую». Если принять эти соглашения, то две любые различные прямые (уже не исключая параллельных) будут пересекаться в единственной точке. Утверждение, что через точку *A* вне прямой *m* можно провести единственную прямую, параллельную *m*, можно переформулировать так: через обычную точку *A* и бесконечно удаленную точку (отвечающую семейству прямых, параллельных *m*) проходит единственная прямая — в результате в новых условиях без всяких ограничений справедливо утверждение, что через две различные точки проходит единственная прямая (бесконечно удаленная, если обе точки бесконечно удалены). Мы видим, что получается очень изящная теория, но для нас важно то, что при центральном проектировании точка пересечения прямых (в обобщенном смысле) переходит в точку пересечения. Важно продумать, какую роль в этом утверждении играет введение бесконечно удаленных элементов (при каких условиях точка пересечения переходит в бесконечно удаленную точку, когда прямая переходит в бесконечно удаленную прямую, и обратно). Не останавливаясь на использовании этого простого соображения Дезаргом, мы расскажем о том, как замечательно применил его Паскаль.

---

*) При оценке деятельности Мерсенна надо иметь в виду, что первый научный журнал — «Журнал ученых» — был основан в 1665 году.

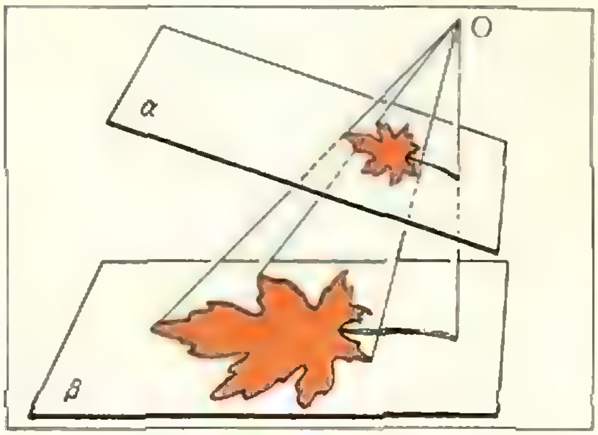


Рис. 2.

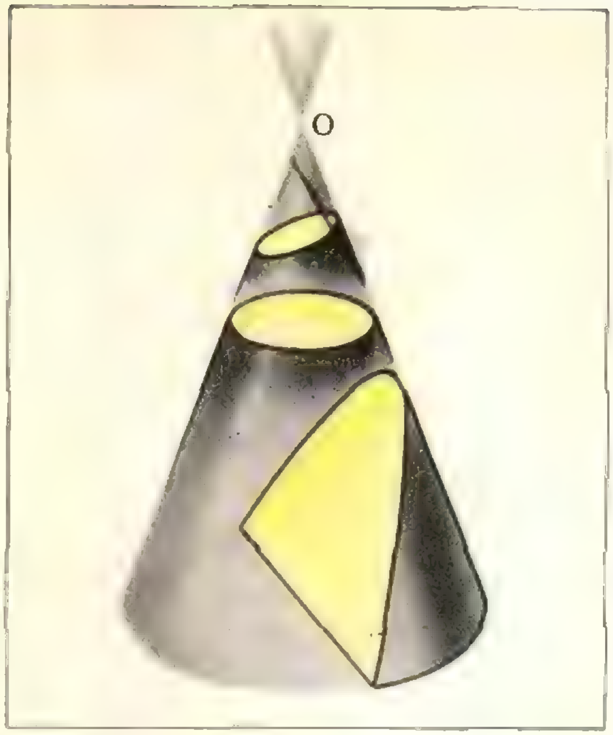


Рис. 3.

В 1640 году Б. Паскаль напечатал свой «Опыт о конических сечениях». Небезынтересны сведения об этом издании: тираж — 50 экземпляров, 53 строки текста напечатаны на афише, предназначенной для расклейки на углах домов (про афишу Паскаля достоверно не известно, но Дезарг заведомо рекламировал таким способом свои результаты). В афише, подписанной инициалами автора (*B. P.*), без доказательства сообщается следующая теорема, которую ныне называют теоремой Паскаля. *Пусть на коническом сечении L* (на рис. 4 *L* — парабола, на рис. 5 — эллипс) *произвольно выбраны и занумерованы* 6 *точек. Обозначим через P, Q, R точки пересечения трех пар прямых* (1, 2) и (4, 5); (2, 3) и (5, 6); (3, 4) и (6, 1). *При простейшей нумерации* («по порядку» — рис. 5) — *это точки пересечения противоположных сторон шес-*

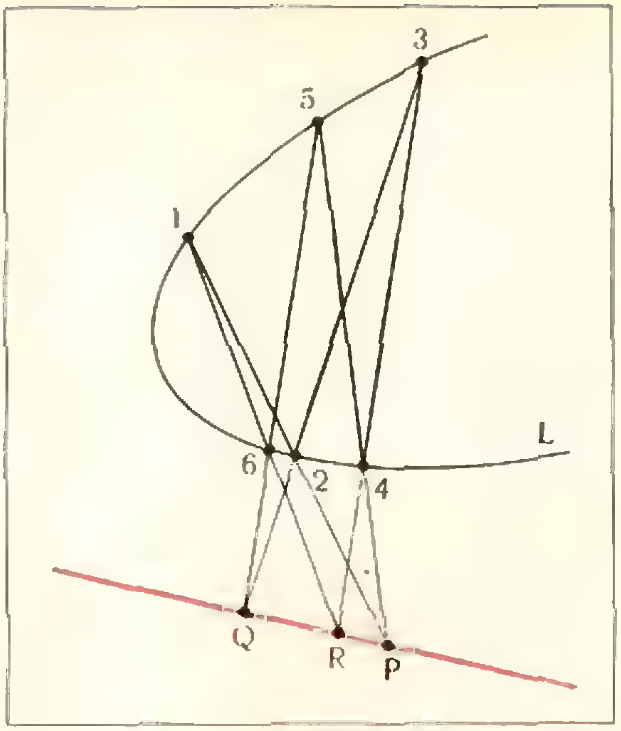


Рис. 4.

тиугольника. Тогда *точки P, Q, R лежат на одной прямой* *).

Паскаль вначале формулирует теорему для окружности и ограничивается *простейшей нумерацией точек*. В этом случае это элементарная, хотя и не слишком простая задача **). А вот переход от окружности к любому коническому сечению очень прост. Нужно преобразовать при помощи центральной проекции такое сечение в окружность и воспользоваться тем, что при центральном проектировании прямые переходят в прямые, а точки пересечения (в обобщенном смысле) — в точки пересечения. Тогда, как уже доказано, образы точек *P*, *Q*, *R* при проектировании будут лежать на одной прямой, а отсюда следует, что и сами точки *P*, *Q*, *R* обладают этим свойством.

Теорема, которую Паскаль назвал теоремой о «мистическом шестивершиннике», не была самоцелью; он рассматривал ее как ключ для построения общей теории конических сечений, покрывающей теорию Аполлония. Уже в афише упоминаются обобщения важных теорем Аполлония, которые не удавалось получить Дезаргу. Дезарг высоко оценил теорему Паскаля, назвав ее «великой паскалевой»; он утверждал, что в ней содержатся первые четыре книги Аполлония.

Паскаль начинает работу над «Полным трудом о конических сечениях», который в 1654 году упоминается как оконченный в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии». От Мерсенна известно, что Паскаль получил около 400 следствий из своей теоремы. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) был последним, кто видел трактат Паскаля уже после его смерти, в 1675—1676 году. Несмотря на совет Лейбница, родные не опубликовали рукопись, а со временем она была утеряна.

В качестве примера приведем одно из самых простых, но и самых важных следствий из теоремы Паскаля. Коническое сечение однозначно определяется любыми своими пятью точками. Действительно, пусть {1, 2, 3, 4, 5} — точки конического сечения (рис. 6) и *m* — произвольная прямая, проходящая через (5). Тогда на *m* существует единственная

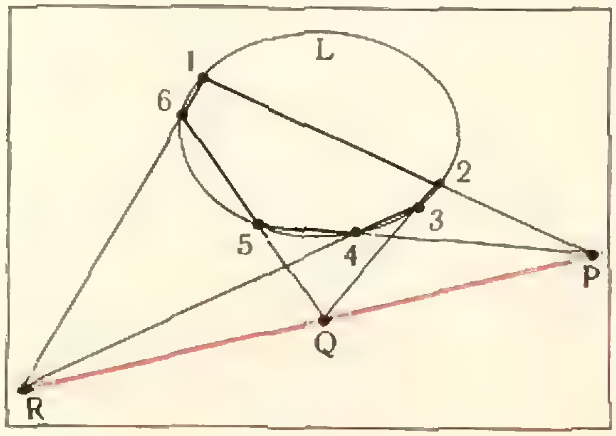


Рис. 5.

---

*) Сформулируйте самостоятельно следствия, получающиеся из этой теоремы, когда некоторые из рассматриваемых точек являются бесконечно удаленными.

**) Ее решение можно найти в статье Лоповок Л. М. Вписанный шестиугольник. «Квант» № 1, 1973, с. 18.

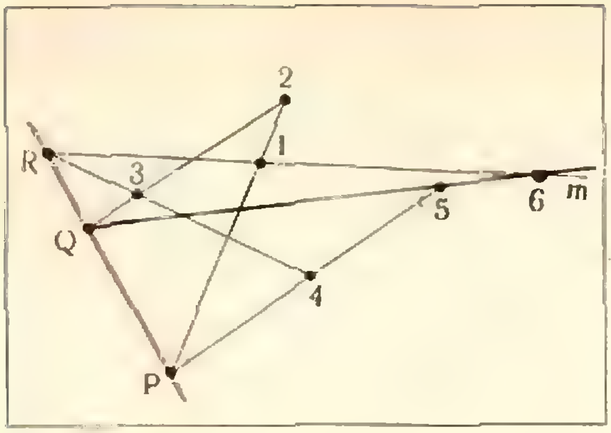


Рис. 6.

точка (6) конического сечения, отличная от (5). В обозначениях теоремы Паскаля точка P является точкой пересечения (1, 2) и (4, 5), Q — точка пересечения (2, 3) и m, R — точка пересечения (3, 4) и PQ, а тогда (6) определится как точка пересечения (1, R) и m.

3. «Паскалево колесо»

2 января 1640 года семья Паскалей переезжает в Руан, где Этьен Паскаль получает место интенданта провинции, фактически ведающего всеми делами при губернаторе.

Этому назначению предшествовали любопытные события. Э. Паскаль принял активное участие в выступлениях парижских рантьеров, за что ему грозило заточение в Бастилию. Он был вынужден скрываться, но в это время заболела оспой Жаклина, и отец, несмотря на страшную угрозу, навещает ее. Жаклина выздоровела и даже участвовала в спектакле, на котором присутствовал кардинал Ришелье. По просьбе юной актрисы кардинал простил ее отца, но одновременно назначил его на должность. Бывший смутьян должен был проводить в жизнь политику кардинала (читателей «Трех мушкетеров» это коварство, наверное, не удивит).

Теперь у Этьена Паскаля было очень много счетной работы, в которой ему постоянно помогает сын. В конце 1640 года Блезу Паскалю приходит мысль построить машину, чтобы освободить ум от расчетов «с помощью пера и жетонов». Основной замысел возник быстро и оставался неизменным на протяжении всей работы: «...каждое колесо или стержень некоторого разряда, совершая движение на десять арифметических цифр, заставляет двигаться следующее только на одну цифру». Однако блестящая идея — это только первый шаг. Несравненно бо́льших сил потребовала ее реализация. Позднее в «Предуведомлении» тому, кто «будет иметь любознательность видеть арифметическую машину и пользоваться ею», Блез Паскаль скромно напишет: «Я не экономил ни время, ни труд, ни средства, чтобы довести ее до состояния быть тебе полезной». За этими словами стояло пять лет напряженной работы, которая привела к созданию машины («паскалева колеса», как говорили современники), надежно, хотя и довольно медленно, производившей четыре действия над пятизначными числами. Паскаль изготовил около пятидесяти экземпляров машины; вот только перечень материалов, которые он перепробовал: дерево, слоновая кость, эбеновое дерево, латунь, медь. Он потратил много сил на поиски лучших ремесленников, владеющих «токарным станком, напильником и молотком», и ему много раз казалось, что они не в состоянии достичь необходимой точности. Тщательно продумывается система испытаний, в их число включается перевозка на 250 лье. Паскаль не забывает и о рекламе: он заручается поддержкой канцлера Сегье, добивается «королевских привилегий» (нечто вроде патента), много раз демонстрирует машину в салонах и даже посылает экземпляр шведской королеве Христине. Наконец налаживается производство; точное число произведенных машин неизвестно, но до настоящего времени сохранилось восемь экземпляров.

Поражает, как блестяще умел делать Паскаль самые разные вещи. Сравнительно недавно стало известно, что в 1623 году Шиккард, друг Кеплера, построил арифметическую машину, однако машина Паскаля была гораздо совершенней.

4. «Боязнь пустоты» и «Великий эксперимент равновесия жидкостей»

В конце 1646 года до Руана докатилась молва об удивительных «итальянских опытах с пустотой». Вопрос о существовании пустоты в природе волновал еще древних греков; в их взглядах на этот вопрос проявлялось присущее древнегреческой философии разнообразие точек зрения: Эпикур считал, что пустота может существовать и действительно существует; Герон — что она может быть получена искусственно, Эмпедокл—что ее нет и ей неоткуда взяться, и, наконец, Аристотель утверждал, что «природа боится пустоты». В средние века ситуация упростилась, поскольку истинность учения Аристотеля была установлена практически в законодательном порядке (еще в XVII веке за выступление против Аристотеля во Франции можно было попасть на каторгу). Классический пример «боязни пустоты» демонстрирует вода, поднимающаяся вслед за поршнем, не давая образоваться пустому пространству. И вдруг с этим примером произошел казус. При сооружении фонтанов во Флоренции обнаружилось, что вода «не желает» подниматься выше 34 футов (10,3 метра). Недоумевающие строители обратились за помощью к престарелому Галилео Галилею (1564—1642), который сострил, что, вероятно, природа перестает бояться пустоты на высоте, превышающей 34 фута, но все же предложил разобраться в странном явлении своим ученикам Эванджелиста Торричелли (1608 — 1647) и Винченцо Вивиани (1622—1703). Вероятно, Торричелли (а, возможно, и самому Галилею) принадлежит мысль, что высота, на которую может подняться жидкость в насосе, обратно пропорциональна ее удельному весу. В частности, ртуть должна подняться на высоту в 13,3 раза меньшую, чем вода, т. е. на 76 *см*. Опыт приобрел масштабы более благоприятные для лабораторных условий и был проведен Вивиани по инициативе Торричелли. Этот опыт хорошо известен, но все же напомним, что запаянная с одного конца метровая стеклянная трубка заполняется ртутью, открытый конец зажимается пальцем, после чего трубка переворачивается и опускается в чашку с ртутью. Если отнять палец, то уровень ртути в трубке упадет до 76 *см*. Торричелли делает два утверждения: во-первых, пространство над ртутью в трубке пусто (потом его назовут «торричеллевой пустотой»), а, во-вторых, ртуть из трубки не выливается полностью, поскольку этому препятствует столб воздуха, давящий на поверхность ртути в чашке. Приняв эти гипотезы, можно все объяснить, но можно получить объяснение и введя специальные довольно сложно действующие силы, препятствующие образованию вакуума. Принять гипотезы Торричелли было непросто. Лишь немногие из его современников смирились с тем, что воздух имеет вес; некоторые, исходя из этого, поверили в возможность получения вакуума, но поверить, что легчайший воздух удерживает в трубке тяжелую ртуть, было почти невозможно. Упомянем, что Галилей пытался объяснить этот эффект свойствами самой жидкости, а Декарт утверждал, что кажущийся вакуум всегда заполнен «тончайшей материей».

Паскаль с увлечением повторяет итальянские опыты, придумав много остроумных усовершенствований. Восемь таких опытов описаны в трактате, опубликованном в 1647 году. Он не ограничивается опытами с ртутью, а экспериментирует с водой, маслом, красным вином, для чего ему потребовались бочки вместо чашек и трубки длиной около 15 *м*. Эффектные опыты выносятся на улицы Руана, радуя его жителей. (До сих пор гравюры с винным барометром любят воспроизводить в учебниках физики.)

На первых порах Паскаля более всего интересует вопрос о доказательстве того, что пространство над ртутью пусто. Была распространена точка зрения, что кажущийся вакуум заполняет материя, «не имеющая свойств» (вспоминается подпоручик Киже из повести Ю. Н. Тынянова, «не имеющий фигуры»). Доказать отсутствие такой материи просто невозможно. Четкие высказывания Паскаля очень важны в плане постановки более широкой проблемы о характере доказательств в физике. Он пишет: «После того как я доказал, что ни одна из материй, которые доступны нашим чувствам и которые нам известны, не заполняет это пространство, кажущееся пустым, мое мнение, пока мне не докажут существование какой-то материи, заполняющей его, — что это пространство в самом деле пусто и лишено всякой материи». Менее академические высказывания содержатся в письме ученому-иезуиту Ноэлю: «Но у нас больше оснований отрицать ее (тончайшей материи. — С. Г.) существование, потому что нельзя ее доказать, чем верить в нее по той единственной причине, что нельзя доказать, что ее нет». Итак, необходимо доказывать существование объекта и нельзя требовать доказательства его отсутствия (это ассоциируется с юридическим принципом, состоящим в том, что суд должен доказать виновность и не вправе требовать от обвиняемого доказательств невиновности).

На родине Паскаля в Клермоне жила в это время старшая сестра Б. Паскаля Жильберта; ее муж Флорен Перье, служа в суде, свободное время посвящал наукам. 15 ноября 1647 года Паскаль отправляет Перье письмо, в котором просит сравнить уровни ртути в трубке Торричелли у подножия и на вершине горы Пюи-де-Дом: «Вы понимаете, если бы высота ртути на вершине горы оказалась меньшей, чем у подошвы (я так думаю по многим основаниям, хотя все, писавшие об этом предмете, придерживаются другого мнения), то из этого можно было бы заключить, что единственная причина явления — тяжесть воздуха, а не пресловутый horror vacui (боязнь пустоты — С. Г.). Ясно, в самом деле, что внизу горы воздух должен быть сгущеннее, чем наверху, между тем как нелепо предполагать в нем больший страх пустоты у подножия, нежели на вершине». Эксперимент по разным причинам откладывался и состоялся лишь 19 сентября 1648 года в присутствии пяти «уважаемых жителей Клермона». В конце года вышла брошюра, в которую были включены письмо Паскаля и ответ Перье с очень скрупулезным описанием опыта. При высоте горы около 1,5 *км* разница уровней ртути составила 82,5 *мм*; это «повергло участников эксперимента в восхищение и удивление» и, вероятно, было неожиданным для Паскаля. Предположить существование предварительных оценок невозможно, а иллюзия легкости воздуха была очень велика. Результат был столь ощутим, что уже одному из участников эксперимента аббату де ла Мару приходит в голову мысль, что результаты может дать эксперимент в куда более скромных масштабах. И, действительно, разница уровней ртути у основания и наверху собора Нотр-Дам-де-Клермон, имеющего высоту 39 *м*, составила 4,5 *мм*. Если бы Паскаль допускал такую возможность, он не стал бы ожидать десять месяцев. Получив известие от Перье, он повторяет эксперименты на самых высоких зданиях Парижа, получая те же результаты. Паскаль назвал этот эксперимент «великим экспериментом равновесия жидкостей» (это название может вызвать удивление, поскольку речь идет о равновесии воздуха и ртути и тем самым воздух назван жидкостью). В этой истории есть одно запутанное место.

Декарт утверждал, что именно он подсказал идею эксперимента. Вероятно, здесь произошло какое-то недоразумение, так как трудно предположить, что Паскаль сознательно не ссылался на Декарта.

Паскаль продолжает экспериментировать, используя наряду с барометрическими трубками большие сифоны (подбирая короткую трубку так, чтобы сифон не работал); он описывает разницу в результатах экспериментов для различных местностей Франции (Париж, Оверњь, Дьепп). Паскаль знает, что барометр можно использовать как высотомер (альтиметр), но вместе с тем понимает, что зависимость между уровнем ртути и высотой местности — не простая и ее не удается пока обнаружить. Он замечает, что показания барометра в одной и той же местности зависят от погоды; сегодня предсказание погоды — основная функция барометра (прибор для измерения «изменений воздуха» хотел построить Торричелли). А однажды Паскаль решил вычислить общий вес атмосферного воздуха («мне хотелось доставить себе это удовольствие и я провел расчет»). Получилось 8,5 триллиона французских фунтов.

Мы не имеем возможности останавливаться на других опытах Паскаля о равновесии жидкостей и газов, поставивших его наряду с Галилеем и Симоном Стевином (1548—1620) в число создателей классической гидростатики. Здесь и знаменитый закон Паскаля, и идея гидравлического пресса, и существенное развитие принципа возможных перемещений. Одновременно он придумывает, например, зрелищно эффектные опыты, иллюстрирующие открытый Стевином парадоксальный факт, что давление жидкости на дно сосуда зависит не от формы сосуда, а лишь от уровня жидкости: в одном из опытов наглядно видно, что требуется груз в 100 фунтов, чтобы уравновесить давление на дно сосуда воды весом в одну унцию; в процессе опыта вода замораживается, и тогда хватает груза в одну унцию. Паскаль демонстрирует своеобразный педагогический талант. Было бы хорошо, если бы и сегодня школьника удивляли те факты, которые поражали Паскаля и его современников.

Физические исследования Паскаля были прерваны в 1653 году в результате трагических происшествий, о которых мы расскажем ниже.

5. «Математика случая»

В январе 1646 года Этьен Паскаль во время гололеда вывихнул бедро, и это едва не стоило ему жизни. Реальность потери отца произвела ужасное впечатление на сына, и это прежде всего сказалось на его здоровье: головные боли стали невыносимыми, он мог передвигаться лишь на костылях и был в состоянии проглотить только несколько капель теплой жидкости. От врачей-костоправов, лечивших отца, Б. Паскаль узнал об учении Корнелия Янсения (1585—1638), которое в то время распространялось во Франции, противостоя иезуитизму (последний существовал к тому времени примерно сто лет). На Паскаля произвел наибольшее впечатление побочный элемент в учении Янсения: допустимо ли бесконтрольное занятие наукой, стремление все познать, все разгадать, связанное прежде всего с неограниченной пытливостью человеческого ума или, как писал Янсений, с «похотью ума». Паскаль воспринимает свою научную деятельность как греховную, а выпавшие на его долю беды — как кару за этот грех. Это событие сам Паскаль назвал «первым обращением». Он решает отказаться от дел «греховных и противных богу». Однако это ему не удается: мы уже забежали вперед и знаем, что вскоре он каждую минуту, которую ему оставляет болезнь, посвятит физике.

Здоровье несколько улучшается, и с Паскалем происходят вещи, мало понятные для его близких. Он мужественно переносит в 1651 году смерть отца, и его рационалистические, внешне холодные рассуждения о роли отца в его жизни резко контрастируют с реакцией пятилетней давности. А потом у Паскаля появились знакомые, мало подходящие для янсениста. Он путешествует в свите герцога де Роанне и знакомится там с кавалером де Мере, человеком высоко образованным и умным, но несколько самоуверенным и поверхностным. С де Мере охотно общались великие современники, и только поэтому его имя сохранилось в истории. При этом он умудрился писать Паскалю письма с поучениями по разным вопросам, не исключая и математики. Сейчас все это выглядит наивным и, по словам Сент-Бева, «такого письма вполне достаточно, чтобы погубить человека, его писавшего, во мнении потомства». Тем не менее довольно длительное время Паскаль охотно общался с де Мере, он оказался способным учеником кавалера по части светской жизни.

Мы переходим к истории о том, как «задача, поставленная перед суровым янсенистом светским человеком, стала источником теории вероятностей» (Пуассон). Собственно, задач было две и, как выяснили историки математики, обе они были известны задолго до де Мере. Первый вопрос состоит в том, сколько раз нужно кинуть две игральные кости, чтобы вероятность того, что хотя бы один раз выпадет две шестерки, превысит вероятность того, что две шестерки не выпадут ни разу. Де Мере и сам решил эту задачу, но, к сожалению... двумя способами, давшими разные ответы: 24 и 25 бросков. Будучи уверенным в одинаковой достоверности обоих способов, де Мере обрушивается на «непостоянство» математики. Паскаль, убедившись в том, что правильный ответ — 25, даже не приводит решения. Основные его усилия были направлены на решение второй задачи — задачи «о справедливом разделе ставок». Происходит игра, все участники (их число может быть больше двух) вначале делают ставки в «банк»; игра разбивается на несколько партий, и для выигрыша банка надо выиграть некоторое фиксированное число партий. Вопрос состоит в том, как следует справедливо разделить банк между игроками в зависимости от числа выигранных ими партий, если игра не доведена до конца (никто не выиграл числа партий, достаточного для получения банка). По словам Паскаля, «де Мере.. даже не смог подступиться к этому вопросу...».

Никто из окружения Паскаля не сумел понять предложенное им решение, но все же достойный собеседник нашелся. Между 29 июля и 27 октября Паскаль обменивается письмами с Ферма (при посредничестве Пьера Каркави, унаследовавшего функции Мерсенна). Часто считают, что в этой переписке родилась теория вероятностей. Ферма решает задачу о ставках иначе, чем Паскаль, и первоначально возникают некоторые разногласия. Но в последнем письме Паскаль констатирует: «Наше взаимопонимание полностью восстановлено», и далее: «Как я вижу, истина одна и в Тулузе и в Париже». Он счастлив тем, что нашел великого единомышленника: «Я и впредь хотел бы по мере возможностей делиться с вами своими мыслями».

В том же 1654 году Паскаль опубликовал одну из самых популярных своих работ «Трактат об арифметическом треугольнике». Теперь его называют треугольником Паскаля, хотя оказалось, что он был известен еще в Древней Индии, а в XVI веке был переоткрыт Штифелем. В основе лежит простой способ вычислять число сочетаний C_n^k индукцией по n (по формуле $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$). В этом трактате впервые принцип математической индукции, который фактически применялся раньше, формулируется в привычной для нас форме.

В 1654 году Паскаль в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии» перечисляет работы, которые готовятся им к публикации, и в их числе трактат, который «может по праву претендовать на ошеломляющее название «Математика случая».

6. Луи де Монтальт

Вскоре после смерти отца Жаклина Паскаль уходит в монастырь, и Блез Паскаль лишается присутствия очень близкого человека. Какое-то время его привлекает возможность жить, как живет большинство людей: он подумывает о том, чтобы купить должность в суде и жениться. Но этим планам не суждено было сбыться. В середине ноября 1654 года, когда Паскаль переезжал мост, передняя пара лошадей сорвалась, а коляска чудом задержалась у края пропасти. С тех пор, по словам Ламетри, «в обществе или за столом Паскалю всегда была необходима загородка из стульев или сосед слева, чтобы не видеть страшной пропасти, в которую он боялся упасть, хотя знал цену подобным иллюзиям». 23 ноября происходит необычный нервный припадок. Находясь в состоянии экстаза, Паскаль записывает на клочке бумаги мысли, которые проносятся в его голове. Позднее он перенес эту запись на пергамент; после его смерти обе бумаги обнаружили зашитыми в его камзоле. Это событие называют «вторым обращением» Паскаля.

С этого дня, по свидетельству Жаклины, Паскаль чувствует «огромное презрение к свету и почти непреодолимое отвращение ко всем принадлежащим ему вещам». Он прерывает занятия и с начала 1655 года поселяется в монастыре Пор-Рояль, добровольно ведя монашеский образ жизни.

В это время Паскаль пишет «Письма к провинциалу» — одно из величайших произведений французской литературы. «Письма» содержали критику иезуитов. Они издавались отдельными выпусками — «письмами», — начиная с 23 января 1656 года до 23 марта 1657 года (всего 18 писем). Автора — «друга провинциала» — звали Луи де Монтальтом. Слово «гора» в этом псевдониме (la montagne) уверенно связывают с воспоминаниями об опытах на Пюи-де-Дом. Письма читали по всей Франции, иезуиты были в бешенстве, но не могли достойно ответить (королевский духовник отец Анна́ предлагал 15 раз — по числу написанных к тому времени писем — сказать, что Монтальт — еретик). За автором, оказавшимся смелым и талантливым конспиратором, охотился судебный следователь, которого контролировал сам канцлер Сегье, когда-то покровительствовавший создателю арифметической машины (по свидетельству современника, уже после двух писем канцлеру «семь раз отворяли кровь»), и, наконец, в 1660 году государственный совет постановил сжечь книгу «мнимого Монтальта». Но это было по существу символическим мероприятием. Тактика Паскаля дала поразительные результаты. «Делались попытки самыми различными способами показать иезуитов отвратительными; Паскаль сделал больше: он показал их смешными», — так оценивает «Письма» Вольтер. «Шедевром шутливой логики» назвал их Бальзак, «кладом для комедиографа» — Расин. Образы Паскаля предвещали появление мольеровского Тартюфа.

Работая над «Письмами», Паскаль ясно понимал, что правильное владение логикой важно не только математикам. В Пор-Рояле много думали о системе образования, и существовали даже специальные янсенистские «маленькие школы». Паскаль активно включился в эти размышления, сделав, например, интересные замечания о первоначальном обучении грамоте (он считал, что нельзя начинать с изучения алфавита). В 1667 году посмертно вышли два фрагмента работы Паскаля «Разум геометра и искусство убеждения». Это сочинение не является научной работой; его назначение более скромно — быть введением к учебнику геометрии для янсенистских школ. Многие высказывания Паскаля производят очень сильное впечатление, и не верится, что такая четкость формулировок была достижима в середине XVII века. Вот одно из них: «Все должно быть доказано и при доказательстве нельзя использовать ничего, кроме аксиом и ранее доказанных теорем. Никогда нельзя злоупотреблять тем обстоятельством, что разные вещи нередко обозначаются одним и тем же словом, поэтому определяемое слово должно быть мысленно заменено определением». В другом месте Паскаль замечает, что обязательно существуют неопределяемые понятия. Исходя из этих высказываний, Жак Адамар (1865—1963) считал, что Паскалю оставался маленький шаг, чтобы произвести «глубокую революцию во всей логике — революцию, которую Паскаль мог бы осуществить тремя веками раньше, чем это действительно случилось». Вероятно, здесь имеется в виду тот взгляд на аксиоматические теории, который сложился после открытия неевклидовой геометрии.

7. Амос Деттонвилль

«Я провел много времени в изучении отвлеченных наук; недостаток сообщаемых ими сведений отбил у меня охоту к ним. Когда я начал изучение человека, я увидал, что эти отвлечения ему несвойственны и что я еще больше запутался, углубляясь в них, чем другие, не зная их». Эти слова Паскаля характеризуют его настроение в последние годы жизни. И все же полтора года из них он занимался математикой ...

Началось это весной 1658 года как-то ночью, когда во время страшного приступа зубной боли Паскаль вспомнил одну нерешенную задачу Мерсенна про циклоиду. Он замечает, что напряженные размышления отвлекают от боли. К утру он уже доказал целый ряд результатов о циклоиде и ... исцелился от зубной боли. Поначалу Паскаль считает случившееся грехом и не собирается записывать полученные результаты. Позднее, под влиянием герцога де Роанне, он изменяет свое решение; в течение восьми дней, по свидетельству Жильберты Перье, «он только и делал, что писал, пока рука могла писать». А затем в июне 1658 года Паскаль, как это часто делалось тогда, организовал конкурс, предложив крупнейшим математикам решить шесть задач про циклоиду. Наибольших успехов добились Христиан Гюйгенс (1629—1695), решивший четыре задачи, и Джон Валлис (1616—1703), у которого с некоторыми пробелами были решены все задачи. Но наилучшей была признана работа неизвестного Амоса Деттонвилля. Гюйгенс признавал позднее, что «эта работа выполнена столь тонко, что к ней нельзя ничего добавить». Заметим, что «Amos Dettonville» состоит из тех же букв, что «Louis de Montalte». Так был придуман новый псевдоним Паскаля. На премиальные 60 пистолей труды Деттонвилля были изданы.

Теперь несколько слов о работе. Прежде всего приведем слова Паскаля о кривой, называемой циклоидой или рулеттой: «Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; . . . ибо это ни что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота, считая, что колесо — идеальный круг, гвоздь — точка его окружности, а земля — идеально плоская» (см. рис. 7). Паскаль считал, что циклоиду открыл Мерсенн, хотя на самом деле это сделал Галилей. Первоначальный интерес к этой кривой стимулировался тем, что ряд интересных задач для нее удалось решить элементарно. Например, по теореме Торричелли, чтобы провести касательную к циклоиде в точке A (рис. 8), нужно взять соответствующее этой точке положение производящего (катящегося) круга и соединить его верхнюю точку B с A (попытайтесь это доказать!). Вот еще одна теорема, которую Торричелли и Вивиани приписывают Галилею: площадь криволинейной фигуры, ограниченной

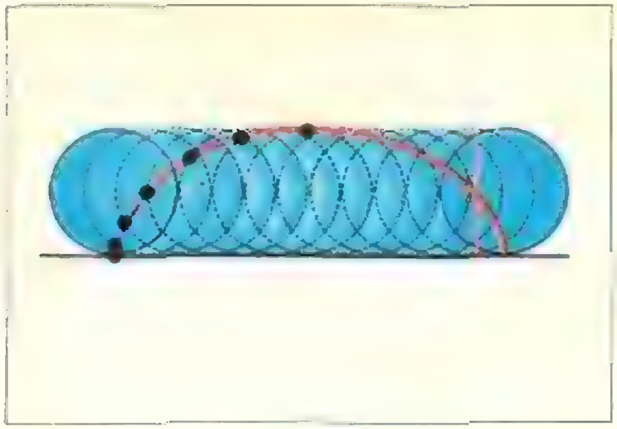


Рис. 7.

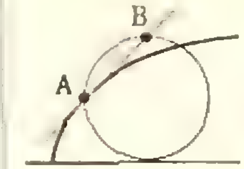


Рис. 8.

Рис. 9.

аркой циклоиды (на рис. 9 она закрашена), равна утроенной площади производящего круга.

Задачи, рассмотренные Паскалем, уже не допускают элементарных решений (площадь и центр тяжести произвольного сегмента циклоиды, объемы соответствующих тел вращения и т. д.). На этих задачах Паскаль разработал по существу все, что необходимо для построения дифференциального и интегрального исчисления в общем виде. Лейбниц, который делит с Ньютоном славу создателей этой теории, пишет, что, когда, по совету Гюйгенса, он ознакомился с работами Паскаля, его «озарило новым светом», он удивился, насколько был близок Паскаль к построению общей теории, и неожиданно остановился, будто «на его глазах была пелена».

Для работ, предвосхищавших появление дифференциального и интегрального исчисления, было характерно то, что интуиция их авторов сильно опережала возможности провести строгие доказательства; математический язык был недостаточно развит, чтобы перенести на бумагу ход мыслей. Выход был найден позднее путем введения новых понятий и специальной символики. Паскаль не прибегал ни к какой символике, но он так виртуозно владел языком, что временами кажется, что у него в этом просто не было потребности. Приведем высказывание Н. Бурбаки: «Валлис в 1655 году и Паскаль в 1658 году составили каждый для своего употребления языки алгебраического характера, в которых, не записывая ни единой формулы, они дают формулировки, которые можно немедленно, как только будет понят их механизм, записать в формулах интегрального исчисления. Язык Паскаля особенно ясен и точен; и если не всегда понятно, почему он отказался от применения алгебраических обозначений не только Декарта, но и Виета, все же нельзя не восхищаться его мастерством, которое могло проявиться лишь на основе совершенного владения языком». Хочется сказать, что здесь Паскаль-писатель помог Паскалю-математику.

8. «Мысли».

После середины 1659 года Паскаль уже не возвращался ни к физике, ни к математике. В конце мая 1660 года он в последний раз приезжает в родной Клермон; Ферма приглашает его заехать в Тулузу. Горько читать ответное письмо Паскаля от 10 августа. Вот несколько выдержек из него: «... в настоящее время я занимаюсь вещами, столь далекими от геометрии, что с трудом вспоминаю о геометрии... хотя Вы тот человек, кого во всей Европе я считаю самым крупным математиком, не это качество привлекает меня; но я нахожу столько ума и прямоты в Вашей беседе и поэтому ищу общения с Вами...

я нахожу математику наиболее возвышенным занятием для ума, но в то же время я знаю, что она столь бесполезна, что я делаю малое различие между человеком, который только геометр, и искусным ремесленником. Поэтому я называю ее самым красивым ремеслом на свете, но в конце концов это лишь ремесло. И я часто говорил, что она хороша, чтобы испытать свою силу, но не для приложения этой силы...». И, наконец, строчки, говорящие о физическом состоянии Паскаля: «Я так слаб, что не могу ни ходить без палки, ни ездить верхом. Я не могу даже ехать в экипаже более двух или трех лье...». В декабре 1660 года Гюйгенс дважды посетил Паскаля и нашел его глубоким стариком (Паскалю было 37 лет), который не в состоянии вести беседу.

Паскаль отдает последние годы жизни «изучению человека». Ему так и не удалось завершить свою главную книгу. Оставшиеся материалы были изданы посмертно в разных вариантах под разными заглавиями. Чаще всего эту книгу называют просто «Мысли».

Блез Паскаль скончался 19 августа 1662 года.

Литература

Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И. Паскаль. М., «Наука», 1971.

Разглядывая сквозь щель

В этой задаче вам предстоит объяснить результаты эксперимента, который вы сами же должны проделать. На рисунке 1 показана решетка из вертикальных и горизонтальных линий. Возьмите кусок картона, проведите по нему лезвием бритвы и посмотрите на рисунок одним глазом через образовавшуюся в картоне тонкую щель. Щель держите рядом с глазом и расположите ее горизонтально. Расстояние от глаза до рисунка должно быть 30—40 см. Вы обнаружите, что в решетке сохранились только вертикальные линии, а горизонтальные исчезли. Куда они девались?

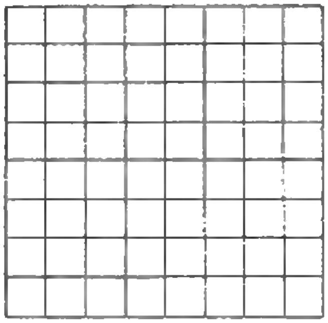


Рис. 1.

У вас не получился эксперимент? Вы видите всю решетку? Или, наоборот, ничего не видите? В первом случае у вас слишком широкая щель, во втором — слишком узкая. Надо немного повозиться: попробуйте слегка сгибать картон, чтобы ширина щели менялась (оптимум — порядка 1—10 микрон). Опыт лучше удается, если решетка сильно освещена, а обращенная к глазу сторона картона не освещена совсем.

Ну, вот, наконец, у вас получилось. Не правда ли, несколько странное зрелище?

(Окончание см. с. 21)

Блез Паскаль

Трактат о равновесии жидкостей

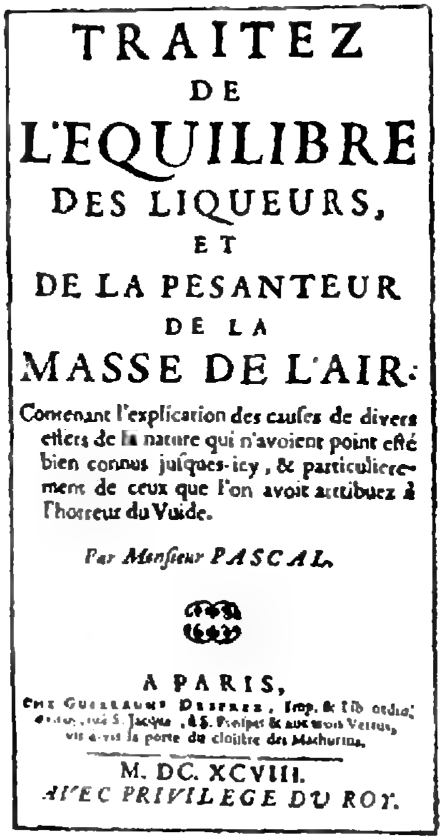
Мы помещаем здесь первую главу из трактата Паскаля, в котором он сформулировал свой знаменитый закон об условиях равновесия жидкости, обосновал принцип действия гидравлических машин и разъяснил так называемый гидростатический парадокс (все эти проблемы рассматриваются в курсе физики для шестого класса). Полное название этого сочинения звучит следующим образом: «Трактаты о равновесии жидкостей и весе массы воздуха, содержащие объяснение причин различных явлений природы, которые до сих пор не были достаточно известны и, в частности, тех, которые приписывают боязни пустоты». Оно было опубликовано в 1663 году, то есть через год после смерти автора. Паскаль написал его в 1651—1653 годах.

На русском языке этот трактат в переводе А. Н. Долгова опубликован в книге «Начала гидростатики; Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль», изданной в 1933 году Государственным технико-теоретическим издательством. Приведенные в статье рисунки заимствованы из трактата. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

ГЛАВА I

О том, что жидкости имеют вес, соответствующий высоте их стояния

Если прикрепить к стене несколько сосудов, один такой, как на рисунке первом, другой наклонный, как на втором, затем более широкий, как на третьем, потом узкий, как на четвертом, затем такой, который представляет собою не что иное, как узкую трубку, примыкающую внизу к широкому, но не имеющему почти высоты сосуду, как на рисунке пятом, наполнить их все водой до одинаковой высоты, сделать у всех внизу одинаковые отверстия, каковые закрыть пробками, чтобы удержать воду, то опыт покажет, что нужна одинаковая сила для того, чтобы воспрепятствовать этим пробкам выпасть, хотя вода в этих различных сосудах находится в весьма



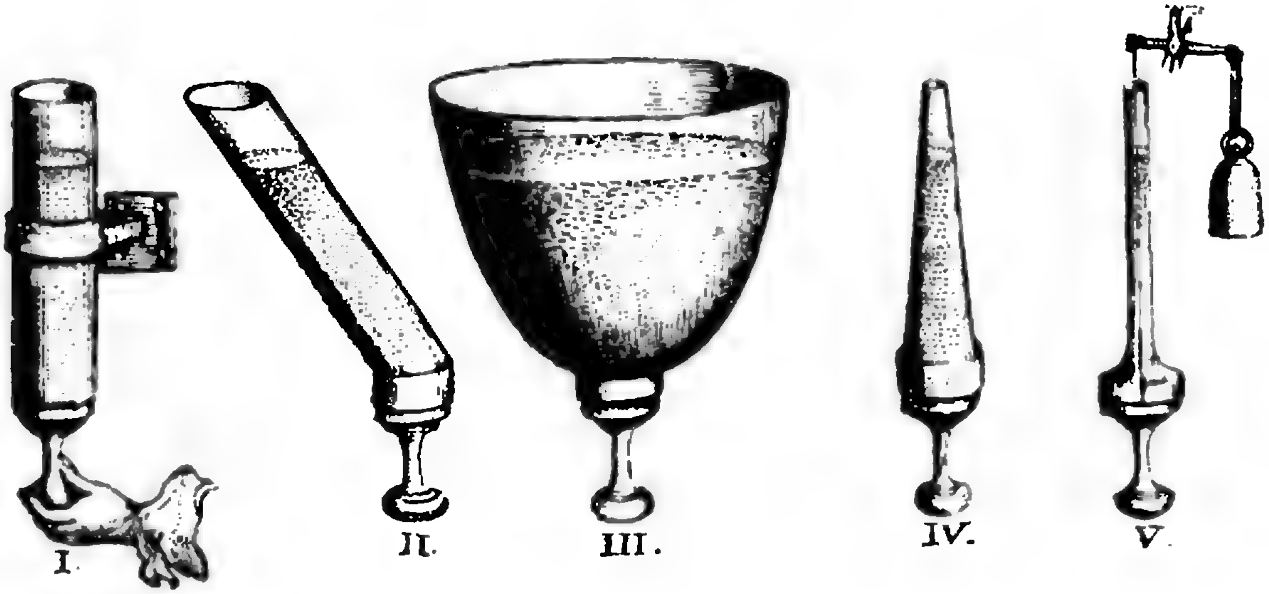
TRAITEZ
DE
L'EQUILIBRE
DES LIQUEURS,
ET
DE LA PESANTEUR
DE LA
MASSE DE L'AIR:

Contenant l'explication des cauſes de divers effets de la nature qui n'avoient point eſté bien connus juſques-icy, & particulierement de ceux que l'on avoit attribuez à l'horreur du Vuide.

Par Monſieur PASCAL.

A PARIS,

M. DC. XCVIII.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.



различных количествах. Происходит это потому, что вода имеет одинаковую высоту во всех сосудах, и мерой указанной силы является вес воды, содержащейся в первом сосуде, однородном по своей форме. И если это количество воды весит сто фунтов *), то нужна сила в сто фунтов, чтобы удержать каждую из пробок, даже и у пятого сосуда, хотя вода, заключенная в нем, не весит и одной унции**).

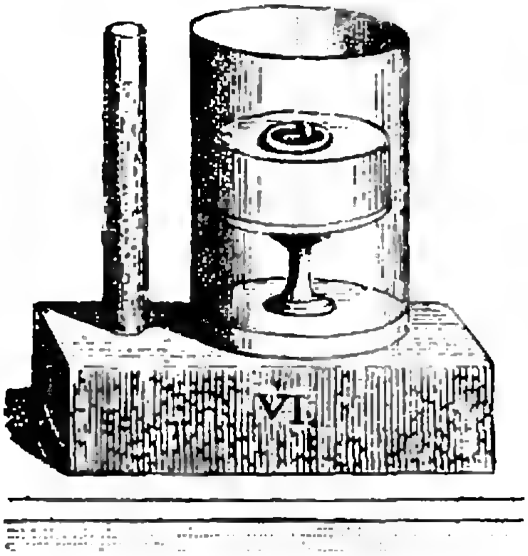
Чтобы проверить это точно, надо закрыть отверстие пятого сосуда круглым куском дерева, обернутым прядью, как поршень насоса. (Поршень должен входить в отверстие и проходить через него с такой точностью, чтобы не застревать и в то же время препятствовать выходу воды.) Затем прикрепить к середине этого поршня нитку, которая проходила бы через эту тонкую трубку, привязать ее к одному плечу коромысла весов, а на другое плечо повесить груз в сто фунтов. Тогда мы увидим полное равновесие этого груза в сто фунтов с водой в тонкой трубке, которая весит одну унцию. Если же хоть немного уменьшить груз в сто фунтов, то вода опустит поршень, а следовательно, и то плечо коромысла весов, к которому он прикреплен, и поднимет то, на котором висит груз немного менее ста фунтов. Если же эта вода замерзнет, а лед не пристынет к сосуду, то, чтобы удержать его в равновесии, достаточно будет иметь на другом плече коромысла весов всего лишь одну унцию. Если же приблизить к сосуду огонь и растопить лед, то понадобятся уже сто фунтов, чтобы уравновесить тяжесть этого льда, расплавленного в воду, хотя мы располагаем всего только одной унцией ее.

То же произойдет, если отверстия, которые закрываются пробками, будут сбоку или же в верхней части сосудов; проверить это будет еще легче, именно следующим образом.

Надо взять сосуд, закрытый со всех сторон, сделать в верхней части его два отверстия, одно очень узкое, а другое более широкое, и укрепить над тем и другим трубки такого же размера, как и отверстия (рис. VI). Если вставить теперь в широкую трубку поршень, а в тонкую налить воды, то легко видеть, что на поршень надо будет положить большой груз, чтобы вес воды в тонкой трубке не вытолкнул его вверх, подобно тому как в первых опытах нужна была сила в сто фунтов, чтобы воспрепятствовать выталкиванию поршня вниз,

---

*) 1 фунт равен 453,6 г.
**) 1 унция равна 28,35 г.



когда и отверстие находилось внизу. Если бы отверстие находилось сбоку, то нужна была бы такая же сила, чтобы вес воды не вытолкнул поршень в сторону.

И если бы трубка, заполненная водой, была во сто раз шире или во сто раз уже, но вода стояла бы во всех случаях на одной высоте, то всегда понадобился бы один и тот же груз, чтобы уравновесить воду. Как только груз этот будет уменьшен, вода опустится и поднимет уменьшенный груз.

Если же налить воду в трубку на двойную высоту, то для уравновешивания воды понадобится действие на поршень двойного груза. Точно так же, если сделать отверстие, в которое вставлен поршень, вдвое большего размера, то надо будет удвоить и силу, необходимую для удержания удвоенного поршня. Отсюда видно, что сила, нужная для того, чтобы воспрепятствовать воде вытекать из отверстия, пропорциональна высоте стояния воды, а не ширине сосуда, и что мерой этой силы всегда является вес воды, заключающейся в колонне ее с высотой, равной высоте стояния воды, и основанием, равным величине отверстия.

То, что я сказал о воде, относится и ко всем другим видам жидкостей.

Разглядывая сквозь щель

(Окончание. Начало см. с 18)

А теперь поверните щель на 90° и вы увидите, что исчезли вертикальные линии решетки и появились горизонтальные. Для того чтобы разобраться в увиденном, советуем посмотреть еще на кольцо. При вертикальной щели вы увидите размытыми левую и правую стороны кольца, при горизонтальной — верхнюю и нижнюю (рис. 2). Повторите опыт при разных наклонах щели. Оказывается, что всегда размываются те участки кольца, которые идут вдоль щели, и сохраняются идущие поперек.

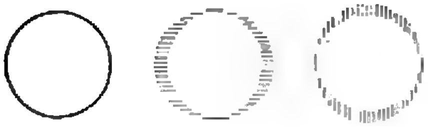


Рис. 2.

Если, однако, у вас все наоборот (сохранились линии, параллельные щели, и исчезли перпендикулярные), то это значит, что вы не соблюли условий (у вас слишком широкая щель и вы слишком приблизились к решетке). Теперь, согнув картон так, чтобы щель разошлась до 0,5—1 мм (или прорезав новую щель нужной ширины), приблизьтесь с нею к решетке на расстояние 5—7 см. И вы увидите обратное тому, что было в предыдущей задаче: при горизонтальном положении щели отчетливо будут видны горизонтальные линии, при вертикальном — вертикальные!

Видимо, это тоже можно объяснить. Но сделать это надо так, чтобы не пострадала наша дифракционная теория. Иначе вам придется заново объяснять предыдущий результат. А он ведь противоположен данному.

А. Д. Бендукидзе

Золотое сечение

Иоганн Кеплер говорил, что геометрия владеет двумя сокровищами — теоремой Пифагора и золотым сечением. И если первое из этих сокровищ можно сравнить с мерой золота, то второе — с драгоценным камнем.

Теорему Пифагора знает каждый школьник, а что такое золотое сечение — далеко не все. Вот мы и решили рассказать читателям об этом драгоценном камне.

Что такое золотое сечение?

Говорят, что точка C производит золотое сечение отрезка AB, если

$$AC : AB = CB : AC. \qquad (1)$$

Итак, золотое сечение — это такое деление целого на две неравные части, при котором бо́льшая часть так относится к целому, как меньшая — к большей. В геометрии золотое сечение называется также делением отрезка в крайнем и среднем отношении.

Если длину отрезка AB обозначить через a, а длину отрезка AC — через x, то длина отрезка CB будет $a - x$ (рис. 1), и пропорция (1) примет следующий вид:

$$x : a = (a - x) : x \qquad (2)$$

Из этой пропорции видно, что при золотом сечении длина большего отрезка есть среднее геометрическое, или, как часто говорят, среднее пропорциональное длин всего отрезка и его меньшей части:

$$x = \sqrt{a(a-x)}.$$

Легко сообразить, что верно и обратное: если отрезок разбит на два неравных отрезка так, что длина большего отрезка есть среднее геометрическое длин всего отрезка и его меньшей части, то мы имеем золотое сечение данного отрезка.

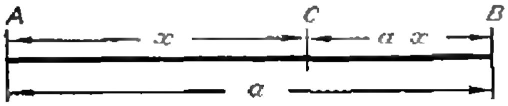


Рис. 1.

Геометрически золотое сечение отрезка AB можно построить следующим образом: в точке B восставляем перпендикуляр к AB (рис. 2) и на нем откладываем $BD = 0{,}5\,AB$; далее, соединив точки A и D, откладываем $DE = BD$ и, наконец, $AC = AE$. Точка C является искомой — она производит золотое сечение отрезка AB. В самом деле, заметим, что по теореме Пифагора

$$(AE + ED)^2 = AB^2 + BD^2$$

и по построению

$$AE = AC, \quad ED = BD = 0{,}5\,AB.$$

Из этих равенств следует, что

$$AC^2 + AC \cdot AB = AB^2,$$

а отсюда уже легко получается равенство (1).

Решая уравнение (2) относительно x, мы находим, что

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\,a \approx 0{,}62a.$$

Значит, $a - x \approx 0{,}38\,a$. Таким образом, части золотого сечения составляют приблизительно 62 % и 38 % всего отрезка.

Немного истории

Древнейшим литературным памятником, в котором встречается деление отрезка в отношении золотого сечения, являются «Начала» Евклида (III в. до н. э.). Уже во II книге «Начал» Евклид строит золотое сечение, а в дальнейшем применяет его для построения некоторых правильных многоугольников и многогранников.

Но золотое сечение было известно и до Евклида. В частности, знали о нем Пифагор и его ученики (VI век до н. э.). В философской школе Пифагора помимо философии и математики изучали и гармонию. Занимаясь теорией гармонии, пифагорейцы пришли к заключению, что качественные отличия звуков обусловлены количественными различиями между длинами струн. Это вдохновило их, и они постарались пойти дальше — выразить все закономерности мира через числа, полагая, что в основу мирового порядка бог положил именно число. Поэтому пифагорейцы в числах и их отношениях (а последние рассматривались как отношения отрезков) искали магическое, сверхъестественное. И в геометрии не обошлось без мистики. Здесь особо следует отметить любовь пифагорейцев к звездчатому пятиугольнику, составленному из диагоналей правильного пятиугольника.

Вот что пишет об этом известный математик и историк математики ван дер Варден в своей превосходной книге «Пробуждающаяся наука»: «Эта фигура, символ здоровья, служила опознавательным знаком для пифагорейцев. Когда на чужбине один из них лежал на смертном одре и не мог заплатить человеку, который ухаживал за ним вплоть до его кончины, то он велел ему изобразить на своем жилище звездчатый многоугольник; если когда-нибудь мимо пройдет пифагореец, то он не преминет осведомиться об этом. Действительно, несколько лет спустя один пифагореец увидел этот знак, и хозяин дома получил богатое вознаграждение» *).

Звездчатый пятиугольник для нас интересен в первую очередь тем, что каждая из пяти линий, составляющих эту фигуру, делит другую в отношении золотого сечения. В самом деле, так как треугольники ACD и ABE подобны (рис. 3), то $AC : AB = AD : AE$. Но $AD = BC$, а $AE = AC$, и поэтому $AC : AB = BC : AC$ — уже известная нам пропорция золотого сечения. Именно это свойство звездчатого пятиугольника и могли использовать пифагорейцы для построения правильного пятиугольника, ибо строить золотое сечение они, безусловно, умели.

К началу эпохи Возрождения усилился интерес к золотому сечению.

---

*) Б. Л. ван дер Варден. «Пробуждающаяся наука». М., Физматгиз, 1959, с. 139.

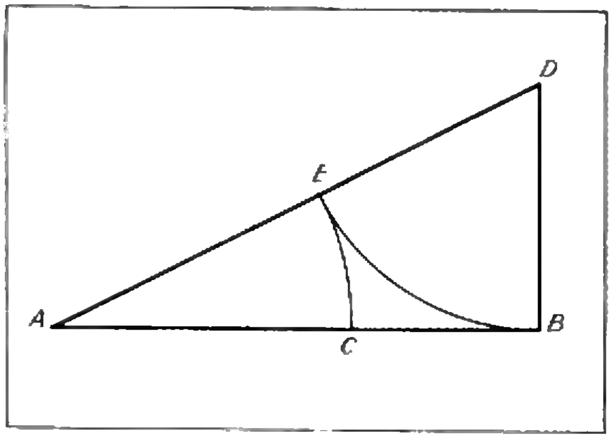


Рис. 2.

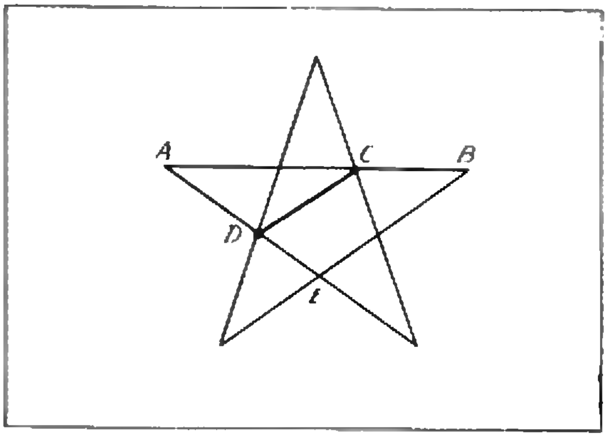
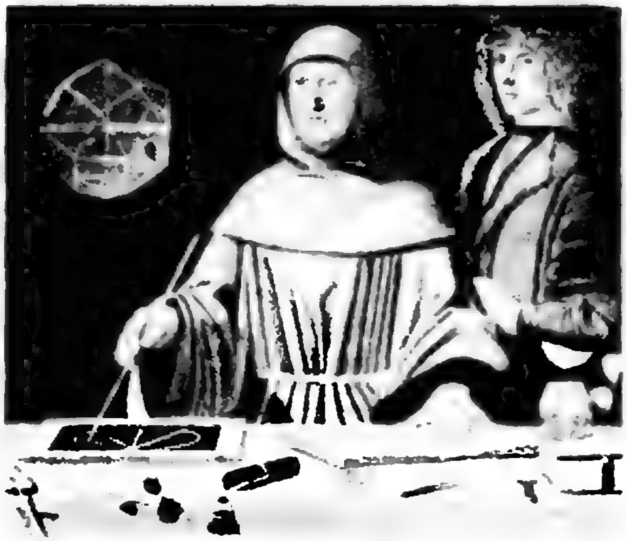
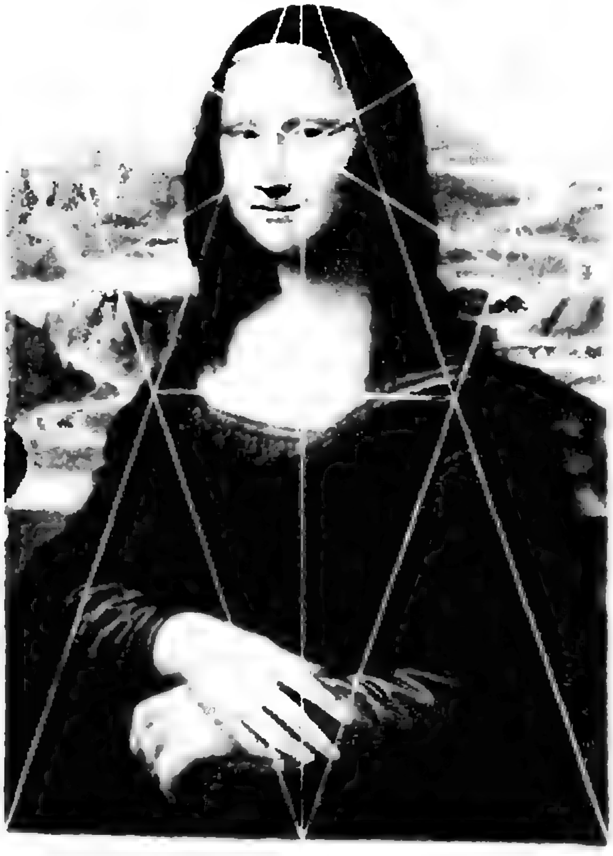


Рис. 3.



Лука Пачоли (около 1445 — позже 1509) — итальянский математик, написавший трактат о золотом сечении «Божественная пропорция».



Портрет Моны Лизы (Джоконды) был написан Леонардо да Винчи (1452—1519) — гениальным итальянским художником и ученым эпохи Возрождения. Картина привлекла внимание исследователей, которые обнаружили, что композиция рисунка основана на «золотых треугольниках» (точнее, на треугольниках, являющихся кусками правильного звездчатого пятиугольника).

Он был вызван, в первую очередь, многочисленными применениями золотого сечения как в самой геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре. Следствием этого явилось появление книги «Божественная пропорция», автором которой был крупнейший математик XV века итальянец Лука Пачоли. В своем труде Пачоли приводит тринадцать свойств золотого сечения, которое он снабжает такими эпитетами, как «исключительное», «несказанное», «превосходнейшее», «замечательнейшее», «сверхъестественное» и так далее. Впрочем, название книги само говорит об отношении автора к описываемому предмету. Небезынтересно, что иллюстрировал книгу один из инициаторов ее написания, друг Пачоли, великий Леонардо да Винчи. Между прочим, именно он ввел сам термин «золотое сечение».

Наблюдения показывают, что с эстетической точки зрения золотое сечение имеет определенные достоинства. Это подтверждается экспериментом, который был проведен в конце прошлого века: из десяти прямоугольников, среди которых был и «золотой» (со сторонами, отношение длин которых давало золотое сечение), испытуемый должен был выбрать один. И вот, около 22 % общего числа испытуемых выбрало именно «золотой прямоугольник». Нельзя обойти молчанием и то, что книги, почтовые открытки, бумажники, шоколадные плитки и множество других предметов имеют форму золотого прямоугольника. Отметим здесь же, что если от «золотого» прямоугольника отрезать квадрат или к бо́льшей стороне «золотого» прямоугольника пристроить квадрат, то получится снова «золотой» прямоугольник.

Широкое применение находит золотое сечение в архитектуре и искусстве. Множество архитектурных шедевров построено по пропорции золотого сечения. Эта же пропорция лежит в основе многих бессмертных творений Фидия, Тициана, Леонардо да Винчи, Рафаэля.

Отдали дань золотому сечению также композиторы и поэты. Известно, например, что на золотом сечении строил многие свои произведения выдающийся венгерский композитор Бела Барток. Что же касается поэтов, то здесь в первую очередь следует назвать гениального грузинского поэта Шота Руставели. Как показали новейшие исследования академика Г. В. Церетели, в основе строения поэмы Ш. Руставели «Витязь в тигровой шкуре» положены симметрия и золотое сечение. В частности, из 1587 строф поэмы больше половины — 863 — построены по пропорции золотого сечения (см. стр. 34, 53).

Золотое сечение встречается и в природе. На рисунке 4 повторено изображение раковины, помещенное на первой странице обложки. Точка *C* делит отрезок *AB* приблизительно в «золотом отношении».

Отношение золотого сечения и его замечательные свойства

Если в пропорции (2) положить $x = a\tau$, то относительно τ получится следующее уравнение:

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0 \qquad (3)$$

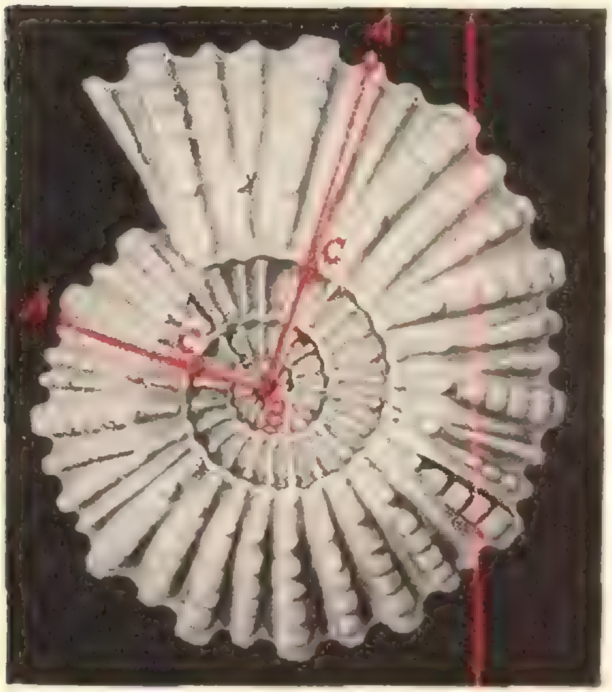
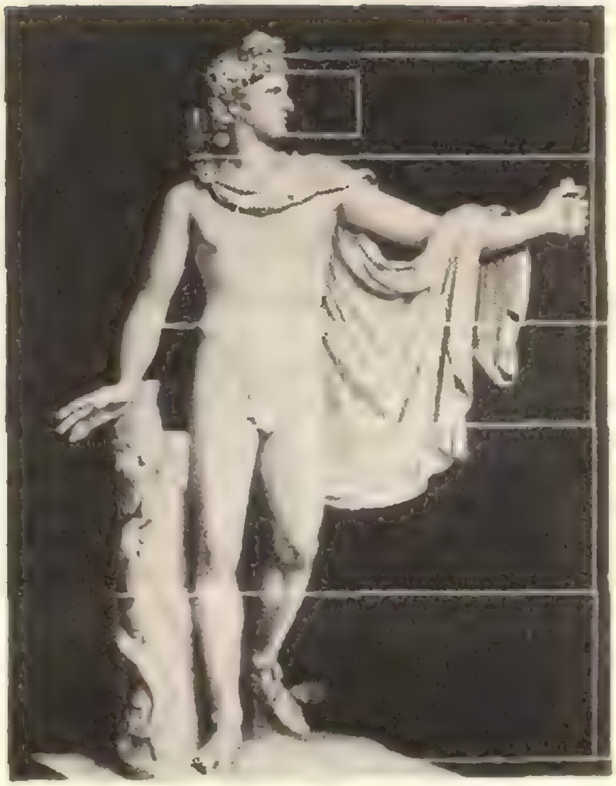


Рис. 4.



Греческий скульптор Леохар (4 в. до н. э.) создал статую Аполлона Бельведерского, воплотившего представления древних греков о мужской красоте. Линии, проведенные на снимке, определяют основные пропорции тела. Эти пропорции связаны с золотым сечением.

Положительный корень этого уравнения равен отношению золотого сечения:

$$\tau = \frac{x}{a} = \frac{a-x}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Это поистине замечательное число, обладающее рядом интересных свойств. Вот некоторые из них.

1. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\tau = 0{,}618033989\ldots, \frac{1}{\tau} = 1{,}618033989\ldots$$

—число, обратное τ, на единицу больше самого τ. Легко проверить, что это — единственное положительное число, обладающее таким свойством. В самом деле, если положительное z удовлетворяет соотношению $\frac{1}{z} = 1 + z$, то z должно быть корнем уравнения $z^2 + z - 1 = 0$. Но это уравнение имеет единственный положительный корень: $z = \tau$.

2. Переписав равенство (3) в виде $\tau=\frac{1}{1+\tau}$ и подставив в правую часть этого равенства $\frac{1}{1+\tau}$ вместо τ, получим:

$$\tau=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\tau}}.$$

Этот процесс подстановки можно продолжить. В результате мы получим следующее представление числа τ в виде бесконечной цепной дроби*):

$$\tau=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} \qquad (4)$$

Нельзя не отметить предельную простоту этого представления!

3. Вот еще одно представление числа τ:

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}. \qquad (5)$$

Чтобы придать смысл равенству (5), изучим последовательность

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\ \dots,$$

общий член которой (обозначим его через φ_n) содержит n радикалов.

Непосредственно видно, что $\{\varphi_n\}$ — возрастающая последовательность. Кроме того, она ограничена. В самом деле, так как $\varphi_1=1<2$ и $\varphi_{n+1}=\sqrt{1+\varphi_n}$, то из $\varphi_n<2$ следует, что $\varphi_{n+1}<\sqrt{3}<2$, и по индукции заключаем, что $\varphi_n<2$ для любого (натурального) n.

Итак, $\{\varphi_n\}$ — возрастающая, ограниченная последовательность. А как известно, такая последовательность является сходящейся. Обозначив предел последовательности φ_n через φ, можно написать: $\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\dots}}}$

С другой стороны, переходя к пределу в равенстве $\varphi_{n+1}=\sqrt{1+\varphi_n}$, получим: $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$.

Таким образом, (положительное) число φ является корнем квадратного уравнения $\varphi^2-\varphi-1=0$, а число $\psi=\frac{1}{\varphi}$ — корнем уравнения $\left(\frac{1}{\psi}\right)^2-\frac{1}{\psi}-1=0$, или умножая на $-\psi^2$, $\psi^2+\psi-1=0$, откуда $\psi=\tau$, $\varphi=\frac{1}{\tau}$ — получаем равенство (5). И здесь бросается в глаза предельная простота представления!

Приближение числа τ рациональными числами

Представление (4) очень удобно для приближения иррационального числа τ рациональными числами. С этой целью обратимся к «подходящим» дробям:

$$\tau_1=\frac{1}{1},\quad \tau_2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},\quad \tau_{(3)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$$

и вообще для любого n

$$\tau_n=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} \qquad (6)$$

Последовательность этих дробей имеет пределом число τ, и поэтому каждое τ_n является приближением этого числа. Непосредственные вычисления показывают, что

---

*) О цепных дробях рассказано в статьях Н. М. Бескина («Квант» № 1, 8, 1970). Более подробное изложение можно найти в книге Хинчин А. Я. «Цепные дроби» (М., Физматгиз, 1961), а также в учебном пособии для 9-х классов средних школ с математической специализацией «Алгебра» Виленкина Н. Я. и др. (М., «Просвещение», 1968).

$$\tau_1 = \frac{1}{1}, \tau_2 = \frac{1}{2}, \tau_3 = \frac{2}{3}, \tau_4 = \frac{3}{5}, \ldots$$

Этот ряд дробей построен по очень простому закону: числитель каждой дроби равен знаменателю предыдущей дроби, а знаменатель — сумме числителя и знаменателя той же дроби. А как будет дальше? Сохраняется ли эта закономерность? Легко доказать, что это так. В самом деле, как видно из формулы (6), соседние подходящие дроби τ_n и τ_{n+1} связаны соотношением

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{1 + \tau_n},$$

и поэтому из равенства $\tau_n = \frac{m}{k}$ следует, что $\tau_{n+1} = \frac{k}{m+k}$.

Этот простой закон образования подходящих дробей числа дает возможность легко выписать их последовательность:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \ldots$$

Из теории цепных дробей известно, что подходящие дроби с нечетными номерами убывают и приближаются к порождающему эти дроби числу справа, а дроби с четными номерами возрастают и приближаются к тому же числу слева. Применяя это свойство в нашем случае, можно написать:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{13} < \frac{21}{34} < \frac{55}{89} < \ldots <$$
$$< \tau < \ldots < \frac{34}{55} < \frac{13}{21} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1}.$$

Связь с числами Фибоначчи

Последовательностью Фибоначчи называется последовательность, первые два члена которой равны 1, а каждый последующий — сумме двух предыдущих *). Таким образом, эта последовательность (обозначим ее через $\{u_n\}$) определяется следующим образом:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Вот первые члены этой последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . .

Вспомнив о приближениях числа τ подходящими дробями, мы заметим, что отношение любого члена последовательности Фибоначчи к последующему члену является подходящей дробью числа τ, то есть приближенным значением отношения золотого сечения. Это приближение тем лучше, чем больше номер взятого члена.

Если же взять три последовательных члена: u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, то числа $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ и $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ являются соседними подходящими дробями числа τ, причем одна из этих дробей больше τ, а другая меньше.

Наконец, поставим следующий вопрос: как разделить целое число a на две целые части так, чтобы их отношение равнялось τ?

Так как τ — иррациональное число, то такое деление, конечно, невозможно, интересующее нас отношение может лишь приближенно равняться τ. Каково же это приближение? Ответ на этот вопрос дает теория цепных дробей.

Пусть знаменатель подходящей дроби τ_n есть a. Рассмотрим множество всех дробей со знаменателями, не большими a. Оказывается, из множества этих дробей ближе всех к числу τ находится именно τ_n.

Но знаменатели подходящих дробей являются членами последовательности Фибоначчи, поэтому если a — член последовательности Фибоначчи, то деление a с помощью τ_n будет хорошим приближением золотого сечения.

Таким образом, разделить золотым сечением на две целые части с хорошим приближением можно числа, являющиеся членами последовательности Фибоначчи. Например, золотое сечение числа 8 дает (3,5,) числа 13 — (5,8) и т. д.

---

*) Воробьев Н. Н. «Числа Фибоначчи». М., «Наука», 1969.

О. Н. Карпухин

Физика химического взаимодействия

Химическая реакция — это превращение одних веществ в другие. Однако нас могут интересовать не только продукты химического превращения, но и общие законы, по которым протекает химический процесс: как изменяется концентрация веществ, как влияют на ход реакции температура, давление и другие внешние условия.

Для решения этих задач необходимы знания не только химии, но еще, быть может даже в большей мере, физики и математики.

Мы публикуем статью, в которой рассматривается одна из основ химической физики — закон действующих масс, с помощью которого можно описать ход химической реакции во времени.

В химической реакции одни вещества могут превращаться в другие. Горение приводит к образованию воды и углекислого газа, при смешивании кислоты и щелочи образуется соль. Однако, изучая химию, мы как бы закрываем глаза на то время, когда молекулы взаимодействуют между собой, и раскрываем их вновь лишь тогда, когда продукты химической реакции уже образовались. Между тем, именно те процессы, которые происходят во время взаимодействия молекул между собой, и определяют состав продуктов химической реакции.

Химическая реакция состоит из двух основных стадий. Сначала реагирующие между собой частицы должны встретиться, а затем происходит собственно химическое превращение, при котором электронные оболочки молекул перестраиваются, и из исходных частиц образуются продукты реакции. В соответствии с этим химическая физика делится на два больших раздела: химическую кинетику и теорию элементарного акта.

Химическая кинетика изучает вопрос о том, каким образом реагирующие частицы могут встретиться между собой, какие внешние силы на них действуют, какими уравнениями можно описать изменение концентраций реагирующих частиц с течением времени, как зависит скорость химического процесса от концентрации реагентов (то есть веществ, вступающих в реакцию), от температуры, и других условий, в которых протекает химический процесс.

Теория элементарного акта химического превращения рассматривает процесс взаимодействия частиц, изменение конфигурации электронных оболочек и расстояний между атомами, входящими в молекулы.

В этой статье мы ограничимся рассказом о кинетике химической реакции.

Основной вопрос химической кинетики — это вопрос о частоте встреч реагирующих частиц.

Частицы, вступающие в реакцию, — не обязательно молекулы. Это могут быть и нейтральные атомы, и ионы, и какие-либо другие частицы. Поэтому до тех пор, пока мы не говорим о каких-то конкретных вещест-

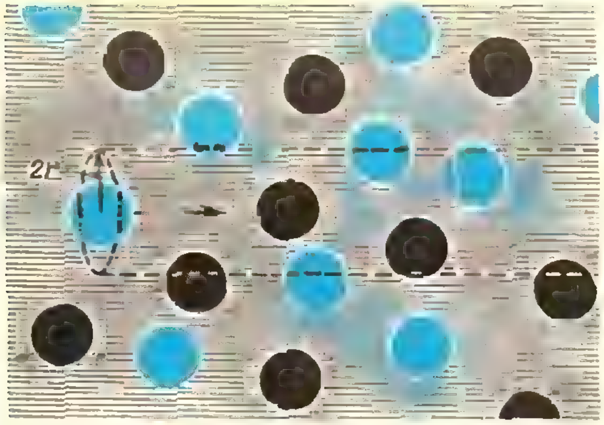


Рис. 1.

вах, участвующих в реакции, будем рассматривать просто взаимодействие между произвольными частицами.

Пусть в некотором объеме протекает реакция между частицами двух сортов A и B, практически равномерно распределенными по всему объему. Такая реакция называется бимолекулярной. И те, и другие частицы имеют форму шара радиуса r. Пусть в каждом кубическом сантиметре находится a_0 частиц сорта A и b_0 частиц сорта B. Известно, что частицы в газе движутся хаотически, то есть их скорости все время изменяются как по величине, так и по направлению. Однако средняя квадратичная скорость движения частиц $\langle v \rangle$ практически неизменна и определяется только температурой среды T и массой частицы m*):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Таким образом, каждая частица сорта A за время t пройдет путь, равный в среднем

$$s = \sqrt{\frac{3kT}{m}}t.$$

Будем считать, что частицы сорта B неподвижны, и скорость частиц сорта A не меняется после столкновений.

Во время движения частица сорта A будет сталкиваться со всеми частицами сорта B, центры которых находятся на расстоянии, меньшем $2r$, от траектории движения ее центра, то есть с теми частицами, которые как бы попадают в цилиндр, отмеченный пунктиром на рисунке 1. За время t одна частица сорта A столкнется со всеми частицами сорта B, находящимися в объеме

$$V = 4\pi r^2 s.$$

Частица сорта A может встретиться, конечно, не только с частицами сорта B, но и с другими частицами сорта A, а также со всеми иными частицами, находящимися в среде. Но эти встречи нас не интересуют, поскольку они не могут привести к химической реакции между веществами A и B.

Мы уже говорили, что в каждом кубическом сантиметре среды находится b_0 частиц сорта B; следовательно, каждая частица сорта A встретится с b_0V частицами сорта B. Всего же в 1 $см^3$ присутствует a_0 частиц сорта A. Таким образом, общее число n встреч частиц сорта A и B за время t будет

$$n = Va_0b_0.$$

За единицу времени происходит $\frac{n}{t}$ таких встреч:

$$\frac{n}{t} = 4\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}}\, a_0b_0.$$

При расчете мы не учитывали, что движутся не только частицы сорта A, но и частицы сорта B, что скорость движения частиц изменяется после столкновения, что распределение частиц по объему можно только в среднем считать равномерным. Но более точный расчет с учетом всех этих факторов приводит к изменению найденного числа встреч не более чем на 10%.

Конечно, не при каждой встрече частиц A и B происходит химическое превращение; однако число химических превращений пропорционально числу встреч.

Число химических превращений в единице объема за единицу времени обычно называют скоростью химической реакции. Скорость химической реакции между частицами A и B определяется соотношением

---

*) Поскольку $E = \frac{m\langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ (см. § 31 учебного пособия по физике для девятого класса).

$$W = \alpha 4\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}}\, a_0 b_0, \qquad (1)$$

где α — безразмерный коэффициент пропорциональности между числом встреч и числом химических превращений.

Величина α по существу означает вероятность того, что при встрече двух взаимодействующих частиц между ними произойдет химическая реакция. Какова эта вероятность и чем она определяется — это уже задача теории элементарного акта химического превращения, и на этом вопросе мы останавливаться не будем.

Соотношение (1) выражает закон действующих масс: скорость химической реакции в любой момент времени пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ в этот момент времени. Коэффициент пропорциональности, стоящий перед произведением концентраций, называется константой скорости химической реакции при данной температуре; обозначим его буквой K.

В реакции взаимодействия двух частиц с одинаковой массой величина K равна

$$K = 4\alpha\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Попробуем рассчитать величину скорости какой-нибудь простейшей химической реакции.

Задача 1. *В среде, представляющей собой идеальный газ при нормальных условиях (давление 760 мм. рт. ст, температура 0°С) протекает бимолекулярная реакция. Концентрации обоих веществ равны между собой, и никаких посторонних веществ в среде нет.*

Масса молекул A и B около 30 углеродных единиц (1 у. е. $= 1{,}67\cdot 10^{-24}$ г). Радиус молекул считать равным

$$r = 2{,}5\text{Å} = 2{,}5\cdot 10^{-8}\ см.$$

Найти скорость реакции.

Выразим массу молекул в граммах:

$$m = 30\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}\ г \approx 0{,}5\cdot 10^{-22}\ г.$$

Средняя квадратичная скорость движения молекул

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-16} эрг/град\cdot 273\ град}{0{,}5\cdot 10^{-22}\ г}} = 4{,}8\cdot 10^4 см/с = 480\ м/с.$$

Константа скорости реакции

$$K = 4\alpha\pi r^2\langle v\rangle = 4\alpha\pi(2{,}5\cdot 10^{-8}\ см)^2 \times 0{,}48\cdot 10^5\ см/с \approx 3{,}8\alpha\cdot 10^{-10}\ см^3/с.$$

Отсюда видно, что константа скорости реакции выражается в единицах ($см^3 с^{-1}$). По закону Авогадро один моль идеального газа ($6\cdot 10^{23}$ частиц) занимает при нормальных условиях объем 22,4 л. Это означает, что в 1 $см^3$ содержится $2{,}7\cdot 10^{19}$ частиц (число Лошмидта), то есть по $1{,}3\cdot 10^{19}$ молекул A и B ($a_0 = b_0 = 1{,}3\cdot 10^{19}\ см^{-3}$).

Таким образом, скорость реакции

$$W = 3{,}8\alpha\cdot 10^{-10}\frac{см^3}{с}\ (1{,}3\cdot 10^{19}\ см^{-3})^2 \approx 6{,}5\cdot 10^{28}\ \alpha\,\frac{см^3}{с}.$$

Это означает, что в каждом кубическом сантиметре газа происходит $6{,}5\cdot 10^{28}$ встреч молекул A и B в секунду.

Представим себе, что произошло бы, если бы каждая встреча приводила к химической реакции. Тогда все молекулы успели бы прореагировать за очень короткое время, равное

$$t' = \frac{a_0}{W} = \frac{1{,}3\cdot 10^{19}\ см^{-3}}{6{,}5\cdot 10^{28}\ с^{-1} см^{-3}} = 2\cdot 10^{-10}\ с.$$

Реально ли это?

Массу около 30 у. е. имеют молекулы этана (30 у. е.) и кислорода (32 у. е.). Таким образом, реакцию, которую мы рассматриваем, можно считать моделью реакции горения газа в домашней газовой плите. А вы знаете, что газ не загорится, если к нему не поднести спичку. Значит, в реакции между молекулами этана и кислорода величина коэффициента α очень мала.

Если химический процесс происходит при постоянной температуре, то достаточно знать лишь величину константы скорости реакции K, чтобы определить, как изменяются концентрации веществ в течение всего процесса. Поэтому закон действующих масс может быть записан в таком виде:

$$W = K\,[A][B], \qquad (2)$$

где символами $[A]$ и $[B]$ обозначены концентрации реагирующих веществ, изменяющиеся в ходе реакции.

Рассчитать теоретически величину константы скорости химической реакции довольно трудно, поэтому в большинстве случаев ее определяют, исходя из экспериментальных данных.

Задача 2. *Определить константу скорости реакции между веществами R и S, если из эксперимента известно, что их начальные концентрации 1 моль/л и за одну секунду в акте химического превращения участвует 10% каждого из веществ.*

За одну секунду в 1 *л* объема расходуется 0,1 *моль* вещества; значит, в каждом кубическом сантиметре происходит $6 \cdot 10^{19}$ актов химического превращения, то есть скорость реакции

$$W = 6 \cdot 10^{19}\ см^{-3}с^{-1}.$$

Подставляя в уравнение (2) значения начальных концентраций и скорости реакции W, определяем величину константы скорости реакции:

$$K = \frac{W}{[R]_0 [S]_0} = 0{,}1\ \frac{л}{моль \cdot с} = 1{,}7 \cdot 10^{-20}\ \frac{см^3}{с}.$$

Мы рассчитали значение константы K при постоянных концентрациях $[R]_0$ и $[S]_0$. Если бы скорость процесса была неизменной, вещества R и S должны были бы израсходоваться полностью за 10 *с*, поскольку, как уже было сказано, за 1 *с* расходуется 10% всего количества исходных веществ. Однако в действительности это не так. Концентрации реагентов во время реакции с течением времени уменьшаются, соответственно уменьшается и скорость их расходования, то есть скорость реакции. За один и тот же промежуток времени на разных этапах реакции расходуется различное количество веществ.

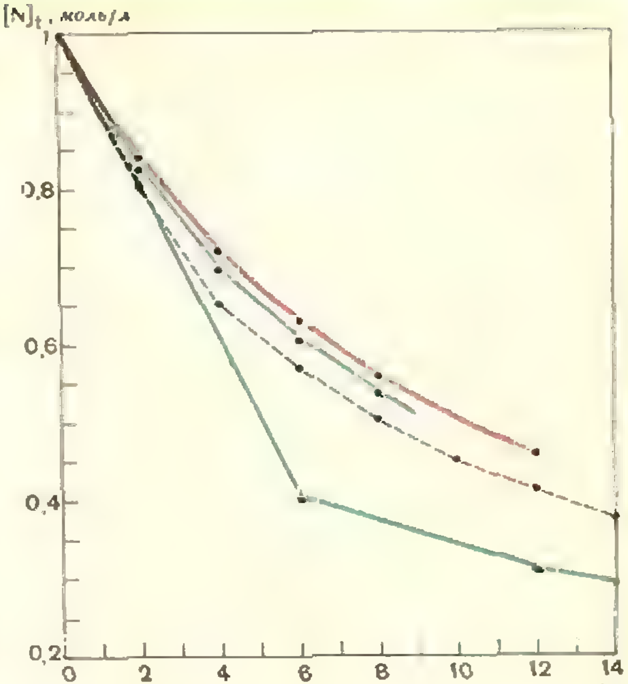


Рис. 2, *а*.

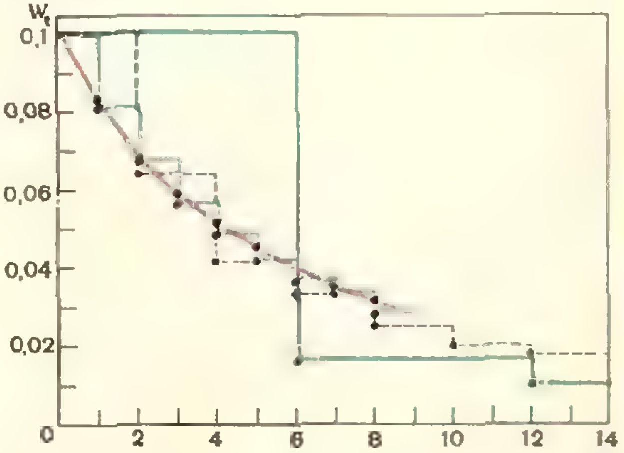


Рис. 2, *б*.

Задача 3. *Зная величину константы скорости реакции между веществами R и S (см. задачу 2), рассчитать, как изменяются концентрации реагирующих веществ с течением времени.*

Чтобы рассчитать изменение концентраций реагентов, разделим время, за которое протекает реакция, на несколько равных промежутков τ и будем считать, что в течение этих промежутков времени скорость реакции постоянна.

Возьмем промежутки τ в 6 *с*, 2 *с* и 1 *с*. На рисунке 2, *а* зеленая линия соответствует расчету концентраций при $\tau = 6$ *с*, черная — при $\tau = 2$ *с*, синяя — при $\tau = 1$ *с*. На рисунке 2, *б* показано изменение скорости реакции при таких же приближениях.

Поскольку на самом деле концентрация реагентов изменяется непрерывно, наш расчет будет тем точнее, чем меньше промежуток τ. Чтобы получить точное значение концентрации реагентов в данный момент времени, нужно перейти к пределу при τ→0, учитывая, что скорость процесса изменяется непрерывно.

Дифференциальное исчисление позволяет точно решить эту задачу. Концентрация реагентов $[N]_t$ в каждый данный момент времени определяется соотношением

$$[N]_t = \frac{[N]_0}{1+K[N]_0 t}, \qquad (3)$$

где $[N]_0$ — начальная концентрация, t — время, прошедшее от начала реакции *).

Подставляя в уравнение (3) найденные нами значения константы скорости и исходных концентраций, находим, как должны изменяться со временем концентрации реагентов и скорость процесса:

$$[R]_t = [S]_t = \frac{1}{1+0,1t}\ \text{моль/л} = \frac{6\cdot 10^{20}}{1+0,1t}\ \text{см}^{-3},$$

$$W_t = \frac{0,1}{(1+0,1t)^2}\ \text{моль/л}\cdot\text{с} = \frac{6\cdot 10^{19}}{(1+0,1t)^2}\ \text{см}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}.$$

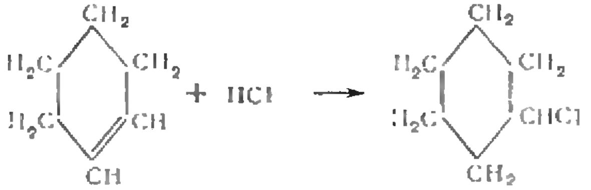
Эти зависимости показаны красными линиями на рисунках 2, *а*, *б*. Истинные кривые изменения скорости химического процесса и концентрации реагирующих веществ существенно отличаются от аналогичных кривых, полученных приближенным методом.

Уравнение (3) позволяет рассчитать концентрации реагентов и скорость процесса в любой момент времени и при любой начальной концентрации реагентов.

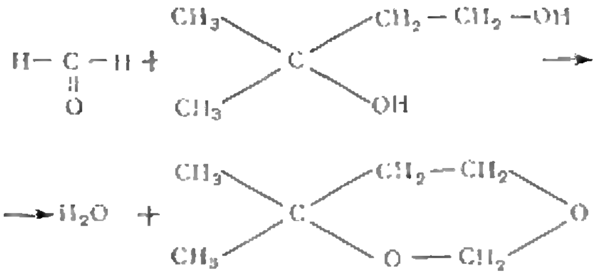
Однако не всегда химический процесс представляет собой одну элементарную реакцию взаимодействия исходных веществ между собой. Обычно процесс бывает более сложным, он состоит из нескольких элементарных реакций, протекающих одновременно. Например, продукты реакции могут взаимодействовать между собой или реагировать с исходными веществами. Очевидно, что в этом случае уравнение (3) уже не будет описывать кинетику процесса, и необходимо выводить другое, более сложное уравнение, в которое войдут константы скоростей всех элементарных реакций, происходящих во время процесса.

В связи с этим возникает необходимость не только определить константы скоростей элементарных реакций, но и убедиться в том, что процесс действительно представляет собой совокупность данных реакций.

Задача 4. *На рисунке 3, а точками показаны результаты измерения концентрации соляной кислоты в реакции хлорирования циклогексена в присутствии катализатора,*



а на рисунке 3,б — результаты измерения концентрации формальдегида в реакции получения диметилдиоксана.



Выяснить, какую из этих реакций можно описать уравнением бимолекулярной реакции.

---

*) Тем, кто знаком с дифференциальным исчислением, ясно, что нужно решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d[N]}{dt} = K[N]^2.$$

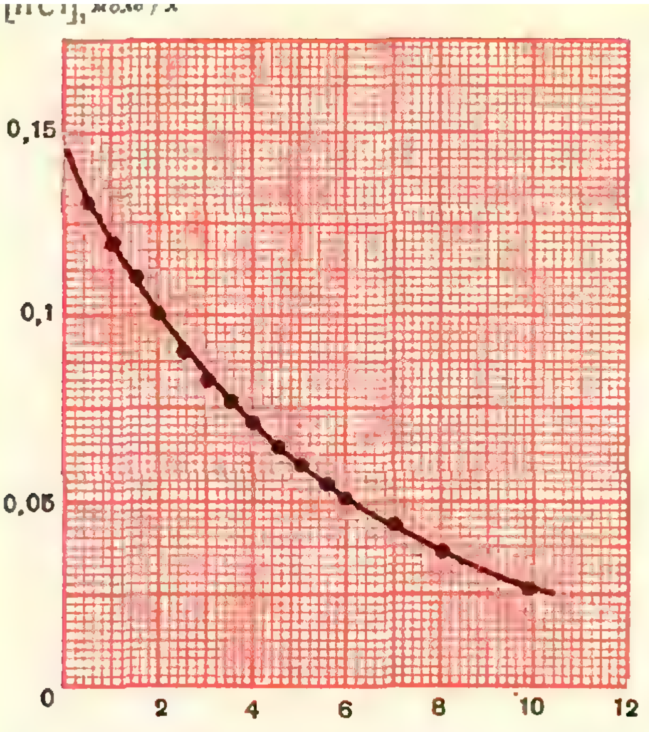


Рис. 3, *а*.

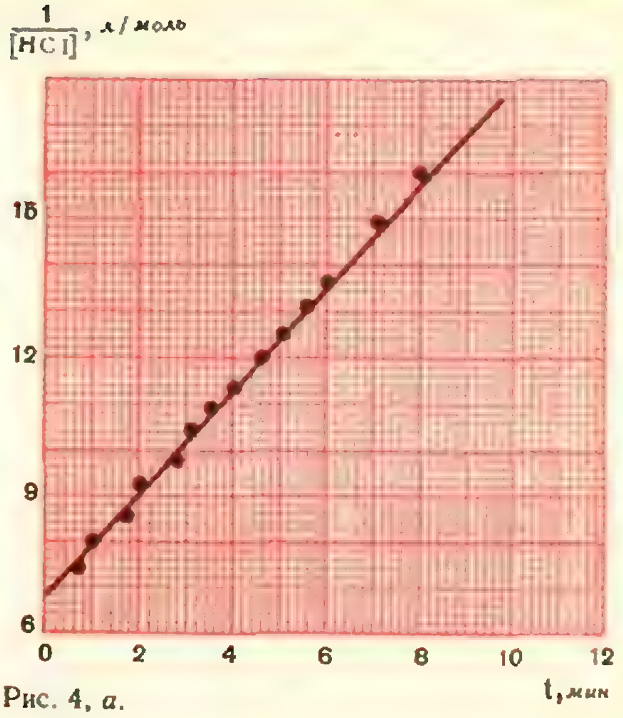


Рис. 4, *а*.

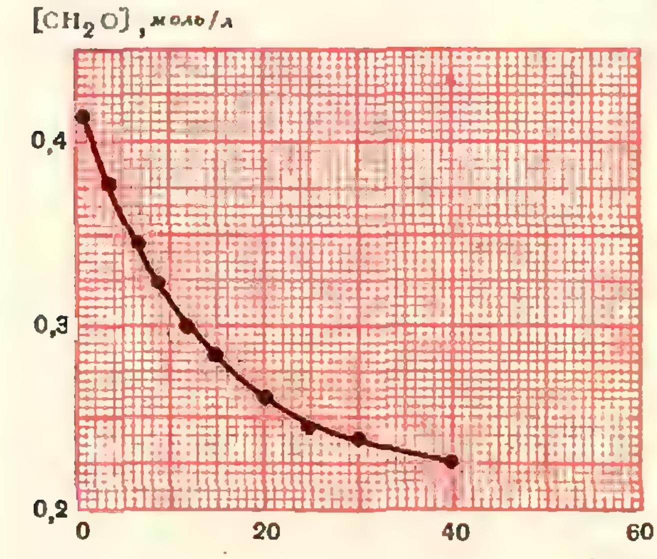


Рис. 3, *б*.

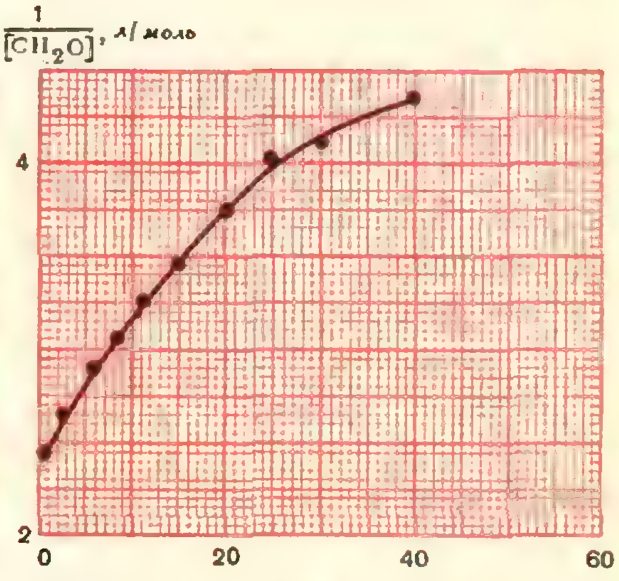


Рис. 4, *б*.

Если реакция бимолекулярная, изменение концентрации реагентов с течением времени должно удовлетворять уравнению (3).

Перепишем уравнение (3) несколько иначе:

$$\frac{1}{[N]_t} = \frac{1}{[N]_0} + Kt. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение прямой линии в координатах обратная концентрация — время. Константа скорости бимолекулярной реакции равна тангенсу угла наклона этой прямой к оси *t*.

Взяв значения концентраций по рисункам 3, *а*, *б*, построим кривые зависимости обратных концентраций исходных веществ от времени (рис. 4, *а*, *б*). Видно, что в случае хлорирования циклогексена действительно получается прямая линия. Значит, это бимолекулярная реакция. Константа скорости этой реакции:

$$K = \operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}02\ \text{л/моль}\cdot\text{с}.$$

Для второй реакции получившаяся кривая существенно отличается от прямой. Значит, это более сложная реакция, и мы не сможем найти константу ее скорости. Дополнительные исследования позволили установить, что продукты реакции (диметилдиоксан и вода) взаимодействуют между собой, давая исходные вещества, то есть в этом случае протекают одновременно две элементарные бимолекулярные реакции.

Итак, мы рассмотрели, как протекает простейшая химическая реакция взаимодействия двух веществ. Теперь нам известно, как изменяется со временем скорость реакции и концентрации веществ. Мы умеем рассчитать текущие концентрации, зная константу скорости реакции и начальные концентрации исходных веществ; можем отличить бимолекулярную реакцию от других процессов. На самом деле в большинстве реальных химических процессов протекает одновременно несколько элементарных реакций, которые влияют друг на друга. Рассмотрение совокупности этих реакций приводит к появлению более сложных математических уравнений, описывающих реальный процесс. Решение некоторых из этих уравнений представляет сложность даже для специалистов, использующих весь арсенал математики и вычислительной техники.

Золотое сечение в поэме Шота Руставели

(см. с. 22.)

Одно из классических произведений мировой литературы поэма Шота Руставели «Витязь в тигровой шкуре» написана изящным и звучным стихом, известным под названием «шаири». Шаири — шестнадцатисложный стих. Строфа шаири состоит из четырех одинаково зарифмованных строк.

Каждая строка делится на два полустишия с 8-ю слогами в каждом. (Замечательно, что деление приходится точно на конец слова; нет ни одного случая, когда часть слова находится в первом полустишии, а часть — во втором). Далее, каждое полустишие делится на два сегмента. Деления на сегменты встречаются двух видов:

А) Симметричное (когда полустишие содержит два сегмента одного и того же размера по 4 слога в каждом);

В) асимметричное (когда полустишие содержит два сегмента разного размера с нечетным числом слогов в каждом).

Чередование сегментов типа *А* и *В* внутри одной строфы не встречается. Оно наблюдается только построфно.

В соответствии с этим есть два вида шаири: высокий (порожденный сегментами типа *А*) и низкий (порожденный сегментами типа *В*). Высокий шаири свойствен, в основном, быстрому темпу повествования, а низкий — более замедленному. Поэт очень искусно чередует эти два типа шаири достигая тем самым благозвучия и избегая монотонности.

С золотым сечением связан низкий шаири. Дело в том, что в этом случае из двух сегментов, составляющих полустишие, один — трехсложный, а другой — пятисложный. А ведь числа 3 и 5 получаются при золотом сечении числа 8!

(Окончание см. с.53)

Л. Я. Шевелев

Объем тел вращения

Теорема Гюльдена *) говорит об объеме тела вращения, получающегося, если плоская фигура вращается вокруг оси, лежащей в ее плоскости. А что, если ось вращения не лежит в плоскости фигуры? Как в этом случае вычислить объем тела вращения? В этом случае могут помочь следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть α и β — две перпендикулярные плоскости и l — линия их пересечения. Пусть, далее, F — некоторая плоская фигура, плоскость γ которой перпендикулярна плоскости β, а F_1 — проекция фигуры F на плоскость α. Тогда объем тела, получающегося при вращении фигуры F вокруг оси l, равен объему тела, получающегося при вращении фигуры F_1 вокруг оси l.*

Доказательство. Проведем плоскость ρ, перпендикулярную прямой l, и пусть эта плоскость пересекает фигуру F по отрезку AB (если пересечение плоскости ρ с фигурой F состоит из нескольких отрезков, рассуждения не меняются). Отрезок AB перпендикулярен плоскости β и потому его проекцией на плоскость α будет отрезок A_1B_1, равный отрезку AB. Отрезок A_1B_1 представляет собой пересечение плоскости ρ с фигурой F_1. На рисунке 1 изображен случай, когда отрезок AB не пересекается с плоскостью β (случай, когда этот отрезок пересекается с плоскостью β, предоставляем рассмотреть читателю). Тело V, получающееся при вращении фигуры F вокруг оси l, пересекается с плоскостью ρ по кольцу K, которое является результатом вращения отрезка AB вокруг оси l. Площадь этого кольца равна

$$\pi\ (AC_1^2 - BC_1^2) = \pi\ (AC^2 - BC^2),$$

где C — точка пересечения прямой AB с плоскостью β, а C_1 — проекция этой точки на прямую l. Точно так же тело V_1, получающееся при вращении фигуры F_1 вокруг оси l, пересекается с плоскостью ρ по кольцу K_1, которое является результатом вращения отрезка A_1B_1 вокруг оси l. Площадь этого кольца равна

$$\pi\ (A_1C_1^2 - B_1C_1^2) = \pi\ (AC^2 - BC^2),$$

то есть равна площади кольца K.

Таким образом, сечения тел V и V_1 любой плоскостью, перпендикулярной оси l, имеют одинаковую площадь. Известный принцип Кавальери *) позволяет теперь утверждать, что тела V и V_1 имеют равные объемы.

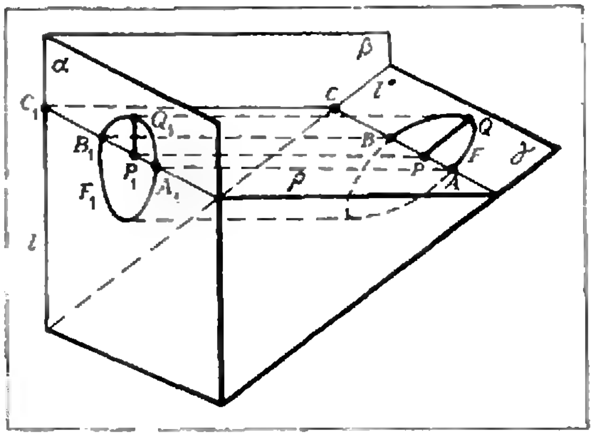


Рис. 1.

---

*) См. «Квант» № 6, 1973, с. 4.

*) См. «Квант» № 6, 1972, с. 9.

Смысл доказанной теоремы в том, что вычисление объема сложного тела V сводится в силу этой теоремы к вычислению объема тела V_1, к которому непосредственно применима вторая теорема Гюльдена (или другие приемы вычисления объемов).

Предоставляем читателю самостоятельно вывести из доказанной теоремы следующее предложение: *пусть (в условиях теоремы 1) фигура F' получается из F параллельным переносом, направление которого параллельно плоскости β; тогда объем тела, получающегося при вращении фигуры F вокруг оси l равен объему тела, получающегося при вращении фигуры F' вокруг оси l.*

Теорема 2. *Объем тела, получаемого вращением фигуры F относительно оси l, не лежащей в ее плоскости, равен объему тела, получаемого вращением этой фигуры относительно проекции оси l на плоскость фигуры F, умноженному на $\cos\theta$, где θ — угол наклона оси l к плоскости фигуры F.*

Доказательство. Сравним расположение фигуры F относительно оси l^* (рис. 1) и расположение фигуры F_1 относительно оси l. Легко видеть, что если P — произвольная точка фигуры F, а P_1 — соответствующая точка фигуры F_1 (то есть проекция точки P на плоскость α), то расстояние точки P от оси l^* равно расстоянию точки P_1 от оси l^*. В то же время фигура F_1 получается из F сжатием вдоль оси l (на рисунке 2 обе фигуры расположены для сравнения рядом — в одной плоскости): если отрезок PQ, параллельный оси l^*, имеет в фигуре F длину d, то соответствующий отрезок P_1Q_1 имеет длину $d\cos\theta$. Ясно поэтому, что если тело V^*, получающееся вращением фигуры F вокруг оси l^*, сжать в направлении оси l^*, то оно превратится в тело, равное телу V_1. Отсюда и вытекает, что объем тела V_1 (а значит, и тела V) равен объему тела V^*, умноженному на $\cos\theta$.

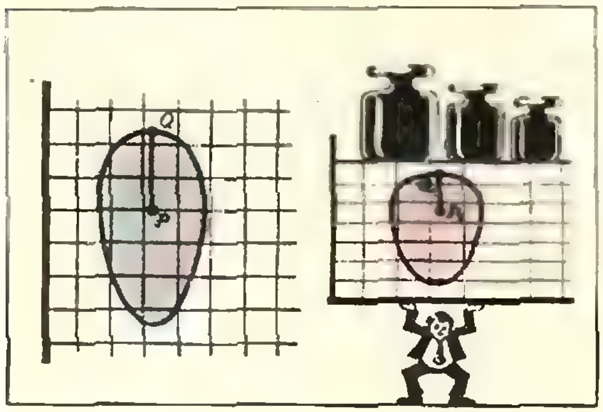


Рис. 2.

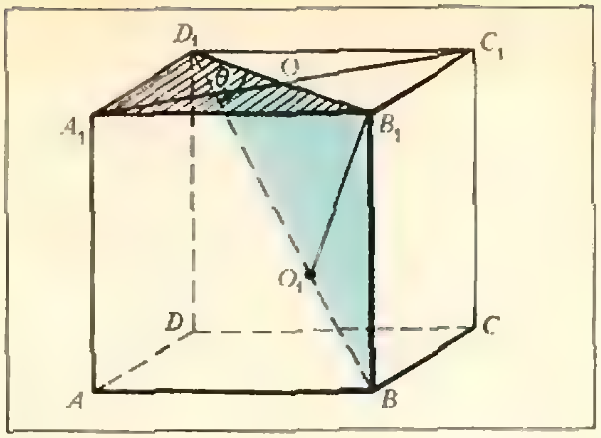


Рис. 3.

Предоставляем читателю самостоятельно вывести из доказанной теоремы следующее предложение: *пусть α и β — две перпендикулярные плоскости, l — линия их пересечения и m — произвольная прямая, перпендикулярная плоскости β; пусть, далее, F' — фигура, лежащая в плоскости α, а F — фигура, получающаяся из F' поворотом вокруг оси m на угол θ; тогда объем тела, получающегося вращением фигуры F вокруг оси l, равен $v_0|\cos\theta|$, где v_0 — объем тела, получающегося вращением фигуры F' вокруг оси l.*

Приведем примеры применения теорем 1 и 2 к решению задач на вычисление объемов тел вращения.

Задача 1. *Найти объем тела, полученного вращением куба со стороной a относительно его диагонали.*

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, его диагональ BD_1 — ось вращения (рис. 3). Сам куб и выделенная из него фигура, состоящая из двух треугольников BB_1D_1 и $A_1B_1D_1$ эквивалентны при вращении относительно диагонали BD_1, то есть дают одно и то же тело (проверьте это!). Искомый объем $v = v_1 + v_2$, где v_1 и v_2 — объемы, полученные вращением треугольников BB_1D_1 и $A_1B_1D_1$ вокруг оси BD_1. Так как $BD_1 = a\sqrt{3}$ и $B_1O_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (где $B_1O_1 \perp BD_1$), то

$$v_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot B_1O_1^2 \cdot BD_1 = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Объем v_2 равен объему тела, полученного вращением треугольника $A_1B_1D_1$ относительно оси B_1D_1, умноженному на $\cos\theta$, где θ — угол наклона диагонали BD_1 к плоскости треугольника $A_1B_1D_1$ (по теореме 2). Заметив, что $\cos\theta = \frac{B_1D_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, легко найдем $v_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot A_1O^2 \cdot B_1D_1 \times \times \cos\theta = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. Искомый объем

$$v = v_1 + v_2 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 2. *Одна из двух взаимно перпендикулярных плоскостей параллельна основаниям правильной шестиугольной призмы и отстоит от ее центра на* $3a$; *другая отстоит от центра призмы на* $2a\sqrt{3}$. *Большая диагональ основания призмы параллельна линии* l, *по которой пересекаются указанные плоскости, а ребра призмы равны* a. *Найти объем тела, полученного вращением призмы вокруг прямой* l (рис. 4).

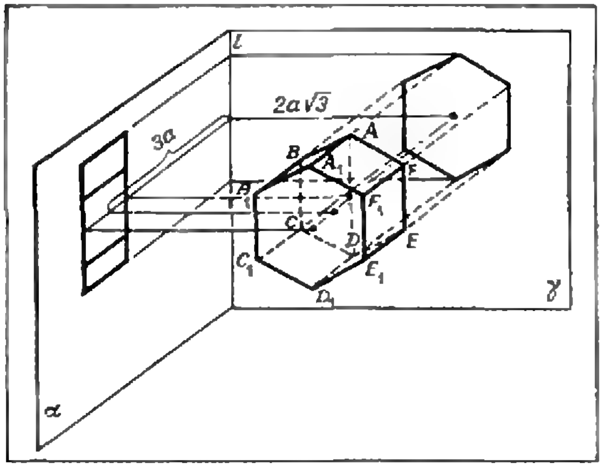


Рис. 4.

Решение. Фигура, состоящая из «дальнего» по отношению к оси l основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и совокупности трех боковых граней D_1C_1CD, C_1B_1BC и B_1A_1AB, эквивалентна самой призме при вращении вокруг оси l. Тела, образованные вращением основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и его ортогональной проекции на плоскость γ (представляющей правильный шестиугольник со стороной a и центром, удаленным от оси l на $2a\sqrt{3}$), равновелики (по теореме 1). Точно так же тела, образованные вращением совокупности трех боковых граней призмы и ее ортогональной проекции на плоскость α (представляющей прямоугольник, стороны которого равны a и $2a$, с центром, отстоящим от оси l на $3a$), равновелики. Эти проекции могут быть рассматриваемы, как проекции самой призмы. Иначе говоря, объем тела, полученного вращением призмы, равен сумме объемов, полученных вращением ее проекций на плоскости α и γ. В дальнейших вычислениях воспользуемся теоремой Гюльдена об объеме тела вращения. Объем, полученный вращением прямоугольника вокруг оси l, равен $v_1 = (a \cdot 2a) \cdot 2\pi\,(3a) = 12\pi a^3$. Объем, полученный вращением шестиугольника вокруг оси l, равен

$$v_2 = \left(\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right) \cdot 2\pi\left(2a\sqrt{3}\right) = 18\pi a^3.$$

Искомый объем: $v = 30\pi a^3$.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

1. Найти объем тела, полученного вращением круга радиуса R, если ось вращения наклонена к плоскости круга под углом θ, а ее проекция на его плоскость: а) проходит через центр круга; б) проходит на расстоянии $m > R$ от центра круга.

2. Плоскость α параллельна основаниям цилиндра с радиусом основания R и высотой $2R$ и проходит на расстоянии $2R$ от его центра. Прямая l лежит в плоскости α и находится на расстоянии $2R$ от проекции центра цилиндра на плоскость α. Найти объем тела, получаемого вращением цилиндра вокруг оси l.

М. Милг

Что сказал проводник?

§ 1. Метод математической индукции

— «Знаете ли вы украинскую ночь?» — с чувством начал Оська.

— Нет, нет!!! — закричал зал. — Не знаем! Просим! Просим!

— «Нет, вы не знаете украинской ночи!» — продолжал немного смущенный Оська.

— Ясно, не знаем, — согласились матери. — Откуда нам знать? Какое наше воспитание было?

Л. Кассиль. «Кондуит и Швамбрания».

Знаете ли вы, что такое математическая индукция?

«Знаем, знаем!» — чудится мне ответ читателей. «Пусть в очереди первой стоит женщина, и за каждой женщиной пусть стоит женщина. Тогда все в очереди — женщины!» — вот шутливая формулировка принципа математической индукции. А вот серьезная: «Пусть имеется последовательность утверждений Y_1, Y_2, Y_3, ... Пусть первое утверждение Y_1 верно, и пусть за каждым верным утверждением Y_k стоит верное утверждение Y_{k+1}. Тогда все утверждения Y_n верны».

Ну, что ж. Это действительно так. Поскольку за каждым верным утверждением Y_k следует верное утверждение Y_{k+1} и поскольку утверждение Y_1 верно, то утверждение Y_2 верно; а раз Y_2 верно, то и Y_3 верно; но тогда и Y_4, следующее за Y_3, верно и т. д.

И все-таки, мне кажется (вы уж меня простите): «Нет, вы не знаете, что такое математическая индукция!» А впрочем, давайте проверим. Впереди вас ждут несколько испытаний: в § 2 и § 3 — попроще, в § 4 и § 5 — посложнее.

§ 2. Фокус — покус

Если на клетке слона написано «буйвол», не верь глазам своим.

Козьма Прутков. Афоризмы.

С помощью метода математической индукции можно обосновать следующий поразительный фокус.

Вырежьте из картона — 999 одинаковых карточек. На 111 карточках напишите 1, на 111 карточках —2, и т. д. — на последних 111 карточках напишите 9. Переверните все карточки цифрой вниз и тщательно перемешайте. Затем возьмите совершенно произвольно n карточек, где n — любое целое число от 1 до 100, и положите их на стол цифрой вверх. Тогда цифры, написанные на всех n выбранных карточках, обязательно окажутся одинаковыми! Сколько бы раз ни повторять этот фокус и какое бы n ни выбирать ($1 \leqslant n \leqslant 100$), результат неизменно будет один: на всех n карточках будет одна и та же цифра! Каждый может на досуге проверить сказанное экспериментально, а сейчас докажем этот замечательный факт по индукции.

Нам нужно доказать утверждение Y_n: *На всех n выбранных карточках* ($1 \leqslant n \leqslant 100$) *окажется одна и та же цифра.* Фактически здесь имеется 100 утверждений: $Y_1, \ldots, Y_{100}$ (в зависимости от того, какое значение принимает n).

При $n = 1$ наше утверждение, очевидно, справедливо. (В этом нет, правда, ничего удивительного: если цифрой вверх будет перевернута всего одна карточка, то, разумеется, перед нами окажется одна цифра.)

Докажем теперь, что если утверждение Y_n верно при $n = k$ (где k — любое целое число от 1 до 99), то оно верно и при $n = k + 1$.

Положим на стол цифрой вверх $k + 1$ карточку. Одну карточку (назовем ее A) на минутку снимем со стола. На столе останется k карточек. На них (по предположению индукции) написана одна и та же цифра (некоторая цифра X).

Итак, на всех карточках — кроме, быть может, A — написана цифра X.

Заменим теперь одну из k карточек на столе карточкой A. На столе по-прежнему k карточек, значит, по предположению индукции, на них всех написана одна и та же цифра (которую мы выше обозначили через X). В том числе цифра X написана и на карточке A, которую мы вначале сняли, а теперь вернули на стол.

Итак, на карточке A тоже написана цифра X.

Значит, на всех n карточках ($n = k + 1$) написана цифра X, что и требовалось доказать.

Таким образом, в терминах § 1 утверждение Y_1 верно, и за каждым верным утверждением Y_k ($1 \leqslant k \leqslant 99$) следует верное утверждение Y_{k+1}. Следовательно, все утверждения Y_n верны ($1 \leqslant n \leqslant 100$). И как ни поразителен наш фокус с карточками, он теперь обязан всегда получаться — это строго доказано!

§ 3. На пальцах

> *Из мешка вывалился большой, крайне рассерженный двупалый ленивец.*
>
> Дж. Даррелл. Три билета до Эдвенчер.

Рассуждая так же, как в § 2, можно доказать немало удивительных теорем. Например, нетрудно установить, что *все числа равны между собой* или что *у всех девушек глаза одинакового цвета*.

Последнее утверждение заслуживает, нам кажется, того, чтобы остановиться на нем подробнее. Итак, *соберем вместе совершенно произвольных n девушек, — тогда* (сейчас мы это докажем) *у них у всех глаза окажутся одинакового цвета.*

При $n = 1$ это утверждение очевидно (хотя и малосодержательно). Переход от $n = k$ к $n = k + 1$ поясним буквально «на пальцах» (рис. 1). Для этого возьмем $k = 4$, $k + 1 = 5$, по числу пальцев на руке.

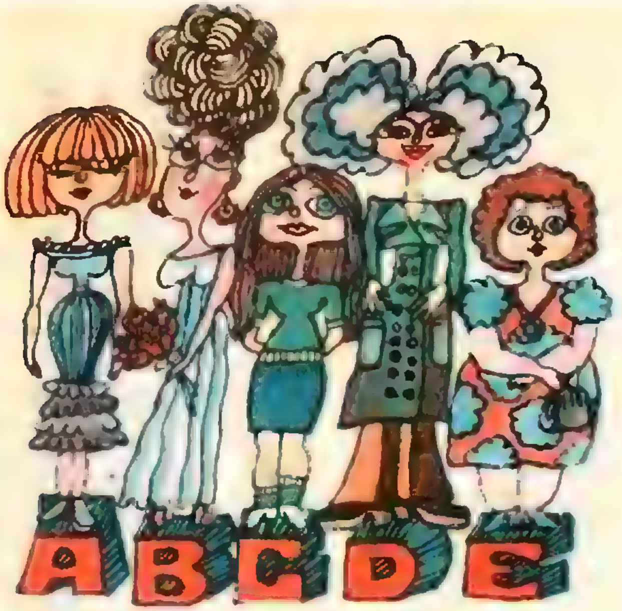


Рис. 1, *а*

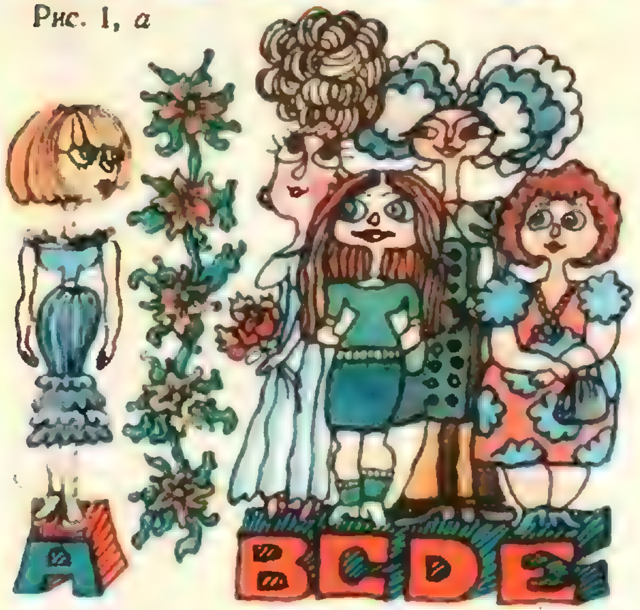


Рис. 1, *в*

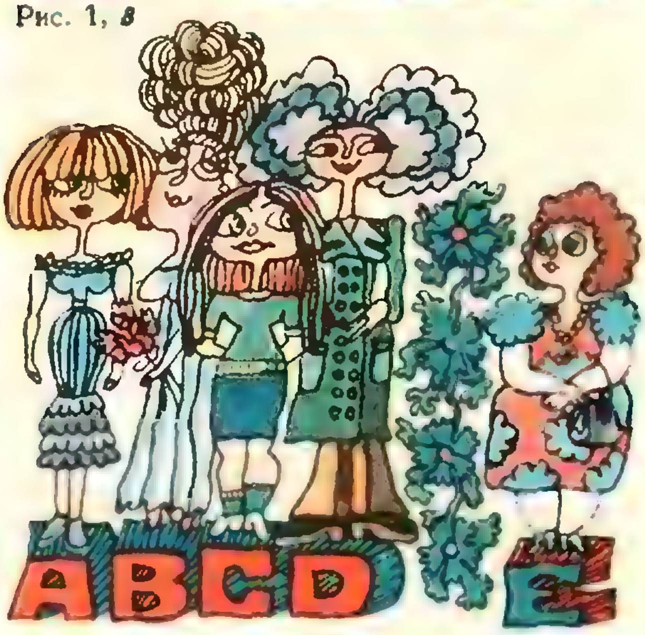


Рис. 1, *с*

Согласно предположению индукции, у всяких четырех девушек глаза одинакового цвета. Соберем вместе (рис. 1, *а*) 5 совершенно произвольных девушек (A, B, C, D и E). По предположению индукции у любых четырех из них глаза одинакового цвета. В частности, у всех, кроме A, глаза такого же цвета, как у C (рис. 1, *в*), и у всех, кроме E, глаза тоже такого же цвета, как у C (рис. 1, *с*). Итак, у любых пяти девушек глаза одинакового цвета.

При бо́льших k доказательство проходит без всяких изменений (только, если вы захотите проводить его «на пальцах», вам, возможно, придется пригласить на помощь нескольких приятелей).

Упражнения

1. Если вы сомневаетесь в справедливости доказанного утверждения, «можете испытать экспериментальный подход, заглянув в глаза нескольким девушкам» (Пойя. Математика и правдоподобные рассуждения.)

2. Если имя биолога и писателя Дж. Даррелла не было знакомо вам раньше, то эпиграф к § 3 уже сыграл свою основную роль: настоятельно советуем вам скорее познакомиться с книгами Даррелла, интересными и полными своеобразного мягкого юмора. Выбирая эпиграф, мы преследовали, однако, кроме чисто пропагандистских целей, еще одну цель. Как вы думаете — какую?

Указание. Эпиграф имеет некоторое отношение и к заглавию § 3, и к его содержанию, и к содержанию § 2. (Отметим, что всякие ассоциации с заголовком § 4, напротив, случайны.)

§ 4. О ленивых мудрецах

> *Три дамы A, B и C сидят в купе железнодорожного вагона с испачканными лицами и все три смеются. Внезапно A соображает: почему B не понимает, что C смеется над ней? — О, боже! Они смеются надо мной.*
>
> Дж. Литлвуд. Математическая смесь.

Едут в вагоне поезда N мудрецов. За окнами прелестный пейзаж.

Поезд то и дело ныряет в туннели. Дух захватывает. Собрались все мудрецы в коридоре вагона, в открытые окна глядят, не наглядятся.

Вдруг в одном туннеле грохот, дым, пыль! Грязь какая-то в окна посыпалась. Проехали туннель — входит проводник. «Тут кое-кто испачкался, — говорит. — В поезде, к сожалению, воды нет. Но сейчас подряд большие остановки пойдут, так что можно будет выйти из поезда и помыться».

Надобно вас теперь предупредить — мудрецы в вагоне собрались как на подбор: столь же умные, сколь ленивые. Никто, скажем, зря мыться не пойдет (если не знает наверняка, что испачкался). И у соседей не спросит, чистое у него лицо или грязное — зачем напрасно людей тревожить и самому беспокоиться? — проще сообразить.

Что же сделают мудрецы после объявления проводника?

Утверждается, что *если у n из них испачканы лица, то ровно на n-й остановке все эти n мудрецов выйдут из поезда мыться.*

Докажем сделанное утверждение по индукции.

Случай $n = 1$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Мудрец M_1 с грязным лицом узнает из объявления проводника о том, что в вагоне имеются пассажиры с испачканными лицами. Оглядев соседей, он обнаруживает, что у них лица чистые. Значит, грязное лицо — именно у него. Поэтому на 1-й остановке он идет мыться.

Переход от $n = k$ к $n = k + 1$. Покажем, что если утверждение справедливо при $n = k$, то оно верно и при $n = k + 1$

Пусть лица испачканы у мудрецов $M_1, \ldots, M_{k+1}$. Тогда M_{k+1} видит вокруг k грязных лиц ($M_1, \ldots, M_k$) и рассуждает так:

«Возможны два случая:

1) у меня чистое лицо;

2) у меня грязное лицо.

В 1-м случае все k мудрецов с грязными лицами, которых я вижу вокруг, выйдут умываться на k-й остановке (так как по предположению индукции при $n = k$ утверждение справедливо).

Поскольку 1-й случай возможен, *мне не следует выходить ни на k-й остановке, ни раньше*: если я чистый, это было бы непростительной тратой сил! К такому выводу пришел бы на моем месте любой умный и не склонный к напрасной суете человек*).

Но возможен, разумеется, и 2-й случай: может быть, у меня тоже грязное лицо. Тогда, однако, каждый из перемазавшихся мудрецов $M_1, \ldots, M_k$ видит вокруг себя k испачканных лиц. В этой ситуации никто из них — мудрых и неторопливых — не пойдет умываться на k-й остановке (см. предыдущий абзац).

Итак, если мудрецы $M_1, \ldots, M_k$ не пойдут мыться на k-й остановке, значит, я — грязный, и мне надлежит идти умываться. Дождусь k-й остановки. Если на ней никто не пойдет умываться, придется выйти на следующей — ($k + 1$)-й остановке и вымыть лицо!»

Так же рассуждают все мудрецы с грязными лицами. Следовательно, на ($k + 1$)-й остановке все они пойдут умываться, что и требовалось доказать.

Задачи

1. Изменим слегка наш рассказ.

Зная, что в вагоне едут *мудрецы*, и увидав, что *многие* из них испачкались, проводник решает сократить свое объявление.

«Зачем же мне говорить, что кое-кто испачкался, — думает он, —когда они и сами это видят!» И пропускает первую фразу объявления.

Можно ли по-прежнему утверждать, что если лица испачканы у n человек, то на n-й остановке они пойдут мыться?

2. Внесем в рассказ другое изменение.

---

*) Вероятно, так мысленно именует он свою лень.

Пусть в тот момент, когда поезд проходил через злосчастный туннель, часть мудрецов была в своих купе: кто в окно смотрел, кто дремал . . .

Громкий голос проводника, который на этот раз опять произнес полный текст объявления, по счастливой случайности услышали все, но поручиться, что и другие слышали объявление, никто бы не смог. Через некоторое время (еще до первой остановки) все мудрецы собрались в коридоре вагона . . .

Вопрос тот же, что в задаче 1.

Предупреждение. Если вы хотите решить предложенные задачи сами (без подсказок), то не читайте пока § 5.

§ 5. Что сказал проводник?

Иль думал, что я думала,
Что думал он: я сплю!
С. Маршак. Из Ковентри Пазмора.

Пусть мудрецы и сами — без проводника — знали и про то, что в поезде нет воды, и про то, что после туннелей пойдут долгие стоянки, на которых можно умыться. Кроме того, пусть в грязном туннеле испачкался больше чем один человек. Тогда в объявлении проводника нет как будто вообще ничего нового ни для кого из мудрецов!

Так что же — если бы проводник вовсе не приходил — пошли бы n испачкавшихся мыться на n-й остановке?

Велик соблазн ответить «Да»: раз ничего не изменилось в условии задачи, то не должен, казалось бы, измениться и ответ! И все же здравый смысл подсказывает, что без объявления проводника мыться, пожалуй, никто не пойдет!! И потом — что значит: «ничего не изменилось в условии» ? Все-таки в одном варианте проводник вообще не приходил, а в другом — приходил и что-то сказал!!!

Что же, наконец, он сказал?

Одними восклицаниями этот вопрос, по-видимому, не решишь. Поэтому хладнокровно и скрупулезно проанализируем простейший возможный случай: $n = 2$ (положить $n = 1$ мы не можем, так как дано, что испачкался больше чем один человек).

Случай $n = 2$. Лица испачканы у мудрецов M_1 и M_2. Они видят друг друга, и поэтому *каждый из них, действительно, знает, что кто-то испачкался.*

Поставив себя на место M_2, попробуем повторить рассуждения § 4.

«Возможны 2 случая:
1) у меня чистое лицо;
2) у меня грязное лицо.

В 1-м случае M_1 видит только чистые лица, но *он знает, что кто-то испачкался.* Поэтому . . .»

Стоп! M_1, действительно, знает, что кто-то испачкался, но откуда об этом известно M_2? *Откуда, собственно, M_2 знает, что M_1 знает, что кто-то испачкался?*

. . . Наконец-то, мы, кажется, нащупали ключ к решению.

Если проводник проходил, то его объявление, и правда, не было новостью для M_1 и M_2. Но M_2 видел, что M_1 слушал это объявление. Поэтому-то, если проводник приходил, то M_2 *знает, что M_1 знает, что кто-то испачкался.*

Если же проводник не приходил, то *знать M_2 об этом неоткуда.* В самом деле, мы-то знаем, что у M_2 грязное лицо, и поэтому *знаем, что M_1 знает, что кое-кто (может быть, только M_2, а может быть и он тоже) испачкался*, но сам M_2 допускает возможность, что у него чистое лицо, и что M_1 видит, следовательно, только чистые лица. Но если M_1 не видит грязных лиц и если проводник не приходил, то M_1 *неоткуда узнать, что кто-то испачкался.* Значит, если проводник не приходил, то M_2 *неоткуда узнать, что M_1 знает, что кое-кто испачкался.*

Упражнение. Пусть проводник не приходил, $n = 2$; испачкались мудрецы M_1 и M_2, мудрец M не испачкался. Какие из следующих утверждений верны?

а) M_2 знает, что M знает, что кое-кто испачкался,

b) M знает, что M_1 знает, что кое-кто испачкался,

c) M_2 знает, что M знает, что M_1 знает, что кое-кто испачкался,

d) M_2 знает, что M_1 знает, что кое-кто не испачкался.

Дальнейший анализ. При $n>2$ каждому мудрецу и без объявления проводника становится известно не только то, что кое-кто испачкался, но и то, что все остальные знают об этом. Пусть, например, грязных мудрецов — трое: M_1, M_2 и M_3. Тогда M_2 знает, что M_1 видит грязное лицо M_3. Тем самым, M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто (например,* M_3*) испачкался.*

Различие между вариантами, когда проводник приходил или не приходил, при $n>2$ становится поэтому еще тоньше. Сформулируем его точно для $n = 3$.

Случай $n = 3$. Если проводник приходил, то M_3 *знает, что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался,* а если не приходил, то M_3 *знать об этом неоткуда.*

Упражнение. Проверьте последнее утверждение.

Общий случай. Один знаменитый философ как-то заметил:

Если человек говорит фразу

«Я думаю о том, что я думаю о том, . . .», то уже на третьем — четвертом обороте теряет смысл произносимого.

Нам в общем случае придется сделать не три — четыре, а n оборотов. Обозначим через U_k такое утверждение: M_k *знает, что* M_{k-1} *знает, . . ., что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался.*

Тогда различие между сравниваемыми вариантами можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Пусть проводник приходил, и пусть лица испачканы у мудрецов $M_1, \dots, M_n$ *(и, может быть, еще у кого-нибудь). Тогда утверждение* U_n *справедливо.*

Пусть проводник не приходил и пусть лица испачканы у мудрецов $M_1, \dots, M_n$ *(и только у них). Тогда утверждение* U_n *несправедливо.*

Докажем эту теорему по индукции.

При $n = 1$ она очевидна: если проводник приходил, то M_1 знает из его объявления, что кто-то испачкался, если же проводник не приходил, и лицо испачкано только у M_1, то ему неоткуда знать об этом; то есть в первом варианте U_1 справедливо, а во втором — несправедливо.

Переход от $n = k$ к $n = k + 1$ проводится так.

I вариант (проводник приходил). Лица испачканы у $M_1, \dots, M_{k+1}$. Значит, в частности, они испачканы у $M_1, \dots, M_k$. Значит, по предположению индукции утверждение U_k справедливо. Это, разумеется, известно мудрецу M_{k+1}, то есть M_{k+1} *знает, что* M_k *знает, . . ., что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался.* Тем самым, утверждение U_{k+1} справедливо.

II вариант (проводник не приходил). Мудрец M_{k-1} допускает, что у него, может быть, чистое лицо. В этом случае, *с его точки зрения,* лица испачканы только у k мудрецов $M_1, \dots, M_k$, и, следовательно, — по предположению индукции — утверждение U_k несправедливо. Итак, допустив, что у него чистое лицо, M_{k+1} вынужден допустить, что M_k *не знает, что* M_{k-1} *знает, . . ., что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался*).*

И вместе с тем выяснено, наконец, что же сообщил мудрецам проводник. Чем n больше, тем, оказывается, больше узнали из его объявления мудрецы — *имеющий уши да слышит!* Другими словами, M_{k+1} *не знает, что* M_k *знает, . . ., что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался,* то есть утверждение U_{k+1} несправедливо.

Теорема доказана.

---

*) Фактически M_k знает об этом, то есть фактически — а не с точки зрения M_{k+1}, предположившего, что у него чистое лицо — утверждение U_k справедливо. Проверьте это.

§ 6. Точки над i

Читателям, добравшимся через все препятствия до конца § 5, вряд ли понадобятся следующие разъяснения. Все-таки, «для порядка», дадим их.

1. В § 3 переход от $k = 4$ к $k + 1 = 5$ проделан без ошибок. Верно и то, что при бо́льших k доказательство проходит без изменений. Нетрудно также перейти от $n = 2$ к $n = 3$ и от $n = 3$ к $n = 4$. Не получается «только» переход от $n = 1$ к $n = 2$. Он не может получиться потому, что при $n = 2$ утверждение неверно: не у любых двух девушек глаза одинакового цвета.

Если все-таки попытаться провести доказательство «на пальца́х» и в этом случае, то ничего не выйдет (в § 3 мы соединили A и E «мостиком» C: и у A, и у E глаза оказались такого же цвета, как у C; если пальцев всего два, то такого мостика нет).

Двупалый ленивец из эпиграфа призван был привлечь внимание к указанному исключительному случаю.

2. В § 2 утверждение Y_2 верно, а все утверждения Y_n, начиная со второго, неверны. Переход от $n = k$ к $n = k + 1$ обоснован правильно для $k \geqslant 2$. Переход от $n = 1$ к $n = 2$ содержит ошибку: когда мы убираем карточку A, на столе остается одна карточка; на ней написана одна цифра, но вовсе не обязательно цифра X.

3. Если оставить в стороне вопрос, знал ли M_2, что M_1 знает, что умываться нужно не в поезде, а на стоянках (и если знал, то знал ли об этом M_3 и т. д.), то разобранная в § 5 задача эквивалентна задаче 1 из § 4. Тем самым, если проводник не объявил, что «кое-кто испачкался», то никто из мудрецов мыться не пойдет (ни на n-й, ни на какой другой остановке).

Никто не пойдет мыться и в том случае, когда $n > 1$ и *не все n испачкавшихся мудрецов находились вместе* во время объявления проводника (задача 2 из § 4). Доказательство аналогично проведенному в § 5, только индукцию нужно начинать с $n = 2$: при $n = 1$ единственный испачкавшийся мудрец пойдет мыться на 1-й остановке независимо от того, где он был во время объявления проводника.

4. В 1-м упражнении из § 5 утверждения a), b) и d) верны, а утверждение c) неверно.

5. Наряду с утверждением U_e (справедливым, если проводник приходил, и неверным, если он не приходил) для различения сравниваемых в § 5 вариантов можно использовать еще $n!$ утверждений, которые получаются из U_n всевозможными перестановками букв $M_1, \ldots, M_n$. Например, M_1 знает, что M_2 знает, . . . , что M_n знает, что кто-то испачкался.

Все эти $n!$ утверждений содержат по n оборотов. «Более короткие» (содержащие не более чем $n - 1$ оборот) утверждения не позволяют различить варианты, когда проводник приходил или не приходил. Например, утверждение U_{n-1} справедливо и без объявления проводника, так как M_{n-1} знает, что M_{n-2} знает, . . . , что M_2 знает, что M_1 знает, что M_n испачкался.

6. Смешливая дама из эпиграфа к § 4 догадалась, что у нее грязное лицо, хотя никакой проводник не делал никаких объявлений. Роль проводника сыграл несдержанный смех ее соседок. Степенные мудрецы, конечно, не позволили бы себе ничего подобного!

И. Ф. Шарыгин

Об одном геометрическом месте точек

В «Кванте» № 11 за 1972 год в «Задачнике «Кванта» была предложена задача М174. Вот ее условие.

На сторонах треугольника ABC, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники AB_1C, BA_1C и AC_1B (рис. 1). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C соответственно на прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, пересекаются в одной точке.

В публикуемой статье рассказано об одном довольно общем методе решения задач такого типа, в частности, решается задача М174. В конце статьи приведены задачи для самостоятельного решения.

Довольно часто встречаются задачи, в которых требуется доказать, что какие-то три или более прямых пересекаются в одной точке. Нередко эти задачи можно решать так: доказать, что две из рассматриваемых прямых пересекаются в точке, удовлетворяющей некоторому условию, которому удовлетворяют все точки третьей прямой и только они. В качестве примера можно привести следующие две теоремы из школьного учебника: биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке; перпендикуляры, восставленные к серединам сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

Аналогично, если требуется доказать, что какие-то три или более точек лежат на одной прямой, то можно попытаться доказать, что все рассматриваемые точки удовлетворяют условию, которому удовлетворяют все точки некоторой прямой и только они (подобные рассуждения можно проводить не только для прямых, но и, например, для окружностей).

Об одном геометрическом месте точек, помогающем решать подобные задачи, мы сейчас и расскажем.

Формулировки утверждений

Утверждение 1. *Пусть A_1 и A_2 — две фиксированные (различные) точки плоскости; k, k_1 и k_2 — действительные числа. Тогда геометрическим местом точек M таких, что*

$$k_1 (A_1M)^2 + k_2 (A_2M)^2 = k,$$

будет:

а) окружность или одна точка, или пустое множество, если $k_1 + k_2 \neq 0$;

б) прямая линия, перпендикулярная отрезку $A_1 A_2$, *если* $k_1 + k_2 = 0$ (*но* $k_1 \neq 0$).

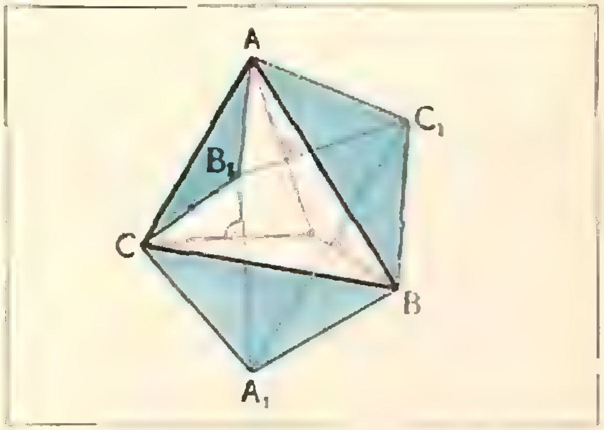


Рис. 1.

Справедливо и обобщение утверждения 1 для большего числа точек.

Утверждение 2. *Пусть A_1, A_2, …, A_n — фиксированные точки плоскости, k_1, k_2, … k_n* (все $k_i \neq 0$) *— данные числа. Тогда геометрическим местом точек M таких, что сумма*

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + \ldots + k_n(A_nM)^2$$

постоянна, будет

а) окружность, точка или пустое множество, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$;

б) прямая или вся плоскость, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$.

С помощью утверждения 1б можно доказать следующее весьма полезное условие.

Утверждение 3. *Для того, чтобы перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 соответственно на стороны BC, AC и AB треугольника ABC, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$(A_1B)^2 - (BC_1)^2 + (C_1A)^2 - (AB_1)^2 + (B_1C)^2 - (CA_1)^2 = 0. \quad (1)$$

Из последнего утверждения вытекает такое следствие.

Утверждение 4. *Если перпендикуляры, опущенные из вершин A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ на стороны BC, AC и AB треугольника ABC, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на прямые B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1, также пересекаются в одной точке.*

Попробуйте самостоятельно доказать все эти утверждения. Мы же сначала покажем, как с помощью утверждения 3 или 4 решить задачу **M174**, а затем докажем сами утверждения.

Решение задачи M174

Согласно утверждению 3 нам надо проверить справедливость следующего равенства (см. рис. 1):

$$(AB_1)^2 - (B_1C)^2 + (CA_1)^2 - (A_1B)^2 + (BC_1)^2 - (C_1A)^2 = 0.$$

Это равенство действительно выполняется, поскольку

$$AB_1 = B_1C,\ CA_1 = A_1B,\ BC_1 = C_1A.$$

Можно также воспользоваться утверждением 4. Тогда достаточно заметить, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны треугольника ABC, проходят через середины сторон треугольника ABC и потому пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника ABC.

Теперь перейдем к доказательству сформулированных выше утверждений.

Доказательства утверждений

Утверждение 1а. Пусть $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Возьмем на отрезке A_1A_2 точку D, делящую этот отрезок в отношении $k_2 : k_1$. Тогда $k_1(A_1D) = k_2(A_2D)$. Пусть $\angle MDA_1 = \varphi$ (см. рис. 2). Запишем теорему косинусов для треугольников MDA_1 и MDA_2:

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2 - 2MD \cdot DA_1 \cos\varphi,$$
$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2 + 2MD \cdot DA_2 \cos\varphi.$$

Умножив первое равенство на k_1, второе на k_2 и сложив их, получим:

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k_1(A_1D)^2 + k_2(A_2D)^2 + (k_1 + k_2)MD^2,$$

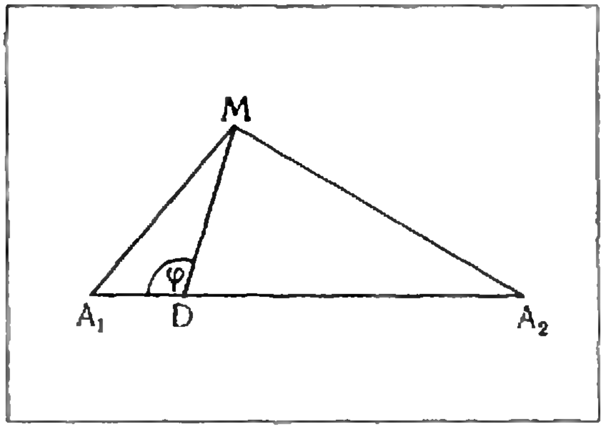


Рис. 2.

откуда

$$(MD)^2 = \frac{k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2}{k_1 + k_2} = C.$$

В правой части последнего равенства мы получили постоянную величину и обозначили ее через C. Таким образом, $(MD)^2$ постоянно, то есть точка M лежит на окружности с центром в точке D и радиусом $\sqrt{C}$, если $C>0$; совпадает с точкой D, если $C = 0$; точек M, удовлетворяющих условию задачи, нет, если $C < 0$.

Легко проверить и обратное утверждение: *каждая точка M полученного множества удовлетворяет соотношению $k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$*, для этого достаточно подставить в формулу (2) выражение для $(MD)^2$.

Мы рассмотрели случай $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Случай $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ сводится к рассмотренному заменой знаков k_1, k_2 и k на противоположные, а в случае $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ (или $k_1 < 0$, $k_2 > 0$) можно действовать так же, как в самом первом случае, только точка D будет лежать вне отрезка A_1A_2 (рис. 3; проведите самостоятельно все выкладки). Формула (2) останется в силе в любом случае, в дальнейшем мы это используем.

Утверждение 1б. Соотношение

$$k_1(A_1M)^2 - k_1(A_2M)^2 = k$$

эквивалентно соотношению

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

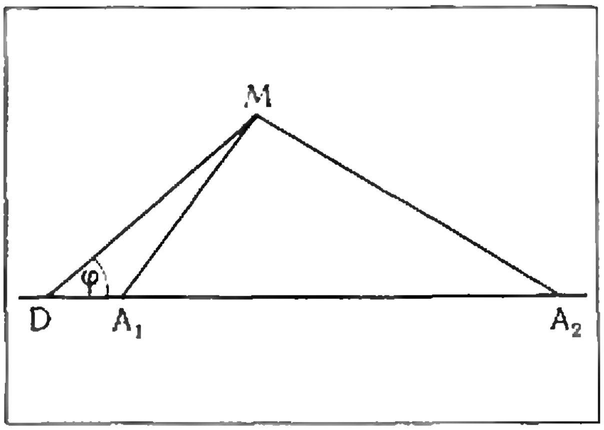


Рис. 3.

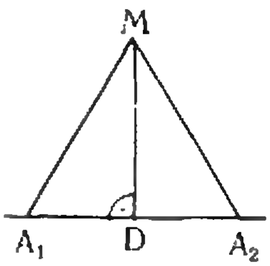


Рис. 4.

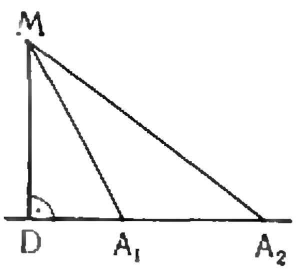


Рис. 5.

Пусть D — проекция точки M на прямую A_1A_2. Тогда по теореме Пифагора (см. рис. 4, 5)

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2,$$
$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2,$$

откуда

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = (A_1D)^2 - (A_2D)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

Итак, задача свелась к нахождению на прямой A_1A_2 точек D, удовлетворяющих последнему соотношению. Такую точку легко найти (проверьте), причем она единственна. Точка M должна лежать на перпендикуляре, восставленном к прямой A_1A_2 в точке D.

Справедливо и обратное утверждение (докажите его самостоятельно): *для всех точек прямой, перпендикулярной отрезку A_1A_2, разность квадратов расстояний до A_1 и A_2 постоянна.*

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Доказательство будем проводить по индукции. Для $n = 2$ мы уже доказали утверждение 2. (Для $n = 2$ геометрическим местом точек будет вся плоскость, если $k_1 + k_2 = 0$ и A_1 совпадает с A_2. Тогда для всех точек плоскости $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = 0$).

Пусть теперь утверждение 2 верно для некоторого n. Докажем, что оно верно и для $(n + 1)$. Заметим, что если $n \geqslant 2$, а все k_1, k_2, …, k_n, k_{n+1} не равны нулю, то среди них найдутся два, сумма которых не равна нулю. Пусть это будут k_1 и k_2. Возьмем точку D, построенную в доказательстве утверждения 1а, и воспользуемся формулой (2). Тогда равенство

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + k_3(A_3M)^2 + \ldots + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k$$

можно записать в виде

$$(k_1 + k_2)(DM)^2 + k_3(A_3M)^2 + \ldots + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2.$$

Теперь справа стоит постоянная, а слева число точек уменьшилось на единицу, сумма же коэффициентов не изменилась. Согласно предположению индукции для последнего равенства утверждение 2 выполняется. Значит, оно выполняется и для $(n + 1)$ точки. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Необходимость. Пусть P — точка пересечения перпендикуляров, опущенных из A_1, B_1 и C_1 на BC, AC и AB. Из утверждения 1б следуют равенства

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 = (PB)^2 - (CP)^2,$$
$$(B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PC)^2 - (AP)^2$$
$$(C_1A)^2 - (BC_1)^2 = (PA)^2 - (BP)^2.$$

Сложив эти три равенства, получим, что в этом случае условие (1) выполняется.

Достаточность. Пусть выполнено условие (1) и пусть P — точка пересечения перпендикуляров, опущенных из A_1 на BC и B_1 на CA. Из утверждения 1б следует, что

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 + (B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PB)^2 - (AP)^2.$$

Но из условия (1) следует, что левая часть последнего равенства равна $(BC_1)^2 - (C_1A)^2$, то есть $(BC_1)^2 - (C_1A)^2 = (PB)^2 - (AP)^2$, а это и означает, что точка P лежит на перпендикуляре, опущенном из C_1 на AB, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Его справедливость следует из симметричности условия (1) относительно A и A_1, B и B_1, C и C_1.

Упражнения

1. Используя утверждение 3, доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Доказать, что все общие хорды любых двух из этих окружностей проходят через одну точку.

3. Доказать, что если перпендикуляры, опущенные из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на прямые $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_nB_1$, пересекаются в одной точке, то

$$(B_1A_1)^2 - (A_1B_2)^2 + (B_2A_2)^2 - (A_2B_3)^2 + \ldots + (B_nA_n)^2 - (A_nB_1)^2 = 0.$$

4. Возьмем три окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон. Доказать, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в точках касания этих окружностей, пересекаются в одной точке.

5. Пусть расстояния от некоторой точки M до вершин A, B и C треугольника ABC выражаются числами a, b и c. Доказать, что ни при каком $d \neq 0$ ни для одной точки плоскости расстояния до вершин в том же порядке не могут выражаться числами

$$\sqrt{a^2 + d},\ \sqrt{b^2 + d},\ \sqrt{c^2 + d}.$$

6. Дан правильный треугольник ABC и произвольная точка D. A_1, B_1 и C_1 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, ACD и ABD. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B и C на B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

7. Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 — произвольные точки плоскости. Доказать, что найдутся такие четыре числа x_1, x_2, x_3 и x_4, не все равные нулю, что $x_1(A_1M)^2 + x_2(A_2M)^2 + x_3(A_3M)^2 + x_4(A_4M)^2$ постоянно для любой точки M этой плоскости.

8. Дан треугольник ABC. Рассмотрим всевозможные пары точек M_1 и M_2 таких, что $AM_1 : BM_1 : CM_1 = AM_2 : BM_2 : CM_2$. Доказать, что все прямые M_1M_2 проходят через фиксированную точку плоскости.

9. Окружность касается стороны AB треугольника ABC и продолжения сторон AC и CB соответственно в точках M и N. Другая окружность касается стороны AC и продолжения сторон AB и BC соответственно в точках P и K. Доказать, что точка пересечения прямых MN и PK лежит на высоте треугольника ABC, проходящей через вершину A.

10. Даны два отрезка AB и CD. Найти геометрическое место точек M таких, что сумма $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDM}$ постоянна.

11. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что середины диагоналей описанного четырехугольника и центр вписанного в него круга лежат на одной прямой (задача Ньютона).

12. Доказать, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости постоянно и отлично от единицы, является окружность (окружность Аполлония).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

О графах с цветными ребрами

Л. Ю. Березина

Если на плоскости расположены несколько точек и линии, каждая из которых соединяет пару из наших точек, то говорят, что задан граф. Точки называются вершинами графа, а линии — его ребрами. Ребра графа могут быть окрашены в несколько цветов, тогда его называют графом с цветными ребрами. На рисунке 1а изображен граф с пятью вершинами и ребрами двух цветов. Этот же граф можно изобразить и другими непохожими рисунками, например, 1б и 1в*).

В этой статье рассматриваются только такие графы, у которых каждая пара вершин соединена ребром. Такие графы называют полными. Однако, поскольку других графов здесь не рассматривается, мы не будем каждый раз писать слово «полный».

Применение графов с цветными ребрами упрощает решения некоторых задач и делает их более наглядными.

Перейдем теперь к решению задач.

Задача 1. *Шесть школьников участвуют в шахматном турнире, который проводится в один круг. Докажите, что всегда среди них найдутся три участника турнира, которые провели уже все встречи между собой, либо еще не сыграли друг с другом ни одной партии.*

Решение. Любые два участника турнира находятся между собой непременно в одном из двух отношений: они либо уже сыграли между собой партию, либо еще не сыграли. Каждому участнику поставим в соответствие вершину графа. Соединим вершины попарно ребрами двух цве-

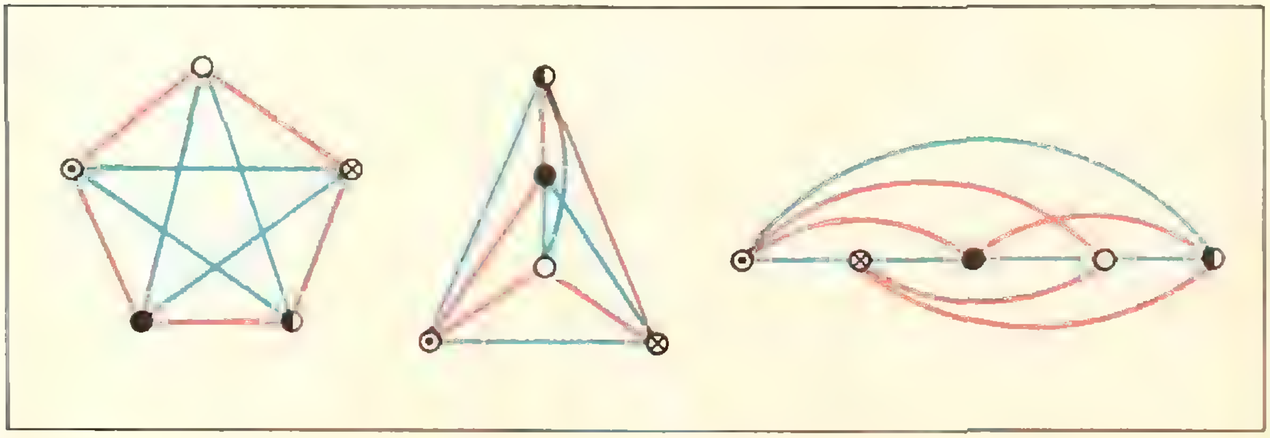


Рис. 1а. Рис. 1б. Рис. 1в.

---

*) Действительно, граф с цветными ребрами можно задавать таблицей с n строками и n столбцами, где n — число вершин. Для этого нужно занумеровать вершины, и на пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы написать цвет ребра, соединяющего i-ю и j-ю вершины. Легко сообразить, что можно занумеровать вершины графов на рисунках 1а, б и в так, что таблицы окажутся одинаковыми. Именно поэтому мы и говорим, что это — один и тот же граф.

тов. Пусть ребро красного цвета означает, что двое уже сыграли между собой, а синего — что не сыграли. Мы получили граф с шестью вершинами и ребрами двух цветов. Теперь для решения задачи достаточно доказать, что в таком графе обязательно найдется «треугольник» с одноцветными сторонами.

Заметим, что из произвольной вершины нашего графа к пяти остальным непременно выйдут по меньшей мере три ребра одного цвета (докажите это). Пусть, например, из вершины A выходят три ребра красного цвета (рис.2) Какого цвета ребра могут соединять вершины B, C и D? Если хотя бы одно из них окажется красным, как на рисунке 3, то получится треугольник с красными сторонами. Если же все эти ребра синие, как на рисунке 4, то они образуют треугольник с синими сторонами.

Задача полностью решена. Кроме того, при ее решении доказаны два свойства.

Свойство 1. Из любой вершины графа с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов выходит, по меньшей мере, три ребра одного цвета.

Свойство 2. В любом графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов найдется по меньшей мере один треугольник с одноцветными сторонами.

Задача 2. *На географической карте выбраны пять городов. Известно, что из любых трех из них найдутся два, соединенные авиалиниями, и два — не соединенные. Докажите, что тогда:*

1. Каждый город соединен авиалиниями с двумя и только с двумя другими городами.

2. Вылетев из любого города, можно облететь пять остальных городов, побывав в каждом по одному разу, и вернуться назад.

Решение. Каждые два города находятся в одном из двух отношений — они либо соединены между собой авиалиниями, либо не соединены. Пусть вершины графа соответствуют городам, красное ребро — наличию авиалинии, синее — отсутствию. По условию, среди трех ребер, соединяющих любые три вершины, одно ребро — красное, второе — синее, а это означает, что в графе нет ни одного треугольника с одноцветными сторонами. Остается показать, что в графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов каждая вершина принадлежит двум красным и двум синим ребрам, причем красные ребра образуют замкнутую линию, проходящую через каждую вершину только один раз, или иначе, что в таком графе найдется «пятиугольник», все стороны которого — красные, а все диагонали — синие.

Ясно, что из каждой вершины графа выходят два красных ребра и два синих, поскольку в противном случае образовался бы треугольник с од-

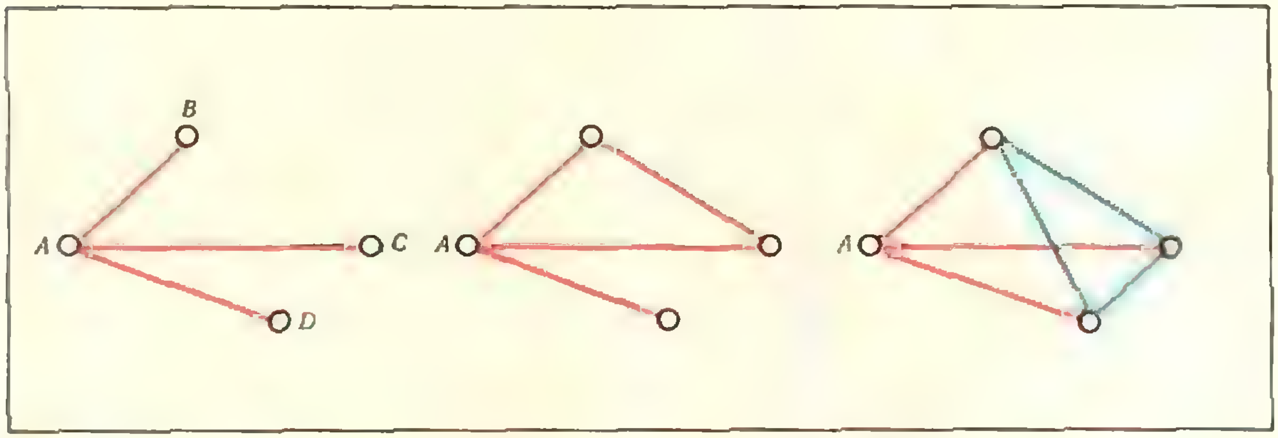


Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

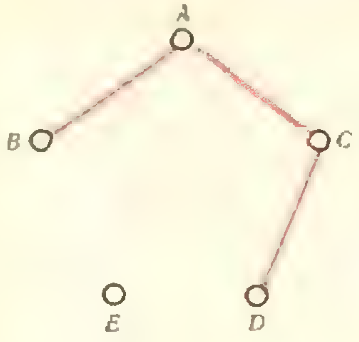


Рис. 5.

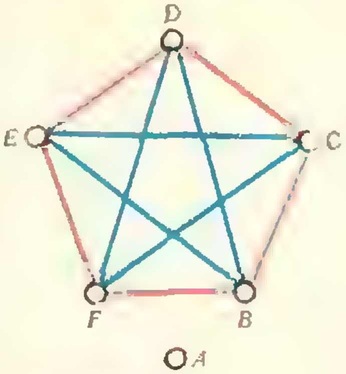


Рис. 6.

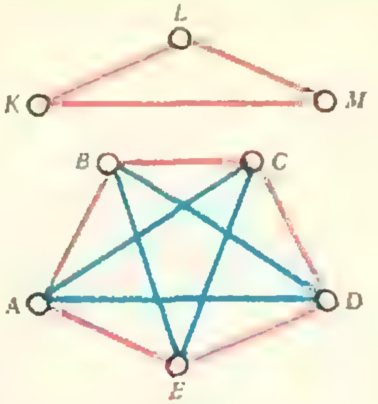


Рис. 7.

ноцветными сторонами. Следовательно, каждый город соединен авиалиниями с двумя и только с двумя городами.

Теперь выберем одну из вершин, например A, а красными будут, скажем, ребра AB и AC (рис. 5). Ребро CB не может быть красным, следовательно, красным является одно из ребер либо CD, либо CE. Пусть красное — CD. Если теперь соединить красным ребром вершины B и D, то вершина E должна быть соединена красными ребрами с вершинами, которые принадлежат уже двум красным ребрам. По условию это невозможно. Остается соединить красными ребрами вершины D и E, B и E. Остальные ребра должны быть синими (рис. 1а).

Вместе с решением задачи получено еще одно свойство графа.

Свойство 3. Если в графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов нет треугольника с одноцветными сторонами, то граф можно изобразить в виде «пятиугольника» с красными сторонами и синими диагоналями.

Задача 3. *В течение дня два из шести телефонных абонентов могут поговорить друг с другом по телефону, а могут и не поговорить. Докажите, что всегда можно найти две тройки абонентов, в каждой из которых либо все переговорили друг с другом, либо все не переговорили.* (*Эта задача обобщает задачу* 1).

Решение. Пусть у графа с шестью вершинами A, B, C, D, E, F красные ребра соответствуют парам абонентов, которые говорили друг с другом по телефону, синие — тем, кто не говорил. Тогда найдется хотя бы один треугольник с одноцветными сторонами, например, треугольник ABF с красными сторонами. Временно исключим из рассмотрения одну из его вершин, скажем A, вместе с выходящими из нее ребрами. Найдется ли в оставшемся графе с пятью вершинами треугольник с одноцветными сторонами? Если найдется, то он содержится и в исходном графе. В противном случае получаем пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями (рис. 6). Теперь восстановим шестую вершину A с ее ребрами. Ребра AF и AB — красные. Если ребро AE или AC будет тоже красным, то образуется еще хотя бы один треугольник с красными сторонами AEF или ABC. Если оба эти ребра будут синего цвета, то появится треугольник ACE с синими сторонами.

Установлено свойство графа, являющееся обобщением свойства 2.

Свойство 4. В любом графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов всегда найдутся два треугольника с одноцветными сторонами. Эти два треугольника могут иметь общую вершину или даже общее ребро.

Если два треугольника имеют общую вершину или общее ребро, то их называют сцепленными.

Задача 4. *Назовем группу людей «однородной», если любые два человека из этой группы знакомы, или,*

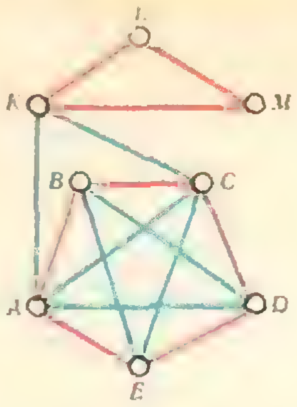


Рис. 8.

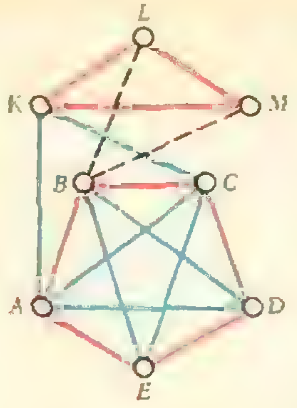


Рис. 9.

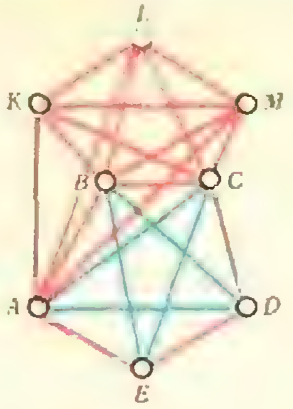


Рис. 10.

напротив, не знакомы. Докажите, что среди восьми случайно встретившихся людей всегда найдутся две однородные группы, состоящие из трех человек каждая, причем никто из первой группы не входит во вторую.

Иначе говоря, требуется доказать, что в графе с восьмью вершинами и ребрами двух цветов всегда найдутся два не сцепленных треугольника с одноцветными сторонами.

Решение. Рассмотрим в графе один из треугольников, например *KLM*, с одноцветными сторонами. Если остальные пять вершин и ребра, соединяющие их попарно, содержат треугольник с одноцветными сторонами, то он и будет являться вторым искомым треугольником. Если остальные пять вершин *A*, *B*, *C*, *D*, *E* не содержат треугольника с одноцветными сторонами, то они образуют пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями (свойство 3). На рисунке 7 изображены не все ребра графа, а лишь треугольник *KLM* с красными сторонами и пятиугольник *ABCDE* с красными сторонами и синими диагоналями. Покажем, что если какая-нибудь вершина треугольника *KLM* соединена синими ребрами с двумя вершинами пятиугольника, взятыми через одну, например, *K* с *A* и *C* (рис. 8), то найдется еще один треугольник с одноцветными сторонами, не сцепленный с треугольником *ACK*. Действительно, посмотрим на пятиугольник *BDELM*. Ясно, что невозможно окрасить ребра *BL* и *BM* так, чтобы он превратился в пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями. Поэтому он обязательно содержит одноцветный треугольник, не сцепленный с треугольником *ACK* (рис. 9).

Остается рассмотреть случай, когда каждая вершина треугольника *KLM* соединена красными ребрами по меньшей мере с тремя последовательными вершинами пятиугольника *ABCDE*. Пусть, например, вершина *K* соединена красными ребрами с вершинами *A*, *B* и *C*. Тогда вершины *L* и *M* соединены красными ребрами с *A*, *B* и *C*. В противном случае найдутся два несцепленных треугольника с вершинами *K*, *L* или *M* и основаниями — сторонами пятиугольника *ABCDE*. Но тогда (см. рис. 10) мы находим два треугольника *CLM* и *ABK* с красными сторонами. Таким образом, во всех случаях найдутся два несцепленных треугольника с одноцветными сторонами.

Решим теперь задачу, предложенную на Шестой международной математической олимпиаде.

Задача 5. *Каждый из 17 ученых переписывается с остальными. В их переписке речь идет о трех темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом лишь по одной теме. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом по одной и той же теме.*

Решение. Условиям задачи соответствует граф с семнадцатью вершинами и ребрами трех цветов.

Из каждой его вершины выходят 16 ребер, причем всегда не менее шести одного цвета. (Доказать это нетрудно.) Если противоположные концы хотя бы двух из них соединены ребром того же цвета, то образуется треугольник с одноцветными сторонами. Если нет, то 6 вершин будут соединены попарно ребрами не более чем двух цветов, а тогда, как мы уже знаем (см. задачу 1), в этом графе с шестью вершинами найдется треугольник с одноцветными сторонами.

В заключение приведем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. На одном из фестивалей встретились 6 делегатов. Оказалось, что из любых троих по меньшей мере двое могут объясниться друг с другом. Докажите, что найдутся три делегата, которые могут объясниться друг с другом.

2. В трехмерном пространстве 9 точек размещены так, что никакие три не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками прямых в точности с четырьмя другими. Докажите, что всегда найдется хотя бы один треугольник с вершинами в этих точках.

3. В работе международного симпозиума лингвистов участвуют n человек. Из любых четырех хотя бы один может объясниться с каждым из оставшихся трех участников хотя бы на одном языке. Докажите, что найдется участник симпозиума, который может объясниться с каждым из остальных участников.

4. В городе n жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причем среди любых троих жителей дружат либо все трое, либо только двое. Докажите, что если не все жители этого города — друзья, то найдется горожанин, у которого врагов больше, чем друзей.

5. В городе n жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют. Каждый день не более чем один из них может начать новую жизнь: поссориться со всеми друзьями и подружиться со всеми врагами. Известно, что любые три жителя могут подружиться. Доказать, что все жители могут подружиться.

Золотое сечение в поэме Шота Руставели

(Окончание. Начало см. с. 34.)

Интересно также подсчитать, в какой последовательности встречаются трех- и пятисложные сегменты в пределах одной строки. Оказывается, здесь могут представляться случаи как эквивалентной, так и инверсионной симметрии.

При эквивалентной симметрии деление второго полустишия на сегменты — такое же, как и первого, то есть строка составлена по схеме (5/3//5/3) или (3/5//3/5). При инверсионной симметрии деление второго полустишия получается зеркальным отображением деления первого, то есть имеет вид ((5/3//3/5), (3/5//5/3). Ниже приводятся примеры соответствующих строк, записанных, как это принято в лингвистике, латинской транскрипцией:

5 3
gáxarèboda/xvárazmšas/
5 3
/sixarúlita/ didita
3 5
mijcvian, /mómigóneben,/
3 5
/damlocven,/ móvegónebi
5
mólmobiérda,
3 3
/mòmitkba/ /gámcgrali,/
5
gámkisébuli
3 5
dámosna/túrpa — turpita//
5 3
értmanétisa/mǯóbita.

В заключение хочется сказать пару слов о том, как была обнаружена эта закономерность.

Изучая структуру произведения, академик Г. В. Церетели решил его «арифметизировать», то есть заменить каждое слово числом, равным количеству слогов в нем. Получился перевод поэмы на «числовой язык». Затем ученый начал анализировать перевод. Этот колоссальный труд — ведь в поэме 6348 шестнадцатисложных строк — не пропал даром — было сделано очень важное и интересное открытие!

У нас в гостях журнал alpha

Mathematische Schülerzeitschrift
alpha
$(a+b)^0$ 1
$(a+b)^1$ 1 1
$(a+b)^2$ 1 2 1
$(a+b)^3$ 1 3 3 1
$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1
5

«Alpha» — это Математический журнал для школьников, который издается в Германской Демократической Республике уже седьмой год.

Журнал выходит 6 раз в год. В нем, как и в «Кванте», рассказывается о проблемах, которые ставит и решает математика, публикуются занимательные задачи, курьезы, сообщения о математических олимпиадах в ГДР и в некоторых других странах, о международных математических олимпиадах. Большая часть материалов доступна даже школьникам 5—6 классов.

— Для более углубленного изучения школьных материалов из номера в номер «Альфа» печатает ряд задач. Школьники, решившие в течение учебного года не менее семи задач из шестнадцати, предназначенных для соответствующего класса, получают грамоту и значок, — рассказывает главный редактор журнала, заслуженный учитель республики Иоганнес Леманн. — А те, кто завоевывают грамоты три года подряд, награждаются золотым значком.

Журнал выписывают и читают школьники не только ГДР. Этот журнал читают в Польше и в Австрии, в Болгарии и в Советском Союзе, и не только читают, но и активно участвуют в его работе. Так, девятиклассница Корнелия Таннгауссер из Линца (Австрия) написала в «Альфа», что у них в школе разгорелся спор о различных понятиях теории множеств, — и в журнале № 5 за 1972 год публикуется подробное разъяснение ученого. А Витя Хасчанский из Дзержинска Горьковской области не только регулярно читает журнал, но и сам составляет задачи; в № 1 за 1973 год было опубликовано несколько его задач.

Журнал можно выписать в любом почтовом отделении Советского Союза. Его индекс 31059, подписная цена — 60 коп. в год.

В этом номере «Кванта» мы публикуем статьи и задачи, любезно предоставленные нам редакцией журнала «Альфа».

В. Фосс

Элементы теории графов

Основы математической дисциплины, называемой теорией графов, были заложены в одной из работ Леонарда Эйлера, опубликованной в 1736 году, но особенно важное значение теория графов приобрела лишь в последние десятилетия *).

Что такое «граф»?

Прежде чем дать определение этого понятия, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. *В волейбольных соревнованиях принимали участие* 6 *команд: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Каждая из них встречалась с каждой другой, исходы матчей приведены в таблице.*

M_i	Выиграла у команд	Проиграла командам
M_1	M_2, M_3, M_4	M_5, M_6
M_2	M_3, M_4, M_5, M_6	M_1
M_3	M_4, M_5, M_6	M_1, M_2
M_4	—	M_1, M_2, M_3, M_5, M_6
M_5	M_1, M_4, M_6	M_2, M_3
M_6	M_1, M_4	M_2, M_3, M_5

На рисунке 1 каждая команда M_i обозначена соответствующей точкой ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Если команда M_i встречается с командой M_j, то точки M_i и M_j соединены стрелкой, направленной в сторону проигравшей команды. Таким образом, мы получим схему, полностью соответствующую таблице 1.

Пример 2. *В атласе автомобильных дорог имеется схема (см. рис. 2). Буквами в кружках обозначены города.*

Пример 3. *Химическому соединению C_2H_6 (этану) соответствует структурная формула, изображенная на рисунке 3а. Ее можно представить схемой, приведенной на рисунке 3б, если атомы обозначить точками, а связи — линиями, соединяющими эти*

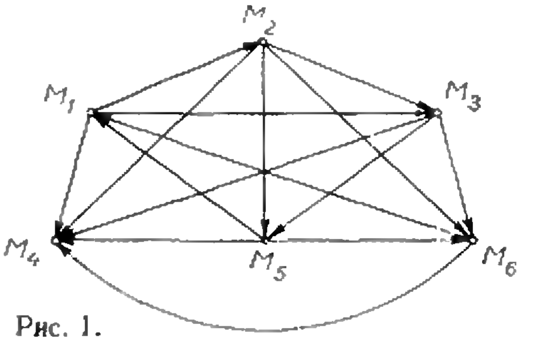


Рис. 1.

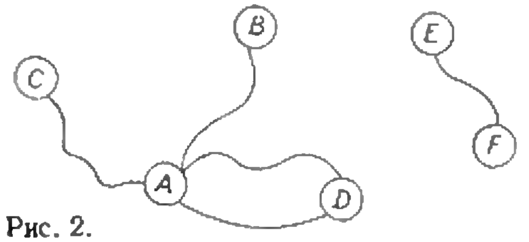


Рис. 2.

W. Voß. «Aus der Graphentheorie». «Альфа» № 6, 1972 и № 1, 1973. Перевод и обработка А. Я. Халамайзера.

*) В этом номере публикуется еще одна статья, посвященная графам (см. стр. 49).

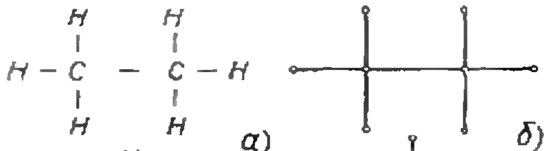


Рис. 3.

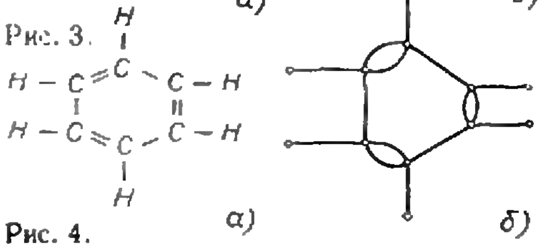
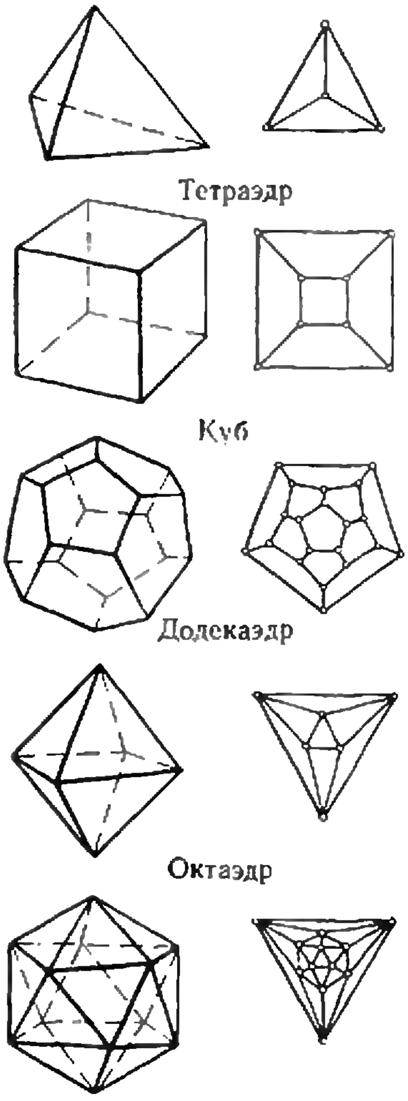


Рис. 4.



Тетраэдр

Куб

Додекаэдр

Октаэдр

Рис. 5. Икосаэдр

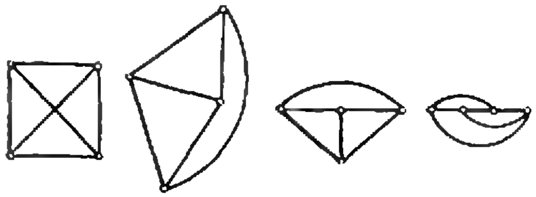


Рис. 6.

точки. Точно так же структурную формулу бензола (рис. 4а) можно представить схемой, состоящей из линий и точек (рис. 4б).

Пример 4. *Связь между вершинами и ребрами правильных многогранников можно наглядно изобразить схемой, состоящей из точек и линий (рис. 5).*

В этих примерах схемы, составленные из точек и соединяющих их линий, представляют собой *графы*. Дадим теперь определение понятия «граф».

Определение 1. *Мы говорим, что задан граф, если даны:*

1) некоторое конечное множество X, элементы которого изображены точками; эти элементы могут обозначать людей, предметы, события, состояния и т. д.;

2) некоторое множество U упорядоченных или неупорядоченных пар (a, b), причем $a \in X$, $b \in X$; каждая подобная пара соответствует на схеме линии (связи), соединяющей точки a и b (если пара упорядочена, то направление связи указано стрелкой).

При этом точки a и b могут иметь и более одной связи. Если для данной пары (a, b) имеется $r (r > 1)$ таких связей, то их различают с помощью индексов, например, $(a, b)_1$, $(a, b)_2, \ldots, (a, b)_r$.

Множества X и U определяют граф $G = [X, U]$. Граф называется *направленным*, если элементы множества U являются упорядоченными парами точек (см. рис. 1), и *ненаправленным* — в противном случае (см. рис. 2, 3, 4).

Элементы множества X называются *вершинами графа*, элементы множества U — *ребрами* или *дугами* графа G.

Точки a и b называются *концами* ребра (a, b) или ребер $(a, b)_i$.

Следует подчеркнуть, что различные по виду рисунки могут представлять собой один и тот же граф, если каждые две соответствующие точки соединены одним и тем же числом ребер (или одинаково направленных

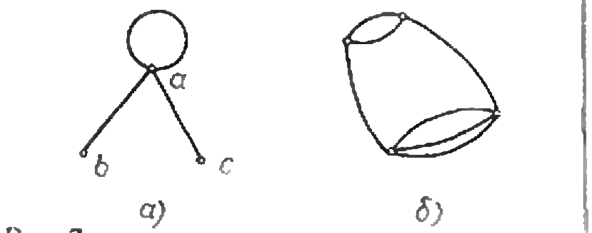


Рис. 7.

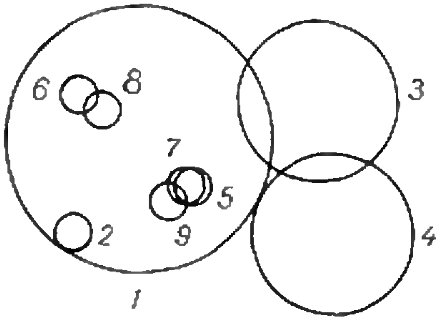


Рис. 8.

дуг). На рисунке 6 даны различные изображения одного и того же графа.

Далее необходимо определить еще два важных понятия и сделать некоторые общие замечания. После этого можно будет сформулировать и доказать простую, но очень важную теорему (теорему 1).

Определение 2. *Две вершины называются связанными, если они соединены ребром. Говорят, что вершина инцидентна ребру, если она служит концом этого ребра.*

Определение 3. *Если данная вершина инцидентна в G ровно r ребрам, то r называется связностью данной вершины в G.*

Так, например, на рисунке 2 вершина A имеет связность 4, вершина D имеет связность 2, остальные вершины имеют связность 1.

В дальнейшем под графом мы будем понимать ненаправленный граф; рассматривая направленный граф, мы каждый раз будем особо это оговаривать.

Ребра вида (a, a) мы в дальнейшем не рассматриваем, то есть исключаем из рассмотрения *петли* (см. рис. 7а).

Иногда в графах бывают вершины, не инцидентные ни одному ребру. Такие вершины называются *изолированными*.

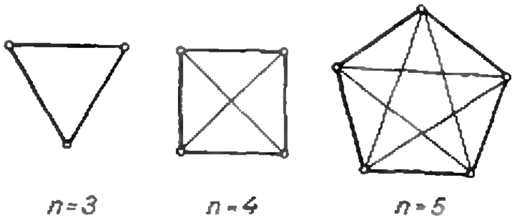


Рис. 9

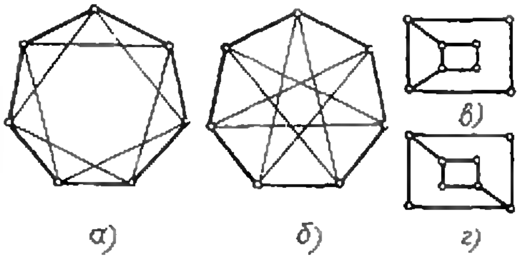


Рис. 10.

Мы будем рассматривать лишь конечные графы, содержащие конечное множество вершин и конечное множество ребер.

Определение 4. *Граф G называется простым, если он не содержит дублирующихся ребер, то есть любые две вершины в G связаны не более чем одним ребром* (на рисунке 7б имеются дублирующие ребра).

Теперь попробуйте решить несколько задач.

Задача 1. На плоскости даны n окружностей, пронумерованных числами 1, 2, . . . , n. Граф $G = [X, U]$ определяется следующим образом: $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $(i, j) \in U$ тогда и только тогда, когда i-я и j-я окружности имеют не менее одной общей точки. Постройте граф G для девяти окружностей, изображенных на рисунке 8.

Задача 2. Граф G называется полным, если каждые две вершины соединены одним и только одним ребром (на рисунке 9 изображены полные n-графы для $n=3$, 4 и 5). Сколько ребер имеет полный n-граф?

Задача 3. Представляют ли один и тот же граф рисунки 10а и 10б? Рисунки 10в и 10г?

Задача 4. Определите связность вершин каждого из графов, изображенных на рисунке 5.

Некоторые теоремы и их применения

Теорема 1. *Пусть* $|X| = n$ — *число вершин,* $|U|$ — *число ребер и*

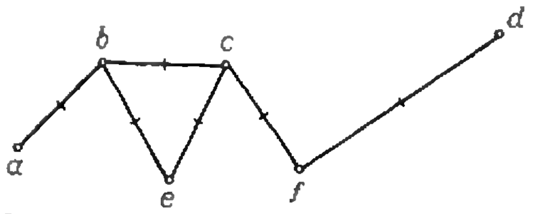


Рис. 11.

$s_1, s_2, \dots, s_n$ — связности вершин графа $G = [X, U]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 2\,|U|, \qquad (\cdot)$$

то есть сумма связностей всех вершин графа G вдвое больше числа его ребер.

Доказательство. Заменим каждое ребро двумя половинками (рис. 11). Тогда каждой половинке ребра будет инцидентна одна и только одна вершина. Если вершина $a_i \in X$ имеет связность s_i, то она инцидентна ровно s_i половинкам ребер; значит, сумма $\sum_{i=1}^{n} s_i$ равна числу всех полуребер или, что то же самое, удвоенному числу ребер.

Между графами, изображенными на рисунке 2 и рисунке 3б, можно усмотреть одно принципиальное различие. В графе на рисунке 3б каждая вершина связана (ребрами) с любой другой; в графе на рисунке 2 вершины *E* и *F* не связаны с вершинами *A*, *B*, *C*, *D*. Для уяснения этого различия необходимо ввести определения 5—9.

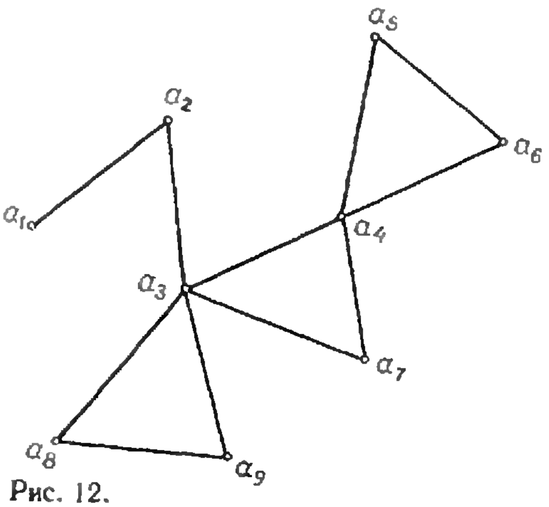


Рис. 12.

Определение 5. $(a_1, a_2) \times (a_2, a_3)(a_3, a_4)\dots(a_{n-1}, a_n)$ *называется последовательностью ребер. Здесь через a_i обозначены вершины, через (a_i, a_j) — ребра. Последовательность ребер называется замкнутой, если $a_n = a_1$, в противном случае она называется открытой.*

Определение 6. *Последовательность ребер, в которой каждое ребро графа G встречается не более одного раза, называется цепочкой* *).

Примечание. Одни и те же вершины могут встречаться в цепочке и более одного раза.

Определение 7. *Открытая цепочка, в которой каждая вершина встречается не более одного раза, называется путем.*

Определение 8. *Замкнутая цепочка, в которой каждая вершина встречается не более одного раза, называется кольцом* **).

Так, например, в графе на рисунке 12

$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9) \times (a_9, a_3)(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_6) \times (a_6, a_5)(a_5, a_4)(a_4, a_7)(a_7, a_3) \times (a_3, a_9)(a_9, a_8)(a_8, a_3)(a_3, a_2)$ — последовательность ребер, не являющаяся путем;

$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9) \times (a_9, a_3)(a_3, a_7)$ — последовательность ребер;

$(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_3)$ — кольцо;

$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_7)(a_7, a_4) \times (a_4, a_5)$ — путь, связывающий вершину a_1 с вершиной a_5.

Определение 9. *Граф G, в котором каждые две вершины a_i и a_j связаны не менее чем одним путем, называется связным.*

---

*) По определению 5 цепочка может быть открытой или замкнутой.

**) Кольца, получающиеся друг из друга циклической перестановкой ребер (например, (1, 2) (2, 3) (3, 1) и (2, 3) (3, 1) (1, 2)) будем считать тождественными. (*Прим. перев.*)

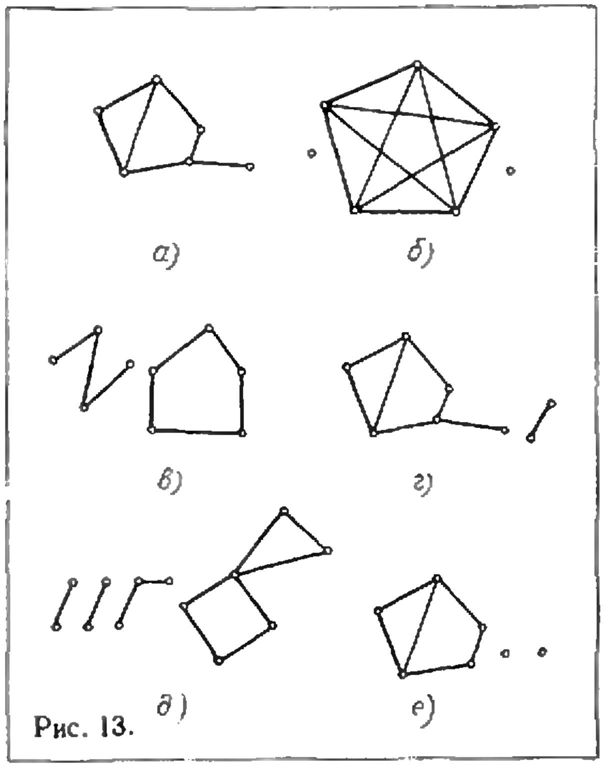


Рис. 13.

Несвязный граф состоит по меньшей мере из двух связных компонент.

Так, например, графы на рисунках 13 в, г, д, е — несвязные и состоят соответственно из 2, 2, 4, 3 компонент.

Вероятно, обилие определений и примечаний уже наскучило читателю. К сожалению, они были совершенно необходимы для понимания дальнейшего.

Не покажется ли вам странным следующее высказывание:

Число людей, каждый из которых имеет нечетное число друзей, является четным?

С помощью теоремы, к рассмотрению которой мы переходим, нетрудно доказать это высказывание.

Теорема 2. *В каждом связном графе G число вершин нечетной связности четно.*

Доказательство. Обозначим сумму связностей «нечетных» вершин (то есть сумму нечетных слагаемых в формуле (•)) через Σ_1, а сумму связностей «четных» вершин (то есть сумму четных слагаемых в (•)) через Σ_2. Тогда по теореме 1

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \sum_{i=1}^{|X|} s_i = 2\,|U|,$$

откуда

$$\Sigma_1 = 2\,|U| - \Sigma_2. \quad (**)$$

Числа $2\,|U|$ и Σ_2, а следовательно, и их разность, стоящая в правой части равенства (**), четны, а потому и левая часть (сумма нечетных слагаемых — Σ_1) — число четное. Далее легко доказать (от противного), что количество (нечетных!) слагаемых в этой сумме — четное. Теорема доказана.

Предоставляем читателю решить следующие задачи.

Задача 5. Семеро друзей, разъезжаясь в отпуск, условились, что каждый из них пошлет открытки троим из остальных. Может ли случиться, что каждый из них получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?

Задача 6. Существует ли граф с шестью вершинами, связность которых 2, 3, 3, 4, 4, 4?

Задача 7. Существует ли простой граф (содержащий более одной вершины), никакие два узла которого не имеют одинаковой связности?

Задача 8. Пусть G — (конечный) простой граф, каждая вершина которого имеет связность g. Докажите, что $2\,|U| = g\,|X|$.

В «Кванте» № 3, 1973 на с. 4 была допущена опечатка. Последнее предложение в левой колонке должно выглядеть так: Это не что иное как умноженная на M

$$M = \lg e = 0{,}43429\ldots$$

относительная скорость изменения y при изменении t:

$$\frac{1}{y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \ln\cdot\ \frac{\lg a}{M}.$$

задачник кванта

В этом номере мы публикуем задачи, которые предлагались на VII Всесоюзной олимпиаде школьников по математике и физике.

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 октября 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например; «Задачник «Кванта», М216, М217 или... Ф228».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике или ...новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

Задачи

М216—М220, Ф228—Ф232

М216. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N. (8 кл.)

Г. А. Гальперин

М217. Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Доказать, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам. (9 кл.)

Е. В. Саллинен

М218. Доказать, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$. (10 кл.)

Б. Д. Гинзбург

М219. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами? (10 кл.)

Н. Б. Васильев

М220. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна 1.) (10 кл.)

А. В. Климов

Ф228. На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m (рис. 1). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость V_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска? (8 кл.)

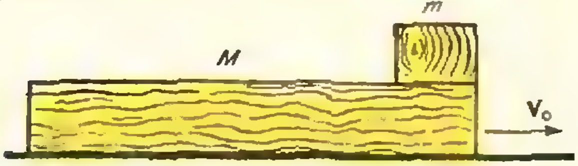


Рис. 1.

Ф229. *Однородной тонкой шайбе,* лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращательное движение с угловой скоростью ω_0 и поступательное со скоростью V_0 (рис. 2). По какой траектории движется центр шайбы? В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: при $\omega_0 = 0$ или при $\omega_0 \neq 0$ (V_0 одинаково в обоих случаях)? (8, 9 кл.)

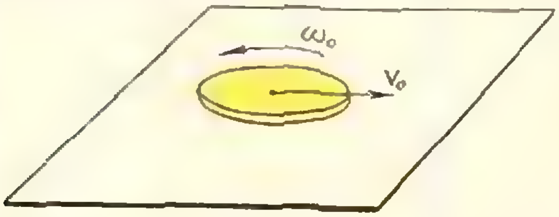


Рис. 2.

Ф230. На систему, состоящую из двух соединенных пружиной шариков массы m, покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности, налетает слева шарик массы M (рис. 3). Происходит лобовой абсолютно упругий удар. Найти приближенно отношение масс $\gamma = \frac{m}{M}$, при котором удар произойдет еще раз. (10 кл.)

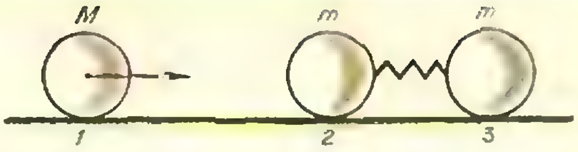


Рис. 3.

Ф231. Заряженный металлический шар радиуса R разрезан на две части по плоскости, отстоящей на расстояние h от центра (рис. 4). Найти силу, с которой отталкиваются эти части. Полный заряд шара Q. (9 кл.)

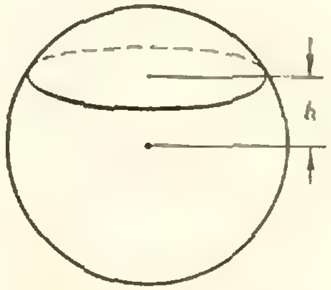


Рис. 4.

Ф232. *Диод включен в цепь,* изображенную на рисунке 5,*а*. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке 5,*б*. Конденсатор предварительно не заряжен. Ключ K замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника E. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. (9 кл.)

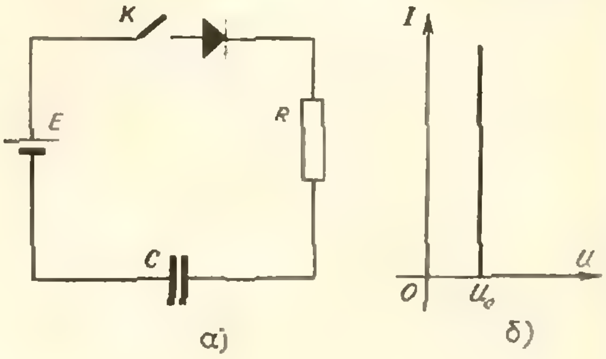


Рис. 5.

Решения задач

M174—M178

M174. См. статью И. Ф. Шарыгина на с. 42.

M175. *а) Каждая сторона правильного треугольника разбита на m равных частей, и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, разрезающие треугольник на m^2 маленьких треугольников. Среди вершин полученных треугольников нужно отметить N вершин так, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин A и B отрезок AB не был параллелен ни одной из сторон. Каково наибольшее возможное значение N (при заданном m)?*

Разделим каждое ребро тетраэдра на m равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные граням. Среди вершин полученных многогранников отметим N вершин так, чтобы никакие две отмеченные вершины не лежали на прямой, параллельной одной из граней. Каково наибольшее возможное N?

в) Среди целочисленных решений уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=m,$$

удовлетворяющих условиям $0\leqslant x_i\leqslant m$ (для всех $i=1,2,\ldots,k$), нужно выбрать N решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное x_i не принимало одного и того же значения. Чему равно наибольшее возможное значение N? (Задачи а) и б) являются частным случаем задачи в) соответственно при $k=3$ и $k=4$.)

Прежде всего проверим, что задача а) является частным случаем задачи в) при $k=3$.

Примем за 1 расстояние между соседними параллельными прямыми, разрезающими треугольник (рис. 1). Каждой точке треугольника сопоставим 3 числа: x_1, x_2 и x_3, выражающие (в выбранном масштабе) расстояния от этой точки до сторон треугольника (рис. 2).

Легко показать, что сумма $x_1+x_2+x_3$ — одна и та же для всех точек треугольника. В самом деле, обозначим через $2a$ длину стороны треугольника; тогда ax_1, ax_2 и ax_3 — площади треугольников OA_2A_3, OA_1A_3 и OA_1A_2 (рис. 2); отсюда $a(x_1+x_2+x_3)$ — площадь $\Delta A_1A_2A_3$, то есть $x_1+x_2+x_3$ не зависит от выбора точки O. В выбранном масштабе $x_1+x_2+x_3=m$ (где m — число отрезков, на которые разбита каждая сторона треугольника).

Мы сопоставили каждой точке треугольника 3 числа: x_1, x_2 и x_3. При этом вершинам маленьких треугольников сопоставлены целые неотрицательные числа (рис. 3).

В задаче а) требуется, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин A и B отрезок AB не был параллелен ни одной из сторон $\Delta A_1A_2A_3$. В задаче в) ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное x_i не должно принимать одно и то же значение. Оба требования (второе — при $k=3$) означают, разумеется, одно и то же.

Таким образом, задача а), действительно, представляет собой частный случай задачи в) при $k=3$.

Аналогично проверяется, что задача б) эквивалентна задаче в) при $k=4$.

Итак, остается решить задачу в).

Переформулируем ее:

Пусть в прямоугольной таблице из k столбцов и n строк можно так расставить неотрицательные целые числа, что сумма чисел в любой строке равняется m и ни в каком столбце никакие два числа не повторяются. Пусть k и m фиксированы. Какое наибольшее возможное значение N может тогда принять n?

Новая формулировка, разумеется, эквивалентна исходной, но при этом позволяет проще и короче изложить решение.

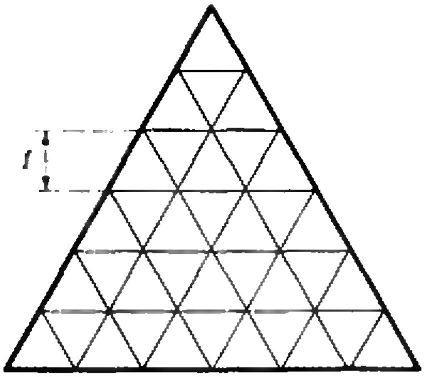


Рис. 1.

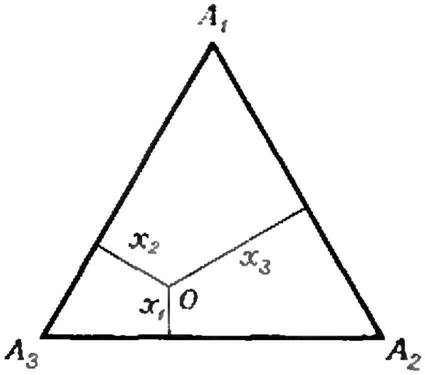


Рис. 2.

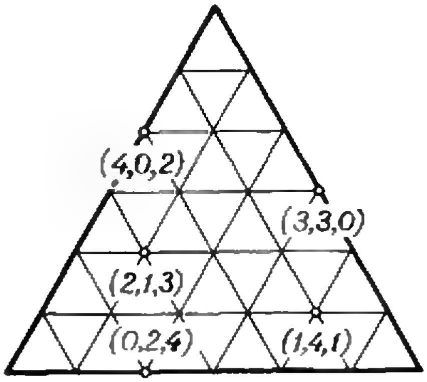


Рис. 3.

$0 \dots 0$	$l \dots l$
$1 \dots 1$	$l-1 \dots l-1$
$\vdots$	$\vdots$
$l-1 \dots l-1$	$1 \dots 1$
$l \dots l$	$0 \dots 0$
r столбцов	r столбцов

Таблица 1.

$0 \dots 0$	$l \dots l$	$l+q$
$1 \dots 1$	$l-1 \dots l-1$	$l+q-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l-1 \dots l-1$	$1 \dots 1$	$q+1$
$l \dots l$	$0 \dots 0$	q
r столбцов	$(r-1)$ столбец	

Таблица 2.

0	l	$2l$
2	$l-1$	$2l-1$
4	$l-2$	$2l-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l$	0	l
1	$2l$	$l-1$
3	$2l-1$	$l-2$
5	$2l-2$	$l-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-1$	$l+1$	0

Таблица 3.

0	l	$2l+1$
2	$l-1$	$2l$
4	$l-2$	$2l-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l$	0	$l+1$
1	$2l$	l
3	$2l-1$	$l-1$
5	$2l-2$	$l-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-1$	$l+1$	1

Таблица 4.

0	$l-1$	$2l$
2	$l-2$	$2l-1$
4	$l-3$	$2l-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-2$	0	$l+1$
1	$2l-1$	$l-1$
3	$2l-2$	$l-2$
5	$2l-3$	$l-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-1$	l	0

Таблица 5.

Докажем, что $N \leqslant \left[\frac{2m}{k}\right] + 1$, где $\left[\frac{2m}{k}\right]$ означает целую часть числа $\frac{2m}{k}$ $\left(\text{наибольшее целое, не превосходящее } \frac{2m}{k}\right)$.

Всего чисел в столбце N, они не повторяются и неотрицательны. Значит, сумма их не меньше, чем

$$0 + 1 + \cdots + (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Столбцов в таблице k. Значит, сумма чисел во всей таблице не меньше, чем $\frac{kN(N-1)}{2}$.

С другой стороны, в каждой строке сумма чисел равна m, откуда сумма чисел во всей таблице равна Nm.

Итак, $Nm \geqslant \frac{kN(N-1)}{2}$. Следовательно, $m \geqslant \frac{k(N-1)}{2}$ и $\frac{2m}{k} \geqslant N-1$. Так как $(N-1)$ — обязательно целое, то $\left[\frac{2m}{k}\right] \geqslant N-1$. Тем самым, $N \leqslant \left[\frac{2m}{k}\right] + 1$.

Можно ли утверждать, что $N = \left[\frac{2m}{k}\right] + 1$?

При $k=1$ это, очевидно, не так: $N=1$, а $\left[\frac{2m}{k}\right] + 1 = 2m + 1$. Но, оказывается, случай $k=1$ — единственное исключение: при $k \geqslant 2$

$$N = \left[\frac{2m}{k}\right] + 1.$$

Чтобы доказать это, мы построим для любых целых k и m ($k \geqslant 2$, $m \geqslant 0$) таблицы $k \times N$, удовлетворяющие всем условиям задачи.

Пусть сначала k — произвольное четное положительное число: $k = 2r$, $r \geqslant 1$. Если $m = rl$, где l — любое неотрицательное целое число, то $N = l + 1$ (см. табл. 1).

Если $m = rl + q$, где $0 \leqslant q < r$, то ко всем числам последнего столбца таблицы 1 нужно прибавить по q (см. табл. 2); N по-прежнему равно $l+1$. Таким образом, при четном k таблицы построены для любого m.

При построении таблиц для нечетных $k > 1$ выделим особо случай $k = 3$.

При $k = 3$, если $m = 3l$ или $m = 3l + 1$, то $N = 2l + 1$ (табл. 3 и 4), а если $m = 3l - 1$, то $N = 2l$ (табл. 5).

Замечание. Рис. 3 соответствует табл. 3 при $k = 3$, $m = 6$.

Пусть теперь $k = 3 + 2r$ — произвольное нечетное число, большее трех, а m — любое неотрицательное целое число. Обозначим через p остаток от деления m на k и рассмотрим 2 случая: 1) $0 \leqslant p \leqslant r + 1$, 2) $r + 2 \leqslant p \leqslant 2r + 2$.

В первом случае $m = kl + q$, $0 \leqslant q = p \leqslant r + 1$, $N = 2l + 1$, а соответствующая таблица образуется добавлением к табл. 3 таких $2r$ столбцов, которые получаются, если в табл. 2 заменить l на $2l$.

Во втором случае $m = k(l - 1) + r + 2 + q$, $0 \leqslant q \leqslant r$, $N = 2l$, и соответствующая таблица образуется добавлением к табл. 5 таких $2r$ столбцов, которые получаются, если в табл. 2 заменить l на $2l - 1$.

М. Л. Гервер

М176. *К какой стороне треугольника ABC ближе всего расположена точка пересечения его высот, если $\angle A < \angle B < \angle C$? А к какой вершине?*

Обозначим высоты через AK, BM, CP, и точку их пересечения через O.

Расстояния от O до сторон равны OK, OM, OP.

Предположим, что $\angle C \neq 90°$. Тогда

$$OK < OM < OP.$$

Докажем левое неравенство (правое доказывается аналогично). Действительно,

$$\frac{OM}{OC} = \frac{AP}{AC} = \cos\angle A,$$

$$\frac{OK}{OC} = \frac{BP}{BC} = \cos\angle B.$$

Поскольку $\angle A < \angle B$, то $\cos\angle A > \cos\angle B$, откуда $OM > OK$, что и требовалось. Расстояния от O до вершин расположены по величине так:

$$OA > OB > OC.$$

Докажем левое неравенство (правое доказывается аналогично).

$$\frac{OA}{OP} = \frac{1}{\sin\angle OAP} = \frac{1}{\cos\angle B}$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{1}{\sin\angle OBP} = \frac{1}{\cos\angle A},$$

откуда $OA > OB$. Приведенное решение годится для всех треугольников, кроме прямоугольных.

В случае, когда $\angle C = 90°$, оба доказательства не проходят.

Найдите ответ для этого случая сами (он очевиден).

М177. *Найдите все решения уравнения*

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$

где a — заданное вещественное число, n — натуральное число, большее единицы.

Разберем сначала особый случай $a = 0$. Получаем:

$$\sqrt[n]{x^n} + \sqrt[n]{-x^n} = 0.$$

Если n — четное, то единственным решением будет $x = 0$ (так как иначе x^n и $-x^n$ имеют разные знаки, и один из корней не имеет смысла). Если n — нечетное, то любое x будет решением.

Пусть теперь $a \neq 0$. Обозначив $\sqrt[n]{x^n - a^n}$ через y, а $a - y$ через z, получаем систему:

$$\left.\begin{array}{l} y + z = a, \\ y^n + z^n = a^n \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} y = a, \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} y = 0, \\ z = a \end{array}\right\}.$$

В этих случаях оба равенства выполняются. Посмотрим, какие это дает ответы. Вычислим x:

$$x^n = 2a^n \text{ или } x^n = a^n.$$

Эти равенства выполняются при

$$x = \begin{cases} a\sqrt[n]{2}, \\ \pm a\sqrt[n]{2}, \end{cases} \text{ и } x = \begin{cases} a, \text{ если } n\text{—нечетное,} \\ \pm a, \text{ если } n\text{—четное,} \end{cases}$$

соответственно. Подставляя эти значения x в исходное уравнение, получаем в обоих случаях одно и то же:

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Это верно:

при всех a, если n — нечетное,
при $a \geqslant 0$, если n — четное.

Докажем теперь, что при $a \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ система (1) выполняться не может. Достаточно рассмотреть только тот случай, когда $a > 0$, $y \geqslant z$. Действительно, если $\{y, z, a\}$ — ее решение, причем $a < 0$, то и $\{-y, -z, -a\}$ — также ее решение. Далее, если в решении поменять значения y, z местами, то получим снова решение. Значит, если есть решение при $a \neq 0$, то есть и решение при $a > 0$, такое, что $y \geqslant z$.

Итак, пусть $a > 0$, $y \geqslant z$. Рассмотрим два случая.

а) $z > 0$. Тогда
$$y^n + z^n = (y+z)^n, \qquad (2)$$
откуда $z^n = (y+z)^n - y^n = (y+z-y)\times[(y+z)^{n-1} + \ldots + y^{n-1}]$. Но $z^n < z(y+z)^{n-1}$, поэтому равенство (2) невозможно.

б) $z < 0$. Положим $z = -w$.

При n четном система (1) принимает вид
$$\left.\begin{aligned} y - w &= a,\\ y^n + w^n &= a^n \end{aligned}\right\}.$$
Решений нет, так как из первого уравнения $y > a$, откуда $y^n > a^n$ и тем более $y^n + w^n > a^n$. При n нечетном система (1) принимает вид
$$\left.\begin{aligned} y - w &= a,\\ y^n - w^n &= a^n \end{aligned}\right\}$$
или
$$\left.\begin{aligned} a + w &= y,\\ a^n + w^n &= y^n \end{aligned}\right\}$$
что аналогично случаю (*а*).

Итак, вот окончательный ответ.

Если n нечетное, то при всех $a \neq 0$ $x_1 = a\sqrt[n]{2}$, $x_2 = a$; при $a = 0$ любое x — решение.

Если n четное, то при $a > 0$ $x_{1,2} = \pm a\sqrt[n]{2}$, $x_{3,4} = \pm a$, при $a = 0$ $x = 0$, а при $a < 0$ решений нет.

Большинство ошибок в письмах, присланных читателями, связано с тем, что указываемый ответ верен не при всех значениях параметров a и n; иногда ответ указан верно, но доказательство, что других решений нет, отсутствует.

А. Л. Тоом

М178. *Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1. Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.*

Проведем через точку R прямую, параллельную стороне BC. Пусть она пересекает стороны AC и AB в точках B_2 и C_2. Мы докажем, что R — середина отрезка B_2C_2: в этом и только в этом случае прямая AR делит BC пополам. Поскольку $PR \perp B_2C_2$, для этого нужно доказать, что треугольник B_2PC_2 — равнобедренный. Докажем равенство углов C_2B_2P и B_2C_2P. Около четырехугольника RC_2C_1P можно описать окружность (это следует из того, что $\angle C_2RP = \angle C_2C_1P = 90°$), значит, $\angle RC_2P = \angle RC_1P$. Но точно так же вписанным является четырехугольник AC_1PB_1 ($\angle AC_1P = \angle AB_1P = 90°$), следовательно $\angle B_2C_2P = \angle PC_1B_1 = \angle PAB_1$). Аналогичные рассуждения для четырехугольников B_2B_1RP и B_1AC_1P показывает, что $\angle C_2B_2P = \angle PAC_1$. Но так как AP — биссектриса угла A, требуемое равенство углов C_2B_2P и B_2C_2P доказано. Задача решена.

И. Ф. Шарыгин

Мы получили более 200 решений задач **М171** и **М176**. Правильные решения задач **М170, М172—М175, М177—М179** прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *П. Агаронов* (Баку) **2**; *С. Агеев* (Воронеж) **2**; *С. Айвазян* (Ереван) **0**; *С. Актеричев* (Магнитогорск) **8**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **2**; *А. Асасян* (Камо Арм. ССР) **0**; *Б. Ашавский* (Москва) **0, 2—4, 8**; *А. Бакулев* (Москва) **0**; *П. Баньковский* (Уральск) **4, 8**; *А. Баранов* (Семиозерье Ленинградской обл.) **8**; *Е. Башкиров* (Минск) **7**; *Г. Баядян* (Кировакан) **3, 8**; *О. Бегларян* (Сисиан Арм. ССР) **0**; *К. Безденежных* (Нижний Тагил) **2**; *С. Белолипецкий* (Киржач Владимирской обл.) **3**; *Д. Блехтер* (Кишинев) **0**; *А. Блох* (Харьков) **2, 3, 7, 8, 9** а), б), в); *И. Борисенко* (Кривой Рог) **2**; *С. Бочканов* (Рузаевка) **0**; *А. Вайновский* (Баку) **3, 7**; *А. Вальков* (Ташкент) **0, 2, 4, 7, 8**; *Г. Высоцкая* (Красноярск) **8**; *Г. Галеева* (Казань) **0**; *Л. Генгринович* (Ташкент) **0, 2**; *Л. и И. Готман* (Арзамас) **0, 8, 9** а), в); *А. Григорян* (Баку) **2—4, 8, 9**а), б); *В. Гринберг* (Москва) **0**; *Е. Гурвич* (Ташкент) **0, 2, 4**; *В. Даушев* (Андижан Узб. ССР) **2, 3**; *Н. Демчук* (Мытищи Московской обл.) **8**; *Н. Денисов* (Тейково Ивановской обл.) **0**; *Ж. Джанян* (с. Гюлистан Азерб. ССР) **8**; *М. Драчинский* (Тбилиси) **0**; *В. Евдокимов* (Ярославль) **0**; *Р. Егорян* (Раздан) **0**; *Ю. Житяйкин* (Донецк) **8**; *М. Жуков* (Баку) **0, 2, 8**; *А. Зайко* (Челябинск) **3**; *Г. Заргарян* (Тбилиси) **0**; *В. Зарубин* (Летний Отдых Московской обл). **2**; *А. Заславский* (Калинин) **0, 2—4, 7, 9**а), б); *Л. Земсков* (Одесса) **0**; *С. Зенович* (Ташкент) **8**; *Р. Ибраев* (Уфа) **2**; *Ж. Идириссов* (с. Саты Алма-Атинский обл.) **2, 3**; *Е. Ильтеев* (Орджоникидзе) **0**; *Р. Ильясов* (Желтые Воды.) **2 — 4, 8**; *А. Калюжный* (Киев) **0, 8**; *А. Кац* (Баку) **3**; *М. Кобозев* (Киев) **3**; *В. Ковтунец* (с. Шостаков Ровенской обл.) **2**; *В. Колосов* (Киев) **0, 2, 4, 8**; *С. Коноплин* (Баку) **0**; *С. Конягин* (Саратов) **7, 8, 9**а), б); *А. Копелевич* (Ленинград) **2**; *И. Красников* (Рига) **0, 2, 3**; *Е. Кривонос* (Чусовой) **0**; *М. Левин* (Витебск) **0**; *М. Лейдерман* (Могилев) **3**; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) **0, 2—4**; *М. Лифшиц* (Ленинград) **2, 3, 7, 8**; *В. Логинов* (Москва) **2, 4**; *Г. Лутингер* (Черновцы) **0**; *А. Макаричев* (Львов) **0, 2, 3**; *Г. Малащонок* (Львов) **0, 2—4, 8**; *И. Меджибовский* (Москва) **0, 4, 8**; *А. Мехович* (Владивосток) **0, 8**; *А. Микаелян* (Ереван) **2**; *К. Миннахметов* (Бугульма Татарской АССР) **3**; *Ю. Неретин* (Москва) **8**; *Т. Никонова* (Москва) **2, 8**; *Р. Норвайша* (Каунас) **2**; *В. Оледник* (Днепропетровск) **8**; *Е. Онегин* (Скопин Рязанской обл.) **3**); *Л. Островецкий* (с. Держановка Черниговской обл.) **2**; *Б. Палатник* (Баку) **0, 8**; *В. Паньков* (Минск) **8**; *П. Парамонов* (Москва) **0, 4, 7, 8**; *А. Печковский* (Москва) **0, 2, 3**; *В. Прасолов* (Донецк) **2**; *С. Путинцев* (Кемерово) **2**; *А. Райнин* (Москва) **3**; *А. Рашковский* (Харьков) **8**; *В. Рогов* (ст. Ерцево Архангельской обл.) **0**; *Р. Рожков* (Рязань) **0**,

2, 8; *Л. Рудицер* (Харьков) **0, 2, 3**; *С. Саньковский* (Минск) **4, 8**; *М. Сапир* (Свердловск) **0, 2, 3**; *А. Сбоев* (пос. Медведок Кировской обл.) **4**; *С. Семенов* (Воронеж) **0**; *Р. Сирота* (Харьков) **0, 3, 8, 9**а), б), в); *С. Скоков* (д. Соковки, г. Слободской) **8**; *В. Слепой* (Фрунзе) **8**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **0, 4, 5, 8, 9**а), б), в), г); *А. Слесаренко* (Рубцовск) **0, 3, 4, 8**; *А. Слинкин* (Москва) **0, 2, 8**; *В. Солодушкин* (Степногорск) **3**; *П. Сухов* (Свратов) **3**; *Ю. Стецко* (Черновцы) **0**; *С. Табачников* (Москва) **0**; *А. Тагиев* (Баку) **0**; *А. Тиняков* (Симферополь) **2**; *И. Тоноян* (Ереван) **2**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **0, 2—4, 8**; *А. Тюлягин* (Кировоград) **7, 8**; *В. Урываев* (Магнитогорск) **8**; *Б. Федоров* (Московская обл.) **8**; *В. Филин* (Каспийск) **0**; *В. Хлебопрос* (Киев) **0**; *С. Церковный* (Ленинград) **2; 4, 8**; *И. Цукерман* (Ленинград) **2**; *В. Цырклевич* (Белвцы) **2**; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) **0**; *С. Черемшанцев* (Ленинград) **9**а), б); *Н. Чернсв* (Кривой Рог) **8**; *В. Чернякин* (Полтавская обл.) **8**; *Е. Чесноков* (Москва) **2**; *К. Шварцман* (Кишинев) **0**; *Ю. Шмелев* (Ярославль) **0, 2, 4**; *И. Шугалев* (Москва) **8**; *В. Шурыгин* (Горький) **3**; *И. Щербаков* (Первомайск Николаевской обл.) **2**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **0, 2—5, 8**; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **2, 4, 8**.

Ю. П. Лысов

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф188—Ф192**, успешно справились с задачами **Ф188** и **Ф190**. Остальные задачи правильно решили следующие читатели (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи): *С. Актершев* (Магнитогорск) **1**; *М. Абдулхаков* (Ангарск) **2**; *О. Войнова* (п. Кош-Тегирмен Кирг. ССР) **9—1**; *С. Гаркуша* (Ташкент) **9**; *В. Грабский* (Ленинакан) **9**; *Н. Головко* (Прохладный) **2**; *А. Давыдов* (Магнитогорск) **1**; *С. Давтян* (Октемберян Арм. ССР) **1**; *Ю. Двинин* (Запорожье) **2**; *Н. Демчук* (Мытищи Московской обл.) **1**; *В. Железный* (Ленинград) **9, 1**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **9, 1**; *В. Карапетян* (Ереван) **9**; *С. Карпенко* (Киев) **9**; *В. Карпинский* (Свердловск) **9, 1**; *Я. Коган* (Глазов) **1**; *В. Колосов* (Киев) **2**; *С. Корнилов* (Грозный) **9, 1**; *И. Куцык* (Ярославль) **9, 1**; *А. Лиякотин* (Днепропетровск) **9**; *З. Майзлин* (Киев) **2**; *Г. Мамедов* (Баку) **1**; *Н. Миронов* (Выкса) **9, 1**; *А. Николаев* (Москва) **9, 2**; *В. Новиченко* (с. Масаллы Азерб. ССР) **1**; *Г. Оганнисян* (с. В. Арташат Арм. ССР) **9**; *В. Орлов* (Москва) **9**; *А. Папин* (Гомель) **9, 2**; *В. Поньков* (Минск) **2**; *И. Пашин* (Саратов) **9**; *Я. Певзнер* (Ленинград) **9, 2**; *В. Простокишин* (Рига) **9, 1**; *А. Рсебцев* (Ростов-на-Дону) **2**; *Л. Рудицер* (Харьков) **9**; *Я. Сайбелниан* (Киев) **2**; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) **9**; *С. Свинолупов* (Уфа) **1**; *Я. Симкин* (Москва) **9, 1, 2**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **9, 1**; *С. Суровцев* (Москва) **9, 1**; *В. Татаринов* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **2**; *О. Теряев* (Днепропетровск) **1, 2**; *В. Усачев* (с. Архангельское Архангельского р-на) **2**; *Н. Федин* (Омск) **9, 2**; *А. Фридман* (Москва) **9**; *С. Хоменко* (Подольск) **9, 1**; *В. Цырклевич* (Бельцы Молд. ССР) **9**; *В. Чернышов* (Пензенская обл.) **1**; *В. Шендрик* (Алма-Ата) **1**; *В. Шишкин* (Ижевск Удм. АССР) **1**; *А. Щехорский* (с. Старики Коростенского р-на) **9**; *С. Щукин* (Днепропетровск) **2**; *С. Якушев* (Уфа) **9**.

С. Г. Семенчинский

Ответ на кроссворд, помещенный в № 7

По горизонтали

3. Лава. 4. Пири. 6. Энтропия. 8. Камертон. 13. Срыв. 15. Бар. 17. Снег. 19. Радуга. 20. Ошибка. 21. Число. 22. Клеро. 23. Континуум. 25. Диагноз. 26. Тополог. 27. Песок. 31. Ангстрем. 32. Давление. 37. Дирак. 39. Теплота. 41. Пифагор. 43. Антиномия. 45. Режим. 46. Эскиз. 47. Рекорд. 48. Распад. 49. Приз. 50. Вин. 51. Ромб. 56. Авогадро. 57. Электрод. 58. Кант. 59. **ГИРД**.

По вертикали

1. Кварц. 2. Цифра. 3. Ленц. 5. Итог. 7. Прогноз. 9. Маршрут. 10. Выкладки. 11. Мантисса. 12. Аналогия. 13. Спин. 14. Ладога. 16. Скачок. 18. Герц. 23. Константа. 24. Модуляция. 27. Поезд. 28. Кварк. 29. Юнг. 30. Био. 33. Интуиция. 34. Франклин. 35. Гироскоп. 36. Планер. 38. Радиан. 40. Анероид. 41. Питание. 42. Темп. 44. Лимб. 52. Звук. 53. Огонь. 54. Отлив. 55. Зонд

ИНФОРМАЦИЯ

VII городская научная конференция школьников Киева

А. Н. Виленкин

С 29 по 31 марта 1973 года Киевской городской отдел народного образования, Киевский городской комитет ЛКСМУ и Киевский Дворец пионеров и школьников проводили VII городскую научную конференцию старшеклассников.

Конференции предшествовал городской конкурс «На лучшую ученическую научную работу», в нем приняли участие свыше 2000 школьников. Было отобрано более 100 работ, авторы которых читали доклады на секциях истории, географии и краеведения, биологии, литературы, математики, физики (раздельно 7—8 и 9—10 классы), химии, астрономии, автоматики и кибернетики.

Секции физики и математики работали во Дворце пионеров и школьников. 30 марта были заслушаны доклады учащихся 7—8 классов по физике и учащихся 7—10 классов по математике, 31 марта — доклады учащихся 9—10 классов по физике. В состав жюри входили крупные ученые, секцией физики (для учащихся 9—10 классов) руководил член-корреспондент АН УССР директор института физики АН УССР доктор физико-математических наук профессор М. Т. Шпак.

Секция математики работала на конференции впервые. Из восьми прочитанных докладов наибольший интерес вызвал доклад ученицы 10 класса 124 школы Наташи Шварцман «Математические методы расчета площади листьев». В ее работе был найден довольно простой способ определения площади листа, скажем, клена (за эту работу Наташа взялась после занятий в кружке биологии).

Наташа выбрала следующий метод. Измеряются два линейных размера l_1 и l_2 между некоторыми точками листа (листья бывают несимметричными, поэтому одной длины листа мало). Затем берется среднее: $l = (l_1 + l_2)/2$. Площадь листа определяется по формуле $S = cl^2$ (это естественно, поскольку площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров). Для нахождения коэффициента c у нескольких образцов были измерены площадь S_i и размер l_i, по ним были определены коэффициенты c_i. Коэффициент c определяется как среднее этих c_i.

Какова же погрешность, допускаемая при таком расчете площади? Наташа оценила и ее! В предположении, что погрешность распределена по так называемому «нормальному закону» (это термин из теории вероятностей), с помощью исследованных листьев была определена вероятная погрешность, допускаемая при расчете площади. Этот доклад был признан одним из лучших на секции математики.

Секция физики имеет уже большой опыт работы. Если раньше на секции преобладали реферативные доклады, то есть обзор научной литературы (хотя и выполненный самостоятельно), то теперь большинство ребят излагали результаты самостоятельно поставленных экспериментов, а также выполненные на «студенческом уровне» расчеты различных физических эффектов. Расскажем о некоторых докладах.

Всем очень понравился доклад ученика 9 класса 142 школы Павла Тривайло «Исследование трения гибких тел». Сначала Павел рассказал о формуле Эйлера. Она заключается в том, что сила трения растет экспоненциально с увеличением числа витков. Это можно пояснить таким примером. Чтобы удержать корабль у пристани, матрос наматывает канат, брошенный с корабля, на тумбу. Пусть матрос тянет канат с силой 1 *кг* и, обмотав канат вокруг тумбы один раз, матрос удержит канат, который тянут за другой конец с силой 10 *кг*, тогда, обмотав канат дважды, матрос удержит уже 100 *кг*, трижды — 1000 *кг*, ..., обмотав n раз — 10^n *кг*.

Затем Павел продемонстрировал собранный им стенд для определения коэффициента трения гибких тел. В работе Павел с помощью этого стенда определил (и сравнил) коэффициенты трения о сталь и латунь магнитофонных лент разных типов, бумажных и металлических лент, нейлоновой лески.

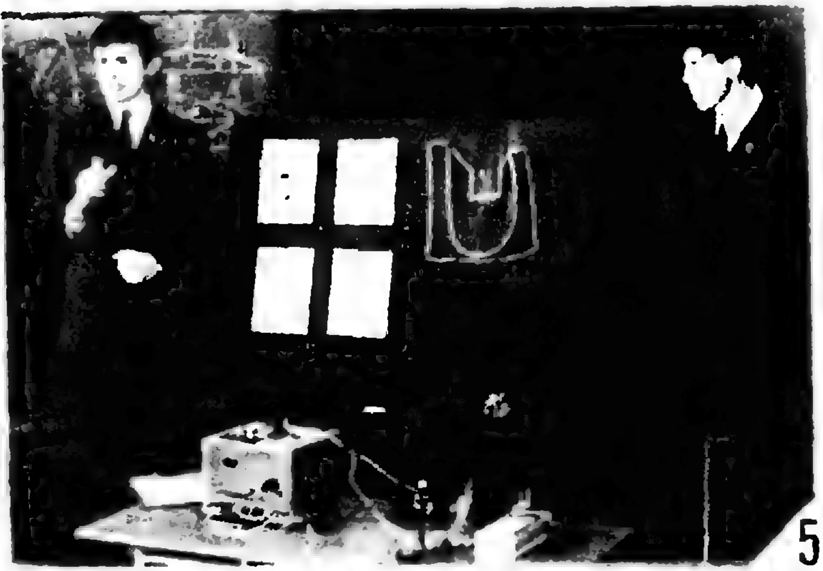
Ученица 9 класса 178 школы Галина Варская прочитала доклад «Исследование нетепловых видов электронной эмиссии» (отметим, что это название не вполне соответствует проделанной работе). Галя сконструировала прибор, позволяющий определить прозрачность клеток, он может помочь биологам при исследовании раковых опухолей.

1

2

3

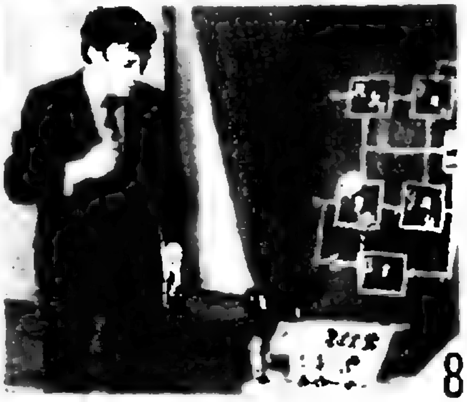
4



5

6

7



8

1. Наташа Шварцман рассказывает об определении площади листа клена.
2. Павел Тривайло рассказывает о трении гибких тел.
3. Ученики 10 класса 90 школы Александр Курицын и Сергей Лысенко демонстрируют членам жюри бумеранг. Полетом бумеранга ребята заинтересовались, прочитав статью в нашем журнале («Квант» № 10, 1972).
4. Галя Варская рассказывает о приборе для измерения степени прозрачности среды.
5. Александр Москалец и Алексей Олефир исследовали процесс очистки металлических порошков от окислов с помощью ультразвука.
6. Алексей Киличник демонстрирует опыты с жидким азотом.
7. Сергей Мухин рассказывает о движении пули в стволе ружья.
8. Сергей Свирида сконструировал «прибор учебной радиотехники», иллюстрирующий процессы, происходящие в электрических цепях.

Ученик 10 класса 171 школы Сергей Свирида продемонстрировал созданный им «Прибор учебной радиотехники», иллюстрирующий процессы, происходящие в электрических цепях.

Очень интересный доклад «Исследование технологии локальной очистки металлических порошков сфокусированным ультразвуком в активной среде» прочитали ученики 10 класса 173 школы Александр Москалец и Алексей Олефир. До сих пор ультразвуком очищали лишь поверхности металлов, а ребята собрали и продемонстрировали в действии прибор для очистки порошков (от окислов), причем исследовали зависимость времени очистки от мощности ультразвука и концентрации кислоты.

Эффективным был доклад ученика 9 класса 61 школы Алексея Килимника «Сжиженные газы». Алексей продемонстрировал опыты с жидким азотом (отвердевание ластика, цветка и другие опыты).

В докладах учащихся 9—10 классов проявлялось глубокое понимание сути исследуемых явлений, серьезное изучение специальной литературы. А вот школьники 7—8 классов читали доклады (и весьма интересные!) в основном по экспериментальным работам.

Так, хорошее впечатление оставил доклад учеников 6 класса 85 школы Вячеслава Соскина и 7 класса 108 школы Виктора Шейкмана «Явление закручивания, возникающее при вытекании жидкостей из малых отверстий» (ребята исследовали вытекание струй из близких отверстий: две струи, пройдя некоторое расстояние раздельно, далее сливались в одну — ребята объяснили этот эффект).

Любовь Макута, ученица 7 класса 181 школы, исследовала зависимость силы притяжения к магниту от профиля насадки, а Оксана Козак, ученица 7 класса 86 школы, рассказала об исследовании полей нескольких близко расположенных стальных магнитов, продемонстрировав фотографии магнитных силовых линий (полученные с помощью железных опилок); эти школьницы — члены физического кружка при Дворце пионеров и школьников.

Итоги конференции и городского смотра были подведены на общем собрании вечером 31 марта. Перед школьниками выступали руководители секций. Они рассказали о работе секций, о достижениях и недостатках. Отмечался возросший уровень работ, ряд очень хороших докладов, но вместе с тем, было замечено, что к докладам надо готовиться тщательнее. Школьникам было о чем рассказать, но в отведенное время они не укладывались. Над этим ребятам надо еще поработать, ведь и на уроке, и на экзамене время ответа ограничено.

Затем были вручены премии авторам лучших работ. Грамоты городского комитета ЛКСМУ и ценные подарки получили

по математике: Александр Голобородько (10 класс КФМШ) за работу «Гомотопические классы путей на фигуре», Валентина Диковская (10 класс КФМШ) за работу «Подсчет фундаментальных групп топологически различных фигур», Геннадий Любезник (10 класс 181 школы) за работу «Признаки делимости в различных системах счисления», Елена Чеховая (10 класс 38 школы) за работу «Математическая теория связи», Наташа Шварцман;

по физике: Галина Варская, Владимир Винецкий (10 класс 145 школы) за работу «Неоптические линзы», Дмитрий Левицкий и Ян Собельман (10 класс 173 школы) за работу «Эксперименты по исследованию поляризации света», Сергей Мачерет (9 класс 145 школы) за работу «Определение коэффициента натяжения заряженного кольца», Сергей Мухин (10 класс 145 школы) за работу «Исследование зависимости отдачи при выстреле от длины ствола», Александр Москалец и Алексей Олефир, Сергей Павлов (10 класс 173 школы) за работу «О температуре глубинных вод морей и океанов», Сергей Свирида, Павел Тривайло, Александр Турчин (10 класс 145 школы) за работу «Некоторые наблюдения диэлектриков и металлов в электростатическом поле».

Дипломы I, II и III степени и грамоты Киевского Дворца пионеров и школьников получили авторы еще 58 работ.

Авторы наиболее интересных работ получили также премии «Кванта» (памятные номера журнала). Их получили Галина Варская, Владимир Винецкий, Оксана Козак, Павел Тривайло, Елена Чеховая и Наташа Шварцман.

Конференция закончилась, но на этом работа школьников не прекратилась. После заседаний жюри секций, представители научных институтов еще долго обсуждали план дальнейшей помощи физико-математическим кружкам, темы будущих работ.

Конференция показала, что школьники 7—10 классов живо интересуются математикой и физикой, увлеченно работают и уже сейчас готовятся к научно-исследовательской работе. Помочь им в этом, оценить их достижения, указать, над чем еще надо поработать,— такова была основная задача конференции. Эту задачу конференция выполнила. Пожелаем же киевлянам *) в будущем году так же успешно провести VIII городскую научную конференцию школьников.

---

*) Собственно говоря, почему только киевлянам? Редакции (и читателям) было бы интересно знать, как обстоят дела в других городах, какие там применяются формы работы со школьниками. Мы ждем писем.

У нас в гостях журнал alpha

Задачи

1. Даны два последовательных натуральных числа a и b, а также их произведение c. Доказать, что число

$$x = a^2 + b^2 + c^2$$

всегда является квадратом некоторого нечетного числа.

2. Электрик, монтажник и инженер, фамилии которых Бауманн, Эйхлер и Хаан, летели рейсом из Праги в Каир. Из разговора, который они вели в самолете, выяснилось, что:

а) Бауманн и инженер собирались работать на строительстве;

б) Электрик и Хаан живут постоянно в Берлине;

в) Эйхлер моложе, чем монтажник;

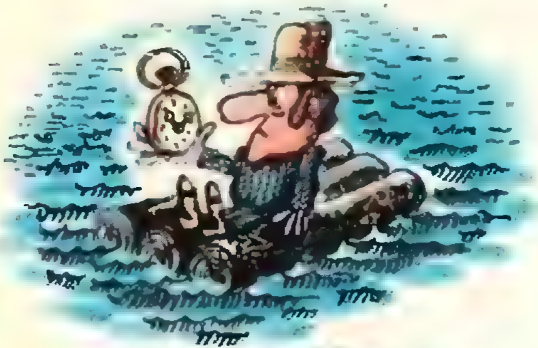
г) Хаан старше, чем инженер.

Назовите фамилии инженера и электрика (ответ нужно обосновать).

CAIRO
BAUMANN EICHLER HAAN
PRAHA

3. Поезд проходит по мосту длиной 171 *м* за 27 *с* (считая от момента въезда на мост локомотива до ухода последнего вагона), а мимо пешехода, идущего навстречу поезду со скоростью 1 *м/с*, — за 9 *с*.

Найти скорость поезда и его длину.



4. Катер проходит путь AB вверх по течению за 4 *ч* 30 *мин*, а путь BA (вниз по течению) — за 3 часа.

Сколько времени будет плыть от B до A плот?

5. Во время стоянки между двумя рейсами матросу исполнилось 20 лет. По этому случаю в кают-компании собрались все 6 членов команды.

— Я вдвое старше юнги и на 6 лет старше машиниста, — сказал рулевой.

— А я на столько же старше юнги, на сколько моложе машиниста, — заметил боцман. — Кроме того, я на 4 года старше матроса.

— Средний возраст команды — 28 лет, — *дал справку капитан.*

Сколько лет капитану?

Л. Фладе

Маленькие слова с большим значением

Получив проверенную работу по математике, Клаус был очень удивлен:

— До чего же придирчив наш учитель,— сказал он друзьям. — Я все написал верно, за исключением нескольких маленьких словечек, но все же за первые четыре задачи не получил достойной оценки!

Вот эти задачи:

1. *При каком условии возможно деление в области натуральных чисел?*

2. *Сколько точек числовой оси соответствуют одному натуральному числу?*

3. *Делится ли число* 3741111 *на* 3? *Обосновать ответ.*

4. а) *Правильно ли, что все натуральные числа имеют одно предшествующее число?*

б) *Если это высказывание неправильно, объяснить, почему.*

Клаус написал:

1. *Деление* $a : b$ *в области натуральных чисел возможно в том случае, если делимое* a *является кратным делителя* b *ИЛИ если* b *не является нулем* *).

2. *Каждому натуральному числу соответствует точка на числовой оси.*

3. *Число* 3741111 *делится на* 3. *Обоснование: если число делится на* 3, *то и сумма цифр этого числа делится на* 3.

4. а) *Неправильно, так как число* 0 *не имеет предшествующего.*

б) *Все натуральные числа не имеют предшествующих чисел.*

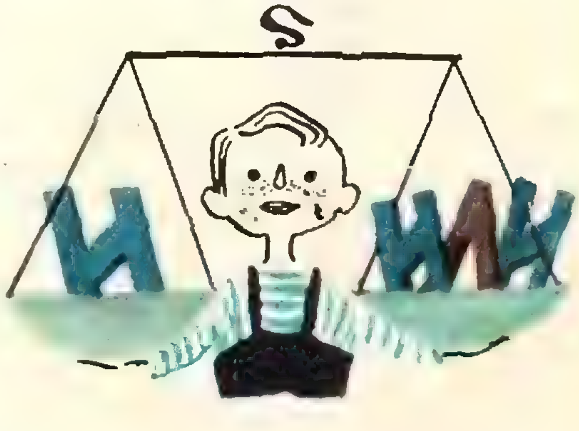
Пока друзья разглядывали работу, Клаус продолжал:

— И все лишь потому, что в первой задаче вместо И я написал ИЛИ, а второй я забыл маленькое словечко РОВНО, а потому также получил сниженный балл, несмотря на то, что в остальном все было верно.

По поводу решения третьей задачи учитель написал: неправильное обоснование.

— Ганс написал так: «Так как сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3». За это он получил хорошую оценку. А я почти не вижу разницы в наших ответах. Что же касается четвертой задачи, то тут я попался: ведь можно было заметить, что предложение: «Все натуральные числа не имеют предшествующих» — тоже неверное.

Из слов Клауса можно сделать следующий вывод.



L. Flade «Kleine Worte—Große Wirkung». «Альфа» № 5, 6, 1972. Перевод и обработка А. Я. Халамайзера.

*) Нуль также считается натуральным числом. (*Прим. перев.*)

Маленькие, почти незаметные слова, как например И, ИЛИ, РОВНО, могут иметь большое значение. И не только маленькие слова сами по себе, но и их место в предложении очень важно (например, место слов ЕСЛИ, ТАК, НЕ).

Для того чтобы впредь не делать таких ошибок, какие сделал наш Клаус, рассмотрим эти маленькие слова с большим значением.

НЕ БОЛЕЕ, НЕ МЕНЕЕ, РОВНО, ОДИН И ТОЛЬКО ОДИН, ХОТЯ БЫ ОДИН

Рассмотрим высказывание:

Каждому натуральному числу соответствует точка на числовой оси.

Это высказывание верное. Оно выражает тот же смысл, что и высказывание:

Каждому натуральному числу соответствует хотя бы одна точка на числовой оси.

Этими предложениями не установлено, что каждое натуральное число соответствует только одной точке на числовой оси. Этих точек может быть несколько, но ни в коем случае не менее одной.

Как видно, информации в этих высказываниях значительно меньше, чем в предложении:

Каждому натуральному числу соответствует одна и только одна точка на числовой оси.

Теперь легко выяснить, верны ли следующие предложения:

1. *Имеется* РОВНО 3 *однозначных натуральных числа, которые делятся на* 3.

2. *Имеется* 3 *однозначных натуральных числа, делящихся на* 3.

3. *Имеется не менее трех однозначных натуральных чисел, делящихся на* 3 *).

Первое высказывание, конечно, неверно, так как имеется более чем 3 однозначных натуральных числа, делящихся на 3, а именно 4 числа: 0, 3, 6, 9. Высказывания 2 и 3 — верные, они имеют один и тот же смысл.

Таким же образом мы можем установить, что высказывание *между* 1 *и* 100 *имеется не менее* 50 *четных натуральных чисел* — неверное, так как на самом деле их только 49 (то есть менее 50).

Наверняка среди вас есть читатели, считающие, что высказывание

ГДР на 1 *января* 1971 *года имела не более* 50 *млн. жителей* — неверное, так как число жителей ГДР всего около 17 млн. Этот аргумент неубедителен: оборот «*не более* 50 *млн.*» означает, что может быть и меньше, но ни в коем случае не больше, значит это высказывание — верное.

Проверьте, верны ли следующие высказывания.

а) Имеется не более 9 однозначных натуральных чисел.

б) Имеется не более двух четных простых чисел.

в) Треугольник имеет не более трех острых углов.

г) Уравнение $3^x = 27$ имеет не более одного решения в области натуральных чисел.

д) Между 1 и 1000 имеется не менее 50 четных натуральных чисел.

е) Уравнение $3^x = 27$ имеет одно и только одно решение.

ж) Число 60 имеет ровно 10 натуральных делителей.

з) Каждому натуральному числу соответствует не более одной точки на числовой оси.

и) Уравнение $3^x = 27$ имеет не менее одного решения.

к) Треугольник имеет не менее одного прямого угла.

---

*) Не забудьте, что нуль считается натуральным числом. (*Прим. перев.*)

Заметим, что два совместных высказывания

Имеется не менее одного x . . .

И

Имеется не более одного x . . .

можно заменить одним:

Имеется одно и только одно x . . .

(сравните высказывания г), е), и).)

И

Союз «И» встречался нам в предложении о делении натуральных чисел (в письменной работе Клауса). С помощью этого слова мы можем объединить несколько отдельных высказываний в одной составное высказывание. Такую связь высказываний называют объединением или *конъюнкцией*. Рассмотрим пример.

Число 3 *удовлетворяет неравенству* $x < 7$ *И число* 3 *удовлетворяет неравенству* $x > 2$.

В этом высказывании две части:

1) *Число* 3 *удовлетворяет неравенству* $x < 7$ (верное),

2) *Число* 3 *удовлетворяет неравенству* $x > 2$ (верное).

Объединение (конъюнкция) высказываний будет верным в том и только в том случае, когда обе части, из которых оно образовано, тоже верны. В случае же, когда одна из частей верна, а другая неверна или, тем более, когда обе части неверны, объединение будет неверным. Например, высказывание

Число 300 *непосредственно следует за числом* 200 *И число* 1000 *непосредственно предшествует числу* 2000 — неверное, так как обе его части неверны.

0 *является наименьшим натуральным числом И* 100000000000 *является наибольшим натуральным числом* — неверное, так как второе из объединяемых высказываний — неверное.

Вернемся к вопросу о делении натуральных чисел.

Деление $a : b$ *в области натуральных чисел возможно, если число* a *кратно числу* b *И* $b \neq 0$.

В этом случае применить ИЛИ вместо И нельзя.

Легко понять, почему учитель не был удовлетворен ответом Клауса: *«Деление* $a : b$ *в области натуральных чисел возможно, если делимое* a *является кратным делителя* b *ИЛИ если* b *не является нулем».* В самом деле, пусть, например, $a = 15$, $b = 4$. Здесь $b \neq 0$; условие, сформулированное Клаусом, выполняется, но деление нацело невозможно.

Проверьте самостоятельно следующие утверждения:

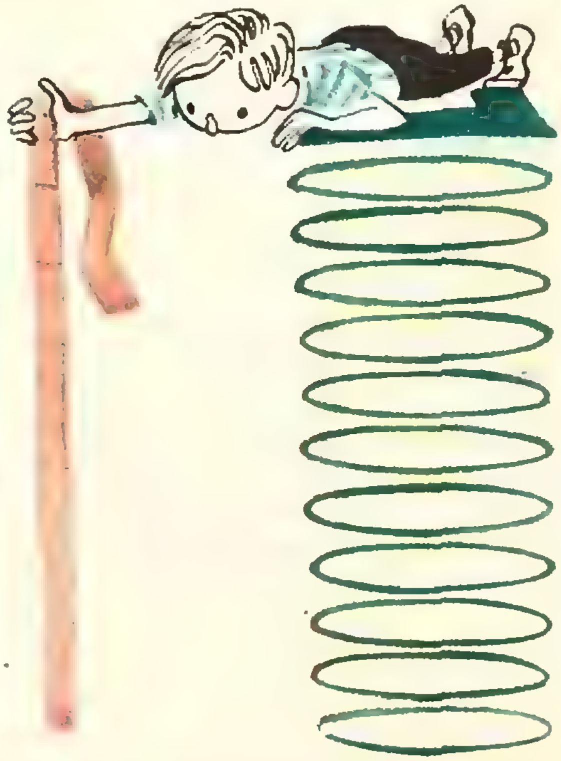
а) $461 \cdot 7^2 = 3217$ И $414 : 6 = 54$.

б) В каждом треугольнике имеется не более одного прямого угла, А ТАКЖЕ не менее одного острого угла.

в) Число 19 удовлетворяет КАК неравенству $17 < x < 27$, ТАК И неравенству $19 < x < 29$.

г) Число 714 является четным И, КРОМЕ ТОГО, делится на 7.

Мы видим, что имеются и другие связывающие слова, например: КАК... ТАК И, И, КРОМЕ ТОГО, НЕ ТОЛЬКО... НО И и другие, которые, будучи примененными вместо союза И, не меняют справедливости высказываний.



Или **ИЛИ** или **ИЛИ**. . . **ИЛИ**

Союз ИЛИ и оборот ИЛИ . . . ИЛИ могут связать два высказывания в новое. При этом очень важно выбрать нужные связующие слова.

Соединение двух высказываний, составленное с помощью ИЛИ, будет верным, если хотя бы одна его часть верна. Если же обе части вы-

сказывания неверны, то будет неверным и составное высказывание.

Соединение, образованное при помощи выражения ИЛИ . . . ИЛИ (которое называется *дизъюнкцией*), будет верным в том и только в том случае, когда одна и только одна часть высказывания верна; в противном случае оно будет неверным.

Высказывание:

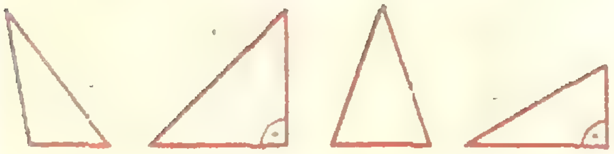
2772 делится на 3 ИЛИ на 9 — верное, так как это число делится и на 3 и на 9, то есть обе части высказывания верны.

Высказывание:

2772 делится ИЛИ на 3 ИЛИ на 9 — неверное.

Рассмотрим еще один пример.

Учитель поставил ученикам задачу: *начертить треугольник, который является прямоугольным ИЛИ равнобедренным.* На рисунке показано, что ученики начертили. Кто из них выполнил задание верно?



а) Дитер б) Гейко в) Петер г) Рольф

а) Дитер — верно, его треугольник — *прямоугольный;*

б) Гейко — тоже верно, его треугольник равнобедренный;

в) и Петер — верно, его треугольник прямоугольный. И также равнобедренный, но это допустимо;

г) лишь чертеж Рольфа неверен: его треугольник не прямоугольный и не равнобедренный.

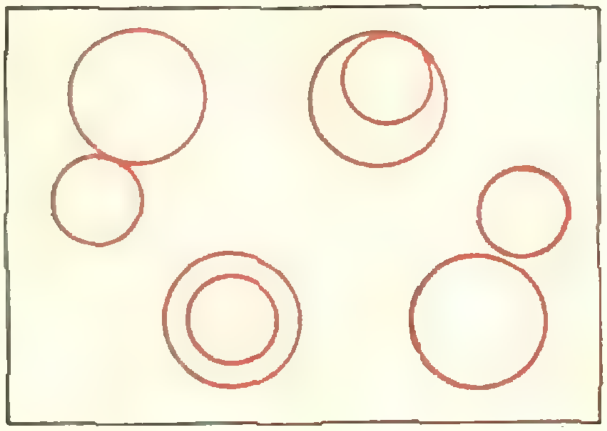
Предположим теперь, что учитель сформулировал задачу так: *начертить треугольник, который является ИЛИ прямоугольным ИЛИ равнобедренным.* Тогда лишь чертежи Дитера и Гейко выполнены верно.

Разберитесь самостоятельно, какие фигуры на этих рисунках начерчены верно, если задания были такими:

а) *начертить два круга, которые касаются* друг друга ИЛИ один из которых расположен внутри другого;

б) начертите два круга, которые ИЛИ касаются друг друга ИЛИ один расположен внутри другого;

в) начертите два круга, которые касаются друг друга И один из них расположен внутри другого.



ЕСЛИ *A*, ТО *B* и ЕСЛИ *B*, ТО *A*

Когда Клаус в своей работе обосновывал, что число 3741111 делится на 3, он написал:

«*Если число делится на 3, то и сумма его цифр тоже делится на 3.*

Ганс написал наоборот:

«*Так как сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3*», — и получил высшую оценку.

Клаус считал, что оба высказывания выражают один и тот же смысл. Так ли это?

Прежде всего заметим, что приведенные выражения опять-таки представляют собой объединения высказываний, образованные с помощью оборота «ЕСЛИ *A*, ТО *B*». Такая взаимосвязь высказываний называется также *импликацией*.

В объединениях высказываний, встречавшихся нам ранее (конъюнкция, альтернатива, дизъюнкция) порядок высказываний не играл никакой роли. Для импликации это уже неверно. Рассмотрим пример.

Предложение

«Если число делится на 2^3, *то оно делится и на 2»*

высказано в форме «ЕСЛИ *A*, ТО *B*»*). Это предложение — верное. Первая часть такого предложения (до запятой) называется посылкой (условием), вторая часть — заключением (утверждением).

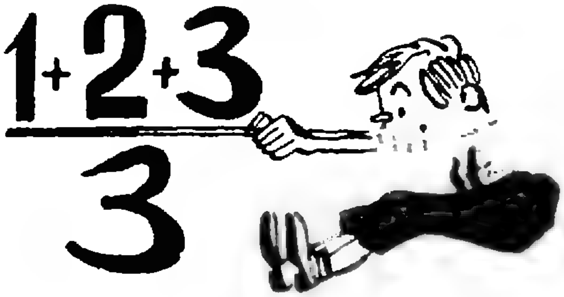
Поменяв местами посылку и заключение, мы получим обращенное предложение:

«ЕСЛИ число делится на 2, *ТО оно делится и на* 2^3*»*,

— а это предложение — неверное.

Рассмотрим еще раз обоснования, приведенные Гансом и Клаусом:

Ганс *«ЕСЛИ сумма цифр делится на* 3, *ТО и само число делится на* 3*»*.



Клаус (написал обращенное предложение): *«ЕСЛИ число делится на* 3, *ТО и сумма цифр числа делится на* 3*»*.

Оба предложения имеют форму «ЕСЛИ *A*, ТО *B*». Но тем не менее нельзя утверждать, что они имеют один и тот же смысл (хотя в данном случае оба предложения верны); они существенно отличаются друг от друга.

Условие, сформулированное Гансом, гласит: *Сумма цифр числа* 3741111 *делится на* 3*»*.

Отсюда делается заключение: *«Число* 3741111 *тоже делится на* 3*»*.

Клаус, наоборот, исходит из условия, что число делится на 3, и делает заключение, что и сумма цифр числа делится на 3.

Обращение верного высказывания может быть верным, а может быть и неверным, как это было показано выше. Поэтому всегда важно понять, будет ли обращение данного высказывания верным.

Если обращение верного высказывания верно, то оба высказывания можно объединить, используя оборот «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА»*).

Итак, число делится на 3 ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА; КОГДА сумма цифр числа делится на 3.

Сформулируем теперь обращения некоторых высказываний и проверим верны ли они.

«ЕСЛИ число делится на 6, *ТО оно делится и на* 2*»*.

Обращение:

«ЕСЛИ число делится на 2, *ТО оно делится и на* 6*»*.

Ясно, что второе предложение неверно, так как, например, 14 делится на 2, но не делится на 6.

Сформулируйте обращенные предложения и проверьте, верны ли они.

а) ЕСЛИ число делится на 12, ТО оно делится и на 6.

б) ЕСЛИ стороны прямоугольника *ABCM* равны, ТО прямоугольник *ABCM* — квадрат.

в) ЕСЛИ точка *P* лежит внутри треугольника, то она лежит и внутри круга, описанного около этого треугольника.

В заключение несколько задач посложнее. Проверим, верно ли, что:

а) *«Число делится на* 9 *ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА оно делится на* 3*»*.

Как мы знаем, оборот «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА» охватывает и само предложение и его обращение. Чтобы установить, верно ли рассматриваемое предложение, надо проверить, верны ли оба предложения, из которых оно составлено. Вот эти два предложения:

---

*) Здесь *A* означает: *«Число делится на* 2^3*»*, *B* означает: *«Число делится на* 2*»*. (*Прим. перев.*)

*) Или иначе: «в том и только в том случае, когда», «если и лишь если». (*Прим. ред.*)

(a_1) *«ЕСЛИ число делится на* 9, *ТО оно делится и на 3»*;

(a_2) *«ЕСЛИ число делится на* 3, *ТО оно делится и на 9»*.

Очевидно, (a_1) верно, (a_2) неверно. Следовательно, и составное высказывание неверно.

Рассмотрите самостоятельно следующие предложения:

(б) Три угла треугольника равны тогда и только тогда, когда равны его стороны.

(в) Два числа имеют общий делитель тогда и только тогда, когда оба они — четные.

(г) Число делится на 4 тогда и только тогда, когда оно делится на 8.

«НЕ ВСЕ...» и «ВСЕ... НЕ»

Мы переходим к рассмотрению последней ошибки, сделанной Клаусом в его письменной работе. Задача заключалась в том, чтобы путем введения отрицания неверное высказывание превратить в верное.

Заметим сначала следующее:

1. Логическое отрицание неверного высказывания приводит к верному высказыванию;

2. Из верного высказывания с помощью логического отрицания можно получить неверное высказывание.

Составим отрицания следующих предложений:

(а) «247 — *простое число»*;

(б) «$2^4 + 2^2 = 2^5$»;

(в) *«а больше, чем 7»*;

(г) *«Произведение* 17·11 — *четное число»*;

(д) *«Все простые числа — нечетные»*.

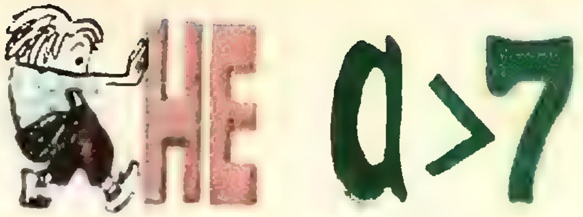
Отрицания предложений (а), (б), (в), (г) можно сформулировать сразу же:

(а′) «247 — *не является простым числом»*;

(б′) «$2^4 + 2^2 \neq 2^5$»;

($в'_1$) *«а не больше, чем 7»* или

($в'_2$) *«а меньше, чем 7 или равно 7»*;



(г′) *«Произведение* 17·11 — *нечетное число»*.

Как видно, отрицания можно сформулировать по-разному. Поэтому не так просто дать определенное правило для составления отрицания каждого отдельного высказывания. Можно, однако, использовать оборот «Неверно, что...» перед сформулированным ранее высказыванием. Так, высказывание *«Неверно, что все простые числа — нечетные»* будет правильно сформулированным отрицанием высказывания (д). А опрошенные мною школьники сформулировали это отрицание так:

Ральф: *«Все простые числа не являются нечетными»*;

Инга: *«Не все простые числа — нечетные»*;

Петра: *«Ни одно нечетное число не является простым*;

Бернд: *«Существует хотя бы одно простое число, не являющееся нечетным»*.

Мы знаем, что высказывание (д) неверно. Значит, отрицание этого высказывания должно быть верным. Но можно проверить, что только Инга и Бернд сформулировали верные высказывания.

2
3
5
7
ПРОСТЫЕ

Вместо высказывания Ральфа: *«Все простые числа не являются нечетными,* — можно также сказать: *«Все простые числа — четные».* Сразу видно, что это предложение неверно (как и высказывание Петры).

Ответы Бернда и Инги являются верными логическими отрицаниями высказывания *«Все простые числа — нечетные».* Точно так же ясно, что логическим отрицанием высказывания *«Все натуральные числа имеют предшествующее натуральное число»* должно быть не высказывание *«Все натуральные числа не имеют предшествующих натуральных чисел»,* а *«Не все натуральные числа имеют предшествующее натуральное число»* или *«Существует хотя бы одно натуральное число, не имеющее предшествующего натурального числа».*

Сформулируем отрицания следующих неверных высказываний:

(1) *«Для всех натуральных чисел a, b верно, что $a - b = b - a$»;*

(2) *«Каждый треугольник имеет два тупых угла»;*

(3) *«Все ромбоиды — ромбы».*

Например:

(1′) *«Не для всех натуральных чисел a, b верно, что $a - b = b - a$»;*
или

«Существуют натуральные числа a, b, для которых неверно, что $a - b = b - a$»;

(2′) *«Не каждый треугольник имеет два тупых угла»*
или

«Существуют треугольники, не имеющие двух тупых углов»;

(3′) *«Не все ромбоиды — ромбы»*
или

«Хотя бы один ромбоид — не ромб».

В математике также встречаются высказывания о существовании. Например:

«Существует хотя бы один прямоугольник, который является квадратом».

Высказывание о существовании можно отрицать с помощью оборотов *«НЕ СУЩЕСТВУЕТ...»* или *«ВСЕ ... НЕ ...».*

Так, например, отрицание высказывания

«СУЩЕСТВУЕТ натуральное число a, удовлетворяющее уравнению $13 - a = 17$»
может звучать так:

«НЕ СУЩЕСТВУЕТ натурального числа, удовлетворяющего уравнению $13 - a = 17$»
или

«Все натуральные числа не удовлетворяют уравнению $13 - a = 17$».

Разумеется, оба последних высказывания имеют один и тот же смысл.

Сформулируйте самостоятельно отрицания высказываний (а)—(е). Какие из этих высказываний неверны?

(а) *«Уравнение $a \cdot 0 = 17$ имеет в области натуральных чисел хотя бы одно решение»;*

(б) *«Все числа, делящиеся на 17, — нечетные»;*

(в) *«Каждое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $3^2 < x < 72$, удовлетворяет также неравенству $3 < x < 2^4$»;*

(г) *«Существуют пары чисел (a, b), для которых $a^b = b^a$»;*

(д) *«Хотя бы один равносторонний треугольник — прямоугольный»;*

(е) *«Все ромбы — ромбоиды».*

«Повторяю условие: Из пунктов А и В навстречу друг другу одновременно выезжают...»

К статье «Объем тел вращения»

1. *а*) $\frac{4}{3}\pi R^3\cos\theta$; *б*) $2\pi^2R^2m\cos\theta$.

2. $4\pi R^3(\pi+4)$.

Указание. Объем тела, полученного вращением цилиндра, равновелик сумме объемов тел, полученных вращением его проекций на плоскость α, и перпендикулярную ей плоскость, проходящую через l.

К статье «Об одном геометрическом месте точек»

1. Взять A_1 совпадающей с A, B_1 — с B, C_1 — с C.

2. Возьмите в качестве A, B и C центры окружностей, в качестве A_1, B_1 и C_1 — по одной из точек пересечения соответственно окружностей с центрами B и C, A и C, A и B и воспользуйтесь утверждением 3.

3. Доказательство аналогично доказательству необходимости в утверждении 3.

4. Обозначим стороны треугольника через a, b и c. Каждая сторона делится точкой касания на две части, длины которых легко вычисляются. Далее легко проверить равенство (1) в статье.

5. Если бы такая точка нашлась (обозначим ее через N), то прямая MN была бы перпендикулярна всем сторонам треугольника ABC.

6. Пусть $BD = x$, $DC = y$, $AD = z$, а сторона треугольника ABC равна a. Если теперь A_2, B_2 и C_2 — точки касания соответствующих окружностей со сторонами BC AC и BC, то отрезки BA_2, A_2C и т. д. легко вычисляются (в частности, $BA_2 = \frac{a+x-y}{2}$). Обозначим через U, V и W радиусы окружностей, вписанных в треугольники BDC, ADC и ADB. Теперь легко проверить справедливость равенства (1) в утверждении 3.

7. Если $A_1A_2A_3A_4$ образуют выпуклый четырехугольник, D — точка пересечения его диагоналей, $A_1D = m$, $A_2D = p$, $A_3D = n$, $A_4D = q$, то для любой точки M плоскости будет постоянно выражение

$$\frac{n}{n+m}(A_1M)^2-\frac{q}{q+p}(A_2M)^2+$$
$$+\frac{m}{m+n}(A_3M)^2-\frac{p}{q+p}(A_4M)^2.$$

8. Пусть $AM_1 : BM_1 : CM_1 = p:q:r$. Тогда геометрическим местом точек M таких, что $(r^2-q^2)(AM)^2+(p^2-r^2)(BM)^2+(q^2-p^2)(CM)^2=0$, будет прямая, проходящая через M_1, M_2 и центр описанного около ABC круга.

9. Пусть O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Поскольку $CM = CN$, то $MN \perp OC$, аналогично $PK \perp BO$. Следовательно, нужно доказать, что перпендикуляры, опущенные из N, P и A на OC, BO и BC, пересекаются в одной точке. Для этого проверьте выполнение равенства (1).

10. Поскольку площади треугольников ABM и CDM не меняются при движении отрезков AB и CD соответственно по прямым AB и CD, то можно передвинуть эти отрезки вдоль соответствующих прямых так, что их концы совпадут с точкой пересечения прямых AB и CD.

Искомым геометрическим местом точек будет параллелограмм, диагонали которого лежат на прямых AB и CM.

11. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, P — середина AC, Q — середина BD, O — центр окружности. Проверьте, что

$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=S_{\triangle OAB}+$$
$$+S_{\triangle OCD}=S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QCD}=$$
$$=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}.$$

К статье «О графах с цветными ребрами»

1. Пусть красное ребро означает, что два делегата могут объясниться на одном языке, а синее — что не могут. Если красного треугольника нет, то по свойству 2 должен быть треугольник с синими сторонами. Но это противоречит условию.

2. Проведенному отрезку поставим в соответствие красное ребро, не проведенному — синее. Докажем, что в полном графе с девятью вершинами, каждая из которых принадлежит четырем красным ребрам и четырем синим, найдется треугольник с красными сторонами.

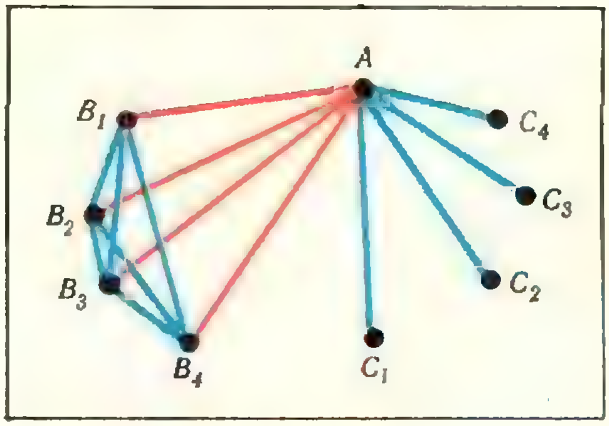


Рис. 1.

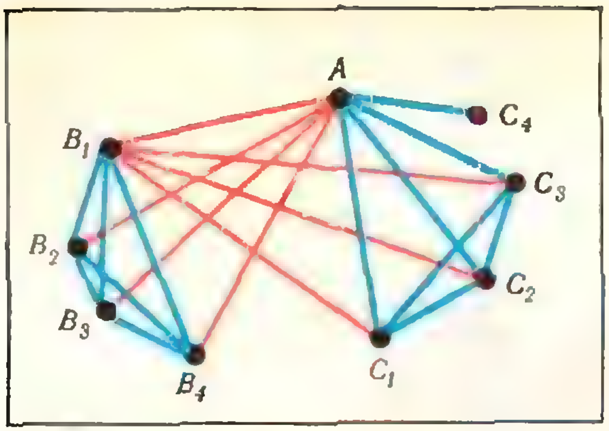


Рис. 2.

Предположим, что нет красного треугольника. Пусть какая-нибудь вершина A соединена красными ребрами с B_1, B_2, B_3 и B_4, синими — с C_1, C_2, C_3 и C_4. Ребра вида B_iB_j — синие (рисунок 1). Каждая из B_i соединена тремя красными ребрами с вершинами C_j. Два красных ребра связывают вершины вида C между собой (поскольку красных ребер B_iC_j — двенадцать). Пусть B_1 связана красными ребрами с C_1, C_2 и C_3. Между собой C_1, C_2 и C_3 соединены синими ребрами, иначе образовался бы треугольник с красными сторонами (рисунок 2). Тогда C_4 принадлежит двум красным ребрам вида C_4C_i, (например, C_4C_3 и C_4C_2. Но C_4 принадлежит еще двум красным ребрам. Одно из них, — например, C_4B_2 (рисунок 3). Хотя бы одно из ребер B_2C_2 и B_2C_3 — тоже красное, то есть хотя бы один из треугольников $B_2C_3C_4$ и $B_2C_2C_4$ имеет красные стороны.

3. Имеем полный граф с n вершинами и ребрами двух цветов (синее ребро — двое могут объясниться на каком-нибудь языке, красное — не могут). По условию среди любых четырех вершин графа всегда найдется, по меньшей мере, одна, синяя степень которой равна трем.

Случай, когда все ребра синие, тривиален. Пусть найдется красное ребро AB. Добавим еще какие-нибудь две вершины C и D. Из четырех вершин A, B, C и D найдется хотя бы одна, синяя степень которой равна трем. Это — C или D. Пусть, например, синюю степень три имеет C. Добавим еще одну вершину — E. Из вершин A, B, C, E или C или E имеет синюю степень, равную трем. В обоих случаях C соединена синим ребром с E. Так переберем все вершины. В итоге, окажется, что C соединена синими ребрами со всеми вершинами графа. Во всякой четверке вершин, включающей A и B, есть вершина, соединенная синими ребрами со всеми остальными вершинами графа. Отсюда, кроме A и B существует, самое большее, одна вершина, не соединенная синими ребрами со всеми остальными.

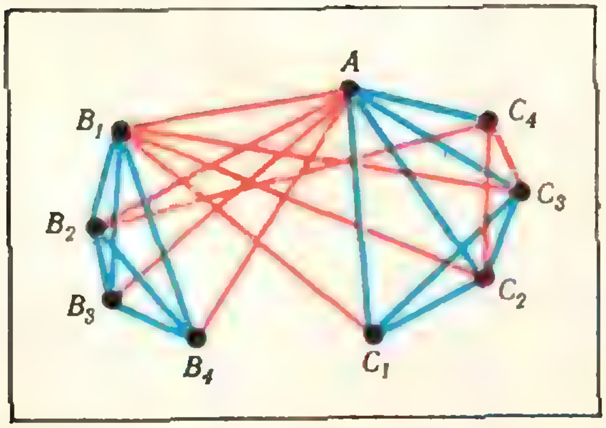


Рис. 3.

4. Каждому жителю поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что двое дружат, а красное — враждуют. По условию, в данном графе треугольники могут быть или с тремя синими сторонами, или с одной синей и двумя красными и есть хотя бы одно красное ребро. Требуется доказать, что найдется вершина, красная степень которой больше или равна синей ее степени.

Рассмотрим некоторое красное ребро AB. Пусть синяя степень вершины A равна k. Предположим, что $k \geqslant \frac{n}{2}$. Легко видеть, что B соединена красными ребрами с теми вершинами, с которыми A соединена синими ребрами. Поэтому, если красная степень вершины B равна l, то $l = k + 1 > k \geqslant \frac{n}{2}$.

5. Каждому жителю поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что двое дружат, а красное — что не дружат. Получим граф с n вершинами и ребрами двух цветов, который можно подвергать следующим преобразованиям: выбирать вершину и все красные ребра, которым она принадлежит, перекрашивать в синие, а все синие — в красные. По условию каждый треугольник может стать синим, то есть в графе могут быть только или треугольники с синими сторонами, или треугольники, у которых одна сторона — синяя и две — красные. (Докажите, что при преобразованиях это свойство графа не меняется.)

В любом таком графе найдется вершина, красная степень которой больше синей ее степени (см. задачу 4). Если каждый раз выбирать в графе вершину с наибольшей красной степенью и перекрашивать ребра, которым она принадлежит, то с каждым шагом число синих ребер будет увеличиваться. Число ребер в графе с n вершинами конечно, поэтому через конечное число шагов все ребра графа станут синими.

К статье «Элементы теории графов»

1. См. рис. 4.
2. $\frac{n(n-1)}{2}$ или C_n^2.
3. Нет. Нет. Связность одних и тех же узлов различна.

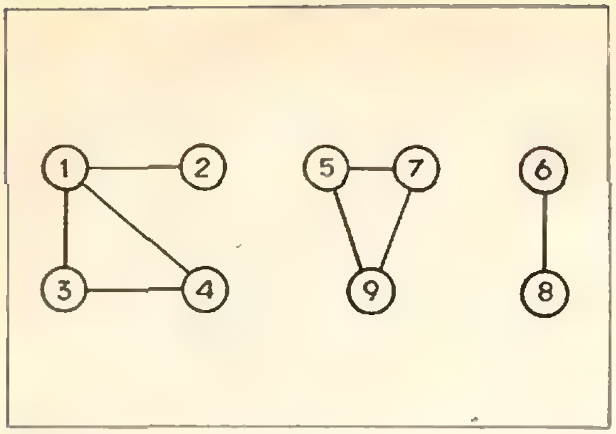


Рис. 4.

4. Связность каждой вершины тетраэдра, куба и додекаэдра равна трем, октаэдра — четырем, икосаэдра — пяти.

5. Нет. Противоречит теореме 2. В графе не может быть нечетного числа вершин нечетной связности (7 вершин связности три).

6. Существует (см. рис. 5). 2 вершины — B и D — имеют нечетную связность три.

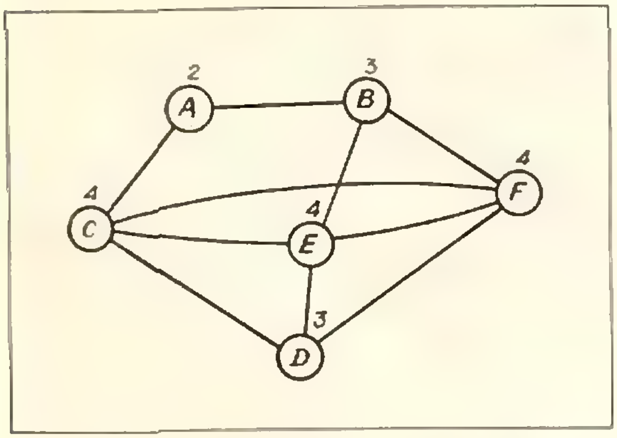


Рис. 5.

7. Нет. В самом деле, пусть такой граф существует и содержит n вершин; каждая вершина имеет не более $(n-1)$ связей — со всеми остальными вершинами. Но n различных натуральных чисел, каждое из которых не более $(n-1)$, не существует.

8. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Заменим каждое ребро двумя половинками; тогда каждой половинке ребра будет инцидентна одна и только одна вершина. Но каждая вершина имеет связность g, то есть инцидентна ровно g половинок ребер. Отсюда следует, что в графе G всего $g|X|$ полуребер. А это и означает, что $g|X|$ вдвое больше числа ребер, то есть $g|X|=2|U|$ (напоминаем, что $|X|$ — число вершин, $|U|$ — число ребер).

К задачам «Квант» для младших школьников

(См. «Квант» № 7, 1973)

1. 100 рыб.

2. Флажок повиснет, так как воздушный шар летит со скоростью, равной скорости ветра.

3. 10 способов (2 способа пристроить к наибольшей стороне и по 4 способа — к двум другим).

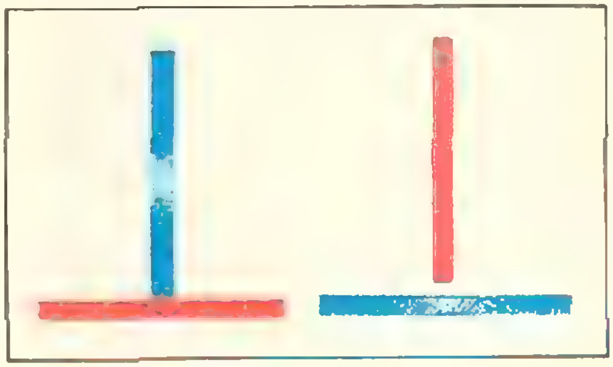


Рис. 6.

4. Пусть намагничен синий стержень. В этом случае, если мы поднесем конец синего стержня к середине красного (см. рис. 6), стержни будут притягиваться, если же поднести конец красного к середине синего, стержни притягиваться не будут.

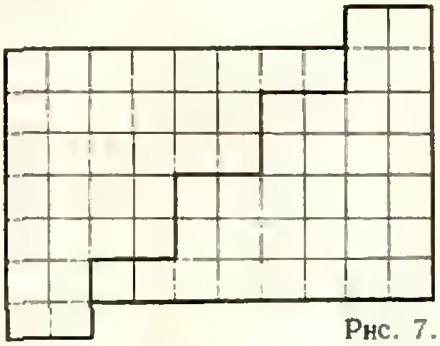


Рис. 7.

5. Например так, как на рисунке 7.

6. Когда снег мокрый, больше сила поверхностного натяжения, и снежок получается крепче.

В «Кванте» № 8 на стр. 59 в части тиража была допущена опечатка. Последняя формула в правой колонке должна выглядеть так:

$$\frac{1}{y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y'}{y}=\ln a=\frac{\lg a}{M}.$$

Корректор Н. Б. Румянцева

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 7. V. 73 г.
Подписано в печать 15 VI. 73 г. Зак. 846
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. 6,50
Уч.-изд. л. 6,80 Тираж 348 345 экз. Т-08500
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области
Рукописи не возвращаются

VII ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Заключительный тур VII Всесоюзной физической олимпиады школьников проходил в Ленинграде с 11 по 16 апреля 1973 года. Подробную информацию о нем мы поместим в следующем номере нашего журнала.

НОМЕР
9

Основан в 1970 году
1973
9
Квант
Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
И. Б. Мамулова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Л. С. Хренов.* Абу Райхан Беруни (к 1000-летию со дня рождения)
9 *В. А. Александрова.* Томас Юнг (к 200-летию со дня рождения)
12 *Т. Юнг.* Экспериментальная демонстрация интерференции света

Математический кружок

18 *Б. А. Кордемский.* Красочная комбинаторика

Задачник «Кванта»

24 Победители конкурса «Кванта»
25 Задачи М221—М225; Ф233—Ф237
27 Решения задач М179—М183; Ф193—Ф197

VII Всесоюзная олимпиада школьников по математике и физике

38 *М. Л. Смолянский.* Всесоюзные олимпиады
41 *Л. М. Пашкова.* Олимпиада у математиков
47 *Л. Г. Лиманов.* Задачи по математике
50 *И. Н. Бернштейн.* Матбой
52 *Т. С. Петрова, В. А. Тихомирова.* Физическая олимпиада
60 *И. М. Яглом.* Сборники «олимпиадных» задач

Практикум абитуриента

63 *Г. В. Дорофеев.* Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными
68 *Л. П. Баканина.* Силы трения

Информация

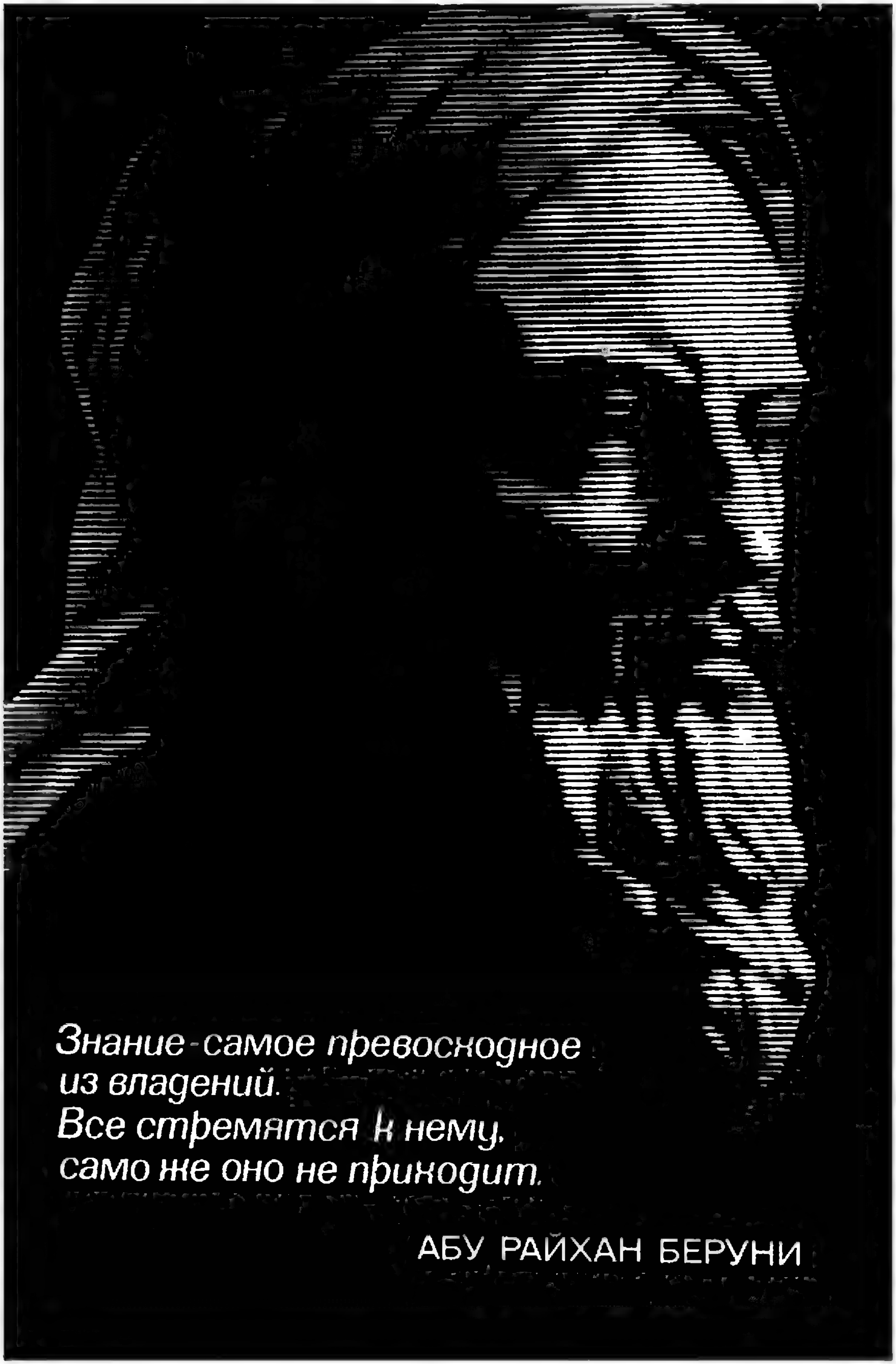
72 *А. И. Орлов.* ВМШ при Московском математическом обществе
74 *А. В. Каганов, И. И. Наслузов.* Телевидение готовит в ВУЗ

«Квант» для младших школьников

76 Задачи
77 *А. Ю. Сойфер.* Новоселы зоопарка «Кванта»
78 У нас в гостях журнал «Альфа»
79 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*стр. 17, 23, 26, 71, 73*)

На первой странице обложки помещена фотография интерференционной картины, полученной при прохождении света от криптонного ионного лазера через интерферометр. О явлении интерференции света вы можете прочитать в статье Т. Юнга «Экспериментальная демонстрация интерференции света» (с. 12).

© «Квант», 1973 год



Знание - самое превосходное
из владений.
Все стремятся к нему,
само же оно не приходит.

АБУ РАЙХАН БЕРУНИ

Л.С. Хренов

АБУ РАЙХАН БЕРУНИ

к 1000-летию со дня рождения

Первая половина XI века и предшествовавшие ему два столетия характеризовались бурным развитием культуры народов Ближнего Востока и Средней Азии. Создание и развитие больших оживленных городов, цветущих оазисов, ирригационных систем, формирование международных торговых путей, строительство дворцов и храмов стимулировали исследования в области математики, геодезии, астрономии.

Средняя Азия являлась одним из древнейших очагов мировой культуры. Труды среднеазиатских ученых оказали большое влияние на развитие не только науки Ближнего и Среднего Востока, но и всей европейской науки.

Широко известны работы среднеазиатских астрономов и математиков IX—XVI вв. Среди них одно из почетных мест принадлежит знаменитому ученому Абу Райхану Мухаммад ибн Ахмад ал-Беруни.

В этом великом человеке сочетались лучшие черты ученого — преданность науке, неугасимая страсть к познаниям, целеустремленность и самоотверженность.

Абу Райхан Беруни родился 4 сентября 973 года в Узбекистане в предместье г. Кят *), тогдашней столицы Хорезма.

Первые годы своей жизни он провел в семье хорезм-шаха Мамуна. Там на его выдающиеся способности обратил внимание известный ученый Абу Наср Мансура ибн Али ибн Ирака (примерно 950—1034), который привил юному Беруни интерес к естественным наукам и особенно к математике и астрономии. Вспоминая этот период своей жизни, Беруни в одном из своих последних стихотворений писал:

«Семья Ираков вскормила меня своим молоком, а их Мансур взялся вырастить меня...».

Получив прекрасное образование на родине, Беруни уже в юности производил самостоятельные наблюдения и около 995 года первым в Средней Азии построил глобус, позволявший определять географические координаты населенных пунктов с достаточной для того времени точностью, занимался конструированием астрономических инструментов (стенного квадранта и др.) и определил географические координаты различных мест Хорезма.

Его пытливый ум, постоянное стремление к приобретению знаний не могли быть удовлетворены образованием, полученным в семье Ираков, и Беруни посвящает много времени изучению философии, математики, астрономии и других наук. С этой же целью он ездил в такие крупные научные центры, как Багдад и Бухара и в различные города Хорасана и Афганистана.

Распри между знатными людьми Хорезма вынуждали Беруни неоднократно покидать свою Родину, так

---

*) Теперь этот город, расположенный в низовьях Аму-Дарьи, называется Бируни (раньше Беруни считался арабским ученым, а по-арабски его имя звучит как Бируни).

как он уже в ранней молодости принимал активное участие в политической жизни Кята, занимая видное положение при дворе хорезм-шаха.

Вернувшись в 1004 году в Хорезм, в его новую столицу — г. Гургандж*), Беруни занимает должность советника шаха и руководит созданной к тому времени академией. Вокруг Беруни группируются блестящие ученые, приглашенные хорезм-шахом из разных стран. Украшением академии являлся бухарский ученый Абу Али ибн Сина (Авиценна, 980—1037), знаменитый естествоиспытатель, врач и философ.

После захвата Хорезма султаном Махмудом Газневидским в 1017 году Беруни вместе с другими учеными вынужден был переселиться в Газну (Афганистан), где и прожил до последних дней. Здесь он занимается астрономией, математикой и геодезией. В этот же период Беруни дважды побывал в Индии; там он не только провел работы по определению размеров земного шара, но и собрал обширный материал по истории, географии, этнографии и философии этой страны.

В это же время он пишет историю развития математики в Индии, составляет карту мира и разрабатывает теорию происхождения морей.

О последних годах жизни Беруни известно очень мало: одиночество, старость и, как всегда, напряженный труд. Семьи у него не было, учеников — очень мало. Вероятно, Беруни видел свое предназначение в том, чтобы передавать свои знания не одиночкам, а всем людям. «Все мои книги — дети мои, а большинство людей очаровано своими детьми и стихами», — писал ученый. Отсюда и бережное отношение к каждому часу, к каждой минуте своей жизни — он стремился оставить людям все, что у него было, все до последней мысли.

Перу Беруни принадлежит около 150 научных работ, относящихся к самым различным областям науки: астрономии, математике, минералогии, географии, геодезии, истории, лингвистике и другим. Однако на протяжении всей своей жизни он наибольшее внимание уделял астрономии, геодезии и математике.

Его первая капитальная работа «Памятники, оставшиеся от минувших поколений», кратко называемая «Хронология» (около 1001 года), включает описание календарных систем различных народов (греков, римлян, хорезмийцев, аридов, евреев, персов и др.), историю развития науки, культуры, обычаев и т. п.

Очень интересны сведения о том, что арабы в древности считали сутками время от захода до захода Солнца, а греки, византийцы и персы — от восхода до восхода. В книге рассказывается об астрономических видах месяцев (лунных, солнечных и високосных), о происхождении названий месяцев у разных народов.

Двенадцать глав «Хронологии» посвящены знаменательным дням и религиозным праздникам древних персов, греков, римлян и других. Эта книга не утратила своей научной ценности и в наши дни: в ней очень полно отражена история, религия и этнография народов Древнего Востока.

В 1025 году Беруни заканчивает свой трактат «Определение границ мест для уточнения расстояний между пунктами», условно называемый «Геодезия». В нем Беруни — первый из астрономов-мусульман — дает детальную разработку метода определения географической долготы пункта путем одновременного наблюдения лунного затмения из двух точек при известной долготе одной из них.

В Индии, общаясь с учеными и ремесленниками, захваченными в плен Махмудом Газневидским, Беруни узнавал подробности об их удивительной родине, о ее религии, обычаях, философских учениях. Примерно к 1031 году была закончена «Книга, содержащая разъяснения принадлежащих индийцам учений, приемлемых разумом или отвергаемых», кратко называемая «Индия». Этот монументальный труд принес Беруни славу крупнейшего ученого своего времени. «В этой книге нет места полемике и спорам, и я не занимаюсь в ней тем, чтобы приводить аргументы противников и оспаривать тех из них, кто отклоняется от истин. Она содержит только изложение: я привожу теории индийцев как они есть и параллельно с ними касаюсь греков, чтобы показать их взаимную близость», — пишет Беруни.

---

*) Развалины этого города находятся в нескольких десятках километров от Ургенча.

«Индия», изданная на разных языках мира, — это единственное в своем роде произведение, и равного ему нет во всей средневековой литературе Запада и Востока.

Четвертый труд Беруни «Книга вразумления в начатках искусства звездочетства», кратко называемая «ат-Тафхим», содержит изложение вопросов геометрии, арифметики, географии и астрономии.

Эта книга долгие годы служила учебником в медресе*) всего Ближнего Востока. «Я начал с геометрии, затем перешел к арифметике и числам, затем к устройству Вселенной, а затем к астрономии, ибо лишь тот достоин звания звездочета, кто полностью изучил эти четыре науки», — пишет Беруни во введении.

«ат-Тафхим» стала одной из самых известных в средние века на Востоке работ Беруни. Она содержит 511 вопросов и ответов; из них 119 относятся к математике (планиметрии, теории отношений, стереометрии, теории чисел, арифметике, алгебре, буквенной нумерации), а остальные — к астрономии, геодезии и астрологии.

Математические вопросы в «ат-Тафхим» начинаются с определения геометрии как науки. Беруни пишет: «Геометрия — это наука о размерах и количественных отношениях их друг к другу, и это познание особенностей их фигур и форм, имеющихся в теле. Благодаря этой науке наука о числах превращается из частной в общую, а наука о сфере *) из догадок и предположений — в истину». Это означает, что Беруни рассматривал геометрические величины как обобщение целых чисел, то есть, говоря современным языком, Беруни работал с *действительными числами*.

«Канон Мас'уда по астрономии к звездам» — главный труд Беруни — был закончен примерно к 1037 году. Основное содержание его составляют вопросы астрономии и математической географии. Сам ученый писал об этой книге, что ее не коснется «ни время, ни смена властей». В ней как бы подводится итог деятельности Беруни в области астрономии, которая в то время считалась «одной из ветвей древа математических наук». Беруни писал: «Я всегда был тесно связан с одной из областей математики, всегда держался ее и посвятил себя ей; она неизменно интересовала меня с самого начала моего существования».

В 11 книгах «Канона Мас'уда» изложены вопросы космологии, гражданской хронологии, геометрии и тригонометрии, сферической астрономии. Беруни рассказывает об определении долготы населенных пунктов, расстояний и азимутов направлений, о движении Солнца и Луны, Сатурна, Юпитера, Марса, Венеры, Меркурия. В ней рассказывается о затмении Солнца и Луны, геометрии небесной сферы, о звездах.

С предельной скромностью Беруни оценивает свой многолетний труд: «Я сделал то, что надлежит сделать всякому в своей отрасли — с признательностью воспринять старания своих предшественников, без стеснения исправить их погрешности, если таковые будут найдены, особенно в тех вопросах, в которых невозможно установить истину со стороны самих величин движений светил, и увековечить то, что представляется поучительным для тех, кто запоздал к нашему времени и явится позже. Каждое действие в каждой главе я сочетал с указанием таких причин этого действия и с такими разъяснениями сделанного мною, которые удалили бы изучающего от слепого подражания мне и раскрыли бы перед ним врата для подтверждения истинности того, в чем я оказался прав, или исправления того, в чем я ошибся».

---

*) Медресе — религиозная мусульманская школа, готовящая служителей церкви.

*) То есть астрономия.

«Собрание сведений для познания драгоценностей», кратко называемое «Минералогия», — последний законченный труд Беруни. Книга в известной мере преследовала практические цели, связанные с торговлей драгоценными цветными камнями. Большая часть трактата посвящена минералам, которые были известны Беруни, меньшая — металлам. Ученый приводит названия минералов на разных языках, описывает их цвета и оттенки, физические и лекарственные свойства. Огромный интерес для истории физики и минералогии представляет тот факт, что Беруни впервые точно определил удельные веса некоторых минералов, что дало ему возможность классифицировать минералы. Таким образом, минералогия, еще чисто описательная наука, впервые начала оснащаться цифровыми данными, полученными в результате физических экспериментов. «Минералогия» была задумана Беруни не как строго научный, а как научно-литературный труд. Этим и объясняется большое количество легенд, рассказов и вымышленных историй о камнях, встречающееся в тексте. Написанная ярким, выразительным языком, «Минералогия» содержит образные характеристики минералов. «На полированной поверхности этого камня в большинстве случаев видны золотистые звезды, подобные пылинкам в лучах Солнца», — так поэтично описывает Беруни лазурит.

Наиболее важные исследования Беруни в области тригонометрии относятся к вычислению длин сторон многоугольников на основе их построений с помощью циркуля и линейки. В его книгах приведено доказательство теорем о хордах, соответствующих теоремам о синусе суммы и разности двух углов, о синусе половинного и удвоенного углов, вычислены отношение длины окружности к диаметру и значения синусов углов через каждые 15′ и тангенсов через 1° с точностью до четырех шестидесятеричных знаков и даны правила пользования ими, описано линейное и квадратическое интерполирование, доказаны теоремы синусов плоской и сферической тригонометрии.

Значительный интерес представляют работы Беруни в области геодезии, одной из задач которой является определение формы и размеров нашей планеты. Изучение формы и размеров Земли вместе с ее положением и движением в пространстве имело большое значение для понимания человеком окружающей его действительности, для разрешения загадки мироздания.

Халдейские ученые еще в глубокой древности (VII—VI вв. до н. э.), наблюдая лунные затмения, высказывали мысли о шарообразности Земли. История сохранила для нас и известное определение радиуса земного шара (метод и размеры), произведенное греческим ученым Эратосфеном (около 276—194 гг. до н. э.). По его расчетам радиус земного шара оказался равным 6311 *км*.

Расхождения в размерах радиуса земного шара, полученных разными учеными к концу IX в., были известны Беруни и побудили его провести самостоятельные измерения. С этой целью он применил новый метод. Вот что он пишет: «Для этой цели я в Индии нашел большую гору, возвышающуюся над широкой равниной. Поверхность равнины была глаже самой поверхности моря. Я искал на вершине слияние Земли и неба, то есть круга горизонта, и я нашел его

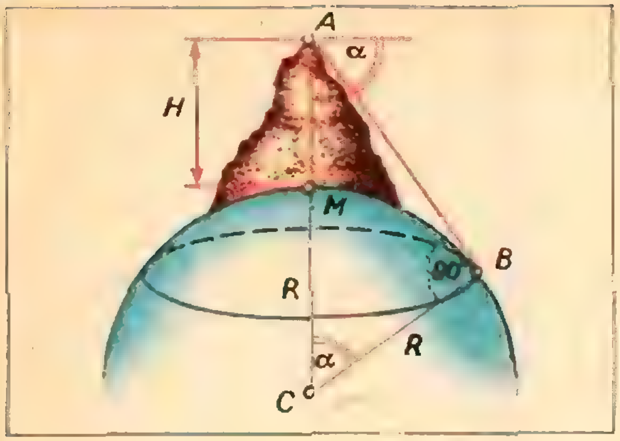


Рис. 1.

в инструменте (в астролябии), ограниченным горизонтальной восточно-западной линией, и определил угол понижения горизонта».

Действительно, если допустить, что высота горы $AM = H$ известна (рис. 1), то, измерив при помощи астролябии угол понижения горизонта α, можно (из $\triangle CBA$) написать, что

$$R = (R + H)\cos\alpha;$$

отсюда

$$R = \frac{H\cos\alpha}{1-\cos\alpha}. \qquad (1)$$

При этом для определения точки B, при визировании на которую измеряют угол α, надо найти «. . . такое место у моря или в пустыне и наблюдать Солнце с горы на восходе или закате, пока не скроется из нашего времени половина его диска».

Радиус земного шара, определенный Беруни по формуле (1), оказался равным $R = 6\,399{,}58$ *км*, что мало отличается от размера радиуса Земли ($R = 6\,371{,}11$ *км*), которым пользуются в настоящее время.

Для определения высоты H (скажем, мечети) Беруни пользовался созданным им высотомером, при помощи которого он измерил отрезки ND и FQ (рис. 2). Расположив щит $MNPQ$ высотомера в вертикальной плоскости так, чтобы сторона QM была бы направлена на точку A (визируют через диоптры m и n), при помощи алидады PZ, вращающейся вокруг точки P, визируют через диоптры P и Z на точку A. В этом положении закрепляют щит и на нем алидаду PZ.

Так как $\triangle PND$ подобен $\triangle AQP$, а $\triangle AFQ$ подобен $\triangle ACQ$, то

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{NP}{ND}, \quad \frac{AC}{AQ} = \frac{FQ}{PQ},$$

откуда

$$AQ = \frac{NP\cdot PQ}{ND}, \quad AC = \frac{AQ\cdot FQ}{PQ}.$$

Высота $H = AC$ будет $H = AC =$

$$= AQ\cdot\frac{FQ}{PQ} = \frac{NP\cdot PQ\cdot FQ}{ND\cdot PQ} = \frac{NP\cdot FQ}{ND}.$$

Вычисление кратчайшего расстояния S на земной поверхности между значительно удаленными городами A и B Беруни рекомендовал производить по предварительно определенным географическим широтам φ_A и φ_B и долготам λ_A и λ_B городов A и B. Для этого по предложенной им

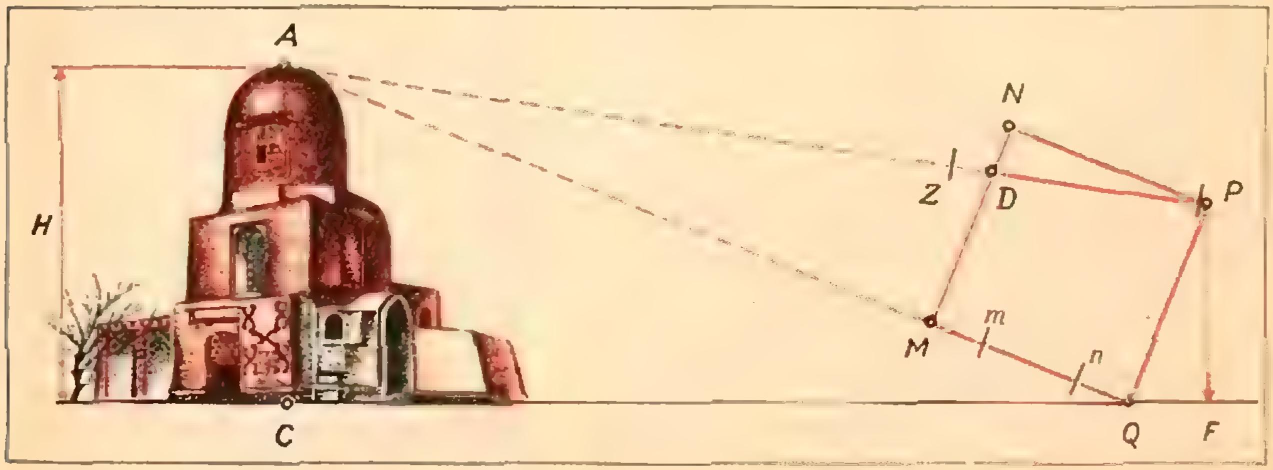


Рис. 2.

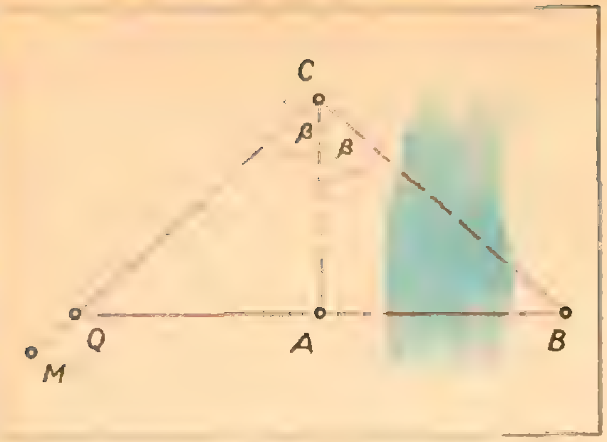


Рис 3

формуле определяется хорда S, стягивающая дугу большого круга, проходящего через пункты A и B:

$$S = \sqrt{\Delta\lambda^2 \cos\varphi_A \cos\varphi_B + \Delta\varphi^2},$$

где $\Delta\lambda$ и $\Delta\varphi$ — хорды, стягивающие дуги, соответствующие разностям долгот $(\lambda_B - \lambda_A)$ и широт $(\varphi_B - \varphi_A)$. Зная хорду S, можно вычислить и стягиваемую ею дугу большого круга, проходящего через пункты A и B, то есть кратчайшее расстояние между ними.

Большое внимание Беруни уделял конструированию различных астрономических и геодезических инструментов.

Им разработаны способы определения ширины реки или оврага (недоступного для непосредственного измерения), глубины колодца, а также решен ряд других задач, не потерявших и теперь практического значения. Например, для определения ширины реки AB (рис. 3) Беруни рекомендует построить два прямоугольных треугольника BAC и QAC. Для этого при помощи астролябии он предлагает построить прямую AC, перпендикулярную AB, и измерить в точке C угол $ACB = \beta$, а затем построить при той же точке C угол $ACM = \beta$. Теперь остается продолжить прямую BA так, чтобы получить точку Q, лежащую на прямой CM. Тогда сторона AQ треугольника QAC, доступная для непосредственного измерения, будет равна искомому расстоянию AB.

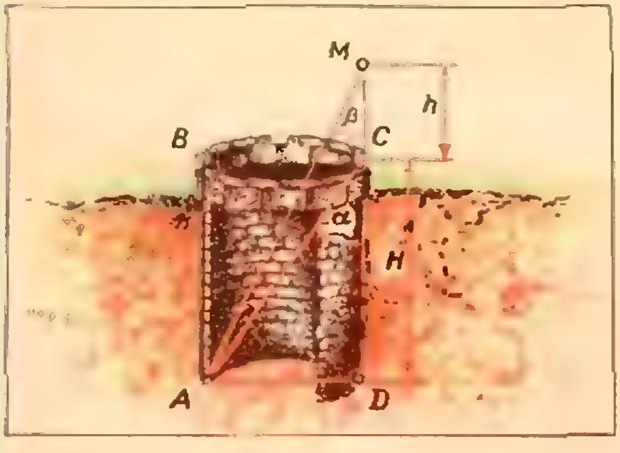


Рис. 4.

Беруни рекомендует использовать астролябию и для определения глубины H колодца $ABCD$ (рис. 4). Для этого достаточно в точках C и M, лежащих на продолжении прямой DC, измерить при помощи астролябии углы α и β. Из треугольника ADM и ADC следует, что $MD = AD \operatorname{ctg}\beta$, $H = CD = AD \operatorname{ctg}\alpha$. Далее, $h = MD - DC$, $H = \frac{h}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}\operatorname{ctg}\alpha$.

Таков весьма краткий обзор трудов Беруни, отдавшего свою жизнь служению науки. Он обладал исключительной широтой научных интересов, и недаром историки науки назвали первую половину XI века в истории мировой науки эпохой Беруни.

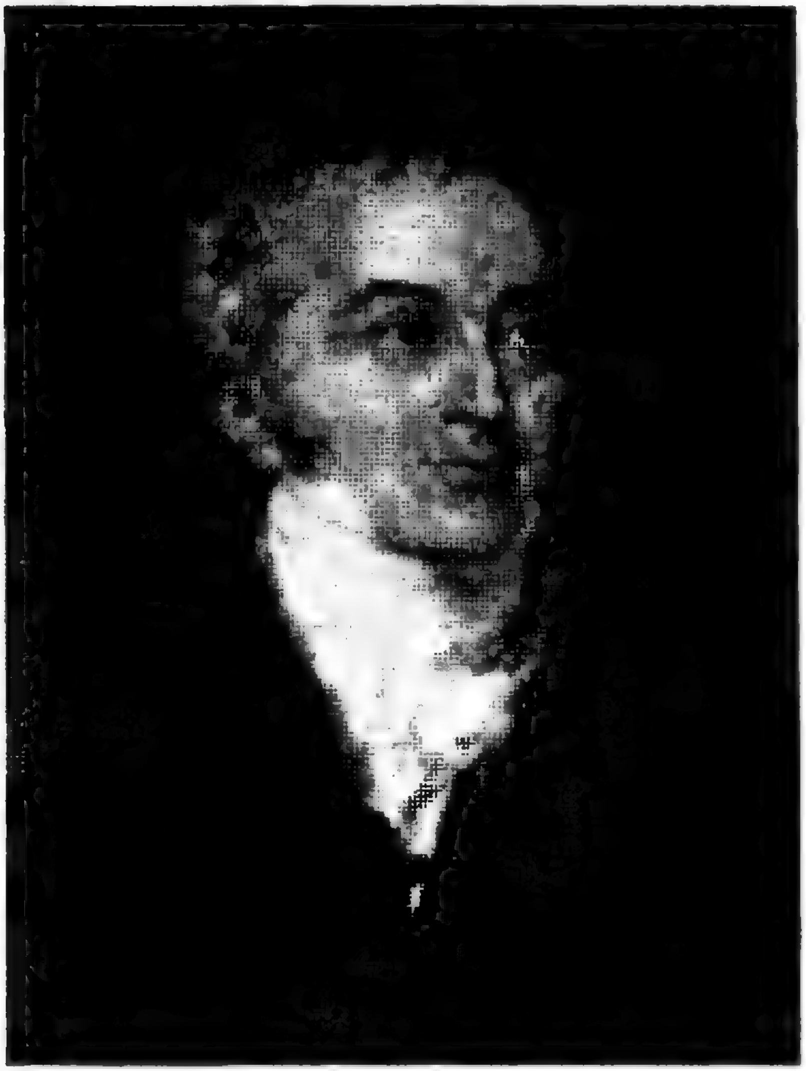
Вдали от родины, в г. Газне в Афганистане (южнее Кабула) 11 декабря 1048 года перестало биться сердце Абу Райхана Беруни — классика узбекской культуры, величайшего из ученых средневековья. То, что принес он миру, Родине, народу — не забылось и не померкло. Его научные открытия остаются примером для потомства.

Литература

1. Абу Райхан Беруни. Избранные произведения. III. Геодезия. Ташкент, «ФАН», 1966.
2. Беруни. Сб. под ред. С. П. Толстова. М., АН СССР, 1950.
3. Беруни. Индия. Ташкент, АН Узб. ССР, 1963.
4. Булгаков П. Г. Жизнь и труды Беруни. Ташкент, «ФАН», 1972.

В. А. Александрова

ТОМАС ЮНГ



к 200-летию со дня рождения

Выдающийся английский физик Томас Юнг родился в Милвертоне 13 июня 1773 года. Детство Юнга было необычным. В два года он свободно читал, в шесть лет начал изучать латынь, в восемь — заинтересовался землемерными работами и научился определять расстояния и вычислять высоты. Сначала он учился дома, затем — в частных школах. К пятнадцати годам он изучил несколько современных и древних языков.

В 1792 году девятнадцатилетний Юнг решил посвятить себя медицине. Через год он представил Королевскому обществу*) работу «Наблюдения над процессом зрения», в которой рассматривался вопрос об аккомодации*) глаза. В то время существовали различные суждения по этому поводу. Одни ученые считали, что глаз в целом способен деформироваться (расстягиваться или сокращаться); другие предполагали, что хрусталик может менять свое местоположение; третьи связывали способность к аккомодации с изменением кривизны роговой оболочки; четвертые — с изменением кривизны хрусталика. Многочисленными опытами над собственными глазами Юнг опроверг первые три точки зрения и показал, что аккомодация глаза объясняется деформацией хрусталика. К сожалению, под давлением тогдашних авторитетов ему сначала пришлось отказаться от своей теории, но в 1800 году он вновь возвратился к ней и новыми исследованиями обосновал ее правильность.

---

*) Королевское общество — Академия наук Англии.

*) Аккомодация глаза — приспособление глаза к ясному видению предметов, находящихся на различных расстояниях.

После завершения медицинского образования (сначала в Лондоне, затем в Эдинбурге, Гёттингене и Кембридже) Юнг возвращается в Лондон, где открывает частную врачебную практику, одновременно продолжая заниматься научными исследованиями. С 1801 по 1804 год Юнг — профессор натуральной философии Королевского института, с 1811 года — врач в больнице Св. Георгия в Лондоне, с 1818 года — секретарь Бюро долгот, где ему поручено издание «Мореходного календаря».

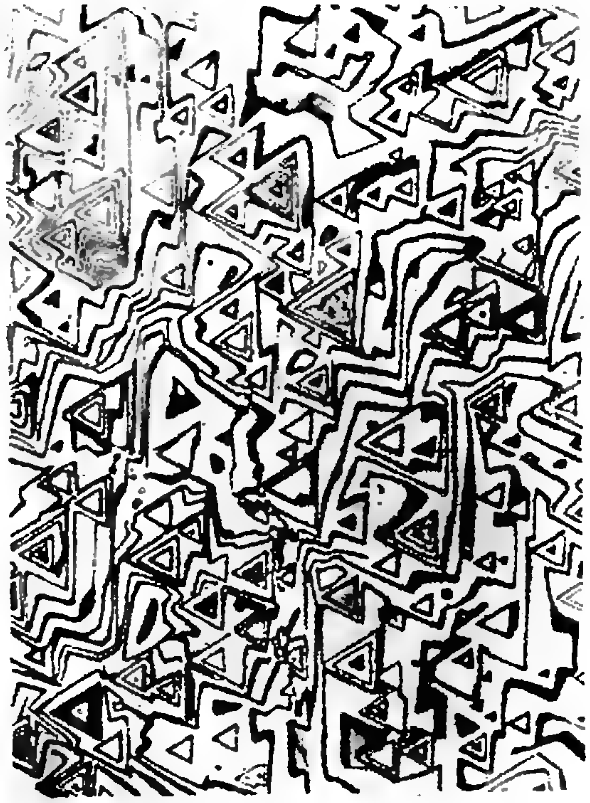
«Всякий человек может сделать то, что делают другие» — таков был девиз Юнга. Прекрасный музыкант, знаток литературы и живописи, он интересуется вопросами механики, акустики, оптики, астрономии, ботаники, зоологии. Его работы были так многочисленны, что некоторые из них приходилось издавать анонимно, чтобы не повредить его репутации врача. Несмотря на это, пациенты считали его слишком ученым, и он не пользовался у них успехом.

«Опыт о музыке и живописи», «Об устойчивости мостовых арок», «О вычислении затмений», «Опыты и проблемы по звуку и свету», «Теории света и цветов», «Восстановление и перевод различных греческих надписей», «Опыты и вычисления, относящиеся к физической оптике», «Лекция по натуральной философии» — вот названия некоторых его работ. Коллега Юнга по Королевскому институту Хэфмри Дэви сказал о нем: «Даже если бы он ограничил себя одной какой-нибудь областью знаний, то, несомненно, был бы в этой области первым. Но он был выдающимся специалистом и как лингвист, и как иероглифист; он знал так много, что даже трудно сказать, чего он не знал».

Юнг — основоположник теории цветного зрения. Он внес также существенный вклад в теорию упругости. Но в истории физики он известен прежде всего как ученый, которому принадлежит аргументированное и бесспорное доказательство волновых свойств света.

Свет интересовал ученых давно, но лишь в конце XVII века были высказаны первые гипотезы о природе света. Такие законы, как закон прямолинейного распространения, отражения и преломления света уже нашли практическое применение в оптических приборах (лупа, телескоп, микроскоп), когда были обнаружены явления, требующие тщательных исследований и объяснений. Это прежде всего дифракция света, которую впервые наблюдал итальянский ученый Гримальди (1618—1663), и образование различных цветов тонких пленок, изученное английским ученым Гуком (1635—1703). И Гримальди, и Гук связывали свет с колебаниями, причем Гук даже упоминал о том, что направления световых колебаний перпендикулярны направлению распространения света, то есть световые колебания являются поперечными (об этом, правда, потом надолго забыли).

Более детально и обстоятельно волновая теория света была изложена голландским ученым Гюйгенсом (1629—1695) в его знаменитом «Трактате о свете», где с волновой точки зрения объяснялись многие световые явления. «Нельзя сомневаться в том, что свет состоит в движении какого-то вещества»,— писал Гюйгенс, очевидно, проводя аналогию с процессом распространения звука. То есть Гюйгенсу пришлось постулировать существование особого вещества — эфира, заполняющего все мировое пространство и обладающего удивительными качествами: очень большой упругостью и очень малой плотностью. Источник света создает в эфире колебания, которые, распространяясь с огромной скоростью, доходят до глаза



Микроконтурное изображение поверхности алмаза, полученное интерференционным способом.

наблюдателя; возникает ощущение света.

Современник Гюйгенса великий английский ученый Исаак Ньютон (1642—1727) внес существенный вклад в развитие оптики. Он открыл явление дисперсии света, создал теорию цветов, показал, что белый солнечный свет является сложным по своему спектральному составу. Ньютон продолжил эксперименты с тонкими пленками, причем особенно эффектным оказался опыт, который теперь называют опытом по наблюдению колец Ньютона. Он повторил также опыт Гримальди по дифракции света.

Для объяснения наблюдаемых явлений Ньютон создал так называемую теорию истечения света. Согласно этой теории, каждый источник света испускает мельчайшие частицы (корпускулы), величина их различна (наибольшая — для красного цвета и наименьшая — для фиолетового); попадая в глаз, частицы вызывают ощущение света.

Некоторые световые явления, например, отражение и преломление света, одинаково хорошо объяснялись обеими теориями.

Интересно отметить, что сам Ньютон, хотя и не соглашался с волновой теорией Гюйгенса, но не настаивал категорически на своей теории, так как считал, что вообще не обязательно иметь определенную точку зрения на природу света. Однако последователи Ньютона так активно провозглашали его теорию света, что потребовалось много времени и усилий, чтобы в начале XIX века вновь вернуться к волновой теории света. Первым шагом к этому было объяснение Юнгом явления интерференции на основании волновых представлений и его знаменитые опыты по интерференции и дифракции света.

В одной из своих работ Юнг так формулирует открытый им «простой и общий закон» интерференции света: «Везде, где две части одного и того же света попадают в глаз различными путями, либо точно, либо весьма близко по направлению, свет становится сильным там, где разность путей есть целое кратное некоторой длины, и наименее сильным в промежуточных состояниях интерферирующих частей; и эта длина различна для света различных цветов».

К сожалению, важность его работ не была понята современниками; в результате этого принцип интерференции был забыт еще на полтора десятка лет, пока не был вновь открыт французским ученым Френелем (1788—1827).

Томас Юнг

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ДЕМОНСТРАЦИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СВЕТА

Ниже приводятся отрывки из двух оригинальных работ Томаса Юнга: I — из лекции, прочитанной им 24 ноября 1803 года в Королевском обществе; II — из 39-й лекции «Курса лекций по натуральной философии», опубликованного в 1807 году.

В этих работах на основе анализа явлений интерференции и дифракции строго и удивительно логично доказывается справедливость волновой теории света.

Перевод и подготовка публикации осуществлены С. Р. Филоновичем.

I. «. . . я обнаружил такое простое и столь легко демонстрируемое доказательство общего закона интерференции двух потоков света, который я уже пытался установить ранее, что решил представить Королевскому обществу краткое сообщение о факте, кажущемся мне столь доказательным. Утверждение, на котором я собираюсь теперь настаивать, просто: цветные полосы появляются вследствие интерференции двух потоков света. Я думаю, что факт возможности проверить это утверждение простыми экспериментами, о которых я собираюсь рассказать и которые могут быть легко повторены в любой солнечный день с помощью предметов, у каждого находящихся под рукой, не будет отвергнут даже людьми предубежденными.

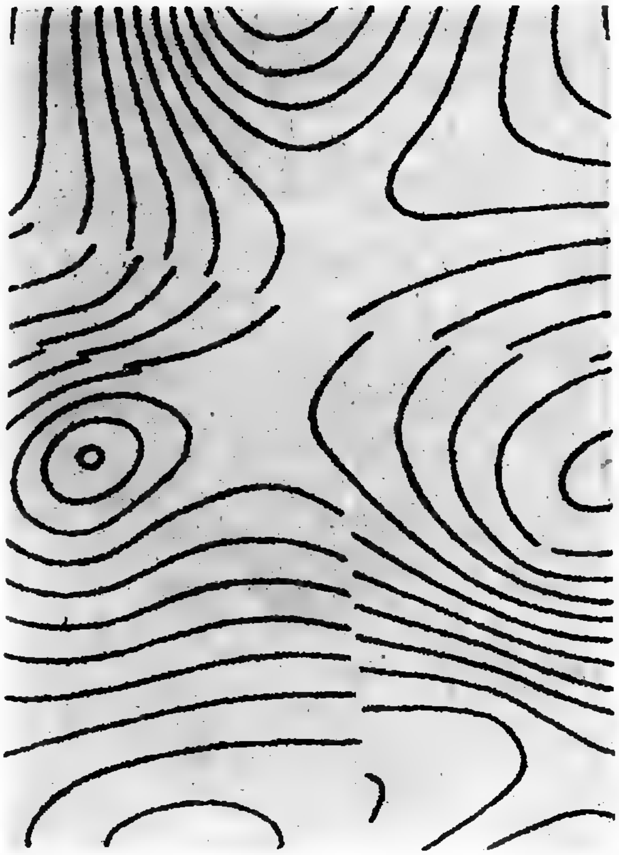
Я проделал маленькое отверстие в оконной ставне и закрыл его листиком толстой бумаги, которую проткнул тонкой иглой. Для большего удобства наблюдения я поместил снаружи окна маленькое стекло так, чтобы оно отражало солнечный свет в горизонтальном направлении на противоположную стену. Расходящийся световой поток проходил при этом над столом, на котором стояло несколько небольших экранов из бумажных карточек. В световой поток я внес полоску карточки шириной в $^1/_3$ дюйма*) и наблюдал ее тень как на противоположной стене, так и на других карточках, помещенных на разных расстояниях от первой. При этом по краям тени образовались цветные полосы, а сама тень разделилась рядом параллельных полос, причем середина ее оставалась всегда светлой. Эти полосы в самой тени являются следствием объединения двух порций света, приходящих с разных сторон полоски карточки и дифрагирующих в область тени. Если маленький экран поместить в нескольких дюймах от полоски так, чтобы края тени от него и полоски совпадали, все полосы, ранее наблюдавшиеся в тени на стене, немедленно исчезнут, хотя свет, проходящий с другой стороны полоски, распространяется тем же путем. Даже при увеличении интенсивности света восстановить прежние полосы было нельзя. Следовательно, один из двух потоков света не в состоянии само-

---

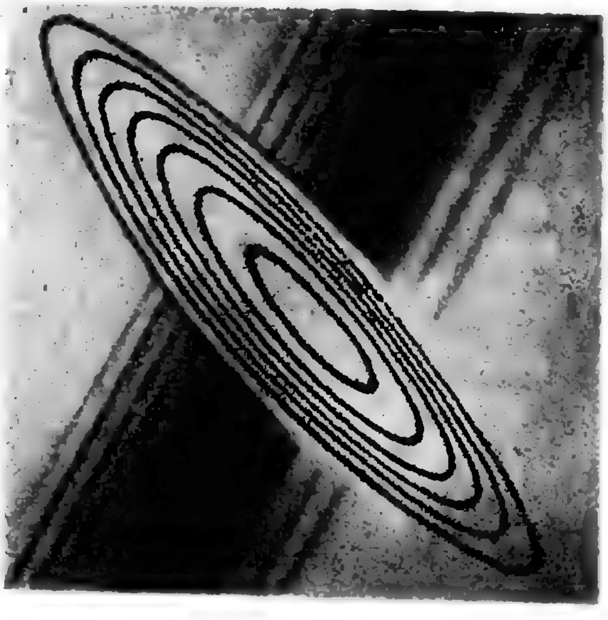
*) 1 дюйм — 2,54 *см*. (Здесь и далее примечание переводчика.)

стоятельно образовать полосы. Если же не прерывать ни один из потоков, то линии появлялись даже в том случае, когда интенсивность уменьшалась в десять и даже в двенадцать раз...

Если постараться исследовать размеры полос в различных условиях, то можно рассчитать разность длин путей, проходимых потоками света. При этом мы найдем, что если длины путей равны, то свет всегда остается белым. Там же, где либо самый яркий свет, либо свет любого цвета появляется вновь в первый, во второй или третий раз, разности длин путей двух потоков образуют арифметическую прогрессию, естественно, настолько точно, насколько эксперименты такого рода могут согласовываться между собой.



Интерференционная топографическая карта поверхности слюды. Расстояние от одной темной линии до другой соответствует увеличению толщины на 1/40000 *см*.



Интерференционная картина вблизи тонкой царапины в алмазе.

Наблюдения эффектов дифракции и интерференции могут быть подчас полезны с практической точки зрения, делая нас более осмотрительными в наших выводах относительно появления мельчайших тел, рассматриваемых в микроскоп. Тень от непрозрачного волокна, помещенного в пучок света, прошедшего через маленькое отверстие, всегда немного светлее в центре, чем на краю. Сходный эффект может, в определенной мере, иметь место и в отношении изображения на сетчатке глаза. Таким путем может создаваться представление о прозрачности, которой нет на самом деле. Если же малый пучок света действительно пройдет через вещество, то он может быть уничтожен интерференцией с дифрагированным светом, и создается впечатление частичной непрозрачности этого вещества. Таким образом, центральное темное пятно и светлое пятно, окруженное темным кольцом, могут соответственно получаться в изображениях полупрозрачных или непрозрачных частиц и производить впечатление сложности структуры, которой нет на самом деле. Для того чтобы избежать ошибки, мы можем положить на стекло две или три ниточки друг на друга или использовать еще более удобное средство — изменить увеличение микроскопа, и если явление остается неизменным по величине и характеру, можно быть уверенным

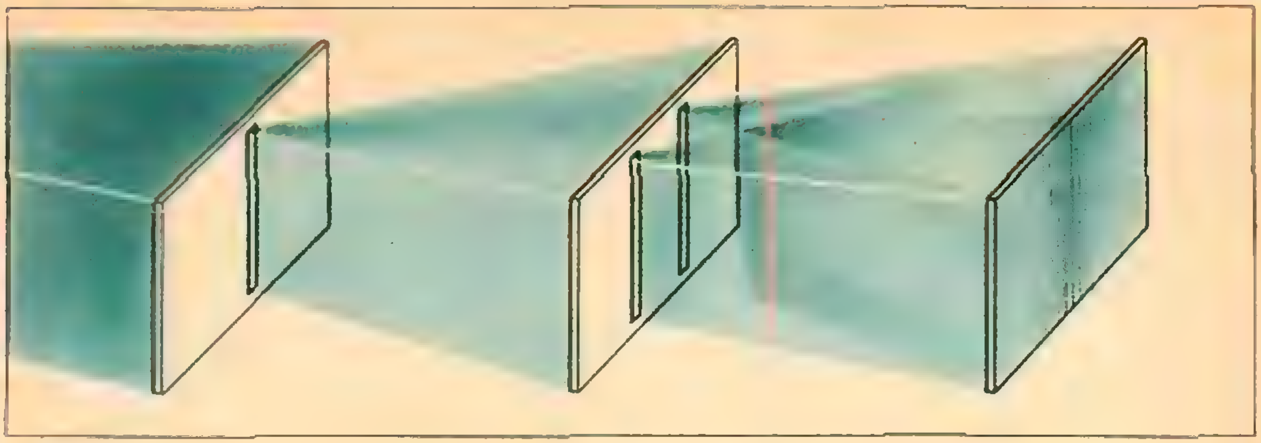


Рис. 1.

в том, что оно действительно принадлежит природе рассматриваемого объекта...».

II. «Природа света — предмет не слишком важный с материальной точки зрения, которая касается жизни и практики, но во многих других аспектах этот предмет очень интересный, поскольку обогащает наши знания о природе чувств и о Вселенной вообще. Исследование получения цветов и богатства их оттенков тесно связано с теорией их важнейших свойств и их причин. Многие из этих явлений помогут нам в формировании представлений о природе и источнике света вообще.

Предполагается, что свет либо состоит из потока весьма малых частиц светоносных веществ, существование которых постулируется (эти частицы движутся со скоростью, присущей свету), либо представляет собой возбуждение волнообразного движения в легкой и упругой среде, наполняющей Вселенную, такого, которое соответствует звуку. Мнения ученых всех веков разделялись, когда требовалось отдать предпочтение одному из этих суждений. Кроме того, есть обстоятельства, которые заставляют разделяющих первую точку зрения либо верить вместе с Ньютоном, что излучению частиц всегда сопутствует волнообразное движение эфирной среды, либо считать, что мельчайшие частицы сами в момент излучения получают некоторые вращательные и колебательные движения, которые они сохраняют все время их предполагаемого движения. Эти дополнительные соображения, которые были придуманы для объяснения некоторых конкретных явлений, никогда не рассматривались и не принимались в общем, хотя не делалось никаких попыток для того, чтобы приспособить теорию для объяснения этих явлений каким-либо другим путем.

Предполагая, что свет любого данного цвета состоит из колебаний данной длины или данной частоты, мы приходим к выводу, что эти волновые движения ответственны за эффекты, которые мы уже изучили в случае волн на воде и звуковых импульсов. Было показано, что две равные группы волн, получающиеся от двух центров, расположенных рядом, могут в определенных точках уничтожить влияние друг друга, а в других точках удвоить его; биение двух звуков объясняется аналогичной интерференцией. Теперь мы применим эти принципы к переменному сложению и погашению цветов.

Для того чтобы действия двух потоков света могли таким образом сложиться, необходимо, чтобы они были порождены одним источником и чтобы они достигали одной точки разными путями по направлениям, не сильно различающимся друг от друга *). Это различие в путях может получаться с помощью дифракции, отражения, преломления, либо с по-

---

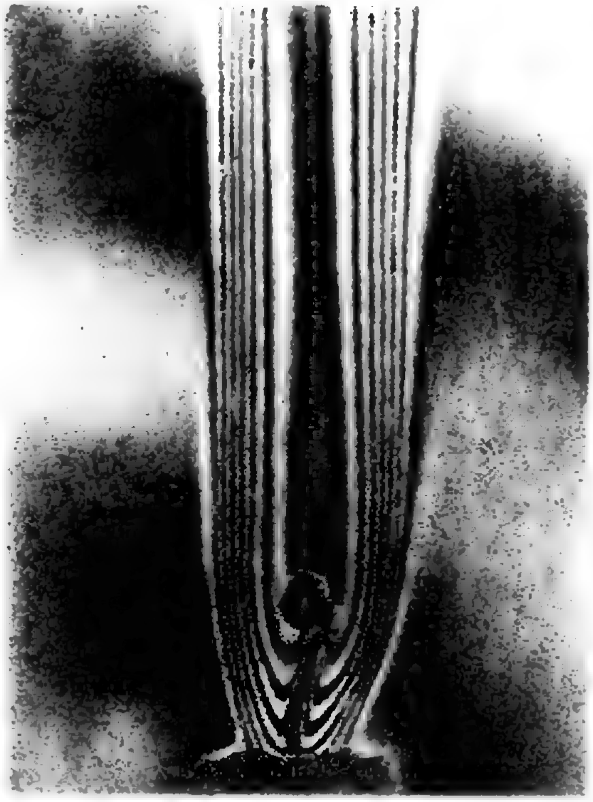
*) Как говорят теперь, потоки света должны быть когерентными.

мощью любой комбинации этих явлений. Простейшим является случай, когда поток однородного света падает на экран с двумя очень малыми отверстиями или щелями (рис. 1), которые могут считаться центрами расхождения, и от которых свет дифрагирует во всех направлениях *). В этом случае, когда два вновь образованных потока падают на поверхность, где они перекрываются, их свет разделяется темными полосами, приблизительно равными по величине, но становящимися шире, когда экран отодвигается от отверстий. Середина между двумя потоками всегда светлая, а светлые полосы с каждой стороны находятся на таких расстояниях, что свет, приходящий к ним от одного отверстия, должен пройти путь больший, чем от другого, на величину, которая равна длине одной, двух, трех или более волн, в то время как лежащие между ними темные полосы соответствуют разности в путях в 1/2, 3/2, 5/2, . . . длины волны.

Из сравнения результатов различных экспериментов следует, что длина волн для красного света должна равняться в воздухе 1/36000 дюйма, для фиолетового света — 1/60000 дюйма; средняя величина по всему спектру равна приблизительно 1/45000 дюйма **). Исходя из этих размеров и учитывая ныне известную величину скорости света, можно подсчитать, что даже для длинноволнового света в одну секунду в глаз попадает 500 000 000 000 000 таких волн.

Еще более простую и удобную демонстрацию общего закона интерференции света представляют цвета тонких пленок прозрачных веществ. Здесь можно наблюдать интерференцию света, частично отраженного от верхней и нижней поверхностей пленки, или, при рассмотрении в проходящем свете, интерференцию проходящего луча, который только преломляется, и луча, дважды отраженного внутри пленки. В последнем случае явление менее эффектно, поскольку свет, полученный в результате двойного отражения, составляет лишь малую часть всего потока, с которым он взаимодействует, в то время как в первом случае два отраженных потока имеют приблизительно одинаковую интенсивность. В обоих случаях, если пленка достаточно тонка, порядок цветов точно такой же, как и в случае полос, описанных ранее; расстояния между ними меняются, когда поверхности пленок из плоских превращаются в вогнутые, что происходит в такого рода опытах довольно часто.

Тонкая пленка окиси, образующаяся на поверхности металла (например, железа), при нагревании дает возможность наблюдать такие последовательности цветов в отраженном свете: сначала эта пленка невообразимо тонка и не влияет на отраженный свет, затем она становится тускло-



Интерференционные полосы в горячем воздухе, поднимающемся от пламени свечи.

---

*) Знаменитый эксперимент Юнга по дифракции от двух щелей.

**) Действительная область видимого света лишь немного выходит из этого диапазона. Наблюдения Юнга были удивительно точны.

желтой, затем красной, темно-красной и синей, после чего эффект исчезает вследствие перехода пленки в непрозрачное состояние.

Обычно, правда, чередование цветов, полученных в отраженном свете, несколько иное. Плотность пленки окисла больше, чем плотность воздуха, а плотность металла больше, чем у окисла; но если плотность среды над и под пленкой одновременно либо больше, либо меньше плотности пленки, то различные поверхности по-разному меняют состояние волны, и весьма тонкий слой пленки становится темным вместо того, чтобы быть светлым, один поток света уничтожает другой вместо того, чтобы объединяться с ним *).

Если получить мыльную пленку и поставить ее в вертикальное положение, то верхний край пленки станет очень тонким и будет почти черным, в то время как нижние области будут поделены горизонтальными линиями на серии цветных полос (рис. 2).

Когда два стекла, одно из которых слегка выпукло, прижаты друг к другу с некоторой силой, слой воздуха, находящийся между ними, обуславливает появление цветных колец **), начинающихся с темного пятна в центре и становящихся все у́же и у́же по мере того, как искривление стекла все быстрее увеличивает толщину слоя воздуха между стеклами. Черное пятно сменяется таким слабым фиолетовым цветом, что он едва заметен; затем следует оранжево-желтый, темно-красный и синий (рис. 3).

Если заменить воздух, находящийся между стеклами, водой или другой жидкостью, то кольца появятся при толщине, меньшей толщины слоя воздуха, поскольку оптическая плотность жидкости больше. Это непосредственно следует из отношения скоростей, с которыми свет,

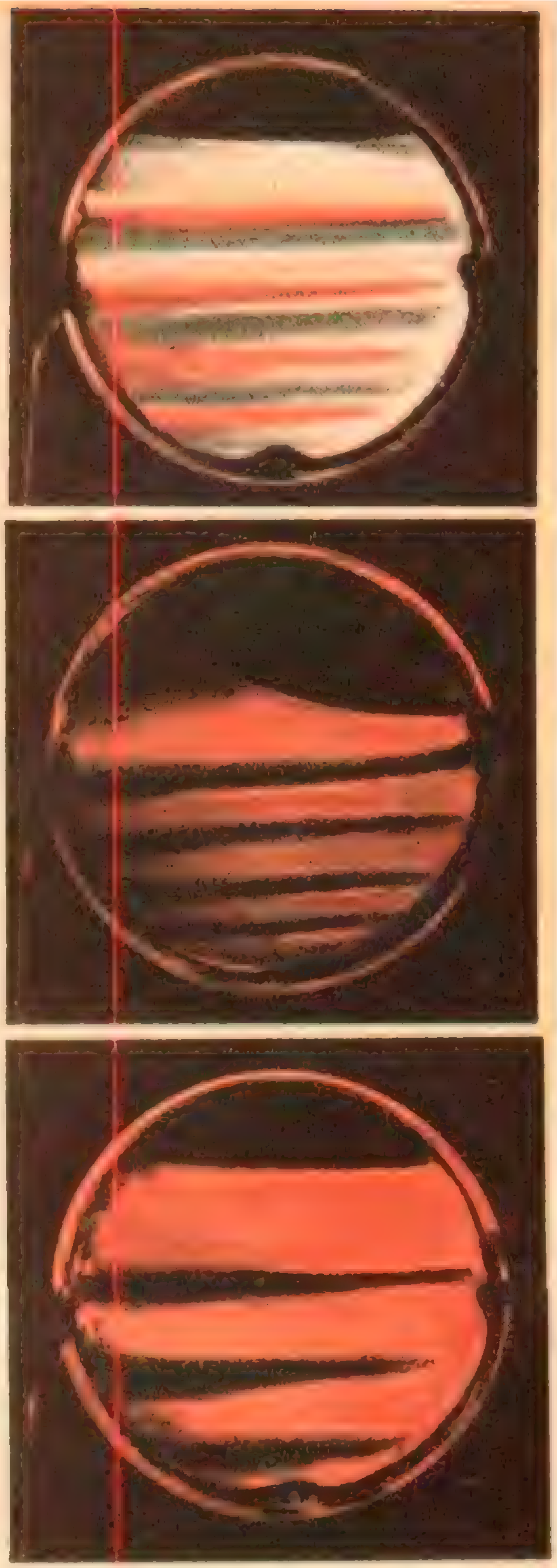


Рис. 2. Интерференционная картина, полученная при отражении света от тонкой мыльной пленки. Снимок сделан: в белом свете; в красном свете; тоже в красном свете, но несколько позже предыдущего.

---

*) Это происходит вследствие изменения фазы на противоположную при отражении от вещества с бо́льшим коэффициентом преломления.

**) Так называемые «кольца Ньютона».

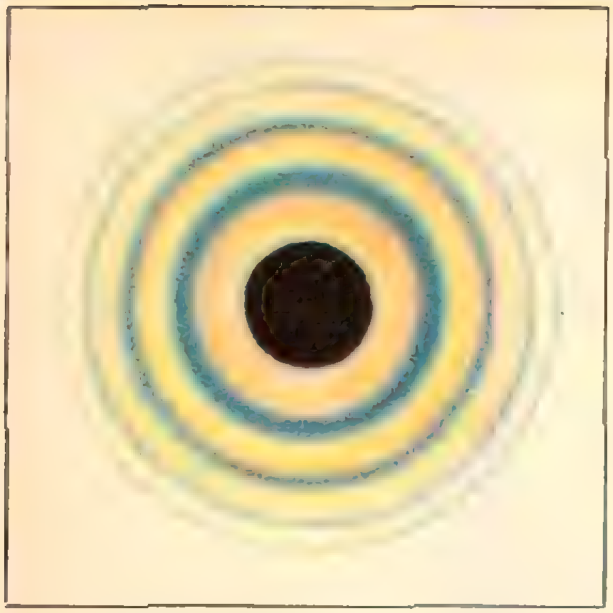


Рис. 3. Кольца Ньютона в отраженном свете.

согласно гипотезе Гюйгенса, движется в различных средах.

Другое следствие, непосредственно вытекающее из этой теории и несовместимое с другими теориями, заключается в том, что если луч проходит наклонно через более толстую пленку, то это эквивалентно тому, что свет проходит перпендикулярно через менее толстую пленку; разности путей, проходимых разными потоками света, точно согласуются с наблюдаемыми явлениями...

Мы предполагаем, что точность, с которой доказана применимость общего закона интерференции к огромному разнообразию фактов, столь не похожих по своим деталям, позволяет нам считать полностью доказанной его справедливость. Полное принятие или решительный отказ от теории, с помощью которой этот закон был выведен, может произойти как с течением времени, так и в результате экспериментов. Если она будет опровергнута, то наш взгляд на вещи станет достоянием истории, но если она подтвердится, то мы можем ожидать еще более широкого проникновения в тайны природы с помощью таких мощных и универсальных средств изучения среды, к каким может быть причислено распространение света».

Задачи на клетчатой бумаге

У вас имеется бумага в клетку и линейка без делений. Попробуйте решить следующие задачи.

а) Построить середину отрезка AB (рис. 1).

б) Разделить отрезок AB на пять равных частей (рис. 2).

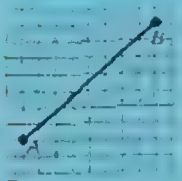


Рис. 1

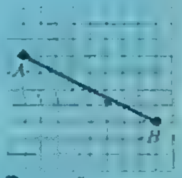


Рис. 2

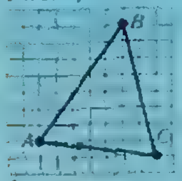


Рис. 3

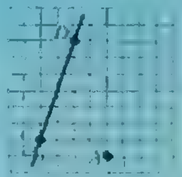


Рис. 4

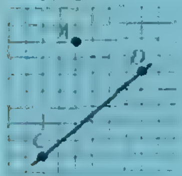


Рис. 5

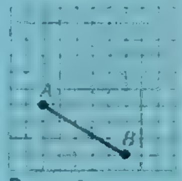


Рис. 6

в) Разделить треугольник ABC на три треугольника равной площади (рис. 3).

г) Через точку A провести прямую параллельно прямой CD (рис. 4).

д) Из точки A опустить перпендикуляр на прямую CD (рис. 5).

е) Из конца отрезка AB восставить перпендикуляр к нему (рис. 6).

Е. А. Дышинский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

КРАСОЧНАЯ КОМБИНАТОРИКА

Б. А. Кордемский

Первые занятия «красочной комбинаторикой» памятны каждому из нас: на белой бумаге — «оранжевое небо», «оранжевый верблюд» и «оранжевая мама». Перешагнув рубеж этой детской «оранжевой» комбинаторной геометрии, математическая фантазия ввела палитру красок в условия задач, занятных, но при этом и серьезных — задач о комбинациях красок и раскрашивании карт. А в некоторых задачах оказалось возможным иное использование красок: раскрашивание — элемент решения, изюминка, придающая рассуждениям изящество и краткость.

Что касается комбинаторной геометрии, то это молодое, развивающееся направление математики. Ее методы и, в частности, раскрашивание в соединении с так называемым «принципом проверки на четность» числа одноцветных частей фигуры могут быть полезными в решении инженерных задач отыскания оптимальных способов подгонки стандартных деталей. Откладывая на будущее более подробный рассказ об этом, рассмотрим «для разминки» несколько занятных комбинаторных «красочных» задач.

Один совет: следуя за текстом статьи, пытайтесь всякий раз опередить автора в решении предлагаемых задач.

Двухцветная комбинаторика

Задача 1. *Шесть точек расположены в пространстве так, что никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не принадлежат одной плоскости. Все точки попарно соединены отрезками: синими или красными — по вашему усмотрению. В получившейся конфигурации, содержащей* 15 *отрезков* ($C_6^2 = 15$), *есть и треугольники. Можно ли подобрать такое распределение красок для отрезков, при котором не образовалось бы ни одного одноцветного треугольника?*

Пробы и попытки приведут Вас к отрицательному ответу. Требуется его обосновать.

Решение. Выберем произвольно одну из данных шести точек и обозначим ее буквой A. Из пяти отрезков, сходящихся в A, есть не менее трех одного цвета, так как мы располагаем только двумя красками; отметим три из этих отрезков и будем считать для определенности, что они красные. Рассмотрим три отрезка, соединяющие пары других концов отмеченных отрезков. Ни один из рассматриваемых трех отрезков не должен оказаться красным, чтобы не возник треугольник, все стороны которого одного цвета. Но тогда три последних отрезка — все синие и неизбежно образуют одноцветный треугольник.

Осуществимый паркет

Задача 2. *На рисунке* 1 *показано покрытие (паркет) квадрата* 8 × 8 *двадцать одной плиткой «тримино»* (3 × 1) *и одной плиткой «мономино»* (1 × 1). *Доказать, что указанное положение плитки «мономино»*

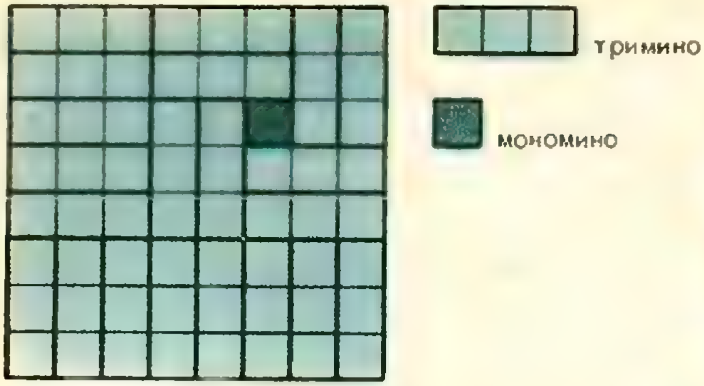


Рис. 1.

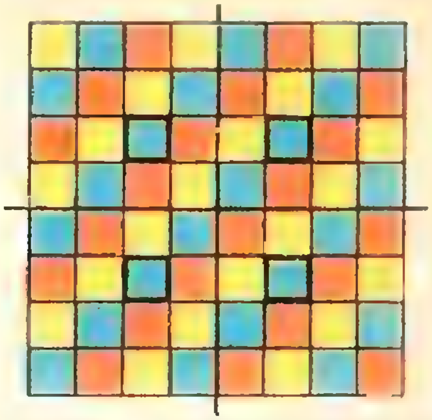


Рис. 2.

единственно возможное (с точностью до симметрии относительно вертикальной и горизонтальной осей симметрии квадрата).

Решение. Раскрасим клетки квадрата в три цвета: желтый, синий и красный (рис. 2). Желтых и красных получилось по 21 клетке, синих — 22. Плитка тримино в любой части квадрата покрывает по одной клетке каждого цвета; 21 плитка тримино покроет все желтые и красные, но не все синие — одна остается. Поэтому мономино может расположиться на синей клетке, но не на желтой и не на красной.

Предположим, что удалось покрыть квадрат 21-й плиткой тримино и одной плиткой мономино, поместив последнюю на синюю клетку в нижнем углу слева. Тогда и после поворота всего паркета на 90° по ходу часовой стрелки должно сохраниться полное покрытие квадрата. Это было бы равносильно такому паркету, при котором мономино занимает желтую клетку (в верхнем углу слева), а такого покрытия, как было выяснено, не существует. Значит, для плитки мономино пригодна одна из тех синих клеток, которые взаимно симметричны относительно вертикальной и горизонтальной осей, проходящих через центр квадрата. Теорема доказана.

Невозможный паркет

Задача 3. *Доказать невозможность покрытия шахматной доски 15-ю плитками Г-тетрамино и одним квадратным тетрамино (рис. 3).*

Решение Сразу возникает мысль использовать двухцветность шахматной доски. Но без дополнительной хитрости не обойтись: надо изменить фасон раскраски шахматной доски (рис. 4). А теперь все просто.

Квадратное тетрамино покрывает две светлые и две черные клетки на любом участке новой расцветки, а Г-тетрамино на любом участке доски

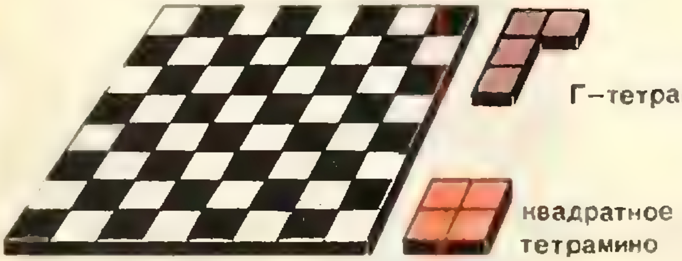


Рис. 3.

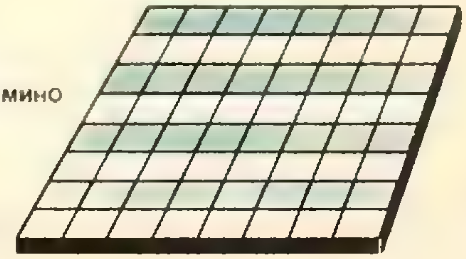


Рис. 4.

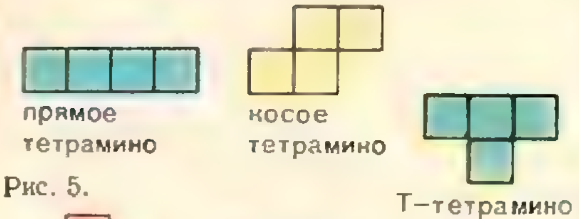


Рис. 5.

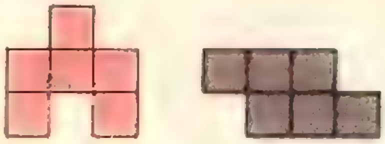


Рис. 6.

покрывает нечетное число светлых и нечетное число черных клеток. В совокупности пятнадцать Г-тетрамино и одно квадратное тетрамино должны покрыть нечетное число светлых и нечетное число черных клеток, но доска с расцветкой нового фасона имеет по четному числу светлых и черных клеток.

Вывод: требуемого паркета не существует.

Задача 4. Придумайте такой фасон расцветки шахматной доски, с помощью которого легко доказать невозможность ее покрытия одним квадратным тетрамино и пятнадцатью другими тетрамино, из которых несколько (или все) — прямые, а остальные — косые (рис. 5).

Задача 5. 4 квадратных, 4 прямых тетрамино, 4 Г-тетрамино и 4 Т-тетрамино (рис. 5) могут покрыть шахматную доску. Осуществить этот паркет практически.

Задача 6. а) На рисунке 6 изображены два возможных вида плиток гексамино. Фигуры гексамино образуются из шести равных квадратов, каждый из которых имеет не менее одной общей стороны с другими квадратами, причем из одного квадрата можно перейти в любой другой. Постройте все фигуры гексамино различных фасонов. Фасоны считаются различными, если фигуры не совмещаются при наложении и даже после переворачивания одной из них.

Для контроля: должно получиться 35 фигур гексамино.

б) Докажите, что не существует прямоугольника из 210 клеток, который можно было бы покрыть плитками гексамино всех 35 видов.

Заполнение тела

В отличие от паркета — покрытия пластинками плоской фигуры — теперь рассмотрим заполнение заданного пространственного тела деталями указанной формы (кирпичами).

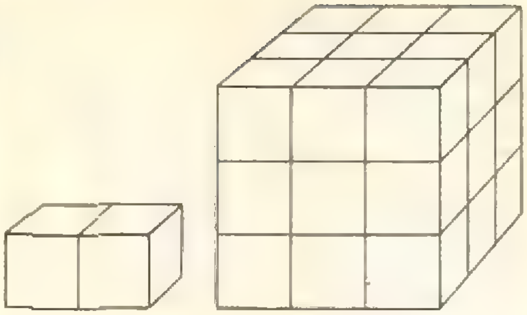


Рис. 7.

Задача 7. *Пусть кирпич состоит из двух склеенных единичных кубиков, а заданное тело — куб, содержащий 27 таких же единичных кубиков (рис. 7). Какой из этих 27 кубиков надо удалить, чтобы оставшуюся структуру из 26 кубиков можно было бы заполнить тринадцатью кирпичами?*

Решение. Достаточно предположить, что куб составлен чередованием черных и белых единичных кубиков с белым кубиком в центре (рис. 8). Черных кубиков окажется 14, а белых — только 13.

13 кирпичей заполнят 13 черных и 13 белых кубиков, следовательно, удалить надо один черный кубик. Какой именно черный кубик удалять — несущественно; убедитесь в этом практически.

Задача 8. Предположим, что первоначальный куб (3 × 3 × 3) — деревянный. Термит прогрызает в этом кубике туннель от центра одного кубика к центру другого, начиная от центра какого-либо пери-

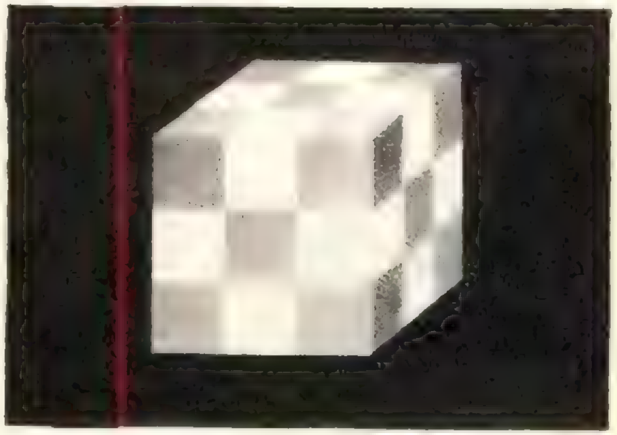


Рис. 8.

ферийного кубика. Может ли он пройти через центры всех кубиков и закончить путь в центральном кубике, если движется термит только параллельно ребрам куба и каждый кубик проходит один раз?

Опять фальшивая монета

«Опять» — в том смысле, что, вероятно, многим из вас знакома серия задач о выделении фальшивой монеты из данной выборки одинаковых по достоинству и по виду монет при помощи указанного числа взвешиваний на чашечных весах без гирь. Автор этих задач неизвестен; в математических журналах их решения и исследования начали появляться с 1945 года.

Напомним, что если нет сведений о фальшивой монете (тяжелее она или легче настоящей), то для выделения ее из 12 данных монет достаточно трех взвешиваний, а для выделения из 13 — недостаточно. Но...

Задача 9. *Пусть кроме 13 монет, среди которых одна фальшивая (неизвестно, более легкая или более тяжелая), в нашем распоряжении есть еще одна такая же монета, причем настоящая. Раскрасим ее слегка, чтобы отличить от остальных, но без ощутимого изменения ее собственного веса. Покажите, что в этом случае можно выделить фальшивую монету из 13 заданных при помощи трех взвешиваний на чашечных весах без гирь.*

Решение. Обозначим: 13 испытуемых монет цифрами 1—13, окрашенную настоящую монету — кружком ●, левую и правую чашки весов соответственно буквами Л и П, равновесие — Л = П; опускается левая чашка весов $_{Л}/^{П}$, опускается правая чашка весов — $^{Л}/_{П}$.

Схему возможных событий удобно представить таблицей (внизу).

Математический «катализатор»

Процесс ускорения химической реакции с помощью вспомогательного вещества — катализатора, не расходующегося при реакции, — называется *катализом*. Покажем на одном примере, как раскрашивание может оказаться своеобразным «катализом» решения задачи.

Первое взвешивание		Второе взвешивание		Третье взвешивание		Фальшивая монета
монеты на чашках	результат	монеты на чашках	результат	монеты на чашках	результат	
Л (1, 2, 3, 4, 5) П (6, 7, 8, 9, ●)	Л = П	Л (10; 11) П (12; ●)	Л = П	Л (13); П (●)	$_{Л}/^{П}$	13; тяж.
					$^{Л}/_{П}$	13; лег.
			$_{Л}/^{П}$	Л (10); П (11)	Л = П	12; лег.
					$_{Л}/^{П}$	10; тяж.
					$^{Л}/_{П}$	11; тяж.
			$^{Л}/_{П}$	Л (10); П (11)	Л = П	12; тяж.
					$_{Л}/^{П}$	11; лег.
					$^{Л}/_{П}$	10; лег.
	$_{Л}/^{П}$	Л (1, 2, 6, 7, 8) П (9, 10, 11, 12, ●)	Л = П	Л (3); П (4)	Л = П	5; тяж
					$_{Л}/^{П}$	3; тяж
					$^{Л}/_{П}$	4; тяж
			$_{Л}/^{П}$	Л (1); П (2)	Л = П	9; лег.
					$_{Л}/^{П}$	1; тяж.
					$^{Л}/_{П}$	2; тяж.
			$^{Л}/_{П}$	Л (6); П (7)	Л = П	8; лег.
					$_{Л}/^{П}$	6; лег.
					$^{Л}/_{П}$	7; лег.
	$^{Л}/_{П}$					Выяснить самостоятельно

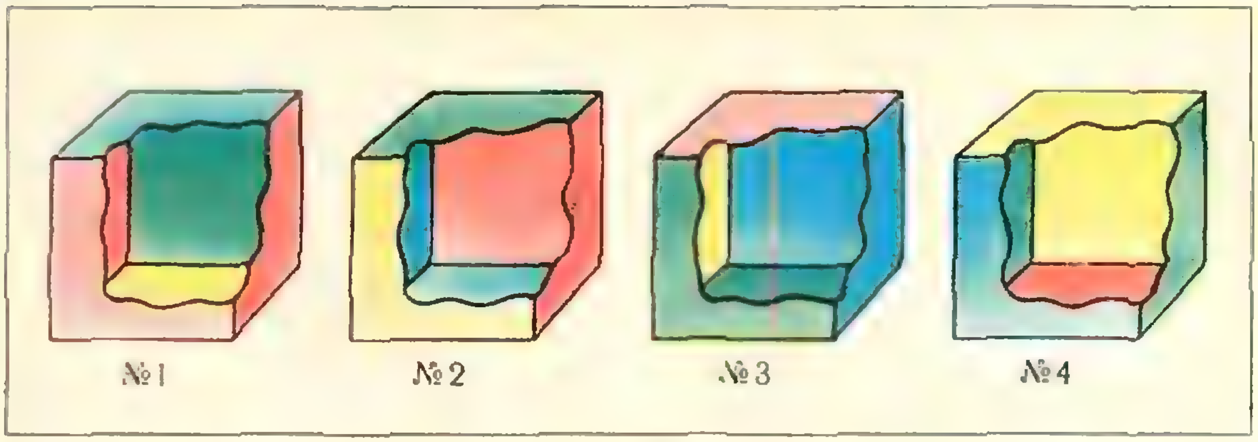


Рис. 9.

Задача 10. *Определить, какое минимальное число кокосовых орехов могло быть собрано пятью моряками, высадившимися на острове после кораблекрушения, если они делили орехи так: первый из них угостил одним орехом мартышку и взял себе ровно $^1/_5$ часть оставшихся орехов; точно так же один за другим поступили и остальные 4 моряка; после этого они в шестой раз угостили мартышку одним орехом, а остальные поделили между собой поровну.*

В слегка измененной редакции эта задача рассмотрена в статье автора *«Этому виду задач более 1600 лет»* («Квант» № 4, 1973).

Алгебраическое решение приводит к линейному неопределенному уравнению с громоздкими коэффициентами, которое, однако, как показано в упомянутой статье, легко решается методом «сравнений по модулю». Но всякий, кто увлечен математикой, наверное, с удовольствием еще раз вернется к этой задаче и, опережая дальнейшее изложение, попытается найти новую модель рассуждений, привлекая в качестве «катализатора» решения задачи дополнительные орехи, окрашенные в желтый цвет (чтобы отличить их от исходных).

М. Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» («Мир», 1971) замечает, что «Впервые раскрашивание как способ решения задачи было открыто еще в 1912 году профессором Н. Эннингом. В его задаче три человека делили между собой яблоки» (см. стр. 238). Далее М. Гарднер показывает, как можно применить способ Эннинга к решению задачи о кокосовых орехах.

К сожалению, именно в этом месте книги содержатся ошибочные утверждения, возникшие, возможно, вследствие неточности перевода.

Решение. *Задачу было бы* гораздо проще решить, если бы не требовалось отдавать орехи мартышке. Отделяя от кучи шесть раз $^1/_5$ часть орехов, мы оставляли бы в куче $^4/_5$, $(^4/_5)^2$, $(^4/_5)^3, \ldots, (^4/_5)^6$ орехов. Наименьшее число орехов, $(^4/_5)^6$ от которых — целое число, это 5^6, потому что оно должно шесть раз содержать множителем пятерку.

Но нам надо еще отдавать орехи *мартышке, поэтому даже исходное* число орехов не должно делиться на пять. Чтобы оно делилось на пять, добавим в кучу четыре желтых ореха. Посмотрим, что получится.

Итак, в кучу орехов, собранных моряками, добавляем еще четыре желтых ореха. Эту кучу разделим на пять равных кучек, причем желтые орехи распределим по одному в четыре кучки. Четырем морякам заготовлено по кучке с желтым орехом, а одному — кучка, в которой все орехи настоящие. Вытащим из кучек по одному ореху: из четырех — по желтому, а из последней — настоящий. Морякам достанется орехов поровну, и мартышке будет орех, и четыре желтых остались в стороне. Все получилось по условию задачи.

Теперь согласно условию соберем кучки четырех моряков вместе и добавим оставшиеся без дела четыре желтых ореха. По условию, эту кучу можно разделить на пять равных частей. Снова вытащим четыре желтых ореха и один для мартышки. Опять получилось!

Сделаем так шесть раз. Четыре желтых ореха останутся и выйдут «сухими из воды». Они лишь играли роль катализатора и помогли нам свести задачу к уже рассмотренной: надо найти наименьшую кучу орехов (в которой четыре желтых!) такую, что от нее можно шесть раз отделить $^1/_5$ часть орехов. Наименьшее возможное число орехов в такой куче равно 5^6, поэтому моряки должны были собрать $5^6 - 4 = 15621$ орех.

Задача 11. Мы добавили четыре ореха, но они никому не достались. Тем не менее мартышка получила шесть орехов. Откуда же они взялись? Ведь в более простой задаче лишних орехов не оставалось!

Конструкция-головоломка

Найдите в своих детских игрушках 4 одинаковых кубика (или склейте из плотной бумаги) и раскрасьте их четырьмя красками так, как показано на рисунке 9 — каждая грань окрашена одной краской. На нашем рисунке передние грани кубов раскрашены не полностью, чтобы была видна окраска всех остальных граней. В результате вы получите для себя и друзей увлекательную конструктивную головоломку.

Задача 12. *Из сделанных четырех кубиков требуется составить параллелепипед* $1 \times 1 \times 4$ *так, чтобы на каждой его боковой грани были представлены все* 4 *цвета.*

Это трудная головоломка, так как при заданной расцветке граней на 41472 различных разноцветных параллелепипеда приходится только один, удовлетворяющий условию задачи.

Задача 13. Какие вычисления привели к заключению, что в практическом решении головоломки есть выбор из 41472 вариантов?

Задача 14. Для приготовления головоломки с четырьмя кубиками была предложена такая раскраска граней: 7 красных, 6 синих, 6 зеленых и 5 желтых. Взамен этого придумайте новое раскрашивание граней четырех кубиков, при котором оказалось бы по 6 одноцветных граней, и чтобы головоломка имела одно решение.

Найдите *!

а) Докажите, что для любых 3-х из следующих четырех условий

1. $(x * y) * z = x * (y * z)$
2. $x * y = y * x$
3. $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$
4. $(x * y) \cdot z = (x \cdot z) * (y \cdot z)$

($+$ и $\cdot$ обозначают, как обычно, сложение и умножение действительных чисел) существует удовлетворяющая им операция $*$, заданная на множестве всех действительных чисел.

б) Докажите, что не существует операции $*$, заданной на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющей всем четырем условиям.

* * *

Уложите доску

Из квадратной клетчатой доски $n \times n$ вырезали одну угловую клетку. Можно ли полученную фигуру уложить домино так, чтобы в укладке было поровну горизонтально и вертикально расположенных домино?

А. Ю. Сойфер

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА "КВАНТА"

Редколлегия журнала «Квант» установила специальные премии за наиболее интересные решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта».

Редакция журнала получила за 1972—1973 гг. около 4000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1974 год.

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады эти школьники допущены на областные туры Всесоюзной олимпиады 1974 года наравне с победителями районных математических и физических олимпиад.

1. **ВАЛЬКОВ АЛЕКСЕЙ** (г. Ташкент, с. ш. № 110, 9 кл.)
2. **ВОЙНОВА ОЛЬГА** (Кирг. ССР, п. Кош-Тегирмен, с. ш. № 1, 9 кл.)
3. **ГРИГОРЯН АЛЕКСАНДР** (г. Баку, с. ш. № 211, 9 кл.)
4. **ЗАСЛАВСКИЙ АЛЕКСАНДР** (г. Калинин, с. ш. № 20, 9 кл.)
5. **КОГАН ЯН** (г. Глазов, с. ш. № 3, 8 кл.)
6. **ЛУТИНГЕР ГЕРМАН** (г. Черновцы, с. ш. № 14, 9 кл.)
7. **МАКАРИЧЕВ АЛЕКСАНДР** (г. Львов, с. ш. № 14, 9 кл.)
8. **СЛЕСАРЕНКО АНАТОЛИЙ** (г. Рубцовск Алтайского кр., с. ш. № 11, 9 кл.)
9. **СМОЛЕНЦЕВ ЮРИЙ** (г. Ессентуки, с. ш. № 3, 9 кл.)
10. **ШЕНДРИК ВИКТОР** (Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.)
11. **ШМЕЛЕВ ЮРИЙ** (г. Ярославль, с. ш. № 20, 7 кл.)
12. **ЩЕРБИНА НИКОЛАЙ** (г. Днепропетровск, с. ш. № 80, 9 кл.)

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 октября 1973 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М221, М222» или «... Ф233».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). Решения задач из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.

В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).

Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

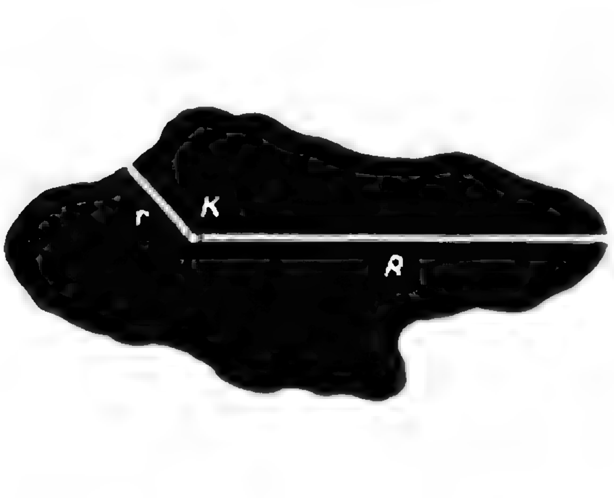
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М222-М225, Ф222-Ф237

М221. На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее расстояние от границы кляксы, а также наибольшее расстояние от границы кляксы (на рис. показано наибольшее и наименьшее расстояния от границы для точки K). Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее — r_0, а среди наибольших выбрали наименьшее — R_0. Какую форму имеет клякса, если $r_0 = R_0$?

А. Блох, ученик 8 класса



М222. Докажите, что у каждого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

А. Грюнталь

М223. Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 28 — совершенное: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.) Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.

А. Макаричев, ученик 9 класса

М224. У трехгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Докажите, что попарные углы между тремя этими биссектрисами все тупые либо все острые, либо все прямые.

Э. Г. Готман

М225. Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски размером 50 × 50 клеток (каждая клетка доски равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через свое ребро на соседнюю клетку; при этом разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? Какое наименьшее?

Г. А. Гальперин

Ф233. При скоростном спуске лыжник скользит вниз по склону ($\varphi = 45^\circ$), не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $k = 0{,}1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости лыжника $F_с = \alpha v^2$, где α — постоянная величина, равная $0{,}7\frac{н}{(м/с)^2}$. Какую максимальную скорость может развить лыжник, если его масса 70 *кг*?

Ф234. Взрывная камера заполняется смесью метана и кислорода при комнатной температуре и давлении $p_0 = 760$ *мм рт. ст.* Парциальные давления метана и кислорода одинаковы. После герметизации камеры в ней происходит взрыв. Найти установившееся давление внутри камеры после охлаждения продуктов сгорания до первоначальной температуры, при которой давление насыщенных паров воды $p_н = 17$ *мм рт. ст.*

А. В. Францессон

Ф235. Маленькая капля воды падает в воздухе с постоянной скоростью благодаря тому, что на нее со стороны воздуха действует сила трения, вызванная столкновениями молекул воздуха с каплей. Как изменится скорость падения капли при увеличении температуры воздуха?

Испарением капли пренебречь.

Ф236. Определить период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E = 300$ *в/см*. Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантельки длины l ($l = 10^{-8}$ *см*), на концах которой находятся две материальные точки массы m ($m = 10^{-24}$ *г*), несущие на себе заряды $+e$ и $-e$ соответственно ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*).

В. Д. Кривченков

Ф237. Почему лицо фехтовальщика в проволочной маске не видно публике, а спортсмен видит все так же хорошо, как и без маски?

* * *

Автор третьего начала термодинамики Вальтер Нернст в часы досуга разводил карпов. Однажды кто-то глубокомысленно заметил:

— Странный выбор. Кур разводить и то интересней.

Нернст невозмутимо ответил:

— Я развожу таких животных, которые находятся в термодинамическом равновесии с окружающей средой. Разводить теплокровных — это значит обогревать за свои деньги мировое пространство.

Решения задач

М179—М183; Ф193—Ф197

М179. *Для каждого не прямоугольного треугольника T обозначим через $H(T) = T_1$ треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T; через $T_2 = H(T_1)$ — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_1; пусть далее $T_3 = H(T_2)$, $T_4 = H(T_3)$, . . .*

Какими должны быть углы треугольника T, чтобы

а) треугольник $H(T)$ был остроугольным?

б) в последовательности T_1, T_2, T_3 . . . встретился прямоугольный треугольник T_n (в этом случае $H(T_n) = T_{n+1}$ не определено)?

в) треугольник $T_1 = H(T)$ был подобен треугольнику T?

г) для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ укажите, сколько существует не подобных друг другу треугольников T, для которых T_n подобен T.*

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника T. Углы α_1, β_1, γ_1 при вершинах A_1, B_1, C_1 (соответственно) треугольника $A_1B_1C_1$ выражаются через углы α, β, γ при вершинах A, B, C треугольника ABC следующим образом:

$$\alpha_1 = \pi - 2\alpha, \quad \beta_1 = \pi - 2\beta, \quad \gamma_1 = \pi - 2\gamma, \qquad (1_1)$$

если все углы α, β, γ не превосходят $\frac{\pi}{2}$;

$$\alpha_1 = 2\alpha - \pi, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma, \qquad (1_2)$$

если α — тупой;

$$\alpha_1 = 2\alpha, \quad \beta_1 = 2\beta - \pi, \quad \gamma_1 = 2\gamma, \qquad (1_3)$$

если β — тупой;

$$\alpha_1 = 2\alpha, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma - \pi, \qquad (1_4)$$

если γ — тупой.

Для доказательства можно воспользоваться, например, тем, что точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB и такими же соображениями для других пар точек (рис. 1 и 2).

Из формул (1) следует, что все три угла α_1, β_1, γ_1 — острые в том и только в том случае, если выполнено одно из двух условий: либо все три угла α, β, γ заключены между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$, либо два из них меньше $\frac{\pi}{4}$, а третий (тупой) меньше $\frac{3\pi}{4}$.

Заметим, что α_1 при данном α может равнятся только одному из трех чисел: $2\alpha - \pi$, $\pi - 2\alpha$ или 2α; соответственно α может равняться $\frac{\pi+\alpha_1}{2}$, $\frac{\pi-\alpha_1}{2}$ или $\frac{\alpha_1}{2}$. Отсюда вытекает, что $\alpha_1 = \frac{\pi k}{2^m}$ (k, m — некоторые целые числа) тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{\pi l}{2^{m+1}}$ (l — некоторое целое число). Поэтому последовательность T_1, T_2, T_3, . . . «вырождается» (некоторый треугольник T_{n+1} — оказывается прямоугольным) тогда и только тогда, когда один из углов α, β или γ равен $\frac{\pi s}{2^n}$, где s и n — некоторые целые положительные числа.

Теперь перейдем к более трудному вопросу: когда треугольник T_n подобен T. Начнем с $n = 1$. Для того чтобы треугольники с углами (α_1, β_1, γ_1) и (α, β, γ) были подобны, нужно, чтобы тройка чисел (α_1, β_1, γ_1) после некоторой перестановки совпала

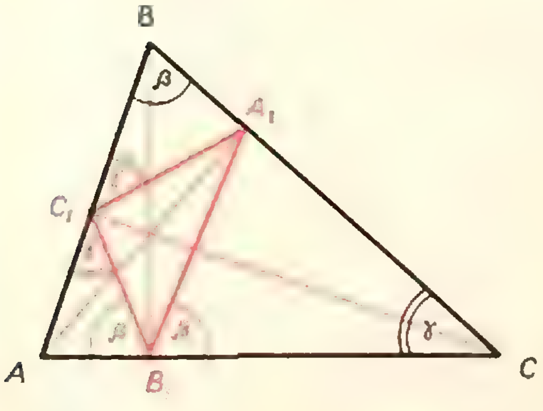


Рис. 1.

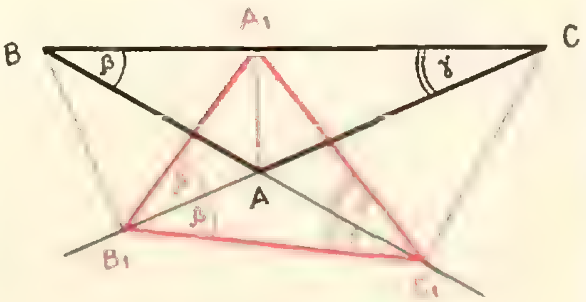


Рис. 2.

с (α, β, γ). Ясно, что можно рассматривать только случай

$$\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \qquad (2).$$

Углы любого треугольника можно обозначить буквами α, β и γ, так, чтобы *выполнялись неравенства* (2).

Если $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (все углы — острые), то, поскольку из (2) вытекают неравенства $2\pi - \alpha \leqslant 2\pi - \beta \leqslant 2\pi - \gamma$, для подобия треугольников T_1 и T должна выполняться система равенства

$$\pi - 2\alpha = \gamma, \quad \pi - 2\beta = \beta, \quad \pi - 2\gamma = \alpha,$$

откуда

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Если же $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то из (2) мы можем пользоваться только тем, что $2\beta \geqslant 2\gamma$, и должны рассмотреть три возможных соотношения между углами α_1, β_1 и γ_1: $2\beta \geqslant 2\gamma \geqslant 2\alpha - \pi$, $2\beta \geqslant 2\alpha - \pi \geqslant 2\gamma$ и $2\alpha - \pi \geqslant 2\beta \geqslant 2\gamma$. Первое из них приводит к системе

$$2\beta = \alpha, \; 2\gamma = \beta, \; 2\alpha - \pi = \gamma,$$

откуда находим интересное решение:

$$\alpha = \frac{4\pi}{7}, \quad \beta = \frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \frac{\pi}{7},$$

а два других, как нетрудно проверить, приводят к «вырожденным» решениям (один из углов обращается в нуль), которые нам не подходят, как говорят, «не входят в область допустимых значений».

Как пишут читатели, занимавшиеся решением этой задачи, для $n = 2, 3, 4$ и вообще для любого n решения можно получить аналогичным, но значительно более громоздким перебором. Действительно, в принципе мы свели задачу к алгебраической. Наметим возможный план дальнейших рассуждений (для произвольного натурального n). Из (1) по индукции можно получить формулы для углов треугольника

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_n = s2^n \;\; \alpha + p\pi \\ \beta_n = s2^n \;\; \beta + q\pi \\ \gamma_n = s2^n \;\; \gamma + r\pi, \end{array}\right. \qquad (3)$$

где s равно $+1$ или -1, p, q и r — целые числа (докажите, что при данных α, β и γ и при дополнительном условии $\alpha_n \geqslant 0$, $\beta_n \geqslant 0$, $\gamma_n \geqslant 0$, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \pi$ *параметры p, q, r, s определяются из (3) однозначно!*): Напишем шесть систем, приравнивая $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ различным перестановкам (α, β, γ), и решим каждую из них. Из полученных решений (зависящих от параметров p, q, r, s) выберем те, которые удовлетворяют условию $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Чтобы ответить на вопрос: сколько существует решений (для данного n), нужно будет выяснить, сколько решений в целых числах p, q, r, s (где $s = \pm 1$) *имеют шесть полученных* систем неравенств. Чтобы реализовать этот план,

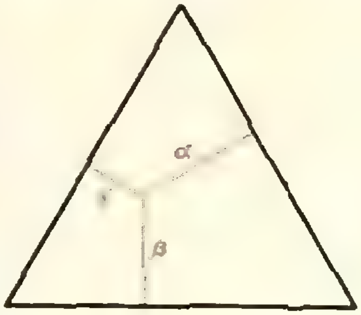


Рис. 3.

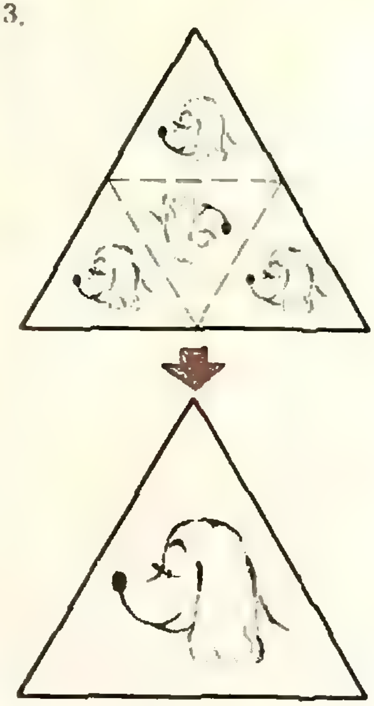


Рис. 4

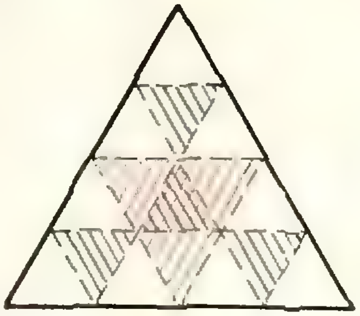


Рис. 5.

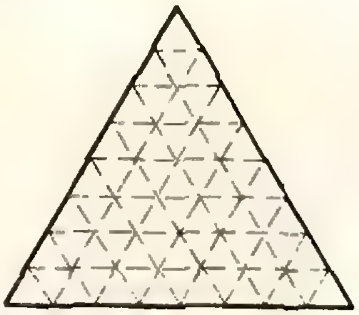


Рис. 6.

вероятно, понадобилось бы занять все следующие страницы журнала выкладками. Но, оказывается, можно найти ответ без всяких систем и неравенств, если призвать на помощь … геометрию. Мы ограничимся здесь лишь указанием, как выбрать удобную геометрическую интерпретацию нашей задачи (совершенно отличную от той, с которой мы начали!), и закончим решение в одном из следующих номеров.

Нарисуем на плоскости правильный треугольник y, высота которого равна π (единиц длины). Каждой тройке положительных чисел (α, β, γ) таких, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, поставим в соответствие точку внутри треугольника y, расстояния от которой до его сторон равны соответственно α, β и γ (рис. 3). Это соответствие между тройками (α, β, γ) и точками T треугольника y будет взаимно однозначным. Перестановкам «координат» α, β, γ соответствуют преобразования, отображающие y на себя с сохранением расстояний (повороты и симметрии). А преобразование H, заданное формулами (1), изображено на рисунке 4: на средних линиях y оно не определено, а каждый из четырех треугольников (соответствующих четырем случаям в формуле (1)) оно растягивает вдвое и отображает на весь треугольник y. На рисунке 5 изображен ответ на вопрос а): заштрихованы те точки треугольника y, для которых $H(T)$ попадает в среднюю (розовую) часть треугольника y. А на рисунке 6 показано, из каких точек после 2-кратного применения H мы попадем на средние линии y (аналогичным образом разбивается треугольник y и при n-кратном применении H). Если вы разберетесь в наших указаниях и научитесь пользоваться «системой координат» y, то попробуйте с ее помощью ответить и на вопрос г) задачи **М179**. Пока для контроля приведем ответ: $2^{2n}-2^n$. (Таким образом, существует 12 треугольников T, для которых T подобен T_2; 56, для которых T подобен T_3, и т. д.).

Н. Б. Васильев

М180. *Двое играют в такую игру. Один задумывает натуральное число n, а другой задает вопросы типа «верно ли, что $n\geqslant x$» (x он может выбирать по своему усмотрению) и получает ответы «да» или «нет». Каждой возможной стратегии T второго игрока сопоставим функцию $f_T(n)$, равную числу вопросов (до отгадывания), если было задумано число n.*

Пусть, например, стратегия T состоит в том, что сначала задаются вопросы: «верно ли, что $n\geqslant 10$?», «верно ли, что $n\geqslant 20$?», … до тех пор, пока на какой-то вопрос «верно ли, что $n\geqslant 10(k+1)$?» не будет дан ответ «нет», а затем задаются вопросы «верно ли, что $n\geqslant 10k+1$?», «что $n\geqslant 10k+2$» и т. д. Тогда $f_T(n)=\frac{n-a}{10}+a+2$, где a — последняя цифра числа n, то есть $f_T(n)$ растет примерно как $\frac{n}{10}$.

а) Предложите стратегию, для которой функция $f_T(n)$ растет возможно медленнее.

б) Сравнивая две стратегии, удобно ввести вместо функции $f_T(n)$ функцию $f'_T(n)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f_T(k)$ — она показывает, за какое число вопросов можно угадать любое число, не превосходящее n. Оцените снизу $f'_T(n)$ для произвольной стратегии T.

Пусть сначала n — не любое натуральное число, а заключено в промежутке

$$1\leqslant n\leqslant N,$$

где N — заданное число. Тогда задача о минимизации максимального числа вопросов для отгадывания n известна.

Наилучшая в этом смысле стратегия, назовем ее S_n, состоит в том, что каждый новый вопрос делит промежуток значений, которые еще может принимать неизвестное пока число n, на две равные (или отличающиеся на 1) части. Именно, если мы уже знаем, что

$$a\leqslant n<b,$$

то надо задать вопрос: «верно ли, что $n\geqslant\frac{a+b}{2}$»? Стратегия S_n описана.

Можно доказать, что максимальное число вопросов для отгадывания числа $n\leqslant N$ при использовании S_n равно $]\log_2 N[$, где $]l[$ означает наименьшее целое число, не меньшее l.

Ответим теперь на вопрос (б). Докажем, что для любой стратегии T и любого числа n

$$f'_T(n)\geqslant\ ]\log_2 n[.$$

Доказательство. Пусть задано натуральное N, и неизвестное число n находится в промежутке от 1 до N. Пусть,

$$2^{m-1}<N\leqslant 2^m.$$

Тогда наибольший промежуток P_1 значений, которые еще может принимать n после первого вопроса, строго больше 2^{m-2} *), наибольший промежуток P_2, в котором может находиться n после второго вопроса, больше 2^{m-3}, и так далее. По индукции получаем, что наибольший промежуток P_{m-1}, в котором может находиться n после $m-1$-го вопроса, больше 1. Значит, максимальное число вопросов (при наиболее неблагоприятных ответах) не меньше, чем

$$m=\ ]\log_2 N[. \tag{1}$$

Займемся вопросом (а) задачи **М180**.

Пусть мы задали несколько вопросов типа «верно ли, что $n\geqslant x$» и получали ответы «да»: число n все время оказывалось больше или равно очередному x. Ясно, что следующее x надо взять больше всех уже употребленных (иначе этот вопрос будет лишним).

---

*) Разумеется, мы считаем, что «Злой Рок» (см. «Квант» № 8, 1972 г., с. 4) помнит про свои обязанности.

Таким образом, в начале игры надо все время увеличивать x — до тех пор, пока в первый раз загадавший не скажет «нет». Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ — последовательность, которую угадывающий решил называть, пока не получит первый ответ «нет». Она должна быть бесконечной, так как n может оказаться сколь угодно большим.

Пусть теперь наступил второй этап игры: на k-й вопрос загадавший в первый раз ответил «нет». Таким образом,

$$x_{k-1} \leqslant n < x_k.$$

Дальше можно применить стратегию, аналогичную описанной выше стратегии S_n, делить оставшийся промежуток все время пополам. Очевидно, при этом будет потрачено до $]\log_2 (x_k - x_{k-1})[$ вопросов.

Предположим, что на втором этапе игры, то есть после первого ответа «нет», мы именно так и играем. Остается выбрать монотонно возрастающую последовательность x_k, чтобы полностью определить стратегию.

Разберем три конкретных стратегии, отличающиеся лишь выбором последовательности x_k.

1. Стратегия T^1: $x_k = 10k$. Тогда, как указано в условии, $f_T(n)$ растет примерно как $\frac{n}{10}$.

2. Стратегия T^2: $x_k = 2^k$. Тогда число вопросов на первом этапе не больше $]\log_2 n[$, а число вопросов на втором этапе не больше $]\log_2 \frac{n}{2}[$. Всего получается примерно $2\log_2 n$ вопросов.

3. Стратегия T^3: $x_k = 2^{2^k}$. Теперь число вопросов на первом этапе резко уменьшилось. В самом деле, пусть

$$2^{2^{k-1}} \leqslant n < 2^{2^k}. \qquad (2)$$

Тогда число вопросов на первом этапе игры равно k и не превышает

$$k \leqslant \log_2\log_2 n + 1,$$

что при больших n значительно меньше, чем $\log_2 n$. На втором этапе мы потратим приблизительно

$$\log_2 (2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}) \approx \log_2 2^{2^k} = 2^k$$

вопросов. Хорошо это или плохо? Это зависит от числа n. Оказывается, для наибольших n в промежутке (2) эта стратегия значительно лучше, чем для наименьших n в том же промежутке.

Пусть $n = 2^{2^k} - 1$.
Тогда

$$f_{T^3}(n) \approx \log_2\log_2 n + 2^k \approx \log_2 n + \log_2\log_2 n.$$

При больших n второе слагаемое значительно меньше первого, и отношение $f_{T^3}(n)$ к нижней оценке $\log_2 n$ (см. формулу (1)) близко к 1.

Пусть теперь $n = 2^{2^{k-1}}$. Тогда величина $f_{T^3}(n)$ — такая же, а выраженная через n она составляет

$$f_{T^3}(n) \approx \log_2\log_2 n + 2^k \approx 2\log_2 n + \log_2\log_2 n,$$

то есть примерно вдвое превышает нижнюю оценку (1). Таким образом, для этих значений n стратегия T^3 ничем не лучше стратегии T^2.

Это положение иллюстрируется графиком на рисунке 7. На этом графике красная линия условно изображает доказанную выше нижнюю оценку: $\log_2 n$ (график носит качественный, эскизный характер и не претендует на точность).

Ступенчатая черная линия изображает график функции $f_{T^3}(n)$. Эта функция постоянна на каждом промежутке вида (2). К концу такого промежутка нижняя оценка почти догоняет ее, но тут $f_{T^3}(n)$ скачком увеличивается и делается примерно вдвое больше.

Возникает вопрос: существует ли такая стратегия T^4, для которой $f_{T^4}(n)$ при всех n не слишком сильно отличается от нижней оценки? (Предположительный график $f_{T^4}(n)$ приведен синим пунктиром.)

Сейчас мы опишем стратегию T^4 такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{T^4}(n)}{\log_2 n} = 1, \qquad (3)$$

то есть относительное превышение $f_{T^4}(n)$ над нижней оценкой $\log_2 n$ при больших n стремится к нулю.

Первый этап игры, как и прежде, определяется последовательностью чисел

$$x_k = 2^{2^k}.$$

Пусть на k-й вопрос мы в первый раз получили ответ «нет», откуда

$$2^{2^{k-1}} \leqslant n < 2^{2^k}.$$

Опишем стратегию T^4 для второго этапа игры. Припишем каждому n в промежутке (2)

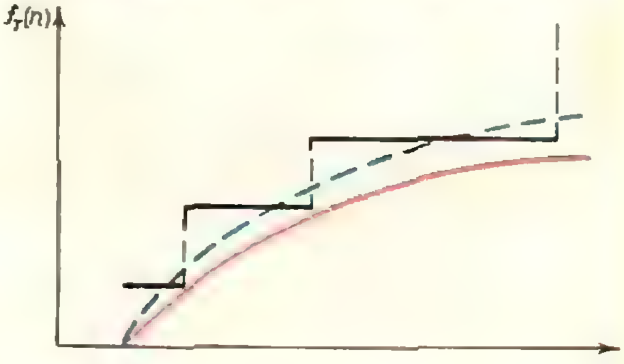


Рис. 7.

«вес», равный $\frac{1}{n}$. Будем теперь задавать вопросы так, чтобы делить примерно пополам не количество значений, которые еще может принимать n, и сумму их весов.

Подсчитаем примерно, сколько вопросов уйдет на отгадывание произвольного n в промежутке (2). Положим $m=2^{2^{k-1}}$. Вначале сумма весов примерно равна

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m^2}\approx$$

$$\approx\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right)-$$

$$-\left(1+\cdots+\frac{1}{m}\right)\approx\ln(m^2)-\ln m=$$

$$=\ln m\leqslant\ln n.$$

Если мы отгадаем n, то доведем сумму весов до величины $\frac{1}{n}$. Значит, сумма весов уменьшится примерно в $n\ln n$ раз. Предположим, что нам каждый раз удавалось делить её точно вдвое. Тогда было затрачено

$$\log_2 n\ln n=\log_2 n+\log_2\ln n\approx\log_2 n$$

вопросов (второе слагаемое при больших n значительно меньше первого). Поскольку сумму весов, как правило, точно разделить пополам не удастся, число вопросов фактически несколько больше. Можно показать (но это уже сложнее), что она все же не превышает

$$\log_2 n+\mathrm{const}\log_2\log_2 n$$

вопросов. (Здесь const означает постоянное число, которое мы не оценивали.) Прибавляя сюда число вопросов на первом этапе игры, мы только увеличиваем коэффициент во втором слагаемом. Таким образом, мы построили стратегию, которая позволяет отгадать любое n не более чем за

$$\log_2 n+\mathrm{const}\log_2\log_2 n$$

вопросов.

Легко показать, что эта функция удовлетворяет условию (3), которое мы и обещали выполнить.

Я. М. Бардзинь, А. Л. Тоом

М 181. *Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 см? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать ее нельзя.)*

Ответ. Нужно не меньше 150 *см* проволоки.

Как согнуть каркас из проволоки такой длины — показано на рисунке 8. Теперь нам осталось доказать, что из проволоки меньшей длины каркас куба сделать невозможно. Предположим на время, что нам разрешается гнуть проволоку только в вершинах куба, и что какой-то каркас нами изготовлен, причем проволока начинается и кончается в вершинах куба. Подсчитаем количество ребер в этом каркасе. Мы, разумеется, будем считать не ребра куба, — их 12, — а ребра из проволоки. В каркасе есть ровно одна вершина, в которой проволока начинается и одна, в которой проволока кончается (эти вершины могут и совпадать). Будем называть эти вершины концевыми, а все остальные — проходными. К каждой проходной вершине примыкает четное число ребер. Действительно, проволока, войдя в эту вершину, обязательно должна из нее выйти. Поэтому к ней примыкает не меньше четырех ребер. К концевой вершине примыкает не меньше трех ребер. Поэтому всего ребер не меньше, чем $\frac{6\cdot4+2\cdot3}{2}=15$. Действительно, каждое ребро примыкает к двум вершинам, поэтому если к вершине с номером i примыкает c_i ребер ($i=1, 2, \ldots 8$), то $c_1+c_2+\ldots+c_8$ равно удвоенному числу ребер. Таким образом, в каркасе не меньше 15 ребер, а так как длина одного ребра 10 *см*, то потребуется не менее 150 *см* проволоки.

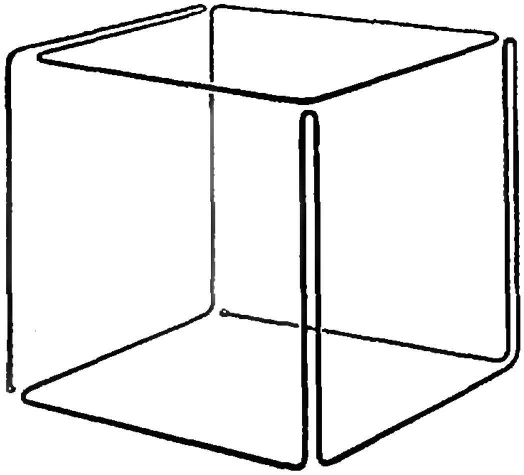


Рис. 8.

Теперь нам нужно доказать, что если гнуть проволоку во внутренних точках ребер, то все равно менее чем из 150 *см* проволоки каркаса сделать нельзя. Эту задачу можно свести к предыдущей следующим образом: не увеличивая длины проволоки, любой каркас можно перестроить так, что все сгибы окажутся в вершинах. Мы не будем описывать этого перестроения, а только приведем несколько поясняющих его картинок (см. рис. 9, *а* — *д*; на них изображено некоторое ребро куба, а покрывающая его проволока для наглядности раздвинута).

М182. *Докажите, что если*

а) $a>0$, $b>0$ *и* $c>0$, *то*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2};$$

б) $a>0$, $b>0$, $c>0$ *и* $d>0$, *то*

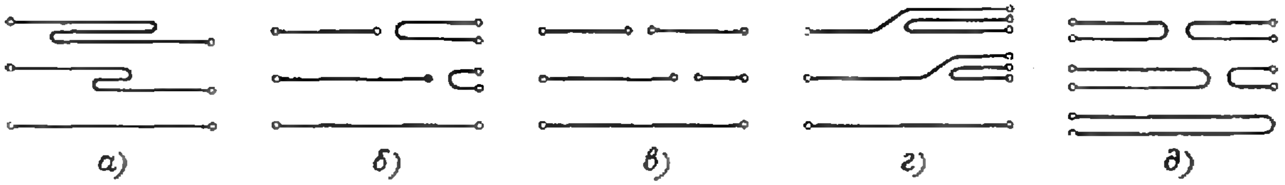

а) б) в) г) д)

Рис. 9.

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3};$$

в) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — положительные числа ($n\geqslant 2$), то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Решим сразу задачу (в). Сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$ обозначим через s, и числа $s-a_i$ через b_i. В этих обозначениях нам нужно доказать, что

$$\frac{s-b_1}{b_1}+\frac{s-b_2}{b_2}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Это неравенство эквивалентно такому:

$$s\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant\frac{n}{n-1}+n=\frac{n^2}{n-1}. \qquad (1)$$

Воспользуемся теперь известным соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим (см. «Квант», 1970, № 8, с. 33): если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ неотрицательные числа, то

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{c_1c_2\ldots c_n}. \qquad (2)$$

Из него сразу следует, что

$$\left(\frac{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}}{n}\right)^n\geqslant\frac{1}{b_1b_2\ldots b_n}$$

и что $b_1b_2\ldots b_n\leqslant\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\right)^n$.

Из этих двух неравенств следует, что

$$\left(\frac{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}}{n}\right)^n\geqslant\left(\frac{n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\right)^n$$

и, наконец,

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\geqslant\frac{n^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

Но

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=ns-a_1-a_2-\ldots-a_n=(n-1)s,$$

откуда

$$s\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant\frac{sn^2}{s(n-1)}=\frac{n^2}{n-1}.$$

Неравенство (1) доказано.

Приведем теперь некоторые соображения, с помощью которых можно доказать соотношение (2). Пусть $c_1+c_2+\ldots+c_n=1$. (Это не ограничивает общности.) Предположим, что для этих чисел соотношение (2) нарушено, то есть

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}<\sqrt[n]{c_1c_2\ldots c_n}.$$

Пусть среди чисел c_i есть неравные. Тогда среди c_i найдутся два числа — можно считать, что это c_1 и c_2 — такие, что $c_1<\frac{1}{n}$, $c_2>\frac{1}{n}$. Заменим c_1 на $c_1'=\frac{1}{n}$, а c_2 на $c_2'=c_1+c_2-\frac{1}{n}$. Тогда для чисел $c_1'=\frac{1}{n}, c_2', c_3, c_4, \ldots, c_n$ соотношение (2) тоже будет нарушено. Доказательство этого факта сводится к доказательству неравенства $\frac{1}{n}\left(c_1+c_2-\frac{1}{n}\right)>c_1c_2$ (при $c_1<\frac{1}{n}$, $c_2>\frac{1}{n}$), — с этим неравенством вы без труда справитесь сами.

Продолжая эти замены, мы дойдем до набора $c_1=c_2=\ldots=c_n=\frac{1}{n}$. Таким образом, если соотношение (2) нарушено для некоторого набора $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то оно будет нарушено и для набора $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}$. Однако непосредственной подстановкой мы убеждаемся, что в этом случае оно выполняется. Значит, оно выполняется и для исходного набора.

Вот еще одно решение нашей задачи, основанное на соотношении между средним

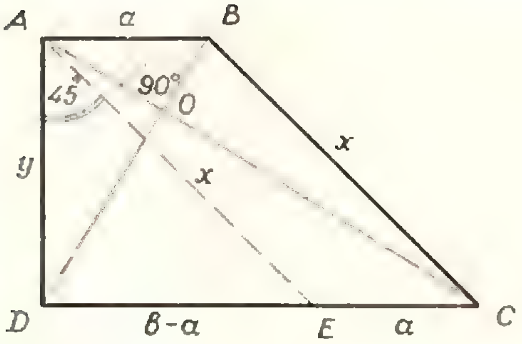


Рис. 10.

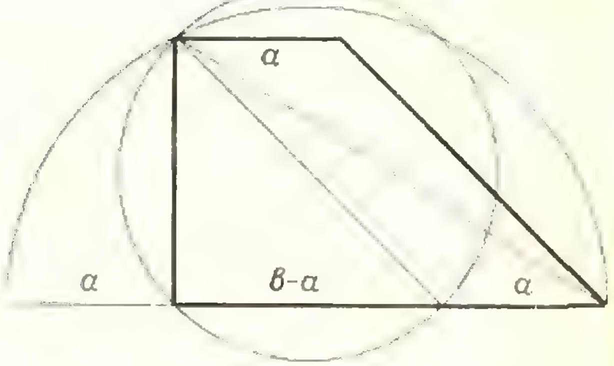


Рис. 11.

арифметическим и средним геометрическим для двух чисел.

Мы должны доказать, что

$$(n-1)\left(\frac{s-b_1}{b_1}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\right)\geqslant n.$$

Заметим, что $b_1+\ldots+b_n=(n-1)s$. Поэтому

$$(n-1)\frac{s-b_1}{b_1}=$$

$$=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n-(n-1)b_1}{b_1}=$$

$$=\frac{b_2+\ldots+b_n}{b_1}-(n-2)=$$

$$=\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_1}+\ldots+\frac{b_n}{b_1}-(n-2).$$

Преобразуем также остальные слагаемые $(n-1)\frac{s-b_i}{b_i}$ и все n слагаемых сложим. Потом сгруппируем попарно дроби $\frac{b_i}{b_j}$ и $\frac{b_j}{b_i}$ и воспользуемся неравенством:

$$\frac{b_i}{b_j}+\frac{b_j}{b_i}\geqslant 2$$

Поскольку всего пар i и j $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ будет

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

то в результате получим:

$$(n-1)\left(\frac{s-b_1}{b_1}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\right)\geqslant C_n^2\cdot 2-$$

$$-(n-2)n=n^2-n-n^2+2n=n.$$

И из первого и из второго решений сразу видно, что неравенства переходят в равенства только при $b_1=\ldots=b_n$, то есть при $a_1=\ldots=a_n$

Л. Г. Лиманов

M183. *Найдите высоту трапеции, у которой основания равны a и b $(a<b)$, угол между диагоналями равен 90°, а угол между продолжениями боковых сторон — 45°.*

Большинство читателей прислали решение этой задачи, использующее тригонометрию. Вот одно из наиболее коротких решений, присланное *Л.* и *С. Пищиковыми.*

Пусть (рис. 10) в трапеции $ABCD$, где $AB\|CD$ $AB=a$, $CD=b$, $BC=x$, $AD=y$, точка E на основании CD такова, что $ABCE$ — параллелограмм: $AE=x$, $DE=b-a$. Удвоенная площадь треугольника ADE равна

$$xy\sin 45^\circ=(b-a)h, \qquad (1)$$

где h — высота трапеции. Далее по теореме косинусов получаем, что

$$(b-a)^2=x^2+y^2-2xy\cos 45^\circ. \qquad (2)$$

И, наконец, с помощью теоремы Пифагора, примененной к четырем прямоугольным треугольникам AOB, BOC, COD, DOA, выводим, что

$$x^2+y^2=a^2+b^2 \qquad (3)$$

Подставим теперь (3) и (1) в (2) $(\cos 45^\circ=\sin 45^\circ)$:

$$(b-a)^2=a^2+b^2-2(b-a)h.$$

Таким образом,

$$h=\frac{ab}{b-a}.$$

Наш читатель *Н. И. Березовский* и некоторые другие приводят способ построения трапеции, о которой идет речь в условии, по данным a и b (рис. 11). Исследование показывает, что такая трапеция существует при $\frac{b}{a}\geqslant 1+\sqrt{2}$.

Н. Б. Васильев

Ф193. *Имеются две системы линз с одинаковыми фокусными расстояниями. Оптические оси линз совпадают. Первая система линз состоит из собирающих линз, во второй собирающие линзы чередуются с рассеивающими. Найти траектории лучей в каждой из систем, если расстояние между линзами много меньше фокусного.*

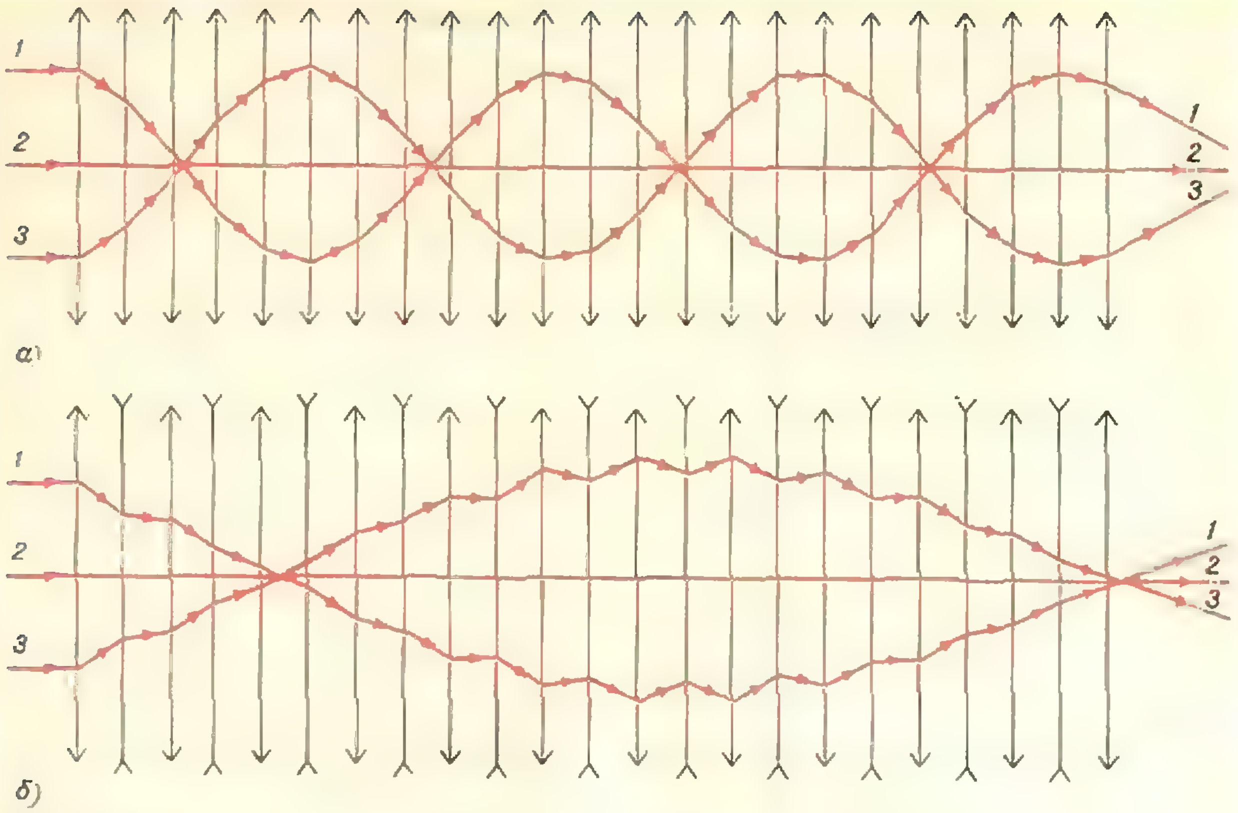


Рис. 12.

Рассмотрим параллельный пучок лучей, идущий вдоль главной оптической оси системы, состоящей из собирающих линз. Пройдя первую линзу, пучок становится сходящимся, пройдя вторую — еще более сходящимся и так далее. Если число линз достаточно велико, то где-то внутри системы пучок сойдется в точку. После этого пучок станет расходящимся, но расходимость его будет все меньше и меньше, пока он не станет параллельным; затем все будет повторяться. Примерный ход лучей дан на рисунке 12, а.

Для второго случая, когда система состоит из чередующихся собирающих и рассеивающих линз (см. рис. 12, б), «период» траектории лучей гораздо больше, чем в первом случае, так как действия на световой пучок собирающей и рассеивающей линз противоположны.

Для определенности расстояние между линзами взято равным $^1/_3$ фокусного расстояния. Все рассуждения в принципе остаются теми же как для произвольного пучка, так и для других соотношений между фокусным расстоянием и расстоянием между линзами.

Ф194. *Между обкладками плоского конденсатора помещен заряд. Как он будет двигаться, если на конденсатор подать синусоидальное напряжение с начальной фазой* $\varphi_0 = 0$?

Пусть начальная скорость заряда равна нулю.

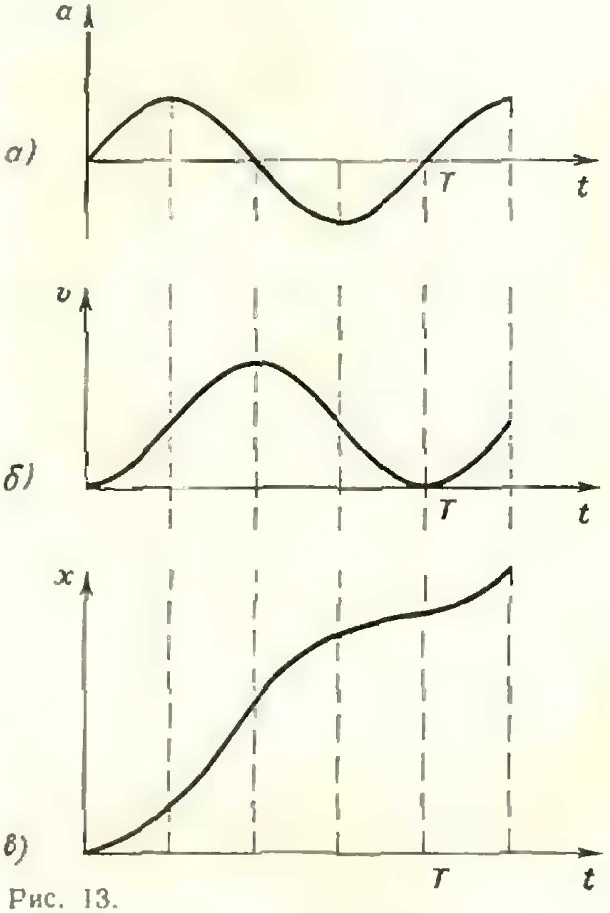


Рис. 13.

Если на пластины конденсатора подается напряжение $u = U_0 \sin \omega t$, то напряженность поля внутри конденсатора меняется со временем по закону $E = E_0 \sin \omega t$. Так как на заряд q в электрическом поле действует сила $F = Eq$, то его ускорение

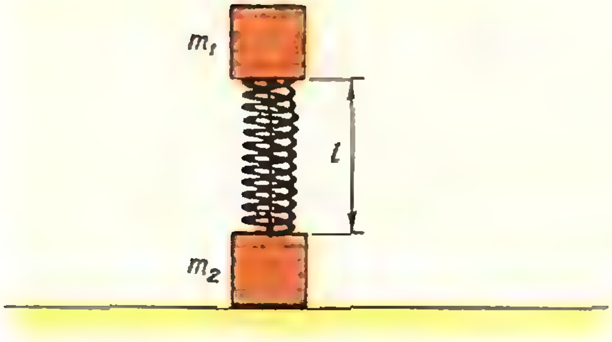


Рис. 14.

равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{q}{m} E_0 \sin \omega t .$$

График зависимости ускорения от времени дан на рисунке 13, *а*. Из графика видно, что в течение первой четверти периода движение заряда будет ускоренным, причем ускорение все время увеличивается. Во вторую четверть периода движение тоже ускоренное, но ускорение теперь уменьшается. Затем движение становится замедленным, так как ускорение переменило знак; величина «замедления» сначала увеличивается, а потом уменьшается. В момент времени $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ скорость заряда равна нулю. Затем все будет повторяться через равные промежутки времени, равные T. Примерные графики зависимости скорости и перемещения от времени даны на рисунках 13, *б* и *в*. Заметим, что заряд все время движется прямолинейно в направлении одной и той же пластины.

Попробуйте нарисовать аналогичные графики для случая, если $u = U_0 \cos \omega t$. Покажите, что в этом случае заряд будет совершать колебания около начального положения.

Ф195. *Между двумя кубиками массы m_1 и m_2 находится сжатая пружина жесткости k. Кубики связаны ниткой, расстояние между ними l (рис. 14). На какую высоту поднимется центр масс системы, если нить пережечь? Пружину считать невесомой. Ее длина в нормальном состоянии равна l_0.*

Рассмотрим, что будет происходить в системе после пережигания нити. Под действием силы упругости пружины верхний кубик будет подниматься; пружина, пройдя положение равновесия, будет растягиваться, и в некоторый момент она сумеет поднять нижний кубик. Пусть к этому времени центр масс системы поднялся на высоту h_1 и имеет скорость v. Начиная с этого момента на систему будет действовать только одна сила — сила тяжести. Поэтому центр масс системы будет двигаться так, как движется тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v. Максимальная высота, на которую поднимется центр масс системы, начиная с этого момента, равна $h_2 = \frac{v^2}{2g}$.

Тогда полная высота поднятия центра масс после пережигания нити будет равна

$$h = h_1 + h_2.$$

Высоту h_1 можно связать с величиной деформации пружины $l_1 - l$, где l_1 — длина пружины в момент отрыва нижнего кубика. Действительно, координата центра масс выражается через координату верхнего кубика так:

$$x_{\text{цм}} = \frac{x_1 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Изменение координаты верхнего кубика равно $l_1 - l$, а изменение координаты центра масс равно h_1. Поэтому

$$h_1 = \frac{(l_1 - l)\, m_1}{m_1 + m_2}.$$

В момент отрыва $F_{\text{упр}} = m_2 g$, то есть

$$k(l_1 - l_0) = m_2 g,$$

откуда

$$l_1 = \frac{m_2 g}{k} + l_0$$

и

$$h_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_2 g}{k} + l_0 - l\right).$$

Теперь найдем h_2.

Скорость центра масс v связана со скоростью верхнего кубика v_1 так:

$$v = \frac{v_1 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость v_1 можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_2 g (l_1 - l) + \frac{k (l_1 - l_0)^2}{2} = \frac{k (l_0 - l)^2}{2}.$$

Тогда

$$h_2 = \frac{v^2}{2g} = \left[\frac{k (l_0 - l)^2}{m_1} - \frac{m_2^2 g^2}{k m_1} - 2g\left(\frac{m_2 g}{k} + l_0 - l\right)\right] \frac{m_1^2}{2g (m_1 + m_2)^2}.$$

Суммарная высота подъема

$$h = h_1 + h_2.$$

Так будет происходить тогда, когда начальный запас потенциальной энергии пружины будет больше, чем потенциальная энергия пружины и увеличение потенциальной энергии тяготения верхнего кубика в тот момент, когда сила упругости растянутой пружины станет равной весу нижнего кубика.

А может случится и так, что верхний кубик остановится в тот момент, когда сила упругости пружины меньше веса нижнего кубика. Тогда нижний кубик останется на месте, и достаточно будет рассмотреть движение только одного верхнего кубика.

Запишем закон сохранения энергии для этого случая:

$$\frac{k(l_0-l)^2}{2}=\frac{k(l_1-l_0)^2}{2}+m_1g(l_1-l)$$

(l_1 — максимальная длина растянутой пружины).

Отсюда

$$l_1=l_0-\frac{m_1g}{k}+$$

$$+\sqrt{\left(l_0-\frac{m_1g}{k}\right)^2+l\left(l-2l_0+\frac{2m_1g}{k}\right)}.$$

Высота поднятия верхнего кубика равна

$$\Delta l=l_1-l,$$

а центра масс системы —

$$\Delta x_{\text{цм}}=\frac{\Delta l m_1}{m_1+m_2}.$$

Ф196. *В камере ускорителя по окружности радиуса R движется очень тонкий пучок протонов. Величина тока в начальный момент I_0, полное число частиц в камере n. Магнитный поток через неизменяющуюся орбиту пучка меняется со скоростью φ. Какой станет величина тока после того, как частицы сделают один оборот? Скорость частиц остается много меньшей скорости света.*

Величина тока I зависит от скорости частиц так:

$$I=en_0vS,$$

где e — заряд протона, n_0 — число протонов в единице объема, S — площадь сечения пучка, v — скорость. Будем считать, что протоны равномерно распределены по своей орбите, поэтому (учитывая, что пучок очень узкий)

$$n_0=\frac{n}{2\pi RS}.$$

Тогда

$$I=\frac{en}{2\pi R}v.$$

Таким образом, чтобы найти ток, нужно найти скорость протонов. Начальную скорость мы знаем. Она равна

$$v_0=\frac{2\pi RI_0}{ne}.$$

Так как магнитный поток в камере ускорителя меняется, то в ней индуцируется э. д. с. индукции, равная (по абсолютной величине) скорости изменения магнитного потока φ, то есть

$$E=\varphi.$$

Когда протон сделает один оборот, электрическое поле совершит над ним работу, равную Ee, которая пойдет на изменение кинетической энергии протона:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Ee$$

(m — масса протона*)).

Отсюда найдем скорость протона после того как он сделает один оборот в камере ускорителя:

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{2Ee}{m}}.$$

Тогда ток в камере будет таким:

$$I=\frac{ne}{2\pi R}\sqrt{\left(\frac{2\pi R}{ne}I_0\right)^2+2\varphi\frac{e}{m}}=$$

$$=I_0\sqrt{1+\frac{n^2e^3\varphi}{2\pi^2R^2mI_0^2}}.$$

И. Ш. Слободецкий

Ф197. *На тело массы m, лежащее на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения k, в момент времени $t=0$ начала действовать под углом α к горизонту сила, пропорциональная времени. Определить скорость v движения тела через τ секунд.*

Считая тело материальной точкой, рассмотрим действующие на него силы (рис. 15). Это — сила тяжести mg, сила реакции опоры N, сила $f=At$ (удобнее говорить о ее составляющих $f_1=At\cos\alpha$ и $f_2=At\sin\alpha$)

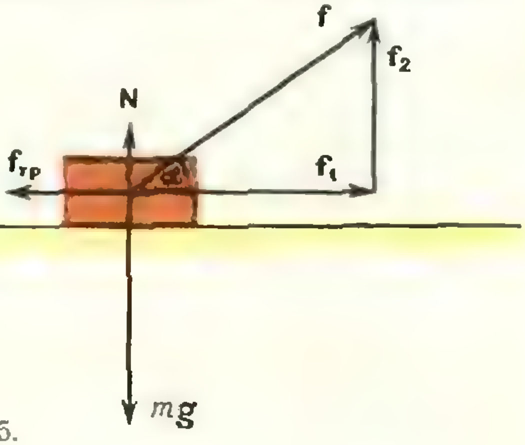


Рис. 15.

---

*) Поскольку скорость протонов остается много меньше скорости света, массу протона можно считать величиной постоянной.

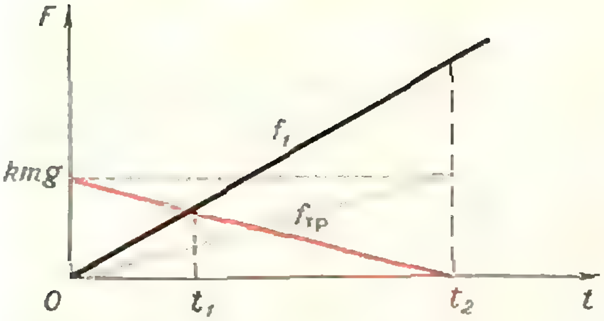


Рис. 16.

и сила трения $f_{тр} = kN$. Горизонтальное ускорение телу может сообщить только сила f_1, но для этого она должна стать больше силы трения $f_{тр} = kN = k(mg - At\sin\alpha)$, которая тоже зависит от времени t.

Построим графики зависимости действующих на тело горизонтальных сил от времени t (рис. 16).

От 0 до момента t_1 тело еще не движется, так как сила трения покоя уравновешивает силу f_1, то есть

$$At_1\cos\alpha = kmg - kAt_1\sin\alpha,$$

откуда

$$t_1 = \frac{kmg}{A(\cos\alpha + k\sin\alpha)}.$$

Существует и вторая граница времени t_2 для указанного в задаче движения. В этот момент сила реакции опоры обращается в нуль, и тело поднимается

$$N = mg - At_2\sin\alpha = 0$$

и

$$t_2 = \frac{mg}{A\sin\alpha}.$$

Таким образом, движение тела по поверхности возможно для времени τ, заключенного в интервале: $t_1 < \tau < t_2$.

Заметим, что если $kA\sin\alpha \geqslant A\cos\alpha$, то интервал $t_2 - t_1$ становится уже, но все рассуждения остаются в силе.

Запишем уравнение движения для момента времени $\tau = t_1 + t'$ (t' — текущее время, отсчитываемое от момента t_1)

$$A(t_1 + t')\cos\alpha + kA(t_1 + t')\sin\alpha - kmg = ma,$$

где a — ускорение тела.

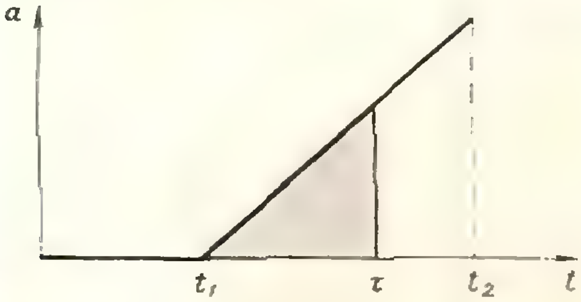


Рис. 17.

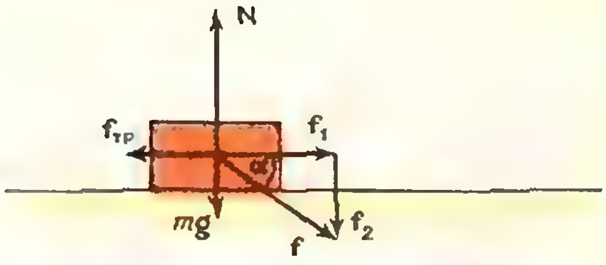


Рис. 18.

Подставив выражение для t_1, найдем

$$a = \frac{A\cos\alpha + kA\sin\alpha}{m}\,t'.$$

Нарисуем график зависимости $a(t)$ (рис. 17). Искомая скорость v в момент $\tau = t_1 + t'$ численно равна площади выделенного треугольника:

$$v = \frac{a(\tau - t_1)}{2} = \frac{(A\cos\alpha + kA\sin\alpha)(\tau - t_1)^2}{2m} = \frac{[\tau A(\cos\alpha + k\sin\alpha) - kmg]^2}{2mA(\cos\alpha + k\sin\alpha)}.$$

Если изменить направление действующей силы, как показано на рисунке 18, то сила реакции опоры $N = mg + At\sin\alpha$ будет непрерывно возрастать (как и сила трения $f_{тр}$).

Время t_1, после которого начнется движение тела, находим из условия

$$At_1\cos\alpha - kmg - kAt_1\sin\alpha = 0;$$

тогда

$$t_1 = \frac{kmg}{A\cos\alpha - kA\sin\alpha}.$$

Однако в этом случае положительное значение t_1 возможно, только если $A\cos\alpha > kA\sin\alpha$. При $A\cos\alpha \leqslant kA\sin\alpha$ время $t_1 < 0$, и движение никогда не начнется.

Увеличение компоненты f_2 может привести к разрушению тела (это может произойти и до наступления времени t_1). Если же тело не разрушается и t_1 имеет конечное значение, то для скорости v в момент $\tau = t_1 + t'$ получим значение:

$$v = \frac{[\tau A(\cos\alpha - k\sin\alpha) - kmg]^2}{2mA(\cos\alpha - k\sin\alpha)}.$$

А. В. Устинова

VII ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

В апреле состоялась VII Всесоюзная олимпиада школьников по математике (в г. Кишиневе) и по физике (в г. Ленинграде).
Ниже мы помещаем материалы, посвященные этим олимпиадам.

М. Л. Смолянский

Всесоюзные олимпиады

Различные математические конкурсы в истории математики известны с давних пор. История донесла до нас сведения о математических конкурсах, проводимых еще в XIII веке (Неаполитанское Королевство). Однако, это были математические соревнования, участие в которых принимали крупнейшие ученые тех времен.

История школьных физико-математических олимпиад начинается с 1894 года, когда в Венгрии была проведена первая математическая олимпиада школьников (так называемое «соревнование Этвеша»). Эта, ставшая уже традиционной, олимпиада ежегодно проводится в Венгрии в октябре.

В Советском Союзе первая математическая олимпиада школьников была проведена в Ленинграде весной 1934 года [*]. Инициаторами проведения этой олимпиады были член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне (председатель оргкомитета олимпиады) и профессор В. А. Тартаковский.

По инициативе Московского математического общества осенью 1935 года была проведена Первая Московская математическая олимпиада школьников. Московские математики встретили ее с большим воодушевлением. В оргкомитет вошли почти все крупнейшие математики-москвичи (академик П. С. Александров — председатель оргкомитета, академики А. Н. Колмогоров и С. Л. Соболев, члены-корреспонденты АН СССР Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, профессоры В. Ф. Каган, С. А. Янковская и другие).

В первом (отборочном) туре Московской олимпиады участвовали 314 школьников, а во втором (заключительном) туре — 120 школьников.

Вплоть до Великой Отечественной войны математические олимпиады в Москве проводились ежегодно и очень скоро завоевали всеобщее признание. Во время войны московские математики провели олимпиады в Ашхабаде и Казани. После Отечественной войны проведение математических олимпиад стало традицией во многих городах Советского Союза. Организовывались эти олимпиады совместными усилиями местных органов народного образования, университетов и педагогических институтов.

---

[*] Математические конкурсы по решению задач начали проводиться в России с 1886 года одесским журналом «Вестник опытной физики и элементарной математики».

Общее количество проводимых в нашей стране математических олимпиад очень велико. Олимпиады проводятся во многих городах страны. Зачастую в одном городе в течение одного учебного года разными учебными заведениями проводится несколько олимпиад. Количество олимпиад, проводимых в Москве, нелегко подсчитать: олимпиады проводят Московский государственный университет, Московский физико-технический институт, Московский автодорожный институт, Московский институт стали и сплавов, Московский экономико-статистический институт и многие другие вузы.

Вслед за математиками свои олимпиады стали проводить физики, химики, астрономы, географы, биологи, а затем и лингвисты.

В 1960 году оргкомитет XXIII Московской математической олимпиады совместно с Министерством просвещения РСФСР провели математическую олимпиаду в более широком масштабе. В ней приняли участие команды 13 областей РСФСР и 9 союзных республик. Эти олимпиады получили название Всероссийских математических олимпиад.

Этот опыт показался весьма успешным, и с 1961 года стали регулярно проводиться Всероссийские математические олимпиады. Они проводятся в четыре тура: школьная, районная, областная и заключительная.

Первые олимпиады по физике были проведены Московским университетом еще в 1938 году. С тех пор эти олимпиады стали традицией для московских школьников.

В дальнейшем такие олимпиады начали проводить Московский физико-технический институт (МФТИ) и другие вузы Москвы. Почин москвичей подхватили в других городах страны.

В феврале 1962 года состоялась первая общесоюзная физико-математическая олимпиада школьников, проводимая по инициативе МФТИ. В ней приняли участие свыше 6500 школьников из 58 городов Советского Союза. Она проводилась в один тур во время зимних каникул.

Интересна форма проведения олимпиады. Студенты и аспиранты института проводили ее во время зимних каникул в своих родных городах. А затем решения задач привезли в Москву, где их проверяли. Всю работу по организации олимпиады возглавил комитет ВЛКСМ.

По итогам олимпиады более 400 школьников получили премии и похвальные отзывы. В 1963 году МФТИ и физический факультет МГУ совместно проводили вторую физико-математическую олимпиаду. В ней приняли участие школьники Европейской части СССР и Закавказья. Первый тур этой олимпиады был заочный, а второй — очный.

С 1962 года Сибирское отделение АН СССР начало проводить Всесибирские физико-математические олимпиады.

Начиная с 1964 года физические и математические олимпиады проводились совместно под руководством Министерства просвещения РСФСР. Эти олимпиады получили название Всероссийских физико-математических олимпиад*).

С 1967 года проводятся уже Всесоюзные физико-математические и химические олимпиады (Всесоюзные олимпиады)

Всесоюзные олимпиады школьников проводятся Министерством просвещения СССР совместно с Министерством высшего и среднего специального образования СССР, ЦК ВЛКСМ, АН СССР, Всесоюзным обществом «Знание», ВЦСПС и научно-техническими обществами. Для непосредственного руководства Всесоюзной олимпиадой был создан Центральный оргкомитет Всесоюзной олимпиады школьников, председателем которого является академик И. К. Кикоин. Оргкомитет избирает центральное жюри олимпиады по предметам.

---

*) В 1965 году к Всероссийской физико-математической олимпиаде присоединились химики.

Всесоюзные физико-математические олимпиады проводятся в четыре тура: школьные олимпиады, районные олимпиады, республиканские (или областные) олимпиады и, наконец, заключительный тур.

Четыре победителя из 8—10 классов от каждой области, края, автономных и союзных республик и лауреаты первой и второй премии прошлогоднего заключительного тура Всесоюзной олимпиады приглашаются на заключительный тур очередной Всесоюзной олимпиады.

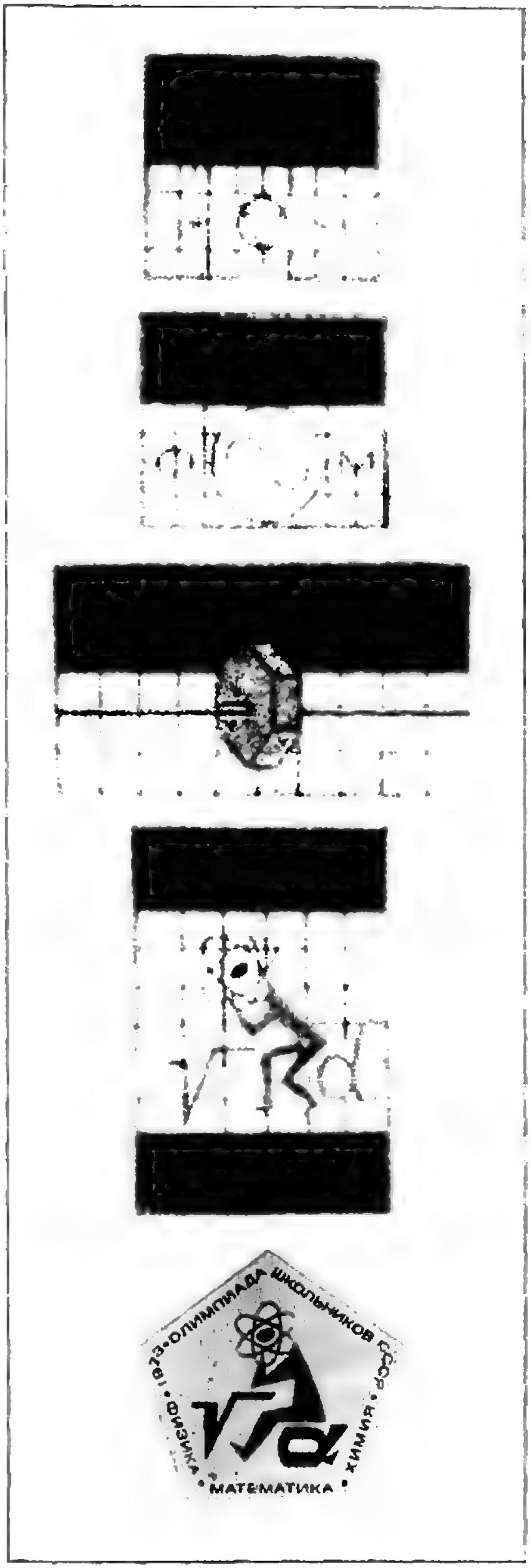
Заключительный тур Всесоюзной олимпиады проходит в апреле раздельно (в разных городах) для математиков и физиков.

Победители олимпиад отмечаются специальными премиями и похвальными грамотами. Из числа победителей Всесоюзной физико-математической олимпиады формируется команда СССР — участник Международной олимпиады школьников по математике и физике.

По решению Министерства высшего и среднего специального образования СССР участники Международных олимпиад по математике и физике принимаются в соответствующие высшие учебные заведения без экзаменов.

Начиная с IV Всероссийской математической олимпиады (1963г.), выпускаются специальные значки, которые вручаются всем участникам олимпиады.

ЗНАЧКИ ВСЕРОССИЙСКИХ И ВСЕСОЮЗНЫХ ОЛИМПИАД



IV Всероссийская математическая олимпиада (Москва, 1963 г.)

V Всероссийская физико-математическая олимпиада (Москва, 1964 г.)

VI Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Москва, 1965 г.)

VII Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Воронеж, Москва, 1966 г.)

II Всесоюзная олимпиада (Ленинград, Ереван, 1968 г.); III Всесоюзная олимпиада (Киев, Алма-Ата, 1969 г.); IV Всесоюзная олимпиада (Симферополь, Свердловск, 1970 г.); V Всесоюзная олимпиада (Рига, Новосибирск, 1971 г.); VI Всесоюзная олимпиада (Челябинск, Тбилиси, 1972 г.); VII Всесоюзная олимпиада (Кишинев, Ленинград, 1973 г.).

Математическая олимпиада

Л. М. Пашкова

С 11 по 17 апреля 1973 года в Кишиневе проходил заключительный этап VII Всесоюзной математической олимпиады школьников. Седьмые всесоюзные соревнования в «уме и знаниях» взяли старт в декабре 1972 года на школьных олимпиадах. В марте проходили олимпиады по областям и республикам. В Кишинев прибыли победители областных и республиканских олимпиад и 26 призеров VI Всесоюзной олимпиады (награжденные дипломами I и II степени).

Всего в заключительном туре олимпиады приняли участие 227 десятиклассников, 202 девятиклассника, 159 восьмиклассников.

11 апреля во Дворце профсоюзов состоялось открытие олимпиады. С приветственными словами к гостям обратились ведущие ученые Молдавии, представители партийных и советских органов республики, победитель XIV Международной математической олимпиады, ученик школы № 19 г. Саратова Сергей Конягин. На открытии олимпиады было зачитано приветствие, посланное юным математикам академиком Андреем Николаевичем Колмогоровым:

«Желаю участникам олимпиады успеха как на олимпиаде, так и в дальнейшей жизни. Тем же, кто на олимпиаде успеха не возымеет, — не разочаровываться в математике. Если после проверки самого себя обнаружите, что она для вас увлекательна, продолжайте ею заниматься-

Школьники за работой (I тур).

Члены жюри VII математической олимпиады.

ся и постарайтесь добиться возможности выбрать ее уже всерьез своей специальностью».

12 апреля школьники сели за парты, чтобы в двухдневных соревнованиях последнего этапа определились сильнейшие. В первый день восьмиклассникам и десятиклассникам было предложено по три задачи, а девятиклассникам — четыре, а 14 апреля всем было предложено еще по три задачи. На решение задач каждый день отводилось по 4 часа.

Жюри под председательством вице-президента АН Молдавской ССР академика В. А. Андрунакиевича не только тщательно проверило работы, но и провело вместе с учащимися разбор решений задач и типичных ошибок.

В дни олимпиады участники не только соревновались в «уме и знаниях», но и слушали лекции ведущих ученых страны. Увлекательно прошли встречи юных математиков с учеными Академии Наук Молдавской ССР и преподавателями университета. С большим интересом встретили участники олимпиады представителей редакции журнала «Квант»: большинство «олимпийцев» являются активными читателями этого журнала.

В свободное время участники олимпиады встречались со школьниками Кишинева. Школьники Тирасполя, Бендер, сел Дубоссарского и Котовского районов тепло встречали посланцев областей и республик и сопровождали их в экскурсиях по местам боевой славы, на родину легендарного Г. И. Котовского, по Пушкинским местам.

Олимпиада прошла очень четко и принесла большую пользу ее участникам благодаря хорошей работе оргкомитета и жюри олимпиады, помощи ученых Молдавии и партийных и советских органов.

Закрытие олимпиады состоялось 16 апреля, где победителям вручили дипломы и специальные призы, учрежденные различными организациями Молдавии и редакцией журнала «Квант». Юные математики и члены жюри направили А. Н. Колмогорову приветствие и поздравления с его славным юбилеем.

Итоги олимпиады:

Успешно закончили олимпиаду 348 участников.

Дипломы I степени
получили следующие участники олимпиады:

Ребята во время работы (II тур).

по 8 классам — *Блох Александр* (г. Харьков, с. ш. № 27), *Дерябина Галина* (г. Каменск, Ростовской-на-Дону обл., с. ш. № 9), *Осипов Андрей* (г. Москва, с. ш. № 91), *Перевалов Виктор* (г. Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 51), *Полонский Петр* (г. Москва, с. ш. № 7), *Розенштейн Борис* (г. Каменецк-Подольск, Хмельницкой обл., с. ш. № 8);

по 9 классам *Гусаров Михаил* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Перцель Владимир* (ФМШ при МГУ);

по 10 классам — *Будаев Виктор* (г. Смоленск, с. ш. № 7), *Гольцман Наум* (г. Москва, с. ш. № 178), *Егоров Георгий* (г. Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени
получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Августинович Сергей* (г. Красноярск, с. ш. № 95), *Ахметзянов Андрей* (г. Новосибирск,

Жюри по 10 классам. На переднем плане (слева направо): члены жюри Н. Петраков, Л. Вассерштейн, М. Смолянский, В. Гутенмахер, В. Скворцов, Н. Васильев.

с. ш. № 110), *Гивенталь Александр* (г. Москва, с. ш. № 2), *Домбровский Александр* (г. Кривой Рог Днепропетровской обл., с. ш. № 6), *Кац Михаил* (г. Кишинев, с. ш. № 37), *Корпюшкин Александр* (г. Рига, с. ш. № 26), *Музыкантов Алексей* (г. Новосибирск, с. ш. № 130), *Продниек Валдис* (Латвийская ССР, Огрский р-он, Лиелвардская с. ш.), *Смуров Михаил* (г. Елабуга Татарской АССР, с. ш. № 2);

по 9 классам *Ананьевский Игорь* (ФМШ при ЛГУ), *Баум Михаил* (ФМШ при МГУ), *Данилов Леонид* (ФМШ при МГУ), *Дубицкий Владимир* (г. Ленинград, с. ш. № 239), *Кряучюкас Валентин* (Литовская ССР, Купишский р-н, Шепета), *Тюкавкин Дмитрий* (г. Иркутск, с. ш. № 11);

по 10 классам — *Андреев Александр* (г. Пенза, с. ш. № 53), *Вайнтроб Аркадий* (ФМШ при МГУ), *Грозман Павел* (ФМШ при МГУ), *Кашкевич Сергей* (г. Молодечно, с. ш. № 3), *Конягин Сергей* (г. Саратов, с. ш. № 19), *Лещинер Дмитрий* (г. Москва, с. ш. № 57), *Лифшиц Михаил* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Любезник Геннадий* (г. Киев, с. ш. № 181), *Рогинский Леонид* (ФМШ при ЛГУ), *Скрябин Сергей* (г. Свердловск, с. ш. № 69), *Тихонов Олег* (г. Казань, с. ш. № 126), *Хухро Евгений* (г. Новосибирск, с. ш. № 165), *Царанов Сергей* (г. Кишинев, с. ш. № 37), *Юрша Константин* (ФМШ при ЛГУ)

Дипломы III степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Белоглазов Сергей* (Пермская обл., Кишертский р-н, с. ш. № 1), *Гейзель Владимир* (г. Новороссийск, с. ш. № 40), *Генкин Леонид* (г. Горький, с. ш. № 40), *Кирпичевский Сергей* (г. Запорожье, с. ш. № 28), *Митин Сергей* (г. Кострома, с. ш. № 32), *Мишин Николай* (г. Ульяновск, с. ш. № 31), *Охитин Сергей* (г. Оренбург, с. ш. № 30), *Попова Ирина* (г. Астрахань, с. ш. № 15), *Шлячков Сергей* (г. Каменск-Уральск Свердловской обл., с. ш. № 9);

Лауреат премии «Кванта» М. И. Жгенти.

по 9 классам — *Асколдавичюс Вилюс* (г. Вильнюс, с. ш. № 1), *Браилов Андрей* (г. Москва, с. ш. № 2), *Корнилов Петр* (ФМШ при МГУ), *Лебедев Геннадий* (г. Бобруйск, с. ш. № 3), *Мерков Александр* (г. Москва, с. ш. № 91), *Муранов Юрий* (Курская обл., Касторенский р-н, ст. Лачиново), *Сивицкий Игорь* (ФМШ

Зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский вручает премию журнала победителю олимпиады по 8 классам А. Блоху.

Школьники 8, 9, 10 классов, получившие дипломы I степени (слева направо): В. Перевалов Б. Розенштейн, М. Гусаров, В. Будаев, А. Блох, Г. Дерябина, В. Перцель, А. Осипов, Г. Егоров, П. Полонский, Н. Гольцман,

при ЛГУ), *Скляр Григорий* (г. Харьков, с. ш. № 27), *Самородницкий Геннадий* (г. Нежин Черниговской обл., с. ш. № 3), *Ткаченко Виктор* (ФМШ при КГУ), *Чернов Николай* (г. Кривой Рог, с. ш. № 95), *Чупрын Сергей* (г. Пенза, с. ш. № 24), *Щербина Николай* (г. Днепропетровск, с. ш. № 80):

по 10 классам — *Асташов Александр* (г. Львов, с. ш. № 5), *Байбородов Сергей* (г. Ташкент, с. ш. № 145), *Биништок Зинаида* (г. Красноярск, с. ш. № 47), *Бринкевич Дмитрий* (г. Новогрудок, с. ш. № 2), *Гомилко Александр* (г. Хмельницкий, с. ш. № 6), *Данилов Геннадий* (г. Магадан, с. ш. № 7), *Дульгер Марк* (г. Волгоград, с. ш. № 35), *Забежайло Михаил* (г. Ростов-на-Дону, с. ш. № 5), *Захаров Сергей* (ФМШ при МГУ), *Калантарян Сергей* (г. Сте-

Жюри по 8 классам. На переднем плане (слева направо): члены жюри Л. Макар-Лиманов, М. Гервер, Ю. Лысов, Н. Константинов.

панокерт, с. ш. № 3), *Калугин Анатолий* (ФМШ при МГУ), *Кауль Михаил* (г. Фрунзе, с. ш. № 61), *Кибкало Александр* (г. Арзамас, с. ш. № 3), *Колосов Виктор* (г. Киев, с. ш. № 173), *Королев Владимир* (г. Воронеж, с. ш. № 58), *Крицштейн Семен* (г. Калуга, с. ш. № 9), *Кузьменко Виктор* (г. Чернигов, с. ш. № 8), *Макеев Владимир* (ФМШ при ЛГУ), *Маргулис Наум* (г. Сороки Молдавской ССР, с. ш. № 2), *Николин Владимир* (г. Львов, с. ш. № 14), *Орлов Леонид* (г. Бобруйск, с. ш. № 3), *Пониманский Владимир* (г. Ровно, с. ш. № 5), *Питман Аркадий* (г. Одесса, с. ш. № 116), *Саркисян Оганес* (г. Ереван, с. ш. № 1), *Стецко Юрий* (г. Черновцы, с. ш. № 5), *Талалай Александр* (г. Москва, с. ш. № 91), *Тюлягин Александр* (г. Кировоград, с. ш. № 34), *Уголков Дмитрий* (г. Рязань, с. ш. № 14), *Цицуашвили Автандил* (г. Тбилиси, ФМШ), *Чеховая Елена* (г. Киев, с. ш. № 38), *Шерстюк Александр* (г. Николаев, с. ш. № 2), *Элимелах Семен* (г. Брянск, с. ш. № 5), *Эстеркин Александр* (г. Ленинград, с. ш. № 30).

Кроме того, похвальные отзывы I степени получил 101 участник, похвальные отзывы II степени получили 152 участника.

Призами журнала «Квант» были награждены ученик 8 класса с. ш. № 27 г. Харькова *Блох Александр* (за абсолютно наилучшие результаты по 8-м классам) и преподаватель математики с. ш. № 7 г. Батуми *Жгенти Медея Илларионовна* (годовая подписка на журнал «Квант» на 1974 год)—за проделанную ею работу по организации команды Аджарской АССР, впервые принявшей участие во Всесоюзной олимпиаде.

Кроме того, за лучшее решение задач 1-го и 2-го дней премии журнала «Квант» (годовая подписка на журнал на 1974 год) получили

по 8 классам — *Блох Александр* (г. Харьков, с. ш. № 27), *Дерябина Галина* (г. Каменск Ростовской-на-Дону обл., с. ш. № 9), *Корнюшкин Александр* (г. Рига, с. ш. № 26), *Осипов Андрей* (г. Москва, с. ш. № 91), *Перевалов Виктор* (г. Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 51);

по 9 классам — *Баум Михаил* (ФМШ при МГУ), *Гусаров Михаил* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Перцель Владимир* (ФМШ при МГУ).

Призы ЦК ЛКСМ Молдавии, Кишиневского политехнического института им. С. Лазо, Института математики АН МССР, Кишиневского государственного университета, Республиканского общества «Знание» и многих других организаций Молдавии получили: *Гомилко Александр* (г. Хмельницкий, с. ш. № 6), — за самое оригинальное решение олимпийской задачи, *Чеховая Елена* (г. Киев, с. ш. № 38) — она в третий раз получает приз на Всесоюзной олимпиаде, *Перевалов Виктор* (г. Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 51) — юный математик с Дальнего Востока, *Белоглазов Сергей* — самый молодой участник из сельской школы, успешно выступивший на олимпиаде, *Студенковская Наталья* (Мордовская АССР, дер. Андреевка) — участница олимпиады из сельской местности, показавшая хорошие результаты на олимпиаде, *Маргулис Наум* (Молдавская ССР, г. Сороки) — призер физических и математических олимпиад, *Продниек Валдис* (Латвийская ССР, Огрский р-н, Лиервардская с. ш.) — победитель олимпиады из сельской местности, и другие.

Задачи по математике

Л. Г. Лиманов

В этой статье приводятся тексты всех задач, предлагавшихся на олимпиаде. Почти все они уже опубликованы в «Кванте» (№№ 7, 8, 1973) и их решения появятся в соответствующих номерах журнала. Здесь же разобраны пять задач, не вошедших в «Задачник «Кванта».

8 класс

Первый день

1. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие. Суд же знает только то, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта — чашечные весы без гирь.

а) Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые. Как он может это сделать, используя только три взвешивания?

б) Покажите, что с помощью трех взвешиваний он может доказать даже больше: что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие.

2. Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть полным квадратом целого числа.

3. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

Второй день

4. На сторонах остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены три подобных между собой остроугольных треугольника AC_1B, BA_1C, CB_1A (при этом $\angle AB_1C = \angle ABC_1 = \angle A_1BC$, $\angle BCA_1 = \angle B_1CA$, $\angle CAB_1 = \angle C_1AB$)

а) Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AC_1B, BA_1C и CB_1A, пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что в той же точке пересекаются прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

5. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

6. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле (король ходит по обычным правилам). Когда нарисовали его путь, соединив отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, то получилась замкнутая ломаная без самопересечений.

а) Приведите пример, показывающий, что король мог сделать ровно 28 ходов по горизонталям и вертикалям.

б) Докажите, что он не мог сделать меньше, чем 28 таких ходов.

9 класс

Первый день

1. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что семь из них — фальшивые, остальные — настоящие, причем узнал, какие именно фальшивые, и какие — настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно являются фальшивыми, а остальные — настоящими. Сможет ли он это сделать?

2. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$.

3. Действительные числа a, b, c таковы, что для всех чисел x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1.$$

Доказать, что при этих значениях x выполнено также неравенство

$$|cx^2 + bx + a| \leqslant 2.$$

4. Теннисная федерация присвоила всем входящим в нее теннисистам квалификационные номера: сильнейшему — первый номер, следующему по силе — второй и т. д. Известно, что во встречах теннисистов, квалификационные номера которых различаются более чем на 2, всегда побеждает спортсмен с меньшим номером. Турнир, в котором участвуют 1024 сильнейших теннисиста, прово-

дится по олимпийской системе: участники очередного тура разбиваются по жребию на пары и в следующий тур выходит победитель в каждой паре, так что число участников после каждого тура уменьшается вдвое. Таким образом, после десятого тура будет выявлен победитель. Какой наибольший номер может он иметь?

Второй день

5. Дан треугольник с площадью 1 и сторонами a, b, c. Известно, что $a \geqslant b \geqslant c$. Доказать, что $b \geqslant \sqrt{2}$.

6. Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Доказать, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

7. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и наибольшую длину может она иметь?

10 класс

Первый день

1. Квадратный трехчлен

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

таков, что уравнение

$$f(x) = x$$

не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение

$$f(f(x)) = x$$

также не имеет вещественных корней.

2. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$.

3. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки k и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то k становится белой, если две или три из них были черными, — то черной).

а) Доказать, что через конечное время на листе не останется черных клеток.

б) Доказать, что черные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$.

Второй день

4. Доказать, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1)$.

5. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

6. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна 1.)

Решения некоторых задач

8 класс, задача 2. Предположим, что такое число найти удалось. Обозначим его через n, а через m — то число, квадратом которого оно является. Последняя цифра числа n равна 5, поэтому последняя цифра числа m — тоже 5, и его можно представить так: $m = 10m_1 + 5$. Значит, $n = (10m_1 + 5)^2 = 100(m_1^2 + m_1) + 25$. Следовательно, вторая справа цифра числа n — это 2, а третья совпадает с последней цифрой числа $m_1^2 + m_1$. Эта цифра определяется последней цифрой числа m_1: если последняя цифра m_1 — 2 или 7, то получится 6, во всех остальных случаях получится 0 или 2. Поскольку третья цифра числа n не может быть ни нулем (по условию), ни двойкой (она уже использована), то она равна шести, а вторая цифра числа m — 2 или 7. Но тогда m делится на 25, а n — на $25^2 = 625$. Но тогда и $n - 625 = 1000 \cdot n_1$ тоже делится на 625. Отсюда n_1 делится на 5 и последняя цифра числа n_1, являющаяся четвертой цифрой числа n, — нуль, либо пять. Но и то и другое противоречит условию задачи. Следовательно, отыскать квадрат с указанными в задаче свойствами невозможно.

8 класс, задача 4. Рассмотрим точку O пересечения окружностей S_1 и S_2 (см. рис. 1, на нем равные углы отмечены одинаковыми дужками). По условию все треугольники — остроугольные; используя это, легко доказать, что точка O лежит внутри $\triangle ABC$. Вы легко справитесь с этим самостоятельно. (Отметим, что жюри не снижало оценки тем участникам, которые это не доказывали.) Вычислим $\angle BOA$:

$$\angle BOA = 360^\circ - \angle AOC - \angle BOC$$

Далее, $\angle AOC = 180^\circ - \angle AB_1C$, $\angle BOC = 180^\circ - \angle BA_1C$. Значит, $\angle BOA = \angle AB_1C + \angle BA_1C$. Следовательно,

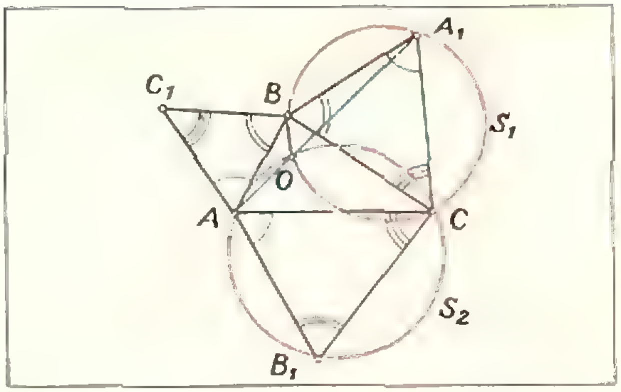


Рис. 1.

$\sphericalangle BOA + \sphericalangle BC_1A = \sphericalangle AB_1C + \sphericalangle BA_1C + \sphericalangle BC_1A = 180^\circ$. Поэтому точка O лежит на окружности, описанной вокруг ΔABC_1. Утверждение пункта (а) задачи доказано.

Докажем теперь, что $\sphericalangle A_1OA = 180^\circ$. Действительно, $\sphericalangle A_1OA = \sphericalangle A_1OC + \sphericalangle COA = \sphericalangle A_1BC + 180^\circ - \sphericalangle AB_1C = 180^\circ$. Поэтому прямая AA_1 проходит через точку O. Следовательно, и прямые BB_1 и CC_1 тоже проходят через эту точку. Утверждение пункта (б) задачи тоже доказано.

9 класс, задача 3. Из условия задачи следуют такие неравенства: $-1 \leqslant c \leqslant 1$; $-1 \leqslant a + b + c \leqslant 1$; $-1 \leqslant a - b + c \leqslant 1$. Из двух последних неравенств следует, что $-1 \leqslant a + c \leqslant 1$ и что $-1 \leqslant b \leqslant 1$. Будем считать, что $a \geqslant 0$. Действительно, если $a < 0$, то заменим a, b и c на $-a$, $-b$ и $-c$ соответственно; условиям задачи новые значения также удовлетворяют, а новое a (равное $-a$) будет положительным.

Рассмотрим теперь несколько случаев.

1. $c \geqslant 0$. Тогда $|cx^2 + bx + a| \leqslant c + |b| + a$ при $|x| \leqslant 1$. Но $c + |b| + a \leqslant 1$ (так как $|b|$ — это или b, или $-b$), и уж подавно $|cx^2 + bx + a| < 2$ при $|x| \leqslant 1$.

2. $c < 0$. Тогда $a + c \leqslant cx^2 + a \leqslant a$. Отсюда $a + c - |b| \leqslant cx^2 + a + bx \leqslant a + |b|$. Но $-1 \leqslant a + c - |b|$, а $a + |b| \leqslant 1 - c \leqslant 2$. Таким образом, всегда выполняется неравенство $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$. Заодно мы видим, что если при некотором x_0 выполняется равенство $|cx_0^2 + bx_0 + a| = 2$, то $c = -1$, $cx_0^2 + bx_0 + a = 2$ и $x_0 = 0$ (напомним, что у нас $a \geqslant 0$), отсюда $a = 2$ и $b = 0$ (так как $a + c = 1$).

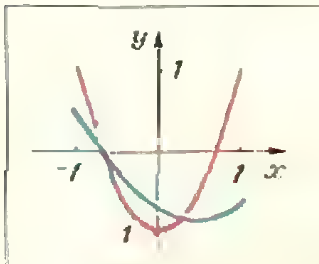


Рис. 2.

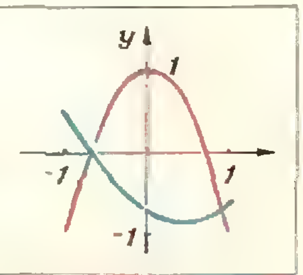


Рис. 3.

Иначе эту задачу можно решить, используя свойства квадратного трехчлена. Нетрудно доказать, что для x, удовлетворяющих неравенству $|x| > 1$, выполняются неравенства

$$1 - 2x^2 \leqslant ax^2 + bx + c < 2x^2 - 1.$$

Мы не будем проводить этого доказательства. Провести его самостоятельно вам помогут рисунки 2 и 3.

9 класс, задача 4. Пусть турнир уже проведен. Скажем, что двух теннисистов c_1 и c_k (c_1 и c_k — это их номера) соединяет цепочка, если можно указать таких теннисистов $c_2, c_3, \ldots, c_{k-1}$, что c_1 выиграл у c_2, c_2 выиграл у c_3, c_3 у c_4, ..., c_{k-1} у c_k. Предположим, что номер победителя — n. Его соединяют цепочки с каждым из теннисистов, в том числе с первым. Эта цепочка имеет не больше десяти звеньев (число туров), поэтому n не может быть больше 21. Действительно, игрок с номером k может проиграть игроку с номером не большим $k + 2$. Поэтому 21-й может оказаться победителем только в том случае, если в первом туре у игрока 1 выиграл игрок 3, во втором у игрока 3 выиграл игрок 5, ..., в девятом туре у игрока 17 выиграл игрок 19 и, наконец, в десятом туре у 19-го выиграл 21-й. В каждом туре соответствующий игрок из указанной цепочки имеет минимальный номер среди всех игроков этого тура: если бы в этот тур пробился игрок с меньшим номером, то его не могла бы соединить с 21-м цепочка. Поэтому в первом туре 2-й проиграл 4-му, во втором 4-й — 6-му, в третьем 6-й 8-му, ..., а в девятом 18-й — 20-му. Поэтому в девятый тур, в финал, попадут 19-й и 20-й, а 21-й туда попасть не сумеет — ведь в финал могут попасть только два участника. Поэтому 21-й не может быть победителем. А 20-й может: для этого ему достаточно в финале выиграть у 19-го.

Итак, наибольший номер — это 20. Разумеется, для этого жребий должен ему «помочь». (Как именно он должен помочь, видно из нашего решения.)

9 класс, задача 5. Действительно, очевидно, что $bc \geqslant 2S = 2$. Но $b^3 \geqslant bc$, следовательно, $b^2 \geqslant 2$ и $b \geqslant \sqrt{2}$.

Матбой

И. Н. Берштейн

Во время Всесоюзной олимпиады проводился традиционный математический бой*) между командами двух физико-математических интернатов — Ленинградского и Московского. В этом году от каждого интерната выступило по 11 человек; жюри предложило 11 задач.

После освежающего ночного бдения (задачи стали известны участникам накануне вечером) команды вызвали друг друга на бой. Ему предшествовал конкурс капитанов (Москва — Аркадий Вайнтроб, Ленинград — Виктор Козырев), победитель которого завоевывал своей команде право выбрать первый ход. Надо было ответить на вопрос: сколько корней имеет уравнение $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

Это не задача, а скорее загадка. Капитаны не знали ее условия заранее, и им достаточно было любым способом отгадать ответ. (Те, кто считает, что это очень просто, пусть засекут время и попробуют сами. Учтите, что если вы называете неверный ответ, то победа автоматически присуждается противнику. С другой стороны, не торопясь ждать, пока неверный ответ назовет противник — тоже не самая разумная тактика).

После этого начался бой. Сначала москвичи вызвали ленинградцев на решение следующей задачи.

В дальнейшем перед каждой задачей будет стоять (М), если вызывали москвичи, и (Л) — если ленинградцы.

№ 1 (М). n точек соединены $n-1$ отрезком так, что любые две точки связывает ровно одна цепочка отрезков. На отрезках каким-то образом расставлены стрелки. Разрешается неограниченное число раз проделывать следующую операцию: если в какой-то точке нет входящих в нее стрелок, а все стрелки из нее выходят, то можно изменить направление всех этих стрелок на обратное. Например, ←●→ можно переделать в →●←

Доказать, что такими операциями можно изменить направление всех стрелок на любое наперед заданное. Оценить сверху и снизу минимальное число M таких операций, которого заведомо будет достаточно, чтобы при любом соединении n точек отрезками изменить любое направление стрелок на любое другое.

Обе команды решили первую часть задачи, но не смогли дать точной оценки числа M.

№ 2 (Л). Существует ли многочлен от двух переменных $P(x, y)$, такой, что

а) для всех x, y $P(x, y) > 0$;

б) для любого положительного числа c существуют такие x, y, что $P(x, y) < c$.

Одна из наиболее интересных задач матбоя. В начале поединка москвичи были уверены в существовании такого многочлена, а ленинградцы — в обратном.

№ 3 (М). Имеется 128 гирь и аналитические весы со стрелкой. При взвешивании разрешается класть равное число гирь на каждую чашку весов (и при этом стрелка укажет разницу в весе гирь на двух чашках). Вес первой гири известен точно. За какое минимальное число взвешиваний можно узнать суммарный вес гирь?

Предлагая эту задачу, члены жюри не знали ее решения (это допускается правилами). В результате матбоя они его так и не узнали...

---

*) Матбой — это игра, похожая отчасти на КВН, отчасти на психологический поединок, отчасти на математическую олимпиаду. Ее правила напечатаны в «Кванте» № 10 за 1972 год.

№ 4 (Л). Дано 11 натуральных чисел. Доказать, что можно выписать несколько из них подряд так, что в образовавшемся числе каждая цифра встречается четное число раз.

№ 5 (М). В окружность диаметра D вписан k-угольник. В нем провели $k-3$ попарно непересекающиеся диагонали так, что он разбился на треугольники. В каждый из треугольников вписали круг; их радиусы — $R_1, R_2, \dots, R_{k-2}$. Доказать, что $R_1+\dots+R_{k-2}<D$.

Это довольно трудная и красивая задача. Тем не менее ее сделали обе команды.

№ 6 (Л). Существуют ли 99 различных нечетных натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{99}$ таких, что $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{99}}=1$?

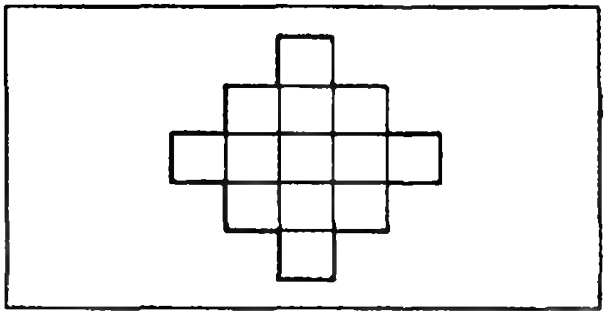
Во время переписки в условии этой задачи было пропущено слово «нечетных», из-за чего решение оказалось слишком простым. В том виде, в котором задача приведена здесь, участники не сумели решить ее до конца.

№ 7 (М). Фирма «Рога и копыта» приобрела счетную машину, на которой можно выполнять только одну операцию: $a*b=1-\frac{a}{b}$. Тем не менее О. Бендер научился выполнять на ней все четыре арифметических действия. Как?

№ 8 (Л). Треугольник называется «хорошим», если все его углы не больше 120°. «Хороший» треугольник разбивается на несколько треугольников. Доказать, что среди них есть хотя бы один «хороший».

В этом месте у обеих команд одновременно кончился запас решенных задач. Неразобранными остались следующие задачи.

№ 9. Смотри задачу 1 первого дня 9-го класса со следующим изменением: эксперт знает, что 6 монет фальшивые, а остальные 8 — настоящие (и знает, какие именно фальшивые).



№ 10. В квадратной таблице 100×100 клетки диагонали закрашены синим цветом. Множество клеток таблицы называется бингом, если оно не содержит синих клеток и после некоторой перестановки строк и столбцов превращается в прямоугольник. Какое минимальное число бингов (может быть, пересекающихся) нужно, чтобы покрыть

а) всю доску, кроме диагонали,

б) всю нижнюю половину доски под диагональю (и, если нужно, часть верхней, но без диагонали).

№ 11. На рисунке приведена схема улиц города Энска. Требуется пустить по городу несколько кольцевых маршрутов автобуса так, чтобы по каждому участку пути проходил ровно один автобус (причем только в одном направлении). Сколькими способами это можно сделать? (Направления маршрутов не учитываются).

У участников матбоя была, кроме того, возможность набирать дополнительные очки, рассказывая свои соображения по поводу нерешенных или не до конца решенных задач. Ленинградцы почти разобрали задачу № 6 в правильной формулировке, а москвичи рассказали часть задачи про «бинги».

В итоге победили москвичи, разумно построившие свой бой не только с математической, но и с тактической точки зрения. Счет 28 : 22.

Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова

Физическая олимпиада

С 11 по 16 апреля в Ленинграде проходил заключительный тур VII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Участниками этого тура были победители городских, районных, областных и республиканских олимпиад. На Всесоюзную олимпиаду приехали представители всех 15 союзных республик, 7 городов-героев (Бреста, Волгограда, Киева, Ленинграда, Москвы, Одессы, Севастополя), 8 специализированных школ-интернатов.

Всего в заключительном туре приняли участие 566 школьников: 126 восьмиклассников, 174 девятиклассника и 266 десятиклассников.

Торжественное открытие VII Всесоюзной физической олимпиады состоялось 11 апреля в Доме офицеров им. С. М. Кирова. Открывший собрание заведующий Ленинградским городским отделом народного образования Н. И. Кузин зачитал приветственную телеграмму министра просвещения СССР М. А. Прокофьева. Председатель Всесоюзного оргкомитета олимпиады академик И. К. Кикоин обратился с приветствием к «лучшим физикам среди школьников и лучшим школьникам среди физиков». Председатель жюри VII Всесоюзной олимпиады по физике член-корреспондент АН СССР К. Я. Кондратьев в своем выступлении отметил исключительную роль, которую играет физика в развитии науки и техники в современном мире.

12 апреля — первый рабочий день заключительного этапа олимпиады, который, как и в прежние годы, состоял из двух туров: теоретического и экспериментального. Теоретический тур проходил в аудиториях нового здания физического факультета Ленинградского государственного университета в Петергофе, под Ленинградом. Перед началом работы каждый участник получил листок с методическими указаниями, которые должны были еще раз напомнить, какими основными правилами надо руководствоваться, выполняя задание теоретического тура. Там, в частности, говорилось: «Ищите наиболее прямой путь от известных вам основных законов физики к конкретному результату для физического явления, о котором идет речь в задаче... Каждое существенное утверждение должно быть обосновано... Избегайте излишне «наукообразного» изложения простых вещей — оно не заменит физики...».

В теоретическом туре было предложено по пять задач для каждого класса. На их решение восьмиклассникам отводилось четыре часа, а девятиклассникам и десятиклассникам — пять часов.

Приводим условия этих задач *).

---

*) Большинство задач олимпиады вошли в «Задачник «Кванта» (см. «Квант» №№ 7, 8, 1973).

В скобках после каждой задачи указано количество баллов, которое выставляло жюри за правильное решение. Эта «расценка» была установлена по результатам проверки работ участников.

8 класс

1. Модели корабля толчком сообщили скорость $v_0 = 10$ *м/с*. При движении модели на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости: $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. а) Найти путь, пройденный моделью за время, в течение которого ее скорость уменьшилась вдвое. б) Найти путь, пройденный моделью до полной остановки. Считать $k = 0{,}5$ *кг/с*. Масса модели $m = 0{,}5$ *кг*. (6 баллов.)

2. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, за веревку равномерно втаскивают ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует направить веревку, чтобы втаскивать ящик с наименьшим усилием? а) равномерно, б) с заданным ускорением a? (7 баллов.)

3. На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m (рис. 1). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость v_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска? (5 баллов.)

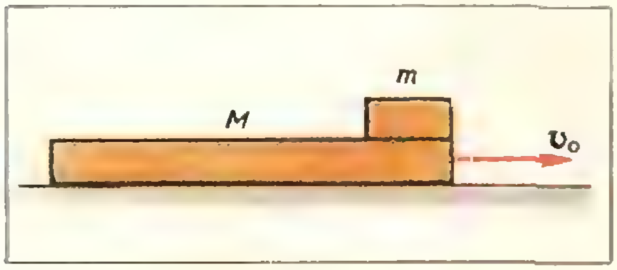


Рис. 1.

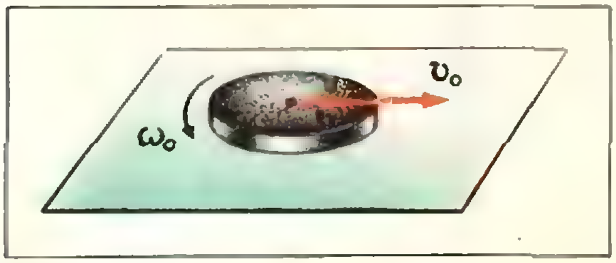


Рис. 2.

4. Однородной тонкой шайбе, лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращательное движение с угловой скоростью ω_0 и поступательное со скоростью v_0 (рис. 2). По какой траектории движется центр шайбы? В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: при $\omega_0 = 0$ или при $\omega_0 \neq 0$ (v_0 одинаково в обоих случаях)? (8 баллов.)

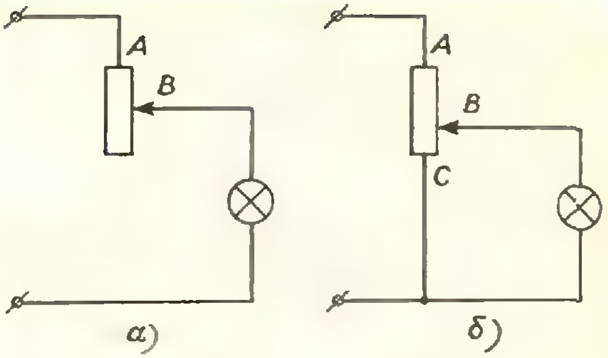


Рис. 3.

5. Для того чтобы включить лампу в сеть, напряжение которой больше напряжения, на которое рассчитана лампа, можно воспользоваться одной из схем *а*) или *б*) (рис. 3). У какой из этих схем коэффициент полезного действия выше, если в каждом случае лампа горит в нормальном режиме? (4 балла.)

9 класс

1. Прибор для измерения проходимого на санях расстояния представляет собой велосипедное колесо с длиной окружности в 1 *м* со счетчиком оборотов, привязываемое сзади саней. При ремонте прибора к ободу колеса пришлось прикрепить дополнительный груз малого размера, имеющий массу $m = 30$ *г*. При какой скорости движения саней колесо начнет подпрыгивать? Масса колеса $M = 450$ *г*. (2 балла.)

2. См. задачу 4 для 8 кл. (9 баллов.)

3. В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод CCl_4 и вода. При нормальном атмосферном давлении CCl_4 кипит при 76,7 °C, вода — при 100° C. При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5 °C. Определить, какая из жидкостей быстрее выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз.

Давление насыщающих паров воды при 65,5 °C составляет 192 *мм рт. ст.* (5 баллов).

4. Заряженный металлический шар радиуса R разрезан на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии h от це́нтра (рис. 4). Найти силу, с которой отталкиваются эти части. Полный заряд шара Q. (9 баллов.)

5. Диод включен в цепь, изображенную на рисунке 5, *а*. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке 5, *б*. Конденсатор предварительно не заряжен. Ключ K замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника $\mathcal{E}$. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. (5 баллов.)

10 класс

1. На покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности систему, состоящую из двух шариков массы m, соединенных пру-

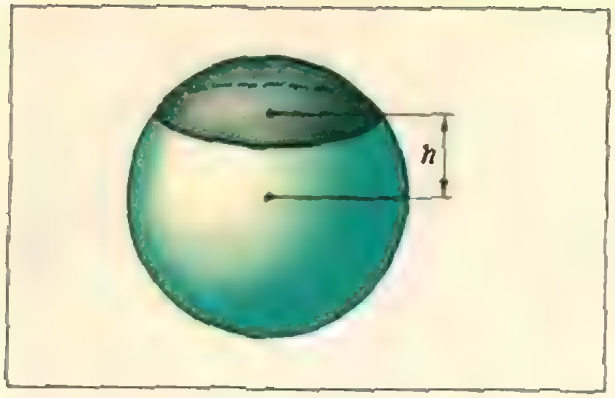


Рис. 4.

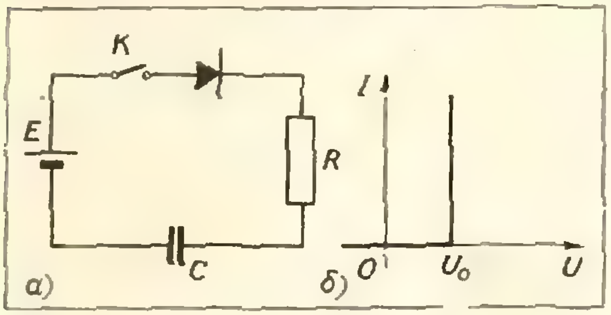


Рис. 5.

жиной, налетает слева шарик массы M (рис. 6) Происходит лобовой абсолютно упругий удар. Найти приближенно отношение масс $\gamma = \frac{m}{M}$, при котором удар произойдет еще раз. (7 баллов.)

2. См. задачу 2 для 8 кл. (5 баллов.)

3. См. задачу 3 для 9 кл. (5 баллов.)

4. Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью v_1 при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью v_0. С какой скоростью будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь. (5 баллов.)

5. На тороидальный сердечник из феррита с магнитной проницаемостью $\mu = 2000$ намотаны две катушки: первичная, содержащая $n_1 = 2000$ витков, и вторичная с $n_2 = 4000$ витков. Когда на первичную катушку было подано напряжение $U_1 = 100{,}0$ *в*, на разомкнутой вторичной было $U_2 = 199{,}0$ *в*. Найти, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной катушке, если сердечник заменить на сердечник такого же размера, но из феррита с $\mu' = 20$. Рассеяние магнитного потока и потери в сердечнике не учитывать. (8 баллов.)

13 и 14 апреля участники олимпиады отдыхали. Многие из них приехали в Ленинград впервые, и им надолго запомнятся прекрасные музеи, дворцы города, его исторические и художественные памятники.

А для жюри это были, пожалуй, самые «тяжелые» дни олимпиады — дни проверки работ. Результаты проверки показали, что задача 4 (8 кл.) вызвала наибольшие трудности и у восьмиклассников, и у девятиклассников. В 8 классе ее целиком правильно решили только два человека. Наиболее легкой для восьмиклассников оказалась задача 5. Приведем ее решение*).

К. п. д. определяется как отношение полезной мощности ко всей затраченной. Полезная мощность в обоих случаях одна и та же, так как лампы в схемах *а*) и *б*) (см. рис. 3) горят в нормальном режиме. А затраченные мощности разные.

Пусть U_0 — напряжение сети, а U — напряжение, на которое рассчитана лампа. На участке AB напряжение в обоих случаях одинаково

$$U_{AB} = U_0 - U,$$

а ток во втором случае больше чем в первом, так как он складывается из тока лампы и тока, текущего по участку BC. Следовательно, на участке AB во втором случае выделяется бóльшая мощность. Кроме того, дополнительная мощность выделяется еще и на участке BC. Таким образом, к. п. д. схемы *а*) больше, чем схемы *б*).

Девятиклассники лучше всего справились с задачей 1. Вот ее решение

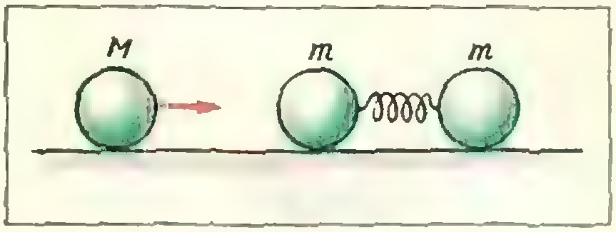


Рис. 6.

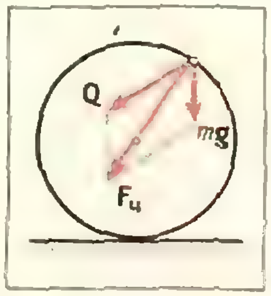


Рис. 7.

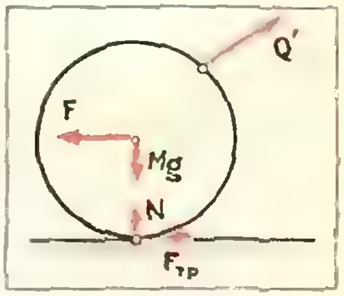


Рис. 8

---

*) Мы приводим здесь решения тех задач, которые не вошли в «Задачник «Кванта».

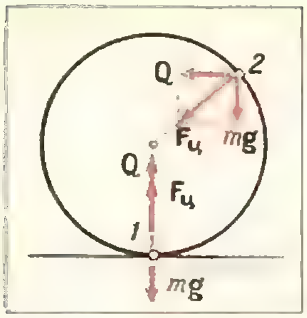


Рис. 9.

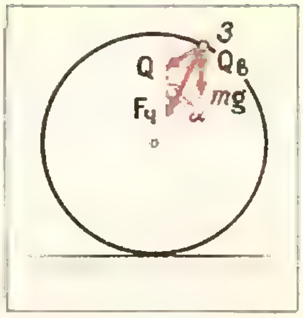


Рис. 10.

Рассмотрим движение груза в системе отсчета, связанной с колесом. На него действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила реакции со стороны обода колеса $\mathbf{Q}$ (рис. 7). Сумма этих сил $\mathbf{F}_ц$ направлена всегда по радиусу к центру колеса и сообщает грузу центростремительное ускорение

$$a_ц = \frac{v^2}{R},$$

где R — радиус колеса, а v — линейная скорость груза, равная скорости поступательного движения саней.

На колесо действуют такие силы (рис. 8): сила тяжести $M\mathbf{g}$, сила давления со стороны груза $\mathbf{Q}' = -\mathbf{Q}$, сила $\mathbf{F}$ — со стороны саней и силы $\mathbf{F}_{тр}$ и $\mathbf{N}$ — со стороны дороги. При равномерном движении сумма этих сил равна нулю.

Посмотрим теперь, когда колесо начнет подпрыгивать? Оно потеряет контакт с дорогой ($N = 0$), если вертикальная составляющая силы $\mathbf{Q}'$ уравновесит силу тяжести $M\mathbf{g}$. Ясно, что это может произойти не при любой скорости. Действительно, вернемся снова к грузу и проследим за изменением силы реакции $\mathbf{Q}$ по мере того, как груз переходит из самого нижнего в самое верхнее положение (рис. 9). В нижней точке *1* сила $\mathbf{Q}$ направлена вертикально вверх, затем появляется горизонтальная составляющая ее, а вертикальная уменьшается (так как в целом сила Q уменьшается). В точке *2* вертикальная составляющая обращается в нуль, а в дальнейшем она, изменив направление, начинает расти. Запишем уравнение движения по вертикали, например, для точки *3* (рис. 10):

$$Q_в + mg = F_{ц.в.}$$

Отсюда

$$Q_в = F_{ц.в.} - mg = \frac{mv^2}{R}\cos\alpha - mg.$$

Ясно, что при определенной скорости $Q_в$ будет максимальна в самой верхней точке и равна

$$Q_{в.\max} = \frac{mv^2}{R} - mg.$$

Заметим кстати, что по крайней мере должно выполняться условие $v > \sqrt{gR}$, чтобы вертикальная составляющая силы $\mathbf{Q}$ была направлена вниз (а составляющая силы $\mathbf{Q}'$, соответственно, — вверх).

Итак, для самой верхней точки, с одной стороны,

$$Q' = \frac{mv^2}{R} - mg,$$

с другой,

$$Q' \geqslant Mg.$$

Таким образом, минимальная скорость, с которой должны ехать сани, равна

$$v_{\min} = \sqrt{gR\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \approx 5 м/с.$$

14 апреля было объявлено, что по результатам проверки работ теоретического тура к участию в экспериментальном туре допущены: по 8-м классам — 42 человека, по 9-м классам — 53 человека, по 10-м классам — 55 человек.

15 апреля состоялся экспериментальный тур. В отличие от прошлых олимпиад, когда в каждом классе учащимся предлагалось несколько различных задач, в этом году все учащиеся одного класса должны были выполнить одну и ту же работу.

У восьмиклассников экспериментальный тур проходил в школе-интернате № 45 при ЛГУ, у девятиклассников — в Петергофе, в лабораториях физического факультета ЛГУ. На выполнение работы отводилось 4,5 часа.

Вот задания экспериментального тура по классам.

8 класс

Определить место попадания шарика из баллистического пистолета при заданном угле выстрела и заданной высоте установки мишени.

На вашем столе установлен баллистический пистолет, стреляющий стальным шариком. В вашем распоряжении имеются: линейка для измерения расстояний (деревянный «метр»), ящик с песком, кусок мела (для облегчения измерения расстояний) и тригонометрические таблицы. Угол, под которым производится выстрел, измеряется с помощью угломера (транспортир и отвес), соединенного со стволом пистолета.

Снимать пистолет со стола и менять плоскость стрельбы запрещается. До установки мишени членом жюри вы имеете право стрелять любое количество раз в плоскости под любым углом к горизонту.

Через 1,5—2 часа после начала работы член жюри установит угол, под которым нуж-

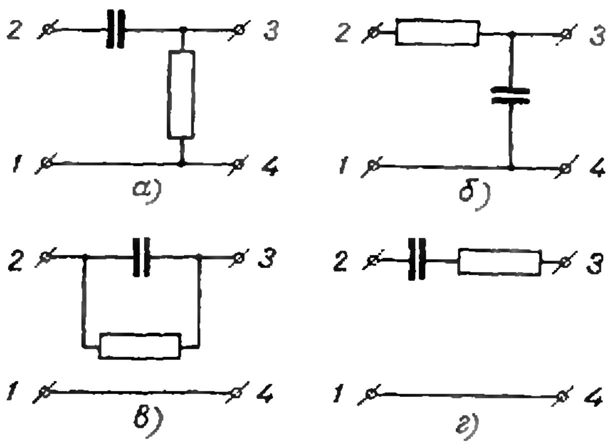


Рис. 11.

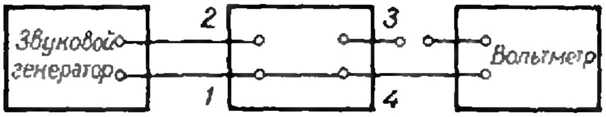


Рис. 12.

но стрелять, и высоту мишени над полом. Вы должны рассчитать положение мишени по горизонтали и установить мишень в нужном месте. После этого в присутствии члена жюри производится единственный выстрел по мишени.

9 класс

Измерить среднюю удельную теплоемкость трансформаторного масла в интервале температур 45—50° С или 50—55° С.

Имеющиеся приборы:

1. Калориметр — химический стакан с пенопластовой теплоизоляцией.
2. Термометр 0 — 50° С или два термометра: 0 — 100° С (грубый) и 50 — 100° С (точный).
3. Электронагреватель — мешалка. Сопротивление нагревателя при температуре опыта 200 *ом*; допустимая мощность, выделяемая на нагревателе в жидкости, 30 *вт*.
4. Миллиамперметр или вольтметр.
5. Реостат 30 *ом* (ориентировочно), допустимый ток 5 *а*.
6. Штатив лабораторный.
7. Секундомер.
8. Питание установки от сети постоянного тока напряжением 50 *в* (приблизительно).
9. Лабораторные весы, масло, дистиллированная вода находятся на отдельных столах. Пользование ими — с разрешения дежурных членов жюри.

Градуировку всех приборов условно считать идеальной.

10 класс

1. Определить, какая из приведенных схем (см. рис. 11) содержится в вашей коробочке (не забудьте обосновать ваш прибор).
2. Определить величины элементов, входящих в схему.

Для решения поставленной задачи в вашем распоряжении имеются: источник переменного напряжения (звуковой генератор), способный вырабатывать синусоидальное напряжение частотой от 20 *гц* до 200 *кгц*, и ламповый вольтметр. Звуковой генератор подключен к контактам *1* и *2* (см. рис. 11). Ламповый вольтметр можно подключать либо к контактам *2* и *4*, либо *3* и *4* (к контакту *4* он уже подключен). Собранная к вашему приходу схема изображена на рисунке 12. Кроме того, в вашем распоряжении — три сопротивления разной величины, которые вы можете включать между любой парой контактов.

При оценке работ экспериментального тура учитывалась самостоятельность в выполнении эксперимента, умение правильно оформить отчет о работе, в котором должны быть описаны все этапы эксперимента, обоснованы использованные методы, обработаны экспериментальные результаты, оценена точность полученных результатов.

Максимальная оценка, которую можно было получить за выполнение экспериментальной задачи — 15 баллов. Причем жюри разработало очень подробную шкалу основных, поощрительных и штрафных очков. Например, при оценке работы экспериментаторов-девятиклассников основные баллы давались за правильный выбор и расчет электрической схемы, использование форсированного нагрева (максимальный ток через сопротивление при выключенном измерительном приборе), за учет потерь на теплоотдачу, верный учет теплоемкости калориметра, за оценку погрешности эксперимента. Поощрительные баллы давались за предварительный расчет скорости нагрева, за явный учет тепловой инерции, правильную калибровку калориметра (с большой точностью и минимальными затратами времени). Штрафные (отрицательные) баллы начислялись за условную или реальную аварию любого типа, за использование термометра в качестве мешалки, за ошибки в графиках, за вычислительные ошибки.

Вечером 15 апреля состоялось заключительное заседание жюри, на котором были подведены итоги олимпиады.

Утром 16 апреля участники олимпиады собрались в Петергофе на физическом факультете. Здесь у них состоялась интересная встреча с учеными — физиками Ленинградского университета. В конце этой встречи ребятам была предложена физическая викторина. Перед аудиторией экспериментатор ставил опыт, и участникам викторины предлагалось дать объяснение продемонстрированного явления. Ответы были очень интересными, а иногда и смешными. Победители викторины получили призы, в числе которых были номера «Кванта» за 1973 год с автографами академика И. К. Кикоина.

Вечером 16 апреля в Ленинграде, в театре Юного зрителя состоялось торжественное закрытие VII Всесоюзной олимпиады школьников по физике, на котором было объявлено решение жюри о награждении участников олимпиады. Вот имена победителей.

Дипломы I степени
получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Каплундвский Вадим* (ФМШ при ЛГУ), *Плиговко Юрий* (г. Брянск, с. ш. № 51);

по 9 классам — *Браун Владимир* (ФМШ при ЛГУ) *Курганов Анатолий* (г. Житомир, с. ш. № 21), *Топтыгин Дмитрий* (г. Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам — *Кароль Андрей* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Кушнир Владимир* (г. Астрахань, с. ш. № 10), *Милясевич Игорь* (г. Ровно, с. ш. № 12), *Сологубов Виктор* (ФМШ при МГУ), *Уральцев Николай* (ФМШ при ЛГУ).

Дипломы II степени
получили следующие участники олимпиады:

«Ветераны»-победители трех Всесоюзных физических олимпиад И. Корепанов, Т. Теохаров, А. Ушаков.

по 8 классам — *Криницкий Алексей* (г. Кострома, с. ш. № 32), *Малевич Александр* (группа советских войск в Германии, школа № 89), *Шахнович Евгений* (г. Калинин, с. ш. № 6);

по 9 классам — *Арзамасцев Анатолий* (г. Чита, с. ш. № 4), *Егоров Владимир* (г. Смоленск, с. ш. № 7), *Егошин Леонид* (г. Усть-Каменогорск, с. ш. № 35), *Каменщик Александр* (г. Днепропетровск, с. ш. № 23), *Коршунов Сергей* (п. Монино Московской обл., с. ш. № 1, 8 класс), *Кушнир Владимир* (г. Одесса, с. ш. № 16), *Макаров Константин* (ФМШ при ЛГУ), *Фалькин Евгений* (г. Новосибирск, с. ш. № 165);

по 10 классам — *Брагинский Леонид* (г. Фрунзе, с. ш. № 61), *Бурханов Александр* (г. Куйбышев, с. ш. № 27), *Игнатьев Вячеслав* (г. Волгоград, с. ш. № 16), *Корепанов Игорь* (г. Днепропетровск, с. ш. № 23), *Кузнецов Николай* (г. Красавин Вологодской обл., с. ш. № 15), *Солнышкин Сергей* (ФМШ при ЛГУ), *Теохаров Александр* (г. Алмалык Ташкентской обл., с. ш. № 15), *Ушаков Андрей* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Черняк Владимир* (г. Москва, с. ш. № 2).

Дипломы III степени
получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Добрынин Валерий* (г. Джетигар Кустанайской обл., с. ш. № 9), *Жеданов Алексей* (г. Донецк, с. ш. № 17), *Копыловский Сергей* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл., Знобь-Новгородская с. ш.), *Паторский Александр* (г. Бобруйск, с. ш. № 25), *Пиккет Тийт* (г. Таллин, с. ш. № 7), *Поблагуев Андрей* (г. Винница, с. ш. 17), *Соколов Игорь* (г. Москва, с. ш. № 21), *Щербаков Олег* (г. Лида, с. ш. № 1);

по 9 классам — *Анциферов Павел* (г. Фатеж Курской обл., с. ш. № 2), *Волков Александр* (г. Москва, с. ш. № 2), *Иванов Александр* (г. Великие Луки, с. ш. № 3), *Игнатьев Виктор* (г. Могилев,

Задания экспериментального тура выполняют Д. Топтыгин, В. Кушнир, А. Курганов, В. Браун, В. Сологубов.

с. ш. № 4), *Луман Тыну* (г. Таллин, с. ш. № 1), *Максютов Шамиль* (г. Стерлитамак, с. ш. № 10), *Мовчан Павел* (ФМШ при КГУ), *Савин Сергей* (ст. Красноармейская Краснодарского края, с. ш. № 1), *Скворцов Виталий* (г. Ленинград, с. ш. № 121), *Шендрик Виктор* (г. Алма-Ата, Республиканская ФМШ), *Шнейдман Виталий* (г. Харьков, с. ш. № 27);

по 10 классам — *Зелековский Сергей* (г. Новосибирск, с. ш. № 165), *Лавриненко Игорь* (г. Донецк, с. ш. № 17), *Осмоловский Александр* (г. Черкассы, с. ш. № 21), *Петерсон Олег* (г. Нальчик, с. ш. № 2), *Поляновский Владимир* (г. Запорожье, с. ш. № 28), *Соколов Евгений* (г. Кемерово, с. ш. № 1), *Шамардин Андрей* (г. Воронеж, с. ш. № 74), *Шапошников Михаил* (г. Рязань, с. ш. № 2), *Шмулевич Игорь* (г. Ташкент, с. ш. № 190).

Кроме того, 69 участников олимпиады были награждены похвальными грамотами.

Многие ребята получили призы, учрежденные разными организациями специально для участников заключительного тура Всесоюзной олимпиады.

Специальный приз «За лучшее решение задач теоретического тура» от редакции журнала «Квант» получил *Юрий Плиговко* (г. Брянск). Ему была вручена подшивка журнала за 1972 год с пожеланиями дальнейших успехов от главного редактора журнала академика И. К. Кикоина и первого заместителя главного редактора академика А. Н. Колмогорова. Специальный приз от комсомольцев Кировского завода был вручен самому юному участнику олимпиады *Сергею Копыловскому* — ученику 8 класса Знобь-Новгородской школы. Среди призов было также много интересных и полезных книг по физике с автографами их авторов.

И. М. Яглом

Сборники «олимпиадных» задач

В этом номере опубликованы статьи о VII Всесоюзной математической олимпиаде. В них помещены все задачи, предлагавшиеся на этой олимпиаде, и решения ряда из них. Вряд ли уместно представлять здесь читателям журнала математические (и физические) олимпиады и подробно рассказывать о системе проведения этих соревнований в нашей стране — большинство читателей непосредственно знакомо с олимпиадами, ибо участвовало в них. Укажем только, что в СССР математические олимпиады в их настоящем виде проводятся с 1934 г. Первая в стране городская олимпиада была проведена в Ленинграде, ее организаторами и руководителями были член-корреспондент Академии наук СССР Б. Н. Делоне и профессор В. А. Тартаковский; первая московская городская олимпиада состоялась в 1935 г. под руководством члена-корреспондента АН СССР (ныне академика) П. С. Александрова.

Старейшими в мире, как будто, являются венгерские математические олимпиады — первое общевенгерское соревнование такого типа состоялось еще в прошлом веке (в 1894 г.). Видимо, нельзя связывать устойчивую традицию венгерских математических олимпиад с блестящим расцветом физико-математических наук в Венгрии в XX веке, когда эта сравнительно небольшая страна дала десятки выдающихся математиков и физиков. Тем не менее некоторая косвенная связь здесь, вероятно, все же имеется. Более непосредственно связаны с традицией венгерских олимпиад устойчивые успехи венгерских школьников на международных математических олимпиадах, а также появление в Венгрии в XX веке ряда видных математиков с дарованием, так сказать, «олимпиадного» типа (то есть ученых, проявивших себя в первую очередь успехами в решении сложных и нестандартных по условиям и методам их решения математических проблем). К числу таких ученых относится, например, хорошо известный нашим школьникам по переводам ряда его книг Дьердь Пойа *) и, особенно, член Академии наук Венгерской Народной Республики Пал Эрдеш **). Из советских математиков к тому же типу относится, например, молодой Юрий Матиясевич, первые успехи которого были связаны со школьными математическими олимпиадами (об основном достижении этого ученого рассказывается в «Кванте» № 7, 1970 в статье Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова). Пойа, переехавший впоследствии в США, является основным организатором «американской математической олимпиады», привлекающей школьников всей страны. Эта олимпиада проводится Стенфордским университетом, профессором которого ряд лет состоял Д. Пойа. По системе проведения и типам предлагаемых задач Стенфордская олимпиада близка к венгерским олимпиадам, на которых некогда блистал школьник Пойа, и к советским олимпиадам. Несколько иной характер имеют проводимые с 1950 г. как «нью-йоркские олимпиады» (а с 1957 года ставшие «всеамериканскими») соревнования, организуемые Математической Ассоциацией Америки («МАА — contests»). В последние годы в этих соревнованиях принимают участие сотни тысяч (!) школьников из Соединенных Штатов Америки и из Канады (эти соревнования, задания для которых составляются «центральным штабом олимпиады», проводятся одновременно во многих городах США и Канады). В настоящее время математические олимпиады проводятся в десятках стран Европы, Азии, Северной и Латинской Америки

---

*) См., например, Д. Пойа, «Математика и правдоподобные рассуждения» (М., ИЛ., 1957), «Как решать задачу» (М., Учпедгиз, 1959), «Математическое открытие» (М., «Наука», 1970).

**) Более подготовленным из читателей журнала можно порекомендовать ознакомиться со статьей П. Эрдеш, «Некоторые нерешенные проблемы» (сборник переводов «Математика», т. 7, № 4, 1963, стр. 109—143), многие из задач, собранных в этой статье, по своей формулировке (но, видимо, не по возможным методам решения!) вполне доступны школьникам старших классов.

Большой интерес к математическим олимпиадам стимулировал публикацию в разных странах сборников «олимпиадных» задач Известностью и популярностью пользуются регулярно издающиеся сборники задач венгерских олимпиад Эти сборники переводились на ряд языков, например, двухтомный их перевод был включен в издающуюся в США большим тиражем серию «Новая математическая библиотека» (New mathematical library), близкую по характеру к нашей серии «Библиотека математического кружка» *) В этой же серии издан сборник задач, предлагавшихся на соревнованиях «МАА — contests», публиковались в США и сборники задач «Стенфордских олимпиад» Мне приходилось также видеть сборники «олимпиадных» задач, изданные в ГДР и в Болгарии Широко отражены олимпиадные задачи в открывших серию «Библиотека математического кружка» книгах Д О Шклярского и др «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» (первая из этих книг выдержала уже 4 издания), а также во входящих в ту же серию последних книгах Д О Шклярского и др (в том числе и в подготовленной к выходу в свет книге «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии»), хотя эти книги и не являются сборниками «олимпиадных» задач Три издания выдержал в нашей стране достаточно хорошо известный весьма интересный сборник «Международные математические олимпиады» Е А Морозовой и И С Петракова, много сборников задач «местных» олимпиад издавалось в разных городах страны (но, к сожалению, не в Ленинграде, явившемся «колыбелью» наших олимпиад!) и в отдельных республиках (например, на Украине, в Армении)

Однако наиболее широким по охвату материала и тем самым наиболее интересным из книг такого рода кажется мне составленный одним из ветеранов московских олимпиад Андреем Леманом «Сборник задач московских математических олимпиад» (М, «Просвещение», 1965, редактор книги — профессор В Г Болтянский) Московские олимпиады до организации всероссийских, а затем и всесоюзных олимпиад заслуженно пользовались репутацией «первых олимпиад страны», здесь был накоплен большой и интересный опыт, сыгравший очень большую роль в дальнейшем развитии математических соревнований школьников Составленная А А Леманом книга открывается статьей, излагающей историю и характер проведения московских олимпиад, далее следуют «тренировочные» («подготовительные») задачи и почти полный список задач всех московских олимпиад, начиная с I (1935 г) и вплоть до XXVII (1964 г) К сожалению, имеющиеся в этом списке немногочисленные пробелы сегодня, видимо, уже невозможно восполнить Вторую часть книги составляют решения всех без исключения «тренировочных» задач и значительной части «олимпиадных» задач То, что некоторые из задач, предлагавшихся на московских олимпиадах, оставлены без решения, нельзя считать недостатком книги, ибо это должно побуждать читателей к попыткам самостоятельного решения задач

Книга А А Лемана была издана около 10 лет назад и в противоположность книгам Д О Шклярского и др или Е А Морозовой и И С Петракова никогда не переиздавалась Она давно уже превратилась в библиографическую редкость, достать ее нельзя даже в букинистических магазинах Бесспорно, эту книгу надо скорейшим образом переиздать, дополнив материалами последних московских олимпиад Не менее бесспорна желательность издания отдельной книгой сборников задач всероссийских и всесоюзных олимпиад В основу такой книги, потребность в которой очень велика, можно положить регулярно публикующиеся в журналах «Математика в школе» и «Квант» отчеты о проведении этих олимпиад и сопровождающий эти отчеты высококвалифицированный разбор решений задач, предлагавшихся на олимпиадах.

---

*) Советские школьники знакомы с серией «Новая математическая библиотека» по переводам ряда входящих в нее книг О Оре, «Графы и их применение» (М, «Мир», 1965), Э Беккенбах, Р Беллман, «Введение в неравенства» (М, «Мир», 1965), А Нивен, «Числа рациональные и иррациональные» (М, «Мир», 1966), Н Стинрод, У Чинн, «Первые понятия топологии» (М, «Мир», 1967), И Гроссман, В Магнус, «Группы и их графы» (М, «Мир» 1971)

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Начался новый учебный год в школе. Начинается он и в «Практикуме абитуриента». Как свидетельствует редакционная почта, многие читатели журнала проявляют большой интерес к материалам вступительных экзаменов — прежде всего, конечно, десятиклассники и девятиклассники. На них в первую очередь и рассчитан этот раздел нашего журнала.

Здесь, как и в предыдущие годы, будут регулярно публиковаться статьи, посвященные отдельным важным и сложным практическим вопросам программ по математике, физике, вызывающим, как показывает практика приемных экзаменов, наибольшие затруднения у абитуриентов. Рассмотрение этих вопросов сопровождается разбором конкретных примеров и задач, взятых, как правило, из вариантов вступительных экзаменов, и анализом часто встречающихся ошибок поступающих.

Залог успеха на вступительном экзамене — систематическая работа в течение всего учебного года. Здесь мало прочитать лишь те статьи, которые будут опубликованы в этом году в «Практикуме абитуриента». Эти статьи не могут (да и не ставят своей целью) охватить все вопросы, которые должны хорошо усвоить абитуриенты. Необходимо регулярно заниматься самостоятельно, повторять и активно закреплять материал учебников, использовать пособия для поступающих. Мы рекомендуем нашим читателям (в первую очередь десятиклассникам) обратиться и к комплекту «Кванта» за прошлые годы, где уже помещались статьи для поступающих.

Обратим внимание девятиклассников на то, что не все публикуемые в «Практикуме абитуриента» статьи будут им доступны или полностью понятны — ведь некоторые разделы программы изучаются лишь в 10 классе. Тем не менее очень полезно разбирать те части статей, в которых используется уже пройденный материал.

Ученикам 7—9 классов мы советуем собрать дома комплект «Кванта» (в том числе и за прошлые годы); он пригодится в будущем при подготовке к экзаменам.

Учитывая многочисленные пожелания читателей, в «Практикуме абитуриента» будут регулярно помещаться образцы вариантов, предлагавшихся в 1973 году на вступительных экзаменах по физике и математике в университетах, педагогических и технических вузах страны. Задачи этих вариантов, вместе с упражнениями к теоретическим статьям (а эти упражнения подбираются в основном тоже из вариантов вступительных экзаменов), дадут богатый конкретный материал для самостоятельной работы. Напомним, что варианты приемных экзаменов прошлых лет также систематически печатались в «Кванте», и интересующийся читатель легко найдет их, просмотрев комплект журнала.

В текущем учебном году Центральное телевидение проводит традиционный цикл передач по математике и физике для поступающих в вузы. «Квант» рекомендует своим читателям — десятиклассникам прослушать этот цикл и предполагает публиковать материалы телевизионных подготовительных курсов.

Г. В. Дорофеев

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Готовясь к вступительным экзаменам по математике, будущие абитуриенты зачастую сосредоточивают свое внимание почти исключительно на решении задач, особенно предлагавшихся на экзаменах прошлых лет в выбранном ими вузе. И гораздо меньше времени уделяют они теоретической подготовке. Многие даже оставляют теорию «на потом», надеясь, что им удастся усвоить ее за несколько дней между письменным и устным экзаменом. Такой «практический» уклон, конечно, себя не оправдывает.

Прежде всего дело в том, что на устных экзаменах теоретическая подготовка поступающих проверяется весьма углубленно, во всех тонкостях, которых в любой математической теории предостаточно. И разумеется, всевозможные «подводные камни» в доказательствах теорем необходимо не только заранее увидеть, но и научиться обходить. Но, — и это, конечно, самое главное, — теория необходима именно для решения задач. Безусловно, есть задачи, которые можно решить с помощью каких-либо шаблонов, алгоритмов, имея самые смутные представления о теории. Однако таких задач немного, и в более сложных, необычных примерах без должных теоретических знаний разобраться трудно.

Одним из важнейших и наиболее сложных для поступающих пунктов программы вступительных экзаменов по математике является решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Можно сразу предвидеть возражения: решить такую систему? Да нет ничего проще. Надо выразить y через x из одного уравнения, подставить во второе уравнение, найти x, а затем y. И действительно, все было бы очень просто, если бы речь шла только о том, чтобы решать конкретные системы с числовыми коэффициентами. Однако на практике — и в «тренировочных» задачах, и в задачах, где системы используются как вспомогательный аппарат, — приходится рассматривать системы с буквенными коэффициентами, то есть с параметрами. А это уже значительно усложняет задачу. И вообще, решение задач с параметром — ахиллесова пята многих абитуриентов.

В теории же рассматривается самый общий случай, когда система имеет произвольные коэффициенты, и решение такой системы — это решение задачи с шестью параметрами! Однако овладение этой теорией служит гарантией ее правильного применения в частных случаях.

Начнем с начала, то есть с определений. Что такое *система двух линейных уравнений с двумя неизвестными?* К сожалению, определение, приведенное в учебнике*), не слишком удачно. Дело в том, что слово «совокупность» в применении к уравнениям в последнее время перестало быть синонимом слов «множество», «набор», а приобрело другое значение, причем такое, что термины «система уравнений» и «совокупность уравнений» имеют совершенно разный смысл.

---

*) См. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова «Алгебра и элементарные функции», ч. I, § 26.

Именно, если имеется несколько уравнений, то говорят, что они образуют *систему*, если требуется найти значения неизвестных, при которых выполняются *все* данные уравнения. Если же требуется найти значения неизвестных, при которых выполняется *хотя бы одно* из данных уравнений, то говорят, что данные уравнения образуют *совокупность*. Таким образом, несколько уравнений образуют систему или совокупность в зависимости от поставленной задачи.

Эти рассуждения относятся и к произвольным, не обязательно линейным системам уравнений. Таким образом, мы видим, что даже подход к определению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными требует предварительного тщательного продумывания.

На устном экзамене можно дать такое определение: *системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными x, y, называется система уравнений вида*

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — произвольные (действительные, или даже комплексные, — почему бы и нет?) *числа*.

В таком определении, и это важно подчеркнуть, система двух уравнений с двумя неизвестными выделяется как частный случай общего понятия — системы k уравнений с n неизвестными. При этом не обязательно приводить общее определение системы уравнений, но его надо знать (например, в виде, который указан ранее) и при необходимости уметь сформулировать.

Распространенный среди поступающих недостаток состоит в том, что, дав правильное определение, абитуриент теряется при рассмотрении «странных» частных случаев, таких, как

$$\begin{cases}2x+y=5\\ 2x+y=5\end{cases}\qquad\begin{cases}2x+0y=2\\ 3x+0y=3\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=1\\ x+y=2.\end{cases}$$

Часто приходится слышать, что в первом случае есть только одно уравнение, во втором — только одно неизвестное, а третьего «вообще не может быть». Между тем все три системы удовлетворяют данному определению, в котором *нет никаких ограничений на коэффициенты при x, y и свободные члены*.

Такая ситуация иногда вызывает психологический протест: зачем нужно рассматривать такие неразумные системы? Однако вспомним еще раз, что обычно решаются системы с параметрами, и при каких-то значениях параметров могут осуществиться самые «неестественные» случаи.

Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными подробно рассмотрено в школьном учебнике Кочетковых. Однако следует иметь в виду, что поступающие часто не в состоянии дать компактную формулировку и соответствующее доказательство основной теоремы о решении систем рассматриваемого вида. Отметим также, что в таблице результатов, приведенной в учебнике Кочетковых (§ 33), опущен случай, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю. При всей кажущейся «неразумности» этого случая он может осуществиться (вспомним о параметрах!) и потому должен быть включен в сводку результатов.

Эту основную теорему можно сформулировать в виде следующей схемы.

Теорема. *Пусть дана система уравнений*

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

Тогда

$\boxed{\Delta=0}\xrightarrow{\text{нет}}$ система определенная*) (точка),
$\downarrow$ да
$\boxed{\Delta_x=\Delta_y=0}\xrightarrow{\text{нет}}$ система несовместная,
$\downarrow$ да
$\boxed{a_1=b_1=a_2=b_2=0}\xrightarrow{\text{нет}}$ система неопределенная (прямая),
$\downarrow$ да
$\boxed{c_1=c_2=0}\xrightarrow{\text{нет}}$ система несовместная,
$\downarrow$ да
система неопределенная (плоскость).

Эту схему надлежит понимать следующим образом. Прежде всего задается вопрос: $\Delta = 0$? Если нет, система определенная (имеет единственное решение); если да, то задается вопрос: $\Delta_x = \Delta_y = 0$? Если нет, то система несовместная, если да, то задаем следующий вопрос и так далее. Слова «точка», «прямая», «плоскость» относятся к геометрической интерпретации соответствующего случая.

При этом следует дополнительно отметить, что в первом случае $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, а в третьем случае (то есть когда $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, но не все коэффициенты при неизвестных равны нулю) система эквивалентна одному уравнению — тому, в котором есть ненулевой коэффициент.

Эта формулировка позволяет легко выводить необходимые и достаточные условия такого типа: *система является определенной тогда и только тогда, когда* $\Delta\neq0$; *система несовместна тогда и только тогда, когда либо* $\Delta = 0$, *но* $\Delta_x\neq0$ *или* $\Delta_y\neq0$, *либо все коэффициенты при неизвестных равны* 0, *а хотя бы один из свободных членов не равен* 0.

Рассмотрим несколько типичных примеров применения этой теоремы.

Задача 1 (МГУ, географический ф-т, 1970). *При каких значениях параметра a система уравнений*

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Заметим сразу же, что условие несовместности системы, приведенное выше, несколько громоздко, и на практике часто бывает целесообразно не применять этого условия «в лоб», а поработать с одним только необходимым условием несовместности $\Delta = 0$. Это позволяет не подсчитывать определителей Δ_x и Δ_y.

Имеем: $\Delta = a^2 + 6a + 8$; следовательно, $\Delta = 0$ при $a = -2$ и при $a = -4$. Подставив в данную систему $a_1 = -2$, получим систему

$$\begin{cases} -2x - 4y = -1, \\ 2x + 4y = 1, \end{cases}$$

которая, очевидно (или на основании третьего случая теоремы), имеет бесконечно много решений. При $a_2 = -4$ имеем систему

$$\begin{cases} -4x - 4y = -3, \\ 2x + 2y = -1, \end{cases}$$

которая, очевидно (или на основании второго случая теоремы), несовместна.

Ответ: $a = -4$.

Задача 2 (МГУ, биолого-почвенный ф-т, 1970). *Числа a, b, c таковы, что система уравнений*

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x = 1$, $y = 3$ — одно из этих решений. Найти числа a, b, c.

Заметим сразу же, что во втором уравнении системы ни при каком c коэффициенты при неизвестных не обращаются одновременно в 0. Поэтому для данной системы имеет место третий случай теоремы. Определители Δ, Δ_x, Δ_y выглядят здесь довольно громоздко, и мы для упрощения выкладок сначала воспользуемся дополнительным условием задачи. Так как пара чисел $x = 1$,

---

*) К сожалению, в учебнике нет терминов «определенная» и «неопределенная» система. Система называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Эти термины удобны для употребления, но, разумеется, не обязательны.

$y = 3$ является решением систем, то
$$\begin{cases} a - 3b = 2a - b,\\ c + 1 + 3c = 10 - a + 3b.\end{cases}$$
Отсюда $a = -2b$, $c = (5b + 9)/4$. Далее находим: $\Delta = ac + bc + b = (-5b^2 - 5b)/4 = 0$, откуда $b_1 = 0$, $b_2 = -1$. Тогда $a_1 = 0$, $c_1 = \frac{9}{4}$; $a_2 = 2$, $c_2 = 1$.

В этих двух случаях получаются такие системы:
$$\begin{cases} 0x + 0y = 0,\\ \frac{13}{4}x + \frac{9}{4}y = 10,\end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + y = 5,\\ 2x + y = 5.\end{cases}$$
Обе системы удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = \frac{9}{4}$;

$a_2 = 2,\ b_2 = -1,\ c_2 = 1.$

Задача 3. *При каких значениях a система*
$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + (a + 1)y = a^2 - 2,\\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений?

Определитель этой системы равен $\Delta = 2a^3 - a^2 - 4a - 1$, а формул для решения уравнения $2a^3 - a^2 - 4a - 1 = 0$ у нас нет *). Поэтому придется пользоваться основной теоремой в ее полном объеме. *Система является неопределенной в том и только в том случае, когда либо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, но не все коэффициенты при неизвестных равны 0, либо все шесть коэффициентов системы равны 0.* Однако коэффициенты при y не могут обратиться в 0 одновременно, так что остается рассмотреть только первый случай.

Имеем
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^2 - 2 & a + 1\\ 2a + 1 & 2a\end{vmatrix} = 2a^3 - 2a^2 - 7a - 1.$$
Если уравнения $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$ имеют общий корень a_0, то, вычитая из первого уравнения второе, получим $a_0^2 + 3a_0 = 0$, откуда a_0 равно либо 0, либо -3, однако ни одно из этих чисел не является корнем уравнения $\Delta = 0$, так что мы получаем противоречие.

Следовательно, уравнения $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$ не имеют общих корней, а потому данная система не может быть неопределенной.

Ответ: ни при каких a система не имеет бесконечно много решений.

Теперь рассмотрим несколько задач, условия которых не связаны непосредственно с системами уравнений.

Задача 4. *Доказать, что если уравнения*
$$ax^2 + bx + c = 0$$
и
$$px^2 + qx + r = 0$$
имеют общий корень, то
$$(ar - cp)^2 = (aq - bp)\ (br - cq).$$
Пусть данные уравнения имеют общий корень x_0. Тогда система уравнений
$$\begin{cases} au + bv = -c,\\ pu + qv = -r\end{cases} \qquad (1)$$
имеет решение $u = x_0^2$, $v = x_0$, а доказываемое равенство принимает вид $\Delta_v^2 = \Delta \cdot \Delta_u$. Если определитель Δ системы (1) отличен от нуля, то мы по правилу Крамера находим единственное решение:
$$x_0^2 = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \qquad x_0 = \frac{\Delta_v}{\Delta}.$$
Отсюда $\frac{\Delta_u}{\Delta} = \frac{\Delta_v^2}{\Delta^2}$, откуда $\Delta_v^2 = \Delta \cdot \Delta_u$, что и требовалось доказать.

Если же $\Delta = 0$, то система (1), будучи совместной, является неопределенной, и следовательно, в ней $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то есть снова доказываемое равенство выполняется.

Желающие могут попробовать доказать требуемое равенство непосредственно и сравнить свое решение с приведенным.

---

*) Правда, можно заметить, что это уравнение имеет корень $a = -1$. Зная один корень кубического уравнения, можно разложить левую часть уравнения на линейный множитель (вида $x - x_0$, где x_0 — найденный корень) и многочлен второй степени, корни которого мы умеем находить. Найдя таким образом корни рассматриваемого уравнения, мы можем решить получающиеся системы. Однако мы приведем более простое решение задачи.

Задача 5. *При каком условии через три точки с попарно различными абсциссами можно провести параболу — график квадратного трехчлена?*

Данные точки лежат на графике функции $y = ax^2 + bx + c$ тогда и только тогда, когда совместна система уравнений

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases} \tag{2}$$

с неизвестными a, b, c и параметрами x_i, y_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Система (2) имеет три неизвестных, и поэтому наша теория к ней непосредственно неприменима. Однако, исключив из этой системы неизвестное c, мы получим систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = \\ \qquad\qquad = y_1 - y_2, \\ a(x_1^2 - x_3^2) + b(x_1 - x_3) = \\ \qquad\qquad = y_1 - y_3. \end{cases} \tag{3}$$

Если система (3) будет совместна, то, очевидно, и система (2) будет совместна (верно и обратное утверждение).

Определитель системы (3) нетрудно подсчитать:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 - x_2^2 & x_1 - x_2 \\ x_1^2 - x_3^2 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} = \\ = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Числа x_1, x_2, x_3 все различны, поэтому $\Delta \neq 0$, то есть система (3), а вместе с ней и система (2), имеет единственное решение. Следовательно, через три точки с попарно различными абсциссами всегда проходит график функции вида $y = ax^2 + bx + c$.

Однако для того, чтобы эта функция была графиком квадратного трехчлена, должно быть $a \neq 0$, то есть в системе (3)

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 - y_3 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, в процессе решения мы получили следующие утверждения: если три точки имеют попарно различные абсциссы, то

при $\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 - y_3 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} = 0$

они лежат на одной прямой;

при $\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 - y_3 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} \neq 0$

они лежат на одной параболе.

Кроме того, через любые три точки с попарно различными абсциссами, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную параболу $y = ax^2 + bx + c$.

Упражнения

1. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными иметь ровно четыре решения?

2. В чем разница между решениями уравнения $x = 1$ и решениями системы

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ x + 0y = 1? \end{cases}$$

3. (МГУ, биофак, 1969). Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)\,y = 3a, \\ \quad x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

4. (МГУ, географический ф-т, 1970). При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)\,x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

5. (МГУ, биофак, 1970). Числа a и b таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)\,y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Найти a и b.

6. Какие комплексные числа представимы в виде $\dfrac{c + di}{c - di}$?

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x 3^y = 5, \\ 3^x 8^y = 12. \end{cases}$$

8. При каком условии точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат на графике некоторой параболы вида $y = x^2 + px + q$?

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = 1. \end{cases}$$

10. При каких a точки с координатами $(-1,\ -3 - a)$, $(3, 3a + 1)$, $(4 - a,\ 2a + 2)$ лежат на одной прямой?

Силы трения

Л. П. Баканина

Сила трения часто вызывает у поступающих в вуз серьезные затруднения, особенно сила трения покоя. Чему равна ее величина? Как она направлена? Попытаемся ответить на эти вопросы, разобрав несколько конкретных примеров. Задачи, рассмотренные в статье, в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт, и многие абитуриенты не смогли с ними справиться.

Прежде всего вспомним некоторые особенности сил сухого трения, возникающего между двумя твердыми телами. При непосредственном взаимодействии (соприкосновении) этих тел возникают силы, действующие на каждое из них. Согласно третьему закону Ньютона эти силы равны по величине и противоположны по направлению. Составляющие этих сил, направленные перпендикулярно соприкасающимся поверхностям, называют силами нормального давления. Составляющие, направленные вдоль поверхности, называют силами трения.

Пусть тело лежит на горизонтальном столе. Будем действовать на него горизонтальной силой, величина которой постепенно увеличивается. До тех пор, пока эта сила меньше определенной величины F_{max}, тело будет сохранять состояние покоя потому, что на тело со стороны стола действует сила трения покоя, по величине равная приложенной силе. Направление силы трения противоположно возможному перемещению. Если бы не было трения, тело сразу начало бы скользить. Можно сказать, что тело «пытается» начать скользить, но трение удерживает его на месте. Если же величина воздействия больше F_{max}, возникает скольжение. Сила трения скольжения, как известно, не зависит от величины сил, действующих на тело вдоль поверхности:

$$F_{ск} = kN.$$

Величина силы нормального давления N не зависит ни от величины касательных взаимодействий, ни от свойств трущихся поверхностей.

Опыт показывает, что обычно $F_{ск}$ несколько меньше F_{max}. Однако отличие это невелико, и при решении почти всех задач считают, что $F_{ск} = F_{max}$. Это приближение стало настолько привычным, что его обычно даже и не оговаривают. Точно так же пренебрегают зависимостью силы трения от скорости. На рисунке 1 пунктиром изображена (несколько преувеличено) зависимость силы трения от скорости, наблюдаемая на опыте, а сплошной красной линией — обычное упрощенное представление этой зависимости.

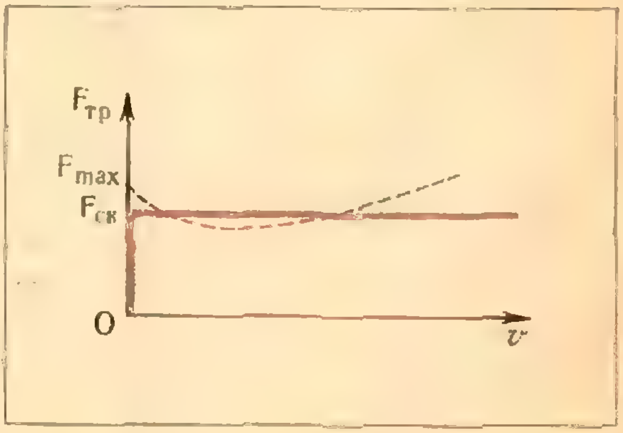


Рис. 1.

Перейдем теперь к разбору конкретных задач, при решении которых особенности сил трения играют существенную роль.

Задача 1. *Поезд, подходя к станции со скоростью $v = 72$ км/ч, начинает равномерно тормозить. Каково наименьшее время торможения поезда до полной остановки, безопасное для спящих пассажиров? Коэффициент трения пассажира о полку $k = 0{,}2$.*

При торможении поезда скорость движения полки, на которой лежит пассажир, уменьшается, и если бы пассажир сохранил прежнюю скорость, он начал бы скользить по полке вперед, по ходу движения поезда. Однако, как только он начинает или, вернее, как только он «пытается» начать скользить, возникает сила трения. Она сообщает пассажиру тормозящее ускорение. Если это ускорение равно ускорению поезда, скорость пассажира все время равна скорости полки, на которой он лежит, и пассажир не скользит по полке. Максимальное возможное ускорение может сообщить максимальная сила трения покоя, которая, как мы уже говорили, приближенно равна $F_{ск} = kN$. Согласно второму закону Ньютона

$$ma_{\max} = kN,$$

где m — масса спящего пассажира, а N — сила его нормального давления на полку. Для горизонтальной полки $N = mg$ и $a_{\max} = kg$. Значит, ускорение поезда, при котором пассажиры не падают с полок,

$$a \leqslant kg.$$

Время торможения до полной остановки

$$t \geqslant \frac{v}{a} = 10 \text{ с}.$$

Задача 2. *Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу окружности в 30° радиуса $R = 100$ м. С какой максимальной скоростью автомобиль может выехать на прямой участок пути? Коэффициент трения колес о землю $k = 0{,}3$.*

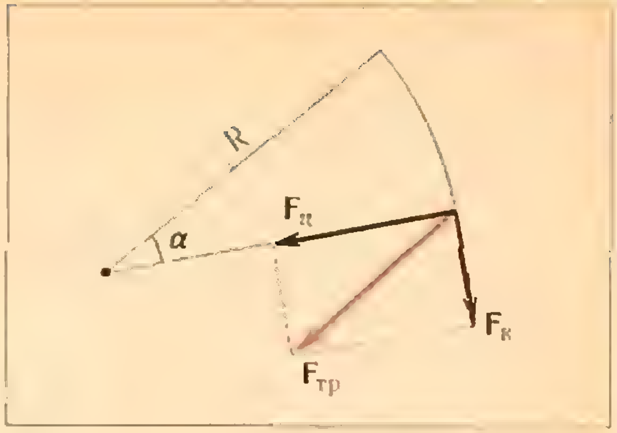


Рис. 2.

Единственная внешняя горизонтальная сила, действующая на автомобиль, — это сила трения. Разгон, как мы предполагаем, происходит без проскальзывания, следовательно, мы имеем дело с силой трения покоя. Только эта сила и может сообщить автомобилю необходимое ускорение.

Так как движение автомобиля по окружности — это движение с ускорением, сила трения должна быть направлена под углом к скорости (рис. 2). При этом составляющая $F_к$, направленная вдоль скорости, сообщает автомобилю необходимое для разгона ускорение, а составляющая $F_ц$, направленная по радиусу окружности, изменяет направление скорости так, чтобы автомобиль двигался по окружности. Центростремительное ускорение $a_ц = \frac{v^2}{R}$, следовательно, $F_ц = m\frac{v^2}{R}$. Скорость максимальна в конце разгона, значит, тогда же максимальна и $F_ц$. Так как по условию задачи автомобиль набирает скорость равномерно, сила $F_к$ постоянна.

Как известно, пройденный путь, ускорение и скорость в конце пути связаны соотношением

$$2a_к S = v^2.$$

Отсюда $a_к = \frac{v^2}{2S}$, а сила $F_к = m\frac{v^2}{2S}$.

Геометрическая сумма сил $F_к$ и $F_ц$ не должна превышать максимальной силы трения покоя $F_{тр} = kmg$. Так как эти силы перпендикулярны друг другу, то в конце разгона

$$(kmg)^2=\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2+\left(\frac{mv^2}{2\alpha R}\right)^2.$$

Отсюда

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{kgR}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}}\approx 53\,\frac{км}{ч}.$$

Задача 3. *Небольшой кубик массы m покоится на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α. Коэффициент трения $k=2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Определить, с какой минимальной горизонтальной силой F, лежащей в плоскости склона (рис. 3), нужно толкать кубик, чтобы он начал двигаться.*

При $k>\mathrm{tg}\,\alpha$ под действием только силы тяжести кубик не будет скользить по наклонной плоскости, так как направленная вдоль наклонной плоскости проекция силы тяжести $F_т=mg\sin\alpha$ меньше максимальной силы трения покоя $F_{тр}=kmg\cos\alpha$. Если приложить горизонтальную силу F, то результирующая сила, действующая вдоль наклонной плоскости, будет равна (см. рис. 3)

$$F_р=\sqrt{F^2+F_т^2}.$$

Если $F_р\geqslant F_{тр}$, кубик начнет скользить, так как сила трения покоя уже не может его уравновесить. Минимальное значение необходимой для этого силы F можно найти из условия

$$F^2+(mg\sin\alpha)^2=(kmg\cos\alpha)^2.$$

Отсюда $F=\sqrt{3}\,mg\sin\alpha$.

Задача 4. *Хоккейная шайба падает на лед под углом α к вертикали со скоростью v_0. С какой скоростью шайба начнет скользить по льду, если после удара о лед она не подпрыгивает? Коэффициент трения шайбы о лед равен k.*

Изменение количества движения, согласно второму закону Ньютона, равно импульсу действующей силы. По условию задачи вертикальная составляющая вектора количества движения за время удара обращается в нуль. Значит, импульс силы нормального давления на поверхность $N\Delta t$ равен $N\Delta t=mv_0\cos\alpha$, где Δt — время удара, а N — средняя сила давления шайбы на лед во время удара.

Так как по условию задачи шайба после удара скользит, сила трения во время удара — это сила трения скольжения $F_{ск}=kN$. Время соударения Δt очень мало́, а $m\Delta v_{верт}$ — конечная величина, поэтому сила нормального давления при ударе гораздо больше веса шайбы. Среднее значение силы трения во время удара

$$F_{тр}=kN=k\left(\frac{m\Delta v_{верт}}{\Delta t}+mg\right)\approx$$

$$\approx k\,\frac{m\Delta v_{верт}}{\Delta t}.$$

Импульс силы трения за время удара

$$F_{тр}\Delta t=kN\Delta t=kmv_0\cos\alpha.$$

Изменение горизонтальной составляющей количества движения шайбы за

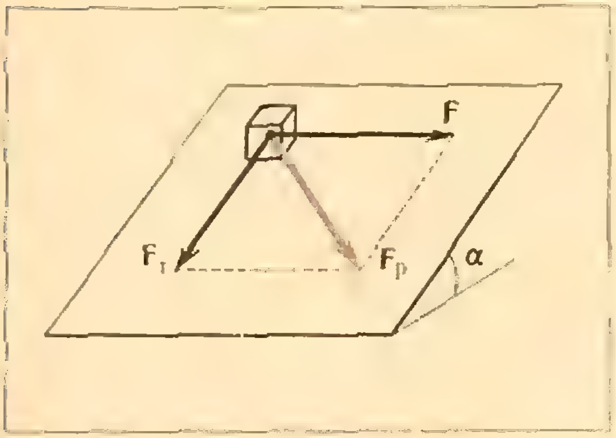


Рис. 3

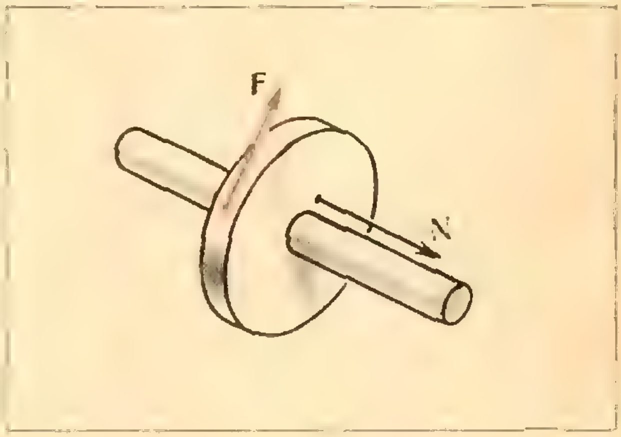


Рис. 4.

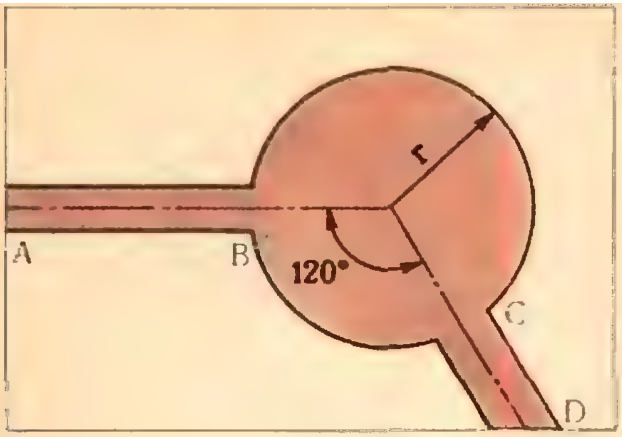


Рис. 5.

время удара равно

$$mv - mv_0 \sin\alpha = -kmv_0 \cos\alpha,$$

откуда $v = v_0 \sin\alpha - kv_0 \cos\alpha$.

Если коэффициент трения k очень мал, изменение горизонтальной составляющей количества движения шайбы тоже мало, и приближенно можно считать, что для горизонтальной проекции выполняется закон сохранения количества движения.

Следует отметить, что приведенное решение справедливо только тогда, когда $k \leqslant \operatorname{tg}\alpha$. Попробуйте разобраться самостоятельно, что будет происходить в случае, если $k > \operatorname{tg}\alpha$.

Упражнения

1. Тело опускают без начальной скорости на ленту транспортера, движущуюся со скоростью $v = 3{,}6$ *км/ч*. Коэффициент трения между телом и лентой $k = 1$. Какой путь пройдет тело по ленте?

2. Изучая дорожное происшествие, автоинспектор установил, что след торможения автомобиля, ехавшего по асфальтовой дороге, равен 60 *м*. С какой скоростью ехал автомобиль, если коэффициент трения колес об асфальт при торможении равен 0,5?

3. Маховик радиуса $R = 0{,}2$ *м* насажен на закрепленную горизонтальную ось радиуса $r = 0{,}02$ *м*. Сила трения между маховиком и осью $F_{ск} = 10^3$ *н*. Для того чтобы легче было снять маховик с оси, к его ободу прикладывается сила $F = 80$ *н*, создающая вращающий момент относительно оси (рис. 4). С какой минимальной силой N нужно тянуть маховик вдоль оси, чтобы снять его?

4. Две дороги, AB и CD, направленные под углом 120° друг к другу, выходят на круглую асфальтированную площадь радиуса $r = 68$ *м* (рис. 5). С какой максимальной постоянной скоростью может ехать по площади автомобиль, чтобы попасть с одной дороги на другую, если коэффициент трения между асфальтом и шинами автомобиля $k = 0{,}4$?

Число Авогадро и предсмертный вздох Юлия Цезаря

Сколько молекул в стакане воды или в литре воздуха? Поскольку молекулы малы, то, конечно, это число очень велико. Для иллюстрации прибегают к различным наглядным примерам. Вот один из них: если из стакана воды ежесекундно удалять сто миллиардов молекул, то стакан опустеет примерно через миллион лет. Или другой пример. Вообразим, что мы както пометили все молекулы в стакане воды и вылили эту воду в Мировой океан. Если затем перемешать океан и зачерпнуть из него стакан воды, то в стакане окажется больше тысячи меченых молекул.

Рассмотрим еще один не менее интересный пример.

Известный английский популяризатор науки Джеймс Джинс говорил, что, когда кто-нибудь из нас делает вдох, в его легкие попадает несколько молекул, участвовавших в предсмертном вздохе Юлия Цезаря. Правдоподобно ли это утверждение?

Пусть в последнем вздохе Юлия Цезаря участвовало n молекул и в наши легкие попадает k из них. Тогда

$$k = n\frac{m}{M}, \qquad (1)$$

где m — масса воздуха, входящего в легкие при вдохе, а M — масса земной атмосферы. Если μ — масса одного киломоля воздуха, а N — число Авогадро, то

$$n = \frac{m}{\mu}N. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получаем:

$$k = \frac{m^2}{M}\cdot\frac{N}{\mu}. \qquad (3)$$

Теперь можно произвести вычисления.

(Окончание см. с. 73)

А. И. Орлов

ВМШ при Московском математическом обществе

ВМШ — это вечерняя математическая школа. Заниматься в этой школе могут все желающие ученики 6—8 классов. Вступительных экзаменов в ВМШ нет.

Хорошо работающим школьникам Совет ВМШ присваивает звание «ученик ВМШ», выдает удостоверение, а по окончании года — рекомендацию для поступления в математическую школу.

За десять лет работы ВМШ ее бывшие ученики много раз побеждали на всесоюзных и международных математических олимпиадах, напечатали десятки научных работ. Но ВМШ не ставит своей единственной целью подготовку и отбор будущих профессионалов-математиков.

Умение «математически мыслить» полезно (а часто и необходимо) любому человеку. Ведь математику можно применять везде! Например, с февраля по май 1973 года на семинаре, в котором я участвую, рассматривались математические модели, применяемые в экономике, социологии, медицине, психологии, геологии, генетике, демографии и так далее. Но, к сожалению, ученые и инженеры при обсуждении этих вопросов иногда пользуются теоремами и формулами математики, не понимая отчетливо их смысл.

Это, естественно, приводит к ошибкам. Чтобы таких ошибок не было, надо как можно раньше начать тренироваться в осознании смысла математических теорем, например, в математическом кружке или в вечерней школе.

Основное на занятиях ВМШ —решение задач; основная обязанность учеников ВМШ — не стесняться и не бояться задавать вопрос, когда что-либо не совсем понятно.Программу работы каждой группы (кружка) ВМШ определяют руководители этой группы; при этом учитываются интересы школьников, занимающихся в группе.

ВМШ работает с октября по апрель. Учебный год начинается с собрания в Актовом зале Московского университета. Занятия проводятся один раз в неделю в школах или в аудиториях МГУ. Кроме того, регулярно проводится общий для всех групп конкурс по решению задач.

Желающие заниматься в ВМШ могут написать по адресу: 117071, *Москва, В-*71, *Ленинский проспект, д.* 14, *корп.* 7, *ЦЭМИ, лаборатория теории вероятностей и математической статистики, ВМШ*, или позвонить во второй половине сентября по телефонам: 291-85-72, 139-35-29.

В заключение мы приведем несколько задач из числа разобранных на занятиях ВМШ. Отметим, что около 400 задач ВМШ собрано в двух книгах: Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго «Математические задачи» (М., «Наука», 1971); Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь «Математические соревнования. Арифметика и алгебра» (М., «Наука», 1970). По материалам ВМШ работают «Встречи с тремя Неизвестными» в журнале «Пионер».

Задачи

1. Вдоль прямого шоссе стоят 6 домов. Где вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей? Тот же вопрос, если домов 7.

2. Золотой призер чемпионата набрал 7 очков, серебряный — 5, бронзовый — 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (За победу в матче дается 2 очка, ничья — 1, проигрыш — 0.)

3. Решить в натуральных числах уравнения:

а) $xy^2 + 3y^2 - x = 108$;

б) $x! + 12 = y^2$

($x!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до x, например, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$).

4. Числа p и $p^4 - 6$ простые. Найти p.

5. Дан треугольник ABC. Через точку A проведена параллельно BC прямая, на которой взята точка D. Перпендикуляр BE опущен на CD. Доказать, что площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} CD \cdot BE$.

6. Одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами, а разные — разными. Расшифруйте равенство:

$$\text{МЯУ} \times \text{МЯУ} = \text{МЯУЯК} + \text{УЯЯ}.$$

7. Прожектор освещает внутренность угла в α^0. Крепостная стена расположена по периметру выпуклого многоугольника, не являющегося параллелограммом. Доказать, что тремя прожекторами можно осветить снаружи всю стену. (Точка A считается освещенной прожектором B, если его лучи достигают всех точек некоторой части стены вокруг A.)

8. Первый задумывает n цифр $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Второй называет n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Первый в ответ сообщает сумму $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Сколько вопросов надо задать второму, чтобы отгадать цифры $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Как действовать, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — не обязательно цифры, а натуральные числа, меньшие 1000? А если про $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известно лишь, что это натуральные числа?

9. Есть ровно 57 способов выдать x рублей билетами по 3 и 5 рублей. Чему равно x (укажите все возможности)?

10. Найти все функции f такие, что для любых чисел x, y справедливо равенство

$$f(x)\,f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

11. Про точки A, B, C известно, что для любой четвертой точки M отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM. Доказать, что точка A лежит на отрезке BC.

12. Подобрать числа a, b, c, d, e так, чтобы уравнение

$$\sqrt{ax + b} + \sqrt{cx + d} = e$$

имело корни $x = 3$ и $x = 4$.

13. Натуральное число n делится на 12 и имеет 14 различных натуральных делителей. Найти n.

Число Авогадро и предсмертный вздох Юлия Цезаря

(Окончание, начало см. с. 71)

Объем воздуха, поступающего в легкие при вдохе, составляет около двух литров. Так как атмосферный воздух имеет плотность 1,3 *г/л*, масса вдыхаемого воздуха $m \approx 2 \cdot 10^{-3}$ *кг*.

Атмосферное давление близко к 10^5 *н/м²*. Значит, над каждым квадратным метром земной поверхности находится столб воздуха весом 10^5 *н*, то есть массой около 10^4 *кг*. Учитывая, что радиус Земли $R = 63{,}7 \cdot 10^5$ *м*, находим, что земная атмосфера имеет массу $M \approx 51 \cdot 10^{17}$ *кг*.

Воздух состоит на 80% из азота и на 20% из кислорода, поэтому для воздуха можно принять $\mu \approx 29$ *кг/кмоль*.

Наконец, число Авогадро $N \approx 6 \cdot 10^{26}$ *1/кмоль*.

Подставив численные значения величин в равенство (3), получим:

$$k \approx \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{51 \cdot 10^{17}} \cdot \frac{6 \cdot 10^{26}}{29} \approx 16.$$

Итак, Джинс прав: когда мы делаем вдох, в наши легкие попадает полтора десятка молекул, участвовавших в предсмертном вздохе Юлия Цезаря.

Б. Ю. Коган

Телевидение готовит в вуз

С 1-го октября 1973 года Главная редакция научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения начинает транслировать по третьей программе передачи для поступающих в вузы.

Телевизионные занятия будут продолжаться в течение всего учебного года. Каждую неделю зрителям предлагаются следующие передачи: по физике — в понедельник вечером и в пятницу утром; по математике — во вторник и в среду утром. В ту же неделю эти передачи повторяются: по физике — в среду и в воскресенье утром; по математике — в четверг и в субботу вечером.

В основу передач по физике и математике положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Телезанятия помогают закрепить, углубить, расширить и систематизировать школьные знания учащихся; занятие составляется с учетом тех вопросов программы, которые чаще всего вызывают затруднения у абитуриентов.

Регулярно слушателям телекурсов предлагаются домашние задания (они будут публиковаться в еженедельнике «Говорит и показывает Москва»), состоящие из задач и примеров различной трудности. Периодически проводятся контрольные работы по пройденным разделам. Кроме того, во время телепередач будут проводиться контрольные опросы.

Выполнив домашнее задание, слушатель курсов должен выслать на телестудию открытку — отчет о выполнении работы. Написавшие контрольную работу высылают отчет и саму работу. Эти отчеты проверяются сотрудниками телекурсов и оцениваются в условных баллах по специально разработанной шкале.

В 1973/74 учебном году, как и в прошлые годы, телекурсы будут проводить очные зачеты по пройденным темам (два раза по математике и два раза по физике). Как показывает опыт работы курсов, встречи учащихся с преподавателями значительно повышают эффективность телеобучения: будущие абитуриенты, находясь в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах, проходят своеобразную психологическую подготовку. С другой стороны, и преподаватели в результате непосредственного контакта с телезрителями могут установить, как воспринимается слушателями излагаемый материал, и, если это необходимо, оперативно внести соответствующие коррективы в свою работу. Наряду с приемом зачетов предполагается и периодическое проведение очных консультаций.

На очные зачеты и консультации вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Принимают зачеты и проводят консультации преподаватели столичных вузов. Слушатели, успешно сдавшие зачеты, получают свидетельства об окончании подготовительных телевизионных физико-математических курсов.

На телекурсы могут быть зачислены как учащиеся выпускных классов средних общеобразовательных школ и техникумов, так и лица, уже имеющие среднее образование Прием на телекурсы проводится без конкурса.

Желающие заниматься на подготовительных телевизионных курсах должны прислать на Центральное телевидение в Главную редакцию научно-популярных и учебных программ «Анкету-заявление» и «Регистрационную карточку».

Оформляются они следующим образом.

Возьмите две обыкновенные почтовые карточки и на лицевой стороне каждой напишите полностью и разборчиво свой домашний адрес, фамилию, имя, отчество. Одна из этих карточек будет являться «Анкетой-заявлением», другая — «Регистрационной карточкой».

Обратные (чистые) стороны карточек заполните так, как указано на образцах, причем карточки располагайте короткой стороной по горизонтали.

Приводим пример заполнения «Анкеты-заявления» и «Регистрационной карточки» при поступлении на математическое отделение телекурсов.

Не забудьте приклеить к «Регистрационной карточке» свою фотографию (в верхний левый угол), а нижнюю часть карточки разграфить на 50 клеточек (5 горизонтальных рядов по 10 клеточек в каждом; размер клетки 10 × 10 мм).

АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ «М»

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Год рождения.
3. Род занятий (учусь, работаю)
4. Место работы, должность, стаж (если работаете).

Прошу принять меня на отделение математики Московских подготовительных телекурсов для поступающих в вузы.

Подпись, дата.

№ . . . «М»

Фотография 3×4

РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Последняя годовая оценка по математике, полученная вами в школе или среднем учебном заведении.
3. Место учебы (если учитесь).
4. В какой вуз собираетесь поступать.

К «Анкете-заявлению» и «Регистрационной карточке» приложите незаклеенный конверт с написанным на нем своим адресом (в этом конверте слушателю, зачисленному на курсы, высылается «Извещение о зачислении не телекурсы»), вложите все это в другой конверт и отправьте по адресу: *113162, Москва, Шаболовка, 53, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы для поступающих в вузы.*

При поступлении на физическое отделение телекурсов «Анкета-заявление» и «Регистрационная карточка» оформляются так же; естественно, на обеих карточках нужно в правом верхнем углу проставить вместо буквы «М» букву «Ф», в «Регистрационной карточке» в третьем пункте проставить последнюю годовую оценку по физике, в «Анкете-заявлении» указать, что хотите поступить на физическое отделение телекурсов, и на конверте, который вы отправите на телестудию, сделать пометку «Ф».

Желающие заниматься на обоих отделениях должны оформить две «Анкеты-заявления» и две «Регистрационные карточки» (отдельно для физического и для математического отделений); однако оба заявления и обе регистрационные карточки пошлите в редакцию в одном конверте (сделав на нем две пометки «Ф» и «М»).

Отчеты о выполнении домашних заданий оформляются на обычных почтовых карточках (на каждой карточке — отчет о выполнении только одного домашнего задания) следующим образом.

На лицевой стороне карточки в графах «куда» и «кому» напишите свой домашний адрес, фамилию, имя, отчество. В графе «адрес отправителя» — адрес редакции: *113162, Москва, Шаболовка, 53, Московские подготовительные телекурсы, Математика* (или *«Физика»*).

На обратной (чистой) стороне карточки выпишите ответы к задачам и примерам домашнего задания.

Домашнее задание по физике состоит из пяти задач. Ответы к ним надо давать в аналитическом виде (формулой) и в числовом (в системе СИ). Каждая верно решенная задача оценивается в два балла (1 балл — за правильную аналитическую формулу и 1 балл — за правильный числовой ответ).

Домашнее задание по математике состоит также из пяти задач (или примеров) различной трудности.

Под ответами на домашние задания как по физике, так и по математике слушатель должен написать дробь, числитель которой означает сумму баллов, полученных учащимся за все предыдущие домашние задания (проставляется самим слушателем), а знаменатель — сумму баллов за данное задание (эта цифра проставляется преподавателем курсов).

На карточке-отчете о выполнении домашнего задания каждый раз обязательно проставляйте номер домашнего задания и свой шифр (ваш шифр будет указан в присланном вам «Извещении о зачислении на телекурсы»).

В нижней части карточки (после ответов) пишите вопросы, замечания, предложения.

Заполненную карточку вложите в конверт и отправьте в редакцию. На конверте обязательно проставляйте номер домашнего задания, свой шифр и букву «М» (или «Ф»).

После проверки карточка отсылается обратно слушателю. Оценку за выполнение домашнего задания вносите в «Извещение о зачислении на телекурсы» (в клеточку, соответствующую данному заданию).

Срок выполнения домашних заданий — две недели со дня их публикаций в еженедельнике «Говорит и показывает Москва».

А. В. Каганов, И. И. Наслузов

«Квант» для младших школьников

Задачи

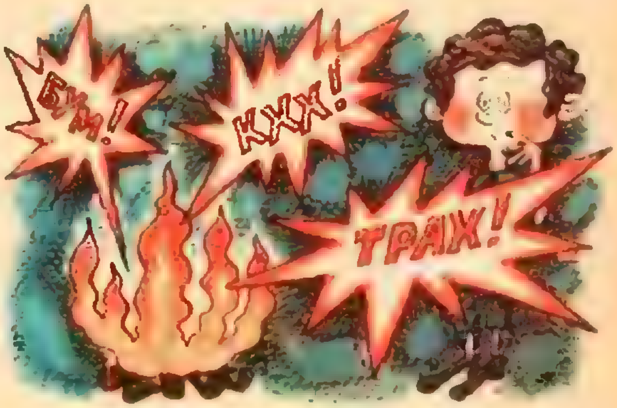
1. В примере на сложение цифры были заменены буквами, получилось вот что:

УДАР + УДАР = ДРАКА.

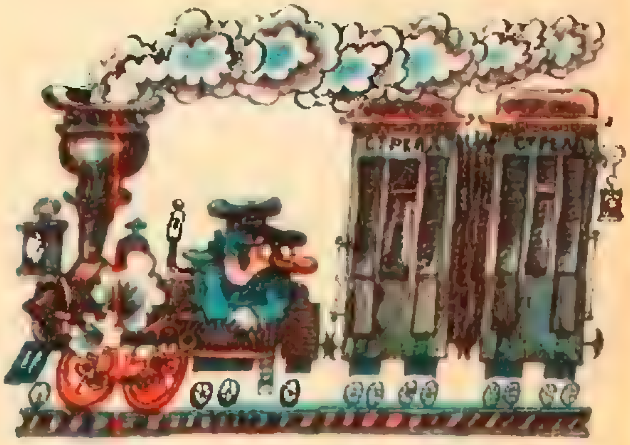
Попробуйте расшифровать этот пример.

2. Семиклассник Петя переехал в новый пятиэтажный дом, у которого 1-й и 2-й этажи во 2-м и 3-м подъездах заняты под магазин. Все лестничные площадки дома устроены одинаково, на каждой из них находится не более четырех квартир. Номер квартиры Пети — 31. На каком этаже живет Петя?

3. На веревочной петле в горизонтальном положении висит палка, один конец которой значительно толще другого. Палку разрубили в том месте, где была петля. Одинаков ли вес получившихся частей?


БУМ!
КХХ!
ТРАХ!

4. Почему трещат горящие дрова?



5. Если машинист не может сразу сдвинуть с места тяжелый состав, он дает сначала задний ход, а затем медленно трогает состав с места. В чем тут дело?

Художник Э. В. Назаров

Новоселы зоопарка «Кванта»

В «Кванте № 1 за 1972 год была опубликована статья А. Ю. Сойфера «Наш зоопарк», в которой самым маленьким читателям нашего журнала была предложена новая игра: из 12 фигурок треугольного гексамино сложить первых обитателей зоопарка «Кванта» — двух веселых гусей и верблюда. Предлагалось также придумать новых обитателей зоопарка. Сегодня мы познакомим вас с ними.

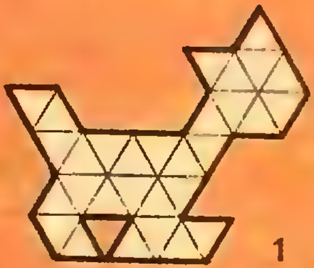
Наш зоопарк пополнился новоселами. Они прибыли к нам из Москвы и Казани, города Электроугли Московской области и Норильска, города Навои Бухарской области и Тобольска Тюменской области. Новоселов оказалось очень много, мы представим вам самых интересных.

Оля Ш. (к сожалению, свою фамилию Оля не сообщила) из г. Электроугли прислала нам очаровательного котенка (рис. 1) и черепаху, которая смотрит, не слишком ли быстро она идет (рис. 2). Девятилетний Вова и двенадцатилетний Толя Шустовских из г. Тобольска прислали курицу (рис. 3) и множество собачек, одну из которых мы предлагаем вашему вниманию (рис 4).

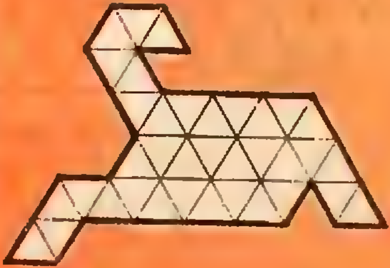
«Свою фигурку я назвал „Кот на охоте" (см. рис. 5), так как создается впечатление, что кот, выгнув спину, готовится прыгнуть на свою жертву», — пишет Сметанин Андрей из Норильска. Отметим, что «Кот на охоте» состоит из всех двенадцати треугольных гексамино!

Ждем ваших писем, в которых надеемся найти новых зверюшек для зоопарка «Кванта» и ответ на вопрос, как сложить наших новоселов.

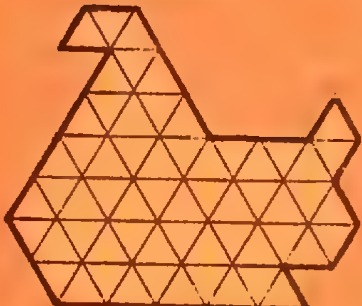
А. Ю. Сойфер



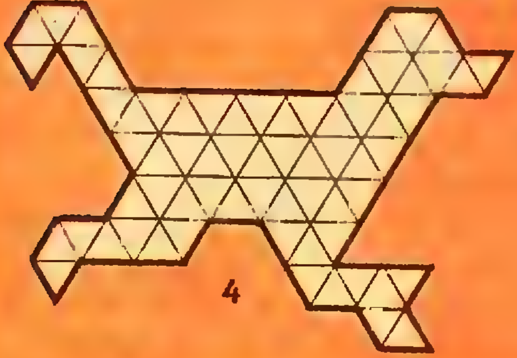
1



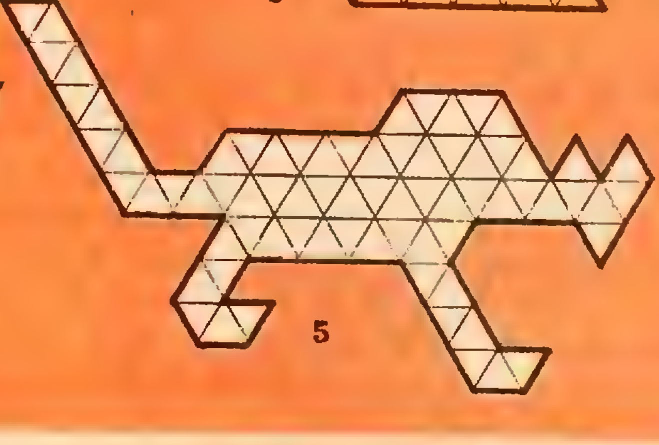
2



3



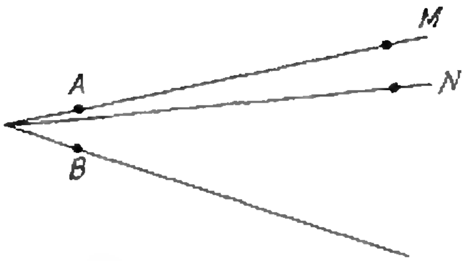
4



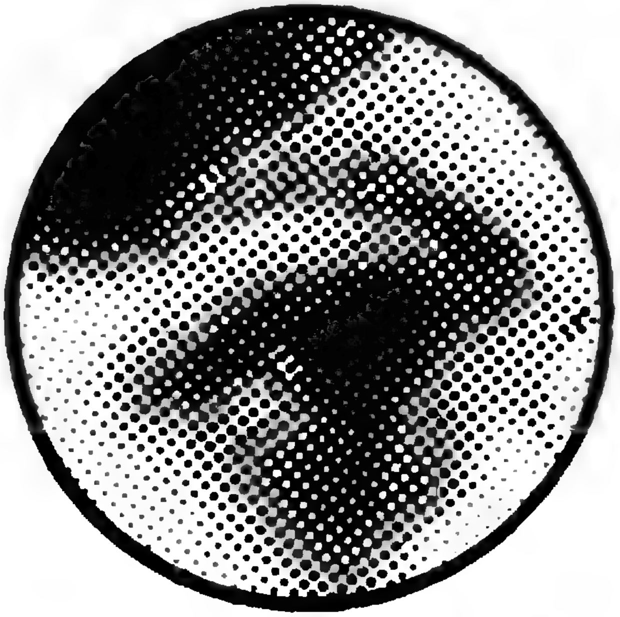
5

у нас в гостях журнал alpha

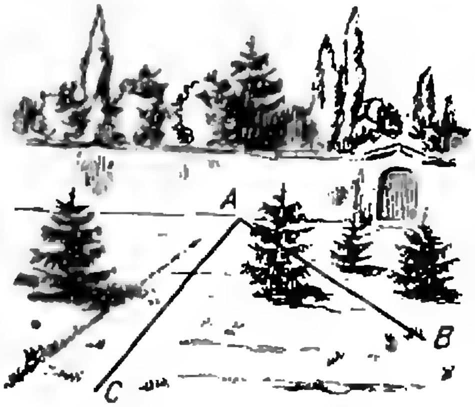
И. Леман



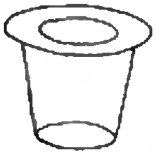
Одинаковы ли расстояния между точками *A*, *B* и *M*, *N*?



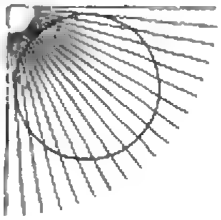
Что, по-вашему, изображено на этой фотографии?



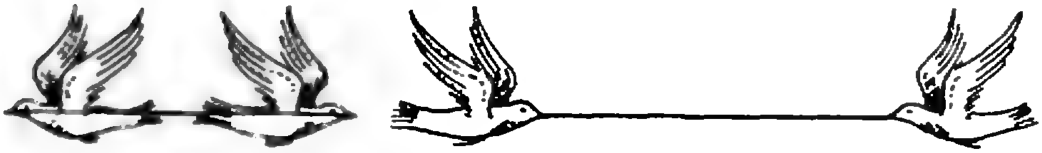
Какой отрезок длиннее: *AB* или *AC*?



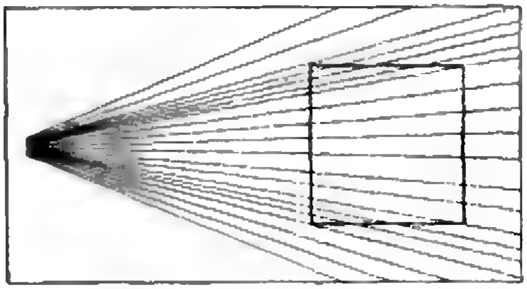
Какой эллипс больше: нижний или внутренний верхний?



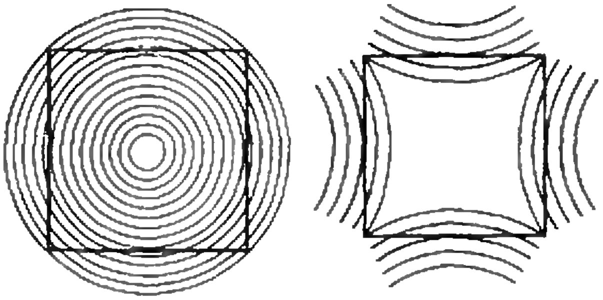
Это окружность?



Какая веревочка длиннее?



Квадрат или не квадрат?



Как вы думаете, есть ли на этих рисунках квадрат?

К статье «Красочная комбинаторика»

4. Применим специальную черно-белую раскраску (рис. 1). Квадратное тетрамино на любом участке доски покроет *нечетное* число белых и *нечетное* число черных клеток, прямое тетрамино покроет по две клетки каждой расцветки, и косое тетрамино покроет либо по две клетки каждой расцветки, либо 4 одного цвета и ни одной другого. 16 тетрамино, упоминаемых в условии, покроют *нечетное* число черных и *нечетное* число белых клеток доски данной расцветки. Но наша доска содержит *четное* число клеток каждого цвета, следовательно, не может быть покрыта указанными плитками тетрамино.

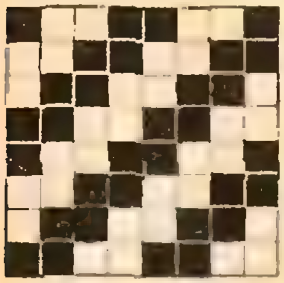


Рис. 1.

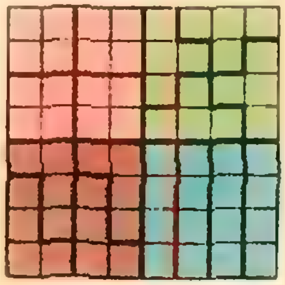
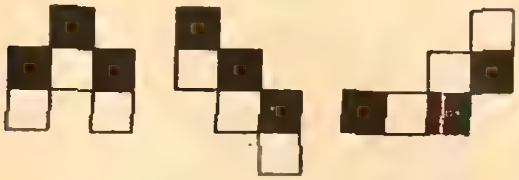


Рис. 2.


Представители «нечетных» тетрамино (их всего 24).

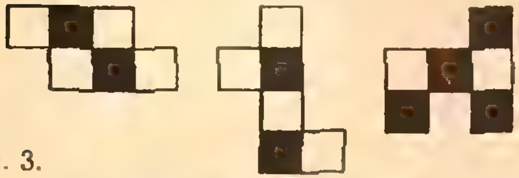


Рис. 3.
Представители «четных» тетрамино (их всего 11).

5. См. рисунок 2.

6. а) Если все 35 возможных видов гексамино считать фигурами, вырезанными из шахматной доски с обыкновенным чередованием черных и белых клеток, то у 24 фигур окажется по 3 клетки каждого цвета («нечетные» гексамино), а у 11 фигур — 2 клет*ки одного цвета и 4 — другого («четные»* гексамино) — убедитесь! Несколько фигур «нечетной» и «четной» категорий показано на рисунке 3.

б) Предположим, что удалось из 35 плиток гексамино составить какой-либо прямоугольник в 210 клеток ($35 \times 6 = 210$). Так как «нечетных» гексамино четное число (24), а остальные гексамино — «четные», то покрытый ими прямоугольник должен содержать *четное число черных клеток и четное* число белых. Но любой прямоугольник из 210 клеток с шахматным чередованием черных и белых клеток содержит *нечетное* число (105) черных клеток и *нечетное* число (105) — белых.

8. Нет. Воспользуйтесь раскраской в статье на рисунке 8.

11. Забирая желтые орехи, мы брали и настоящие. При первых пяти дележах моряк получал на один орех меньше, чем в задаче без мартышки, а при последнем дележе каждый моряк получил на один орех меньше. Получилось 10 лишних орехов — шесть мартышке и четырех желтых.

12. См. рисунок 4.

13. Каждый куб можно поставить разными способами (6 разных верхних граней и в каждой такой позиции еще 4 разных передних грани); комбинируя ориентации всех четырех кубов, получаем 24^4. Но готовый параллелепипед имеет 4 ориентации (проверьте), итого $24^4 : 4 = 82944$ возможных

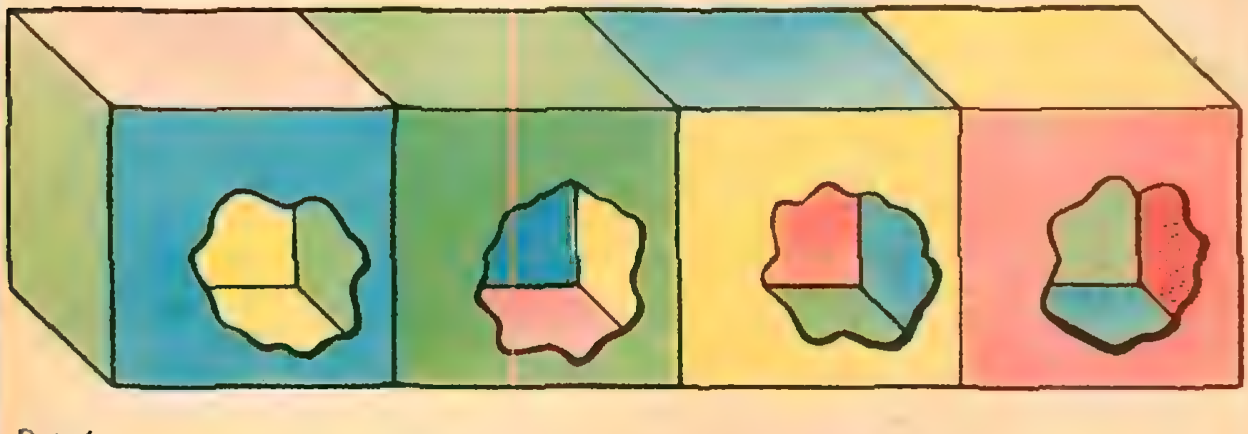


Рис. 4.

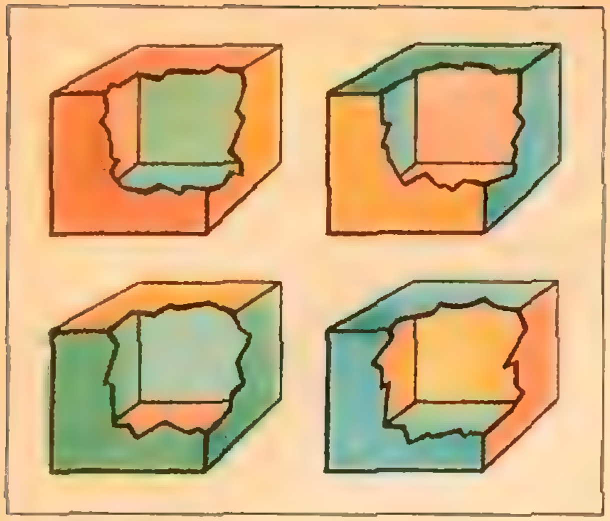


Рис. 5.

конструкций *). Условию задачи удовлетворяют два таких параллелепипеда, они получаются друг из друга поворотом каждого кубика на 180° вокруг его передней грани (при этом передние грани кубиков не меняются, а верхняя и нижняя грани каждого кубика меняются местами). Итого 2 шанса из 82944.

14. Для расцветки, показанной на рисунке 5, удовлетворяющей условию задачи, решение головоломки найдите самостоятельно.

К статье «Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными»

1. Нет.

2. Уравнение $x = 1$ имеет единственное решение $x = 1$, в решением системы является любая пара чисел вида $(1, a)$.

3. $a = -2/3$.

4. $a = 3$.

5. $a = 1$, $b = -1$.

6. Числа, по модулю равные 1.

7. Прологарифмировать систему по основанию 2.

8. $x_1 \neq x_2$.

9. При $a \neq 1$, $a \neq -2$ будет

$$x = y = z = \frac{1}{a+2};$$

при $a = 1$ будет $z = 1 - x - y$, где *x, y — любые; при $a = -2$ нет решений.*

10. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ (во втором случае две последние точки совпадают).

---

*) Мы считаем, что снизу стоит кубик № 1, на нем — кубик № 2 и так далее.

Корректор *Н. Б. Румянцева*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект 15,
«Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 6/VI 1973 г.
Подписано в печать 19/VII 1973 г. Заказ 1077
Бумага 70×100¹/₁₆ Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. 6,5
Уч.-изд. л. 7,68 Тираж 348 835 экз. Т-11138
Цена 30 коп.

К статье «Силы трения»

1. $S \approx v^2/2kg \approx 5$ *см.*

2. $v \approx 87$ *км/ч.*

3. $N \approx 600$ *н.*

4. $v_{\max} = \sqrt{kgR} \approx 75$ *км/ч* $(R = r\sqrt{3})$.

К статье «ВМШ при Московском математическом обществе»

1. Колодец можно рыть в любом месте между третьим и четвертым домами.

2. 2 очка (5 команд).

3. а) Вычтите число 3 из обеих частей уравнения и разложите левую часть на множители.

б) Есть два пути: если x больше 5, то y^2 оканчивается на 2, чего не может быть; если x больше 6, то y^2 делится на 3, но не делится на 9, чего не может быть.

4. Проверьте, что если x не делится на 5, то $x^4 - 1$ делится на 5.

5. Опущенные на BC высоты треугольников ABC и DBC равны.

6. МЯУ = 102 или МЯУ = 103.

7. См. статью И. М. Яглома в «Кванте» № 3, 1972 (надо применить результат задачи М89).

8. Для отгадывания цифр достаточно одного вопроса: $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_3 = 100, \ldots$ $\ldots$, $a_n = 10^{n-1}$. Если известно лишь, что загаданы натуральные числа, то одного вопроса не хватит (докажите!), хватит двух: первым узнаем сумму этих чисел, пусть она меньше 10^k, во втором вопросе $a_1 = 1$, $a_2 = 10^k$, $a_3 = 10^{2k}$, ...

9. $x = 840 + 5a + 3b$, где $a = 0, 1, 2$; $b = 0, 1, 2, 3, 4$. **Указание.** Любой способ выдачи можно получить из любого другого, несколько раз меняя пять трешек на три пятерки.

10. $f(x) = 1 + x$ или $f(x) = 1 - x$.

12. Например, $a = -1$, $b = 4$, $c = 1$, $d = -3$, $e = 1$.

13. 192.

К задачам «„Квант“ для младших школьников»
(*см. «Квант» № 8, 1973*)

1. $b = a + 1$, $c = a(a + 1)$. Тогда $x = (a^2 + a + 1)^2$.

2. Эйхлер — инженер, Бауманн — электрик.

3. 36 *км/ч*, 99 *м.*

4. 18 часов.

5. 40 лет.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов, Московской области

Рукописи не возвращаются

VII Всесоюзная олимпиада школьников по физике

1

2

3

4

5

1. Награждение победителей.
2. Члены команды г. Ленинграда на закрытии олимпиады.
3. Председатель Всесоюзного оргкомитета олимпиады академик И. К. Кикоин (слева) и председатель жюри VII олимпиады по физике член-корреспондент АН СССР К. Я. Кондратьев на открытии олимпиады.
4, 5. Постоянные корреспонденты «Кванта» Ю. Лурье и Л. Брагинский.

ИНДЕКС 70465

Б47/1-42

9

К нашим читателям

С 1 сентября производится подписка на научно-популярный физико-математический журнал «Квант» на 1974 год.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, олимпиадные и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки, о проблемах, которые еще ждут своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале постоянно помещаются рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто руководит кружками или ведет факультативные занятия по физике и математике, а также всем, кто любит математику и физику.

Журнал распространяется только по подписке, которая производится без ограничений.

Цена номера 30 коп., стоимость годовой подписки 3 руб. 60 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

НОМЕР
10

Основан в 1970 году
1973
Квант
10

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор —
академик **И. К. Кикоин**
Первый заместитель главного редактора —
академик **А. Н. Колмогоров**

Редакционная коллегия:

М И Башмаков
С Т Беляев,
В Г Болтянский
Н Б Васильев
Ю Н Ефремов
В Г Зубов,
П Л Капица
В А Кириллин
А И Климанов
(главный художник),
С М Козел,
В А Лешковцев
(зам главного редактора),
Л Г Макар-Лиманов
А И Маркушевич
Н А Патрикеева
И С Петраков
Н Х Розов,
А П Савин
И Ш Слободецкий
М Л Смолянский
(зам главного редактора).
Я А Смородинский,
В А Фабрикант,
А Т Цветков,
М П Шаскольская
С И Шварцбурд
А И Ширшов

Редакция:

В Н Березин,
А Н Виленкин
Т М Макарова
(художественный редактор)
Н Б Мамулова,
Н А Минц,
Т С Петрова,
В А Тихомирова
Л В Чернова
(зав редакцией)
Художник **В В** Андреев

В НОМЕРЕ:

2 *Н Я Виленкин, В П Лишевский* Эварист Галуа
14 *А Ф Андреев* Сверхтекучесть жидкого гелия
22 *Л Е Садовский, А Л Садовский* Как измеряют площадь
30 *И М Яглом* Оценки углов
37 *Г Б Куперман, Е Д Щукин* Механические свойства кристаллов

Лаборатория «Кванта»

42 *Б И Алейников* Как определить полюса магнита?

Математический кружок

43 *Ю И Ионин, Л Д Курляндчик* Окрестность фигуры

Задачник «Кванта»

46 Задачи М226—М230, Ф238—Ф242
48 Решения задач М184—М189; Ф198—Ф202

Практикум абитуриента

56 *М Л Крайзман* Высота пирамиды
61 Московский физико-технический институт

Рецензии, библиография

64 *И Е Евгеньев* Книга о Вселенной
66 *К И Кашин.* Что такое «центроид»?
68 *Т. С. Петрова, М Л Смолянский* Новые книги

«Квант» для младших школьников

70 Задачи
71 *А С Варпаховский* Тайны совершенных чисел и дружественных пар
75 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с 13, 21, 36, 41, 60, 63, 65, 67*)

© «Квант», 1973 г

Эварист Галуа
(1811—1832)

Н.Я.Виленкин, В.П.Лишевский

ЭВАРИСТ ГАЛУА

«У меня нет времени... У меня нет времени!» Эти слова, нацарапанные майской ночью 1832 года почти неразборчивыми каракулями на листке, сплошь исписанном алгебраическими формулами, кричат о самой удивительной и трагической судьбе, которая когда-либо выпадала на долю ученого, — о судьбе Эвариста Галуа. Непризнанный гений, отверженный ученый, одинокий и непримиримо честный. В ночь перед дуэлью двадцатилетний юноша писал в последний раз, писал, прощаясь с друзьями, с наукой, с жизнью.

Эварист Галуа родился 26 октября 1811 года в городке Бур-ля-Рен в семье директора пансиона. Его мать Аделаида-Мари, дочь доктора прав Парижского университета, дала своему сыну хорошее гуманитарное образование. Его любимые авторы — Плутарх и Тит Ливий, Корнель и Расин — учили, что нет большего счастья, чем отдать жизнь за свободу своей родины.

В двенадцать лет Эварист поступил в Парижский лицей Людовика Великого. Там он стал одним из лучших — похвальные листы и призы за латинские стихи и переводы с греческого сыпались на него один за другим. Однако Эварист довольно быстро охладевает к литературе и истории и остается на второй год в классе риторики. Его работу оценили как посредственную, поведение — как рассеянное, ум — как слишком юный. Галуа воспользовался своим возвращением на повторный курс для того, чтобы одновременно учиться и в математическом классе. Там сразу обнаружились его исключительные математические способности. Элементарные книги по алгебре не удовлетворяли юношу: в них отсутствовал дух научного исследования. Зато учебник геометрии Лежандра он прочитывает, не отрываясь, как роман, и, когда кончает чтение, весь длинный ряд теорем прочно остается в его памяти.

Настоящее умственное наслаждение дает ему чтение работ Лагранжа, одного из крупнейших математиков XVIII века. С поразительной легкостью Галуа овладевает математическим анализом. Но больше всего его заинтересовала работа Лагранжа, в которой великий аналитик исследовал проблему разрешимости в радикалах алгебраических уравнений.

Еще в XVI веке итальянские математики Тарталья и Кардано вывели формулы для решения уравнений третьей степени, а Феррари, юный ученик Кардано, — формулы для решения уравнений четвертой степени. Но дальше дело застопорилось: никому не удавалось вывести формулу для решения уравнений пятой степени. В том, что такая формула существует, математики в то время не сомневались. Всем казалось, что дело лишь в том, чтобы найти эту формулу, составить волшебную комбинацию из коэффициентов уравнения, знаков арифметических действий и радикалов, по которой можно будет решить любое уравнение пятой степени. Но проходили столетия, а такую комбинацию никому не удавалось составить, хотя многие посвятили этому всю жизнь.

Лагранж отличался своеобразным складом ума. В каждом вопросе он стремился создать широкие теоретические концепции, связывающие в единое целое все множество отдельных задач, предложений и приемов. Этот же подход применил он и к вопросу о решении уравнений в радикалах. Он не стал составлять различные комбинации, а постарался понять, в чем была причина успешности приемов, примененных Кардано, Феррари, Эйлером, Чирнгаузеном и многими другими для решения уравнений 3-й и 4-й степеней.

Оказалось, что все они делали одно и то же — составляли выражения из корней уравнения, которые при перестановках корней принимали относительно мало различных значений. Например, если взять рациональное выражение, составленное из 4 корней x_1, x_2, x_3, x_4 уравнения 4-й степени, то при различных перестановках корней оно примет, вообще говоря, 24 различных значения (потому что 4 объекта можно переставлять 24 способами).

Одночлен x_1 примет при таких перестановках 4 значения: x_1, x_2, x_3, x_4, то есть столько же, какова степень уравнения; произведение

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\times \\ \times(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$$

при этих перестановках принимает лишь 2 различных значения; двучлен $x_1x_2+x_3x_4$ — только 3 различных значения. Лагранж доказал, что если $x_1, \ldots, x_n$ — корни уравнения n-й степени, то число перестановок k, не меняющих вида некоторого рационального выражения $f(x_1, \ldots, x_n)$, является делителем числа $n!$ ($n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$), а само это выражение удовлетворяет уравнению $n!/k$-й степени, коэффициенты которого могут быть выражены через коэффициенты заданного уравнения.

Анализируя всевозможные выражения, составляемые из корней данного уравнения, и перестановки, оставляющие эти выражения неизменными, Лагранж доказал, что если p — простое число, то решение любого уравнения p-й степени сводится указанным путем к решению уравнения степени $(p-2)!$. При $p=3$ имеем $(p-2)!=1$, уравнения первой степени решаются. Если же $p=5$, то $(p-2)!=3!=6$, то есть решение уравнения пятой степени сводится к решению уравнения шестой степени. «Отсюда следует, — писал Лагранж, — что весьма сомнительно, чтобы методы, которые мы рассмотрели, могли дать полное решение уравнения пятой степени». Главное же в работе Лагранжа было то, что он установил связь между решением уравнения в радикалах и перестановками корней. Эту связь он назвал «истинной философией решения уравнений».

Работы Лагранжа открыли перед Галуа новый мир. Все его помыслы отныне направлены на математику. Забыты история, литература, риторика; преподаватели этих наук пишут, что «его способности — это не более чем легенда, которой пора перестать верить...». Даже учитель математики Вернье, который был весьма высокого мнения о дарованиях Галуа, считает поведение Эвариста очень плохим, а его самого — скрытным и самолюбивым. Он видит, что юношей владеет страсть к математике, но пытается уговорить его заниматься и математикой, и риторикой. Поздно! Галуа уже вступил на путь самостоятельной научной работы. В шестнадцать лет он совершает ту же ошибку, которую за несколько лет до него сделал другой гениальный юноша — норвежец Нильс Абель, — он думает, что решил уравнение пятой степени. Какое значение имеет то, что Вернье дал ему лишь седьмую награду. Галуа уже не думает о лицее — он стремится в знаменитую Политехническую школу, где преподают ученики Лагранжа. Он верит, что в ней его оценят...

Однако попытка поступить в Политехническую школу окончилась про-

валом: знания работ Лежандра и Лагранжа оказалось недостаточно для того, чтобы решать изощренные задачи, предлагавшиеся экзаменаторами. Галуа вновь возвращается в опостылевший лицей. И здесь ему впервые улыбается счастье — он встречает учителя, который смог оценить его гениальность.

Ришар умел подниматься выше официальных программ, он был в курсе успехов наук и стремился расширить кругозор своих учеников. Отзывы Ришара о Галуа просты: «Он работает лишь в высших областях математики».

И действительно, уже в семнадцать лет Галуа получает первые научные результаты. Одна его заметка посылается в известный математический журнал и вскоре выходит в свет. И хотя заметка называется «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях», она всецело посвящена теории уравнений — Галуа исследует, как связаны друг с другом разложения двух корней уравнения в непрерывные дроби.

Эта заметка — лишь первая проба пера. В семнадцать лет Галуа сделал гораздо более важные открытия в теории уравнений и направил работу в Академию наук. Представить его работу взялся самый знаменитый из французских математиков того времени — Коши, но академик был слишком занят, и работа юного лицеиста попросту затерялась.

Продолжать эти исследования у Галуа уже не было времени: надо было готовиться к повторной попытке поступить в Политехническую школу. На этот раз ни у Эвариста, ни у его учителя Ришара сомнений в успехе не было — экзамены должен был держать не самонадеянный школьник, а глубокий знаток математики, автор научных работ.

И снова Эварист стоит перед экзаменаторами. Каштановые волосы, близоруко прищуренные глаза. Взволнованный и бледный, он выглядит моложе своих семнадцати с половиной лет. Руки нервно крошат мел. «Расскажите, что Вы знаете о логарифмах». И вмиг застенчивость Эвариста сменяется гневом: «Я не школьник! Не буду отвечать на такой простой вопрос!». Тогда Галуа предложили решить труднейшее уравнение. В несколько минут он набросал оригинальное решение. Не поняв написанного, экзаменатор засмеялся. После короткого спора выведенный из себя Эварист бросил в экзаменатора тряпку для стирания мела. Это был не только жест гнева, но и жест отчаяния: Галуа понял, что то, о чем он страстно мечтал, ускользает от него навсегда.

«Почему экзаменаторы задают кандидатам только запутанные вопросы? — записывает он. — Может показаться, что они боятся быть понятыми теми, кого спрашивают. Откуда взялась эта злосчастная манера нагромождать в вопросах искусственные трудности? Неужели кто-нибудь думает, что наука слишком проста? А что из этого получается? Ученик заботится не о том, чтобы получить образование, а о том, чтобы выдержать экзамены... Можно с полным правом сказать, что несколько лет назад появилась новая наука, приобретающая с каждым днем все большее и большее значение. Она состоит в изучении пристрастий господ экзаменаторов, их настроений, что они предпочитают в науке и к чему питают отвращение».

А через несколько дней после неудачных экзаменов на Эвариста свалилась новая, неизмеримо большая беда. Второго июля его отец Николя-Габриэль Галуа, затравленный политическими противниками, клерикалами и иезуитами, покончил с собой.

Эварист провожает прах своего отца. За гробом идут сотни жителей Бур-ля-Рена. Они отдают последние почести своему мэру, который бессменно руководил городом в течение семнадцати лет. Гроб вносят в церковь. Многие остаются на улице. Они не хотят войти в храм, служитель которого — виновник трагедии. Священника не видно, панихиду служит викарий. Приходский священник встречает процессию на кладбище. В толпе раздаются возмущенные крики: «Убийца!» В кюре летят камни.

В душе Эвариста смерть и похороны отца оставили глубокий след.

В феврале 1830 года восемнадцатилетний Эварист Галуа был зачислен в Приготовительную школу — ничтожную и бледную тень прежней Нормальной школы, упраздненной Бурбонами в 1826 году. Поступить туда ему было легко — ведь эта школа была как бы продолжением лицея Людовика Великого. В ней готовились кандидаты на звание преподавателя.

В Приготовительной школе Эварист сдает испытания на степень бакалавра литературы и математики. Лишь после второй попытки он был удостоен этого звания, плохо выдержав испытания по литературе, но очень хорошо — по математике и физике. Во время обучения Галуа публикует еще три научные работы, которые в январе 1830 года представляет на конкурс в Академию наук. Теперь его судьба в руках бессменного секретаря Академии — Фурье. Фурье начинает читать рукопись, но вскоре умирает. Вторая рукопись, как и первая, исчезает.

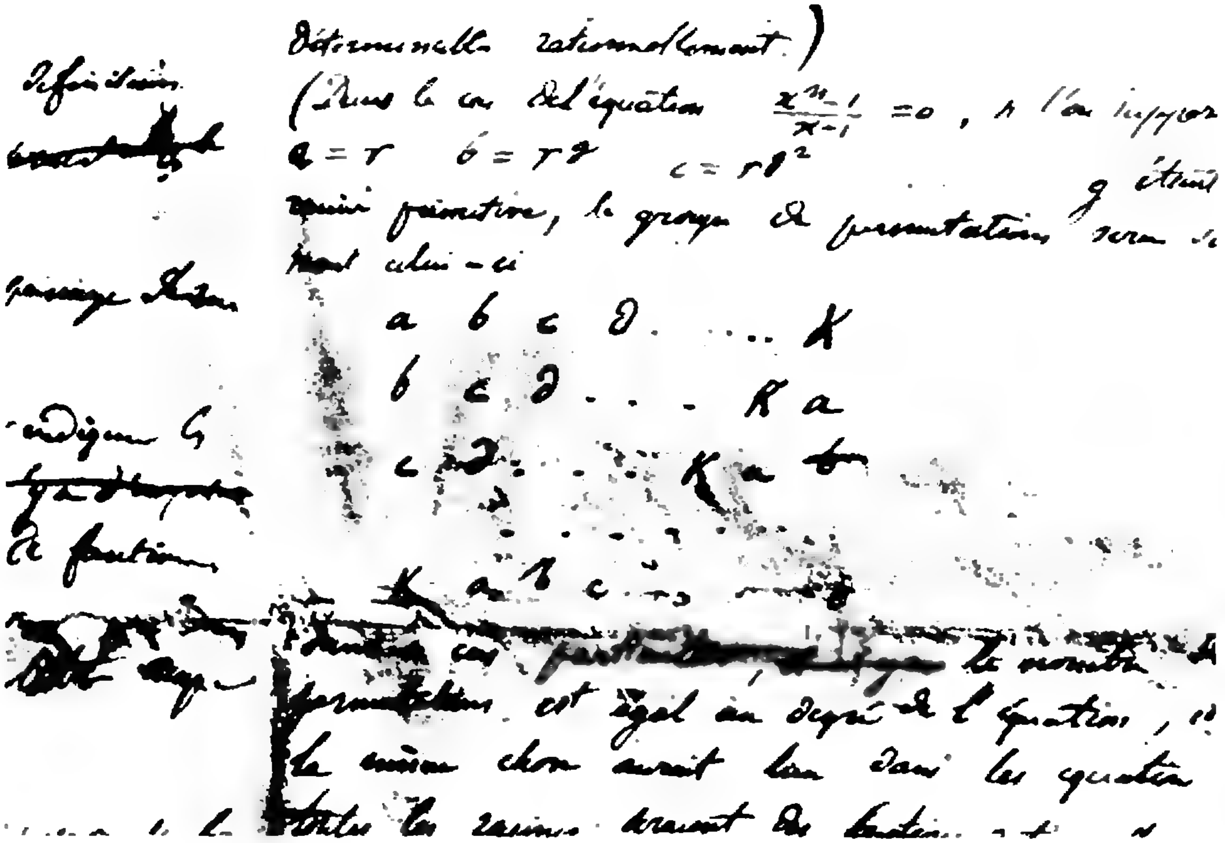
Летом 1830 года, когда Галуа заканчивал первый год обучения в Приготовительной школе, Июльская революция лишает власти короля Карла X. На баррикадах в первых рядах сражаются студенты Политехнической школы, той самой, куда так стремился попасть Галуа.

Приготовительной школой в то время руководил некто Гиньо. Пытаясь помешать своим студентам принять участие в развертывающихся событиях, он взял с них слово не покидать школу и распорядился запереть двери. Лишь два ученика отказались дать слово, требуемое директором, — Галуа и его кузен Бенар.

В ночь с 28 на 29 июля Галуа пытается вырваться на волю и присоединиться к восставшему народу. За это Гиньо подвергает нарушителя домашнему аресту. Галуа полон гнева и презрения к Гиньо, да и возведение на престол Луи-Филиппа вместо установления республики является в его глазах изменой идеалам, за которые сражались бойцы баррикад.

Во время каникул 1830 года Галуа активно участвует в работе революционных кружков, вступает в Общество друзей народа. После начала занятий в Нормальной школе (революция вернула ей прежнее название) юноша начинает борьбу со всесильным директором. В конце ноября Гиньо запрещает мятежному Галуа покидать школу.

Но Эварист не сдается. Он находит возможность нанести ответный удар. В декабрьском номере «Ля газетт дез эколь» за подписью «Ученик Нормальной школы» было помещено резкое письмо. Автор не ограничился критикой системы преподавания в



Факсимиле рукописи Э. Галуа.

школе. Он рассказал о политической беспринципности ее директора, описал издевательства, которым подвергаются «строптивые»... Для Гиньо было ясно, кто автор письма. Через четыре дня после его опубликования Эвариста исключают из школы.

Галуа оказался лишенным не только права посещать лекции, но и средств к существованию. Верный себе, Эварист не предается горестным размышлениям. Он действует. 9 января 1831 года в той же газете «Ля газетт дез эколь» появляется объявление: «В четверг 18 января г-н Галуа откроет публичный курс высшей алгебры у Кайо, книготорговца, улица Сорбонны, дом 5. Этот курс будет читаться во все четверги в час с четвертью; он предназначен молодым людям, которые, чувствуя, насколько неполно изучение алгебры в коллежах, желают углубиться в эту науку. Курс состоит из теорий, частично новых, которые никогда еще не изучались в публичных курсах. Мы ограничимся тем, что назовем новую теорию мнимых, теорию уравнений, разрешимых в радикалах, теорию чисел и эллиптических функций, трактуемых чисто алгебраически». Это была неслыханная дерзость: исключенный ученик восставал против своих учителей, девятнадцатилетний юноша бросал вызов официальной Сорбонне.

Как утверждают свидетели, на первую лекцию пришло тридцать слушателей, на второй их было не более десяти, а на третьей (и последней) — четыре человека. Галуа читал слишком сложно.

Из приведенного объявления видно, что в это время Галуа уже владел идеями, обессмертившими его имя, — лекции посвящались разрешимости уравнений в радикалах. Над разрешимостью уравнений Эварист начал думать еще со школьной скамьи. Теперь он уже знал, что ошибся, общее уравнение пятой степени нельзя решить в радикалах (доказательство этой теоремы было опубликовано Абелем в 1826 году *)). Но ведь доказательство Абеля, равно как и исследования Лагранжа, относились к общим уравнениям, к уравнениям с буквенными коэффициентами. А что будет, если рассматривать лишь уравнения с числовыми коэффициентами? Ведь может же случиться, что, хотя общей формулы для решения таких уравнений нет, корни каждого отдельного уравнения можно выразить в радикалах. А если это не так?.. Тогда должен быть какой-то признак, позволяющий определить, решается данное уравнение в радикалах или нет. Что же это за признак?

Нет сомнений, что путеводной звездой для Галуа, кроме работы Лагранжа, служила работа Гаусса (написанная им в семнадцать лет) о построении правильных многоугольников **). В этой работе Гаусс исследовал, при каких n уравнение

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0 \qquad (1)$$

можно решить в квадратных радикалах, используя, кроме арифметических действий, лишь извлечение квадратных корней. Но было ясно, что если допустить возможность извлечения корней любой степени, то уравнение (1) решается в радикалах.

Чем же отличается уравнение (1) от уравнений общего вида?

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (2)$$

Тем, что между корнями имеются зависимости, которых нет для корней уравнения (2). Ведь в общем случае между корнями $x_1, \ldots, x_n$ уравнения (2) есть только найденные еще в XVI веке французским математиком Виета зависимости

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}\ x_n = a_2, \quad (3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_n \end{array}$$

и те соотношения, которые можно вывести из них с помощью арифметических операций. А корни уравнения (1) имеют вид *)

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, и из формулы Муавра видно, что

$$x_1^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n+1} + i\sin\frac{2\pi}{n+1}\right)^k = \\ = \cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1} = x_k,$$

то есть

$$x_1 = x_1,\ x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3,\ x_4 = x_1^4, \ldots$$

А на соотношениях вида $x_k = x_1^k$ и вытекающих из них следствиях построено все доказательство Гаусса. Но отдельные следствия из этих соотношений отличаются от них лишь номерами корней. Например, при $n = 4$ из соотношений $x_k = x_1^k$ вытекают и такие:

$$x_2 = x_2,\ x_4 = x_2^2,\ x_1 = x_2^3,\ x_3 = x_2^4.$$

Чтобы получить их из соотношений $x_k = x_1^k$, достаточно поменять номера корней по такому закону:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта запись означает, что x_1 переходит в x_2 (то есть x_1 заменяется на x_2), x_2 — в x_4 и т. д. Далее, корни можно переставить еще раз. При этом x_1 сначала переходит в x_2, а потом x_2 — в x_4. Окончательно, x_1 переходит в x_4. Если проследить за всеми корнями, то окажется, что при повторном применении перестановки (4) получа-

---

*) Короткое сообщение появилось еще в 1824 году.

**) О ней смотрите статью: Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса. «Квант», 1972, № 1.

*) В самом деле, это уравнение можно записать в таком виде:

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 0.$$

А по формуле Муавра

$$\left(\cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1}\right)^{n+1} - 1 = \\ = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k - 1 = 0.$$

ется перестановка

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Так получаются 4 различные перестановки корней, в том числе и тождественная перестановка

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

при которой все корни остаются на месте. Эти перестановки, и только они, переводят соотношения $x_k = x_1^k$ в другие соотношения, выполняющиеся для корней уравнения (1) при $n = 4$. И любопытно вот что. Если сделать сначала одну такую перестановку, а потом другую, то в результате получится перестановка, которая тоже переводит верные соотношения в верные. Эти перестановки можно умножать подобно числам.

А нет ли таких перестановок и для других уравнений? Ведь и для них можно составлять соотношения между корнями и смотреть, при каких перестановках верные соотношения будут переходить в верные. Конечно, самые лучшие — это те уравнения, корни которых — рациональные числа. Такие уравнения решаются без извлечения корней. Для таких уравнений есть очень простые соотношения между корнями $x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n$, и единственной «перестановкой», сохраняющей эти соотношения, является тождественная перестановка. Значит, уравнение тем проще, чем меньше совокупность перестановок, сохраняющих соотношения между корнями! Следует как-то назвать такие совокупности перестановок. Эти перестановки собираются вместе, группируются. Не назвать ли их совокупность *группой*?

Вряд ли, применив это название, Эварист думал, что он вводит в математику новое понятие, которому суждена долгая и славная жизнь, что число работ, посвященных группам, будет исчисляться многими тысячами, что методы теории групп откроют тайны кристаллических решеток, атома и многое другое. Он хотел лишь посмотреть, что происходит с группами перестановок корней в процессе решения уравнений.

Конечно, Галуа не был первым, кто имел дело с группами перестановок корней. Ими занимались уже и Лагранж, и Гаусс. Сам Галуа понимал, что идеи, высказанные им, в неявной форме содержались в работах его предшественников.

Но велика заслуга того, кто разъяснил такие идеи, сформулировал существенные свойства понятий, применил их к решению новых и трудных задач. Это и сделал Галуа для понятия группы — лишь после его работ оно стало предметом изучения математиков.

Однако вернемся к ходу рассуждений Галуа. Теперь надо внимательнее посмотреть, какие соотношения могут быть между корнями уравнения. Это зависит от того, какие коэффициенты считать допустимыми в таких соотношениях. Возьмем уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Если в соотношениях допустимы лишь рациональные коэффициенты, то для его корней есть только соотношения Виета, соотношения вида $x_k = x_1^k$ и те, которые из них получаются с помощью рациональных операций. Но если допустить коэффициенты более сложного вида, то появятся и новые соотношения.

Чем шире множество коэффициентов, тем больше соотношений между корнями. А тогда перестановки, сохранявшие верными все старые соотношения, могут уже оказаться непригодными: они могут нарушать новые соотношения. Значит, с расширением множества коэффициентов группа уравнения уменьшается. Но ведь если уравнение решено, то его группа превращается в единичную, то есть в группу из одной тождественной перестановки. Так вот в чем тайна решения уравнений! Надо расширять множество коэффициентов и следить за тем, как меняется при этом группа уравнения (через много десятилетий все математики будут называть ее группой Галуа). Как только группа превратится в тождественную, уравнение решено. А расширять множество коэффициентов надо, присоединяя к нему корни каких-то вспомогательных уравнений. Теперь ясно, какие вспомогательные уравнения хороши, — только те, присоединение корней которых к допустимому множеству коэффициентов уменьшает группу Галуа.

Осталось выяснить, какой должна быть группа уравнения, чтобы его можно было решить в радикалах. Близкий результат появился в 1829 году в берлинском «Журнале Крелля». Его автором был знаменитый Абель. Он доказал, что уравнение решается в радикалах, если все его корни можно выразить в виде рациональных функций от одного корня $x_k = F_k(x_1)$, причем эти функции должны обладать следующим свойством коммутативности: $F_k(F_l(x_1)) = F_l(F_k(x))$. В этом случае и перестановки, сохраняющие соотношения $x_k = F_k(x_1)$, обладают тем же свойством коммутативности — их произведение не зависит от порядка сомножителей (для любых перестановок это не так).

Могучим напряжением ума Галуа решает задачу до конца. Оказывается, уравнение решается в радикалах в том и только в том случае, когда его группа определенным образом сводится к коммутативным группам перестановок (мы не будем здесь говорить точнее, что это значит). При этом Галуа вводит фундаментальные для всей теории групп понятия нормального делителя, смежного класса, разрешимой группы и так далее. Волшебный ключ найден — теория групп раскрывает тайны уравнений.

Перед Галуа разворачивается грандиозный план целой серии научных работ, которым суждено совершить переворот в математике... И здесь перед ним встает моральная проблема, о которой мы узнаем из записи, сохранившейся на листке бумаги:

«Человек, обладающий какой-нибудь идеей, имеет выбор: или пользоваться в течение своей жизни колоссальной репутацией ученого человека, или же оставить большое имя в будущем. Первое имеет место, если применять свою идею, не высказывая ее; второе — если ее опубликовать...»

Для Эвариста выбор ясен — его идеи принадлежат всему миру науки. Он хочет изложить все самое важное, что есть в его исследованиях, изложить добросовестно, без уловок, указывая путь, который привел его к этим результатам, отмечая все затруднения и нерешенные вопросы.

Но Галуа не было суждено выполнить свой план. Его захватили революционные события. Сразу после исключения из Нормальной школы он

вступил в артиллерию национальной гвардии. Из четырех батальонов артиллерии два почти целиком состояли из членов Общества друзей народа. Это была вооруженная сила революции, и правительство Луи-Филиппа постаралось как можно скорее распустить его. После этого Галуа участвовал во всех волнениях, потрясавших Париж на протяжении 1831 года. Математика была заброшена.

9 мая 1831 года Общество друзей народа организовало банкет в ресторане «Вандаж-де-Бургонь». Среди приглашенных на почетном месте — Александр Дюма. Многие участники в знак протеста надели мундиры артиллеристов национальной гвардии. Тосты за революцию 1793 года, за Робеспьера, за монтаньяров встречаются аплодисментами; тосты за революцию 1830 года — шиканьем и смехом. И вдруг… тост за Луи-Филиппа… Кто же провозгласил такой тост? Неужели неистовый республиканец Эварист Галуа? В ответ раздались свистки, но вдруг все умолкли — в руке у Галуа был не только стакан с вином, но и открытый нож! Осторожный Дюма предпочел удалиться с банкета. Но большинство осталось. Участники банкета, подражая Галуа, угрожающе поднимают руки и повторяют: «За Луи-Филиппа! За Луи-Филиппа!».

На следующий день Галуа арестовывают. Ему предъявляют обвинение «в попытке спровоцировать покушение на жизнь и особу короля французов путем заявления, сделанного в общественном месте во время публичного собрания». Суд, состоявшийся 15 июня, оправдал Галуа — защитник сумел убедить присяжных в том, что ресторан не является общественным местом. Галуа спокойно встал, взял со стола вещественных доказательств свой нож, закрыл его, положил в карман и вышел, не промолвив ни слова.

Но Эварист недолго оставался на свободе. 14 июля 1831 года, в день взятия Бастилии, несколько сотен манифестантов с развевающимися знаменами прошли по Новому мосту. Они протестовали против запрещения демонстраций Луи-Филиппом. В первых рядах — Галуа. На нем мундир национального гвардейца, в руке — карабин, под мундиром — кинжал. Как только демонстранты перешли мост, их окружили отряды полиции. Галуа был арестован вместе со многими другими участниками демонстрации. На этот раз его приговорили к шести месяцам тюремного заключения за незаконное ношение военной формы и оружия.

В тюрьме Сент-Пелажи Галуа отредактировал свои самые важные научные работы. В предисловии к одной из них он писал:

«Прежде всего, титульный лист этой работы не загроможден именами, фамилиями и званиями и не сопровождается похвалами скупым вельможам, кошелек которых открывается, когда вы им курите фимиам, и грозит захлопнуться, как только кадильница иссякает. Никто не увидит здесь заголовка, написанного аршинными буквами и выражающего почтительное благоговение перед светилом науки или каким-нибудь ученым покровителем, весьма полезным (и я даже сказал бы необходимым) для того, кто в двадцать лет хочет писать.

Я не говорю, что все хорошее в моей работе достигнуто благодаря советам и поощрениям такого-то. Не говорю потому, что это значило бы лгать...»

А лгать Эварист не мог. В тюрьме Сент-Пелажи он получил еще один «привет» от префекта полиции месье Жиске — пуля, пущенная 29 июля с чердака соседнего дома, влетела в камеру и расплющилась о стену в нескольких сантиметрах от головы заключенного.

Здесь же, в тюрьме, Галуа получил письмо из Академии наук. В нем лежала его рукопись и записка от секретаря академии Франсуа Араго:

«Дорогой месье Галуа!

Ваша рукопись была послана для ознакомления месье Пуассону. Он возвратил ее нам с отзывом, который мы здесь и приводим:

,,Мы приложили все усилия, чтобы понять доказательства месье Галуа. Его рассуждения недостаточно ясны, недостаточно развернуты и не дают возможности судить, насколько они точны...''»

Академия вновь, в который раз, не поняв, отвергла его работу...

Впрочем, отчасти в этом был виноват и сам Эварист. В спешке он не совсем ясно излагал свои мысли, а некоторые теоремы, которые не были им доказаны, сформулировал как доказанные. Да и стиль работ Галуа был непривычен для математиков начала XIX века. Новый стиль был провозвестником математики XX века. Вместо длинных выкладок для решения проблем применялись совершенно неожиданные идеи; кроме того, в его работах было слишком много новых понятий. Неудивительно, что Пуассону, научные интересы которого были далеки от теории алгебраических уравнений, эти работы показались недостаточно ясными.

Здоровье Эвариста ухудшается. 16 марта 1832 года его переводят в тюремную больницу. Именно здесь он познакомился с женщиной (имя ее осталось неизвестным), которая сыграла роковую роль в судьбе Галуа.

В последнюю ночь своей жизни он привел в порядок свои рукописи и написал несколько писем. В одном из них, адресованном своему единственному другу Огюсту Шевалье, он кратко изложил содержание своих исследований и попросил обратиться к виднейшим математикам для оценки важности этих результатов — в их истинности он не сомневался. Другое его письмо кончается словами: «Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis, involuta» *), как бы резю-

---

*) «Ослепляющий свет, ужасная буря, окруженная вечным мраком» (*лат.*).

мирующими его судьбу такой, какой он ее тогда видел.

Утром 30 мая 1832 года какой-то крестьянин около пруда в местечке Жантийи наткнулся на тяжело раненого в живот молодого человека. Раненого перевезли в больницу, где он скончался утром следующего дня на руках своего брата.

— Не плачь, — просил Эварист брата перед смертью, — не плачь. Мне нужно сохранить все свое мужество, чтобы умереть в двадцать лет.

В одном из последних писем он писал: «Я умираю жертвой подлой кокетки и двух преданных ей простофиль». Но Эварист знал не все. Уже упоминавшийся префект полиции Жиске в своих «Мемуарах» вспоминал: «Месье Галуа, неистовый республиканец, был убит на дуэли одним своим другом». Уже одна такая осведомленность префекта полиции подозрительна. Есть и другие факты, указывающие на то, что дуэль была специально подстроена, чтобы убрать «неистового республиканца», угрожавшего жизни короля. Ведь недаром же в другом письме, адресованном «всем республиканцам», Эварист писал: «Прощайте! Я отдал свою жизнь на благо народа!»

Только через 14 лет после смерти Галуа его работы были разобраны и опубликованы Лиувиллем. Признание же пришло еще позже — в 70-х годах прошлого столетия.

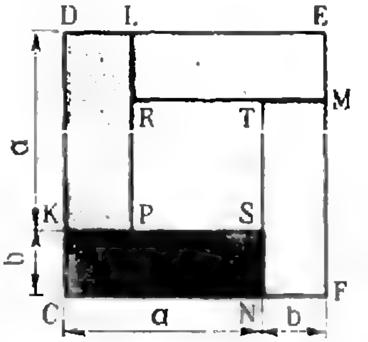
Сейчас имя Галуа — одно из самых популярных в математике. Группа Галуа, когомологии Галуа, поля Галуа — трудно перечислить все словосочетания, в которых встречается его фамилия. И когда, читая какую-нибудь научную работу, встречаешь сокращение Gal, не надо долго размышлять о его смысле: буквы Gal означают Galois — имя одного из величайших математиков всех времен и народов.

Новое доказательство

Вероятно, все наши читатели знакомы с теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Формулируется она так: *если есть два положительных числа a и b, то* $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, *причем равенство достигается, когда* $a = b$.

Приведем совсем простое и наглядное его доказательство.

Построим квадрат $CDEF$ со стороной $CD = a + b$ (см. рисунок). Предположим пока, что $a \neq b$. На сторонах квадрата от точек C, D, E, F отложим равные отрезки: $CK = DL = EM = FN = b$. Через точки L и N проведем прямые, параллельные стороне CD, а через точки K и M — параллельные стороне CF. Точки пересечения этих прямых обозначим через R, T, S, P. В результате этих построений получаем квадрат $RTSP$ и четыре равных прямоугольника, так что площадь квадрата $CDEF$ оказывается равной сумме площади квадрата $RTSP$ и учетверенной площади прямоугольника $KDLP$.



Площадь квадрата $CDEF$ равна $(a+b)^2$, площадь прямоугольника равна произведению ab, получаем такое равенство:
$(a+b)^2 = 4ab + S_{\square RTSP}$.

Но так как $S_{\square RTSP} \geqslant 0$ (очевидно), то $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, откуда $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Л. М. Дубинский

А.Ф. Андреев

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ

Одним из важнейших достижений современной физики явилось открытие особых свойств жидкого гелия. Эти свойства неожиданны и парадоксальны. В настоящее время все они объединяются понятием сверхтекучести — явлением, открытым советским физиком П. Л. Капицей в 1938 году. Явление сверхтекучести, разумеется, не сводится к чисто количественной оценке, то есть к тому, что жидкий гелий течет значительно лучше других жидкостей. Свойства сверхтекучего гелия *), как показал в 1941 году советский физик-теоретик Л. Д. Ландау в своей теории сверхтекучести, — наиболее яркое проявление общих закономерностей в поведении любого вещества при достаточно низких температурах. Именно поэтому так велико то влияние, которое оказали исследования жидкого гелия и на другие, казалось бы, далекие области физики.

1. Свойства сверхтекучего гелия

Гелий не случайно называют инертным газом. Его атомы чрезвычайно слабо взаимодействуют с другими атомами и особенно между собой. Вот почему гелий переходит из газообразного состояния в жидкое при рекордно низкой температуре (4,2° К при нормальном атмосферном давлении) и при дальнейшем понижении температуры не затвердевает вплоть до абсолютного нуля. Твердый гелий существует лишь при повышенном давлении (около 25 атмосфер при температурах, близких к абсолютному нулю), когда из-за уменьшения расстояния между атомами силы сцепления возрастают, что способствует затвердеванию тела.

В интервале температур от 4,2° К до 2,2° К жидкий гелий ведет себя во всех отношениях как обычные жидкости. При температуре 2,2° К гелий переходит из обычного состояния, так называемого гелия I, в особое состояние — гелий II, обладающее свойством сверхтекучести. Ниже мы рассмотрим несколько наиболее важных экспериментов, проведенных с гелием II, и покажем, что результаты этих экспериментов в корне противоречат обычным представлениям о жидкости и что для их объяснения необходимо привлечение каких-то новых представлений.

Вязкость и сверхтекучесть

Первая загадка возникает при измерениях вязкости (или, другими словами, внутреннего трения) гелия II. В обычных жидкостях вязкость (точнее, коэффициент вязкости) может быть измерена двумя простейшими способами, дающими, конечно, один и тот же результат. Первый способ заключается в измерении скорости вытекания жидкости из сосуда через узкую щель под действием силы тяжести (рис. 1). Скорость жидкости, изображенная на рисунке стрелками,

---

*) Имеется в виду наиболее распространенный изотоп гелия He^4.

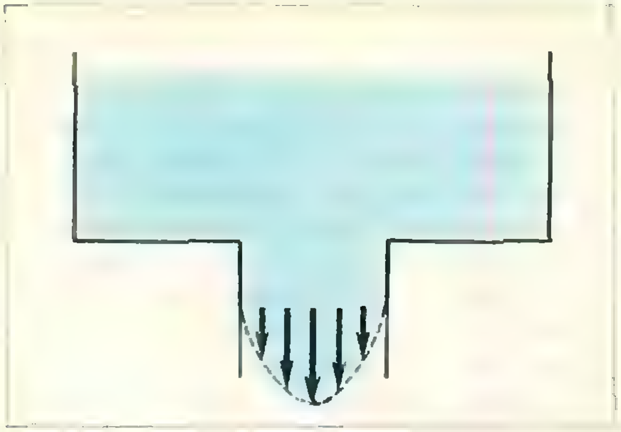


Рис. 1.

максимальна в средней части щели и убывает при приближении к стенкам. Различные слои движутся, таким образом, с разными скоростями, и поэтому между ними возникает сила внутреннего трения, от величины которой зависит скорость вытекания. По величине этой скорости можно судить о вязкости жидкости. Второй способ (рис. 2) заключается в измерении времени затухания крутильных колебаний погруженного в жидкость диска. Здесь все аналогично первому случаю. Жидкость вблизи диска увлекается его движением, а вдали она практически покоится. Различные слои жидкости вновь движутся с разными скоростями, и возникающая сила вязкости приводит в конце концов к тому, что энергия колебаний превращается в тепло. Измерив время затухания, можно определить вязкость.

Эксперименты с жидким гелием, проведенные первым способом, показали, что вязкость гелия I вполне заметна и измерима, но при переходе в область гелия II она скачком падает до неизмеримо малой величины, которая, скорее всего, равна нулю. Казалось бы, еще имеется возможность считать гелий II жидкостью, подчиняющейся обычным законам, но обладающей чрезвычайно малой вязкостью. Однако результаты измерений вторым способом дают для вязкости гелия II величину того же порядка, что и для гелия I. Таким образом, оказывается, что гелий II, в отличие от обычных жидкостей, в одних условиях совсем не обнаруживает вязкости, а в других его вязкость вполне заметна.

Фундаментальное свойство гелия II протекать через узкие щели, не обнаруживая вязкости, и было названо сверхтекучестью.

Перенос тепла и движение

В обычных жидкостях существует два механизма переноса тепла — теплопроводность и конвекция.

Теплопроводность — это передача тепла от более нагретых мест к менее нагретым в неподвижной жидкости. Рассмотрим следующий опыт (рис. 3). Нагреватель *H* излучает тепло в направлении, указанном на рисунке стрелкой; температура жидкости убывает слева направо. Если перенос тепла осуществляется теплопроводностью, то жидкость неподвижна, а от более нагретых мест к менее

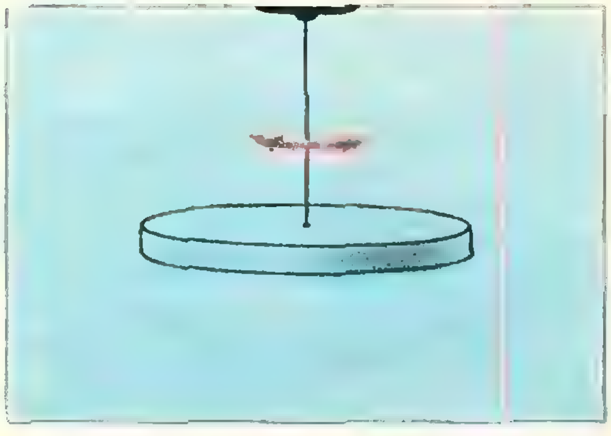


Рис. 2.

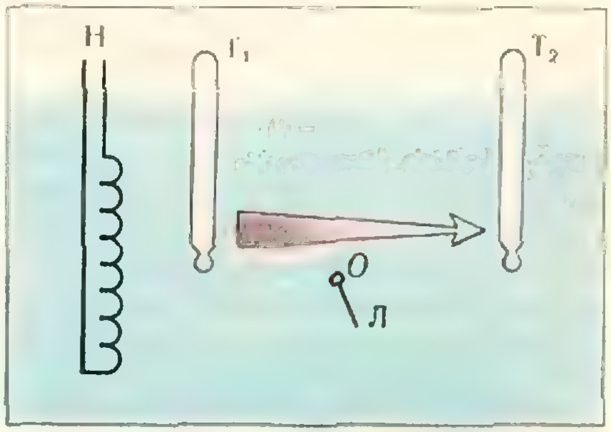


Рис. 3.

нагретым возникает поток тепла *). Для того чтобы теплопроводный поток тепла был отличен от нуля, необходимо, таким образом, чтобы термометр T_1 показывал более высокую температуру, чем термометр T_2. Количественной характеристикой теплопроводности является коэффициент теплопроводности, связанный с отношением потока тепла к разности температур. Чем больше коэффициент теплопроводности, тем больший поток тепла переносится в жидкости от одного участка к другому при одной и той же разности температур, или, другими словами, тем меньшая разность температур необходима, чтобы обеспечить один и тот же поток тепла.

Конвекционный перенос тепла связан с движением самой жидкости. Если в рассматриваемом опыте жидкость в силу каких-то причин приходит в движение в направлении слева направо, то в этом направлении происходит перенос тепла, поскольку движущаяся жидкость обладает тепловой энергией. Причиной возникновения потока тепла в данном случае является движение жидкости, а не разность температур. Конвекционный перенос тепла может, таким образом, происходить и при одинаковых показаниях термометров T_1 и T_2.

В обычных жидкостях конвекция связана с достаточно большими значениями потока тепла. Если поток тепла мал, то механизм переноса тепла является чисто теплопроводным, и мы можем определить коэффициент теплопроводности жидкости, измерив на опыте поток тепла и разность температур.

Если мы проведем этот опыт с гелием II, то обнаружим, что как угодно малые количества тепла переносятся через жидкость при абсолютно равных показаниях термометров T_1 и T_2. Можно сделать два вывода из этого результата. Предположим сначала, что в гелии II, как и в обычных жидкостях, при малых потоках тепла конвекция несущественна и основную роль играет теплопроводность. Тогда мы должны приписать гелию II бесконечно большую теплопроводность. Однако можно предположить, что в гелии II перенос тепла осуществляется всегда только посредством конвекции, а тогда разности температур может и не быть.

Для того чтобы выяснить, какое предположение соответствует действительности, поступим следующим образом. Установим в гелии лепесток *Л*, который может свободно вращаться вокруг неподвижной оси *О* (см. рис. 3). Мы обнаружим, что всегда, когда через гелий II протекает поток тепла, лепесток отклоняется в направлении потока, что явно указывает на движение жидкости. Таким образом, подтвердилась вторая гипотеза.

Ситуация, однако, значительно сложнее, чем нам сейчас может показаться. Рассмотрим следующий весьма наглядный опыт (рис. 4), проведенный П. Л. Капицей в 1941 году. Нагреватель *Н* установлен в гелии II, частично заполняющем замкнутый сосуд с единственным выходом в окружающий гелий II. Вблизи выхода находится тот же лепесток *Л* на оси *О*. Если включить нагреватель, то поток тепла будет вытекать из внутренней области наружу, что, как мы уже знаем, связано с движением жидкости. Действительно, лепесток *Л* отклоняется вправо, показывая, что

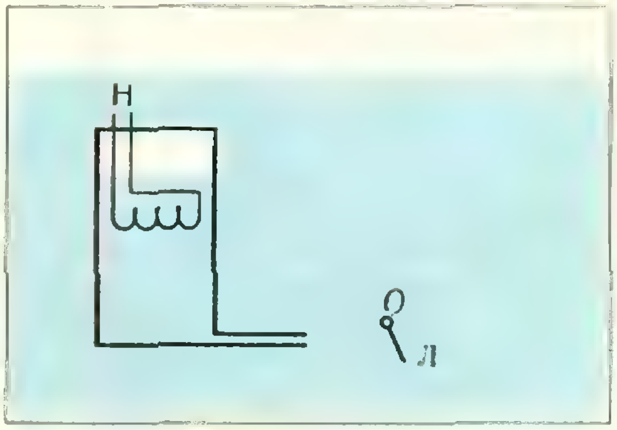


Рис. 4.

---

*) Поток тепла — это энергия, проходящая в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения энергии.

гелий вытекает из сосуда. Но самое удивительное в этом опыте то, что уровень жидкости в сосуде не понижается. Можно проводить опыт как угодно долго, лепесток все время будет отклонен. Жидкость, казалось бы, непрерывно вытекает, однако уровень остается прежним. Последний результат убедительно показывает, что законы движения гелия II должны принципиально отличаться от законов движения обычных жидкостей. В частности, и механизм конвекции в гелии II совершенно особый.

2. Теория сверхтекучести

При комнатных температурах существуют твердые тела, жидкости и газы. Если повышать температуру, то все твердые тела и жидкости превращаются в газ, то есть в систему, состоящую из отдельных свободно движущихся молекул. При дальнейшем повышении температуры тепловое движение атомов, входящих в состав молекул, становится столь интенсивным, что молекулы начинают распадаться на отдельные атомы. При еще более высоких температурах (порядка десятков тысяч градусов) атомы распадаются на электроны и атомные ядра. При столь высоких температурах любое вещество, таким образом, представляет собой газ, состоящий из свободных электронов и ядер*).

Сверхтекучий гелий II — это жидкость, существующая лишь при достаточно низких температурах (от 2,2° К и ниже). Поэтому, для того чтобы объяснить его свойства, нам необходимо выяснить сначала общие закономерности, связанные с изменением характера теплового движения в любом веществе при понижении температуры.

Элементарное возбуждение

Рассмотрим процесс понижения температуры, начав с температур порядка десяти тысяч градусов. Что произошло, когда электроны и ядро объединились в атом? Для нас существенно следующее. До объединения каждый электрон и ядро имели по три степени свободы, соответствующие их независимому движению в пространстве. После объединения возможно свободное движение лишь атома в целом. Число степеней свободы системы уменьшилось. Можно сказать, что с понижением температуры уменьшилось число возможных видов теплового движения.

При дальнейшем понижении температуры все новые и новые виды теплового движения исчезают, или, как говорят, вымерзают. Вслед за движением электронов относительно ядра вымерзает движение атомов относительно центра тяжести молекулы. При комнатных и более низких температурах мы можем вообще забыть о том, что молекулы состоят из атомов, которые в свою очередь состоят из электронов и ядер, и считать, что тепловое движение есть движение молекул как неделимых частиц. Когда газ или жидкость затвердевают, молекулы уже не имеют возможности свободно перемещаться в пространстве на заметные расстояния, а совершают лишь малые колебания вблизи определенных положений равновесия.

Процесс вымерзания видов теплового движения происходит, конечно, и при температурах ниже комнатных. Так как при абсолютном нуле температуры вообще все виды теплового движения должны исчезнуть, то можно предположить, что при достаточно низких температурах во всяком веществе эффективен лишь какой-то один наиболее устойчивый к вымерзанию вид теплового движения. Этот вид движения называют элементарным возбуждением. Элементарные возбуждения в разных веществах различны. Поэтому основная задача, возникающая при исследовании свойств какого-либо вещества при очень низких температурах, заключается в выяснении природы его элементарных возбуждений.

---

*) Такое состояние вещества называется плазмой.

Для жидкого гелия II это не может быть, конечно, движение отдельных атомов гелия *), хотя бы потому, что именно на таком представлении о тепловом движении основана физика обычных жидкостей, законам которой, как мы видели, свойства гелия II явно противоречат. Нужные нам элементарные возбуждения следует искать среди каких-то других видов теплового движения. Л. Д. Ландау предположил, что элементарными возбуждениями гелия II являются не движения отдельных атомов, а коллективные движения атомов жидкости, то есть звуковые колебания, и показал, что на основе этого предположения можно построить последовательную теорию сверхтекучести. Сейчас предположение о звуковой природе элементарных возбуждений полностью подтверждено многочисленными экспериментальными исследованиями.

Существуют и простые соображения, показывающие естественность такого предположения. Действительно, в обычных веществах процесс вымерзания движения отдельных молекул связан с затвердеванием жидкости. В твердом теле молекулы могут совершать, как уже отмечалось выше, лишь малые колебания вблизи определенных положений равновесия. Но это не есть независимые колебания отдельных частиц. Колебание какой-либо молекулы сразу передается соседям, и в результате возникает колебание всего коллектива молекул, то есть всего твердого тела. А это и есть звуковые волны. В обычных веществах, таким образом, процесс вымерзания движения отдельных молекул означает переход к звуковому типу движения. Звук может распространяться и в жидкостях, однако в обычных жидкостях он в конце концов всегда затухает просто потому, что его энергия превращается в энергию теплового движения отдельных частиц, которое играет там решающую роль. Но если мы имеем жидкость, о которой известно, как в случае с гелием II, что движение отдельных частиц в ней должно уже вымерзнуть, то звук неизбежно становится единственным видом теплового движения. Можно сказать так: процесс вымерзания индивидуального движения частиц рано или поздно обязательно должен произойти, и после этого может остаться только коллективный, то есть звуковой, вид движения. Во всех веществах этот процесс сопровождается затвердеванием. В гелии же из-за весьма слабого взаимодействия между атомами затвердевания не происходит, и поэтому переход от индивидуального к коллективному движению осуществляется в жидком состоянии.

Это свойство жидкого гелия отличает его от всех других жидкостей, и именно оно, как мы увидим, лежит в основе всех обсуждавшихся выше необычных явлений, наблюдавшихся в гелии II. Утверждение о том, что элементарными возбуждениями в гелии II являются звуковые волны, означает, что при низких температурах тепловое движение в жидком гелии целиком обусловлено наличием звуковых волн, которые распространяются по всем возможным направлениям. Внутренняя энергия теплового движения (или просто тепло) при этом есть не что иное, как энергия звуковых волн. При повышении температуры внутренняя энергия должна возрастать, а это значит, что должна увеличиться энергия звуковых волн.

Некоторые свойства звуковых волн в жидкости

Первое важное для нас свойство заключается в том, что распространение звука сопровождается переносом массы жидкости в направлении распространения. Если проследить за движением какой-либо частицы жидкости при распространении в жид-

---

*) Молекула гелия состоит из одного атома.

кости звуковой волны, то оказывается, что на ее колебательное движение накладывается медленное поступательное движение в направлении распространения волны*).

Наличие переноса массы в любой системе частиц означает, что система обладает отличным от нуля импульсом (количеством движения). Следовательно, и звуковая волна несет импульс в направлении распространения волны. Это подтверждается целым рядом опытных фактов. Например, если звук падает на стенку и поглощается ею или отражается, то изменение импульса передается стенке, и возникает так называемое звуковое давление.

В жидком гелии II тепловое движение обусловлено наличием звуковых волн. Обычно энергия волн, распространяющихся по различным направлениям, одинакова, и потому переноса массы нет. Если же по какой-либо причине звуковые волны приобретают преимущественное направление распространения, то в этом направлении возникнет перенос массы жидкости.

Рассмотрим еще вопрос об излучении звука в жидкости. Для того чтобы погруженное в жидкость тело излучало звук, необходимо, чтобы оно совершало колебательное движение. Тело, движущееся в жидкости с постоянной скоростью и не совершающее при этом никаких пульсирующих движений (изменений формы, размеров и т. п.), звук излучать не может.

Здесь следует сделать одну оговорку. Последнее утверждение справедливо, если скорость тела не слишком велика, во всяком случае меньше скорости звука. При сверхзвуковой скорости даже равномерно движущееся тело может излучать звук **).

Те же самые утверждения справедливы, очевидно, и в случае, когда тело неподвижно, а жидкость движется. В частности, если жидкость обтекает тело со скоростью, меньшей звуковой, то излучение звука невозможно.

Объяснение свойств гелия II

Свойство сверхтекучести жидкого гелия II непосредственно вытекает из свойств звуковых волн в жидкости. В самом деле, трение, возникающее при течении через щель обычных жидкостей, приводит к тому, что в результате взаимодействия частиц жидкости с неровностями стенок кинетическая энергия движения жидкости превращается в тепло. В случае гелия II, в котором внутренняя энергия представляет собой энергию звуковых волн, наличие трения означало бы, что энергия звуковых волн увеличивается, то есть что при обтекании неровностей стенок жидкость излучает звук. Но это, как мы видели, невозможно при малых скоростях течения.

Рассмотрим, однако, процесс течения гелия II через щель более подробно. Невозможность излучения звука означает, что в жидкости не могут появиться новые звуковые волны. Но при любой отличной от нуля температуре в ней уже имеются звуковые волны, связанные с наличием теплового движения. Чтобы рассмотреть их взаимодействие со стенками, выберем в качестве системы отсчета саму движущуюся жидкость, то есть будем считать, что жидкость покоится, а стенки щели движутся в противоположном направлении. Свойство сверхтекучести состоит в том, что движущиеся стенки не увлекают жидкость, но «увлекают» имеющиеся в жидкости звуковые волны. Действительно, при «столкновениях» звуковых волн с движущейся шероховатой стенкой они получают от нее некоторый импульс в направлении движений стенки. Ясно поэтому, что движение стенок приводит к появлению преимущественного направления распространения звуковых волн. При этом, как мы знаем, возникает перенос массы жидкости. Таким образом, в действительности движущиеся стенки увлекают своим движением некоторую массу, но при низких температурах энергия звуковых волн весьма мала, и потому переносимая ими масса много меньше полной массы жидкости.

---

*) Обычно этим поступательным движением пренебрегается, так как его скорость, пропорциональная амплитуде колебаний, мала по сравнению со скоростью распространения волны.

**) Наглядным проявлением этого эффекта является изменение характера излучения звука самолетом, преодолевающим звуковой барьер. Самолет, летящий с дозвуковой скоростью, излучает звук лишь благодаря вибрациям, связанным в основном с работой двигателей. При скорости, большей звуковой, интенсивность излучения резко возрастает, поскольку включается механизм непосредственного излучения звука самим самолетом.

Можно представить, как будто гелий II состоит из двух компонент, способных двигаться независимо друг от друга. Движение одной из них не сопровождается трением, и она называется поэтому сверхтекучей компонентой. При движении другой компоненты, увлекающейся стенками, как и в обычных жидкостях, возникает трение; эта компонента называется нормальной. Сумма масс обеих компонент равна полной массе жидкости. Нужно, конечно, иметь в виду, что разделение гелия II на две компоненты является чисто условным. В действительности, как мы видели, в гелии II могут существовать два вида движений, каждое из которых сопровождается переносом своей массы, причем сумма масс равна истинной массе жидкости. Одно из этих движений связано с движением звуковых волн и сопровождается трением, второе обладает свойством сверхтекучести. Все атомы гелия участвуют в обоих движениях, о разделении атомов на свертекучие и нормальные при этом не может быть и речи.

При повышении температуры энергия звуковых волн возрастает и вместе с тем возрастает масса, связанная с нормальным движением. Наконец, при некоторой температуре она становится равной истинной массе жидкости. При этом сверхтекучее движение исчезает, так как исчезает переносимая им масса, и гелий II переходит в гелий I, который ведет себя как обычные жидкости, поскольку в нем возможно только нормальное движение.

Если в гелии II равномерно движется какое-либо тело со скоростью, меньшей звуковой, то возникающее при этом сверхтекучее движение не оказывает ему никакого сопротивления. Действительно, если сила сопротивления отлична от нуля, то для перемещения тела к нему нужно приложить силу, которая совершит работу. Однако эта работа может превратиться лишь в тепло, то есть пойти на излучение звука в жидкости, что, как мы знаем, невозможно. Этот результат можно сформулировать и как отсутствие силы давления на тело, обтекаемое сверхтекучим движением. Звуковые же волны при встрече с поверхностью твердых тел, погруженных в жидкость, обмениваются с ними импульсом, что мы уже видели на примере их взаимодействия со стенками щели. Поэтому обтекание нормальным движением сопровождается возникновением силы давления.

Теперь мы можем легко объяснить рассмотренные вначале эксперименты с гелием II.

При измерении вязкости первым способом (опыт со щелью) вязкость гелия II не обнаруживается, поскольку сверхтекучая компонента весьма быстро вытекает через щель без трения. Тот факт, что она имеет плотность, несколько меньшую полной плотности, в данном случае совершенно незаметен, так как любая обычная жидкость, обладающая вязкостью протекала бы через достаточно узкую щель несравненно медленнее.

Измерения вязкости с помощью колеблющегося диска приводят к отличной от нуля вязкости потому, что диск движется в жидкости, содержащей обе компоненты. Затухание его колебаний происходит из-за взаимодействия с нормальной компонентой.

Можно сказать, что в эксперименте со щелью проявляет себя сверхтекучая компонента, а в эксперименте с диском — нормальная.

Выделение тепла в гелии II представляет собой процесс излучения звуковых волн. Перенос тепла в какомто определенном направлении происходит потому, что энергия звуковых волн, распространяющихся в этом направлении, больше, чем в обратном. Поэтому направление переноса тепла является в то же время направлением преимущественного распространения звуковых волн и связанной с ними нормальной компоненты. Перенос тепла в гелии II, таким образом, всегда сопровождается движением нормальной компоненты, то есть механизм переноса тепла всегда конвекционный. Вот почему в опыте, схема которого изображена на рисунке 3, показания термометров были одинаковы, а лепесток все время отклонялся в направлении теплового потока под действием обтекающей его нормальной компоненты.

Если поток тепла имеет место в гелии II, заполняющем некоторый замкнутый сосуд, как на рисунке 4, то непрерывного переноса массы жидкости в одном направлении не происходит, так как порождаемая потоком разность давлений вызывает движение сверхтекучей компоненты в обратном направлении. Причем, скорость сверхтекучего движения соответствует тому, что суммарный перенос массы отсутствует, поэтому уровень жидкости не меняется. Отклонение лепестка показывает, что из внутренней области вытекает нормальная компонента, а сверхтекучее движение остается незаметным, так как оно не оказывает давления на обтекаемые им тела.

Точки на плоскости

Вот задача, решение которой, на первый взгляд, кажется совершенно невозможным. Требуется найти на плоскости такой конечный набор точек, что перпендикуляр, восставленный в середине отрезка, соединяющего любые две точки, обязательно пересечет еще хотя бы две точки из этого набора. Тем не менее задача имеет интересное решение. А набор с таким удивительным свойством состоит всего из восьми точек. Постарайтесь отыскать его!

Задачи

Задача 1. *Какое число точек можно выбрать*

а) на плоскости,

б) в пространстве

так, чтобы каждые три точки служили вершинами прямоугольного треугольника?

Задача 2. *Какое число точек можно выбрать*

а) на плоскости,

б) в пространстве

так, чтобы каждые три точки служили вершинами тупоугольного треугольника?

И. Я.

Можно сказать, что в эксперименте со щелью проявляет себя сверхтекучая компонента, ■ ■ эксперименте с диском — нормальная.

Выделение тепла в гелии II представляет собой процесс излучения звуковых волн. Перенос тепла в каком-то определенном направлении происходит потому, что энергия звуковых волн, распространяющихся ■ этом направлении, больше, чем ■ обратном. Поэтому направление переноса тепла является в то же время направлением преимущественного распространения звуковых волн ■ связанной с ними нормальной компоненты. Перенос тепла ■ гелии II, таким образом, всегда сопровождается движением нормальной компоненты, то есть механизм переноса тепла всегда конвекционный. Вот почему ■ опыте, схема которого изображена на рисунке 3, показания термометров были одинаковы, а лепесток все время отклонялся ■ направлении теплового потока под действием обтекающей его нормальной компоненты.

Если поток тепла имеет место в гелии II, заполняющем некоторый замкнутый сосуд, как на рисунке 4, то непрерывного переноса массы жидкости ■ одном направлении не происходит, так как порождаемая потоком разность давлений вызывает движение сверхтекучей компоненты ■ обратном направлении. Причем, скорость сверхтекучего движения соответствует тому, что суммарный перенос массы отсутствует, поэтому уровень жидкости не меняется. Отклонение лепестка показывает, что из внутренней области вытекает нормальная компонента, ■ сверхтекучее движение остается незаметным, так как оно не оказывает давления на обтекаемые им тела.

Точки на плоскости

Вот задача, решение которой, на первый взгляд, кажется совершенно невозможным. Требуется найти на плоскости такой конечный набор точек, что перпендикуляр, восставленный ■ середине отрезка, соединяющего любые две точки, обязательно пересечет еще хотя бы две точки из этого набора. Тем не менее задача имеет интересное решение. А набор с таким удивительным свойством состоит всего из восьми точек. Постарайтесь отыскать его!

Задачи

Задача 1. *Какое число точек можно выбрать*

а) на плоскости,

б) в пространстве

так, чтобы каждые три точки служили вершинами прямоугольного треугольника?

Задача 2. *Какое число точек можно выбрать*

а) на плоскости,

б) в пространстве

так, чтобы каждые три точки служили вершинами тупоугольного треугольника?

И. Я.

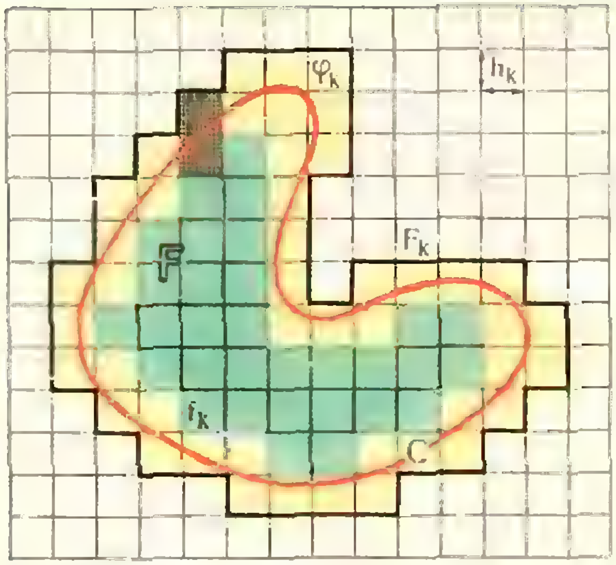


Рис. 2.

F_k полностью покрывает фигуру F и может даже выходить за ее границу C. Площадь F_k, согласно аксиоме аддитивности, равна сумме S_k площадей этих квадратиков (она пропорциональна числу квадратиков, составляющих F_k). Величину S_k естественно принять за приближенное значение площади фигуры F (с избытком).

Подсчитаем теперь сумму s_k площадей тех квадратиков сетки разряда k, которые целиком содержатся в F. Эти квадратики составляют многоугольник f_k (он окрашен в зеленый цвет), не выходящий за контур C. Ясно, что при любом k справедливо неравенство $s_k \leqslant S_k$. Естественно принять s_k за приближенное значение площади F (с недостатком).

Заметим, что сам контур C оказывается заключенным в некоторой многоугольной области φ_k (она окрашена в желтый цвет), лежащей между границами многоугольников F_k и f_k; площадь φ_k равна $S_k - s_k$.

Можно убедиться (проверьте это!), что при переходе от сетки разряда k к сетке разряда $k+1$ выполняется неравенство $S_k \geqslant S_{k+1}$. При этом каждое число S_k неотрицательно, поэтому монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность

$$S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3 \geqslant \ldots \geqslant S_k \geqslant \ldots \quad (1)$$

должна иметь предел $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$.

Аналогично, монотонно возрастающая последовательность

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_k \leqslant \ldots \quad (2)$$

также имеет некоторый предел $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_k$.

Предположим, что при неограниченном увеличении разряда k сетки (и, следовательно, при стремлении h_k к нулю) последовательности (1) и (2) имеют один и тот же предел: $s = S$. В этом случае фигуру F называют *квадрируемой* и площадь ее принимают равной S *). Если F квадрируема, то ее граница C, как это следует из предыдущего, может быть заключена в многоугольную область φ_k, площадь $S_k - s_k$ которой неограниченно уменьшается при возрастании k. Поэтому вполне логично условиться считать, что площадь такого контура C равна нулю. Таким образом, если область F квадрируема, то площадь ограничивающего ее контура равна нулю.

Справедливо, конечно, и обратное утверждение (докажите его): *если площадь контура C равна нулю* (это значит, что C можно покрыть многоугольной областью φ_k, составленной из квадратиков сетки разряда k, площадь которой стремится к нулю при k, стремящемся к бесконечности), *то фигура F квадрируема.*

В большинстве практических случаев приходится иметь дело с линиями C нулевой площади. К их числу

---

*) Заметим, что все рассуждения в действительности не зависят от ориентации палетки относительно фигуры. Если при одной ориентации сеток фигура F оказывается квадрируемой, то она окажется такой же и при произвольном смещении сеток. И хотя при новом положении сеток сами числовые последовательности (1) и (2) меняются, предел их S остается одним и тем же.

Проведенные здесь рассуждения вполне аналогичны тем, которые в учебниках геометрии приводят к определению площади круга как предела последовательности площадей правильных вписанных (описанных) многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

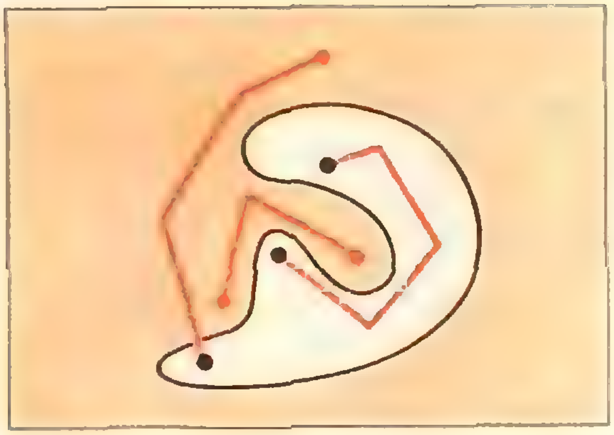


Рис. 3.

относятся линии, изученные французским математиком **Камилем Жорданом** (1838—1922). Это так называемые *жордановы кривые*. Если жорданову кривую рассматривать как траекторию движущейся (в плоскости) точки, то ее прямоугольные координаты x и y можно задать как непрерывные функции

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

времени t ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$).

Жордан доказал, что всякая замкнутая жорданова линия C без точек самопересечения разбивает всю плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю (рис. 3); для каждой из них C служит общей границей. Любые две точки, принадлежащие одной и той же части фигуры (например, внутренней), можно соединить ломаной, не пересекающей C. Любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, неизбежно пересекает C. Так как площадь всякой замкнутой и несамопересекающейся жордановой кривой равна нулю, то фигура F (она ограничена) квадрируема, то есть для нее последовательности (1) и (2) имеют общий предел S.

Измерение площади

Теперь становится понятным, что значит измерить площадь квадрируемой фигуры F. Это значит найти число S — предел последовательности чисел S_k (или s_k). Каждое из чисел S_k дает лишь приближенное значение площади с избытком (s_k — с недостатком). Этот избыток (недостаток) тем меньше, чем больше разряд k сетки.

Естественно, что на практике не вычисляют предел S, а ограничиваются определением его приближенного значения S_k с помощью сетки подходящего разряда *).

Однако издавна возникла потребность в более совершенных, чем палетка, приборах, позволяющих измерять площадь быстрее, точнее и, по возможности, автоматически. Первые такие приборы, называемые *планиметрами*, были созданы более ста лет тому назад и, как очень часто бывает в вопросах большой практической или научной важности, почти одновременно в различных странах. Один из первых планиметров (планиметр-самокат) был изобретен в 1854 году русским механиком **П. А. Зарубиным** (1816—1886). В том же году иную конструкцию планиметра предложил швейцарский математик **Я. Амслер** (1823—1912).

Эти и подобные им планиметры основаны на довольно простой и вместе с тем весьма плодотворной идее (мы изложим лишь саму идею, а строгие доказательства опустим).

Рассмотрим в плоскости чертежа два произвольных положения некоторого отрезка (стержня). Перевести отрезок из исходного положения A_0B_0 в конечное — AB (рис. 4а) можно с помощью перемещений трех типов:

(1) поворотом вокруг середины C_0 стержня на угол $\alpha \geqslant 0$ в положение A_1B_1, параллельное AB;

(2) поступательным перемещением на величину $h \geqslant 0$ в направлении, перпендикулярном A_1B_1, переводящим отрезок в положение A_2B_2 на прямой AB;

---

*) Заметим, что методы интегрального исчисления позволяют в большинстве практических случаев определить число S без использования последовательности (1) или же найти приближенное значение S более экономным путем, нежели подсчетом квадратиков по сетке (о понятии интеграла см. статью: Ионин Ю. И. Интеграл. «Квант», 1972, № 9).

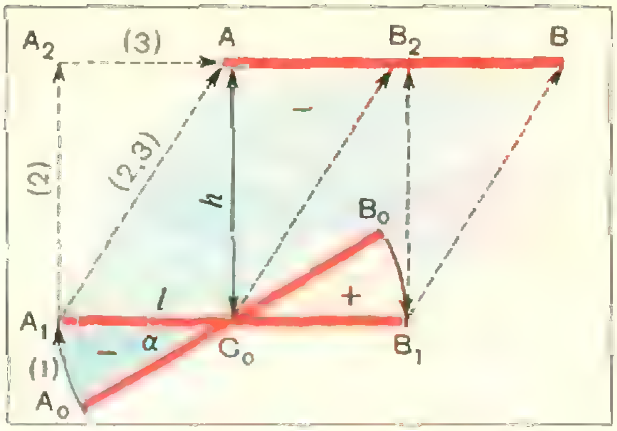


Рис. 4а.

(3) сдвигом на $g \geqslant 0$ в направлении AB, совмещающим точку A_2 с точкой A.

Впрочем, из курса физики известно, что два последних перемещения можно заменить одним — поступательным перемещением, переводящим A_1B_1 сразу в AB. При этом отрезок «заметет» параллелограмм B_1A_1AB с высотой h и основанием, равным длине l отрезка.

Подсчитаем всю площадь, заметаемую отрезком при перемещении из A_0B_0 в AB. Прежде, однако, примем важное правило.

Условимся приписывать (глядя из B в A) площади положительный знак, если она при перемещении стержня остается справа от него, и отрицательный, если она остается слева (рис. 4а).

С учетом этого правила ясно, что суммарная площадь, заметенная отрезком в результате перемещения первого типа, равна нулю.

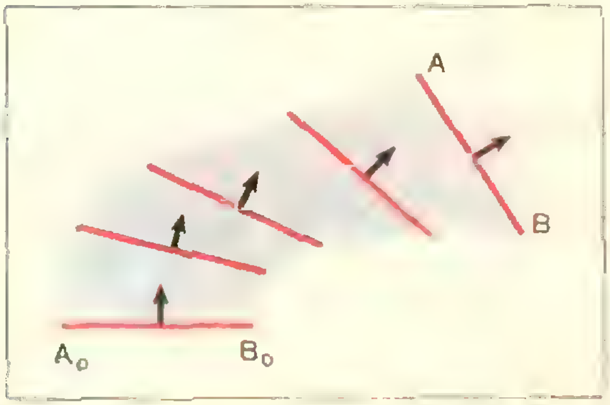


Рис. 4б.

Естественно, что равна нулю площадь, заметенная при перемещении третьего типа. Отличной от нуля оказывается лишь площадь прямоугольника, заметенного при поступательном перемещении второго типа; она равна lh (этой же величине равна и площадь параллелограмма B_1A_1AB).

Если теперь стержень совершает произвольное перемещение из положения A_0B_0 в положение AB, то в любой момент это перемещение можно разложить на три: типов (1), (2) и (3). При этом перемещения (1) и (3) не дают вклада в заметаемую площадь, а перемещение в направлении, перпендикулярном отрезку (типа (2)), полностью определяет заметаемую площадь (это — самое «тонкое» место в наших рассуждениях, именно здесь мы не приводим строгие доказательства).

Таким образом, для определения суммарной площади (точнее, алгебраической суммы площадей), заметенной отрезком известной длины l, достаточно иметь устройство, измеряющее суммарное перемещение отрезка в перпендикулярном направлении (рис. 4б).

Оказалось, что таким устройством может служить небольшое колесико R с закругленными краями, насаженное в середине (в точке C_0) стержня и соединенное с ним так, что оно может лишь вращаться. Ясно, что при перемещениях первого и третьего типов колесико не станет вращаться, а увлекаемое стержнем будет лишь скользить по поверхности чертежа. Но зато при перемещении второго типа оно практически без скольжения будет катиться по чертежу, поворачиваясь относительно стержня. При этом оно повернется как раз на дугу, равную h.

Следует иметь в виду, что колесико можно поместить в любой точке стержня. При этом сохраняется возможность использовать его для измерения площади. Попробуйте убедиться сами, что если колесико сместить на величину λ относительно середины стержня, то его показания изменятся на $\lambda\alpha$, где α — угол (в радианах), образованный исходным и конечным положением стержня.

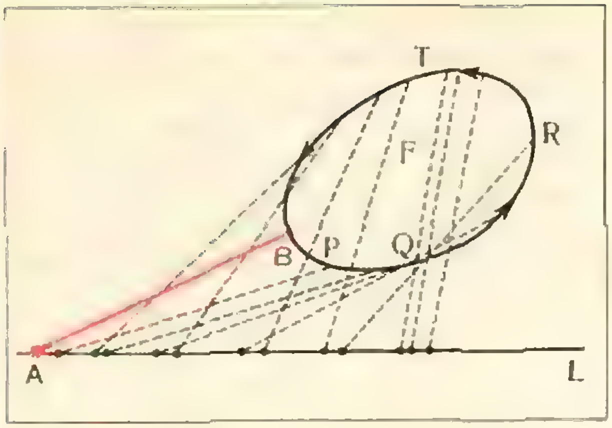


Рис. 5.

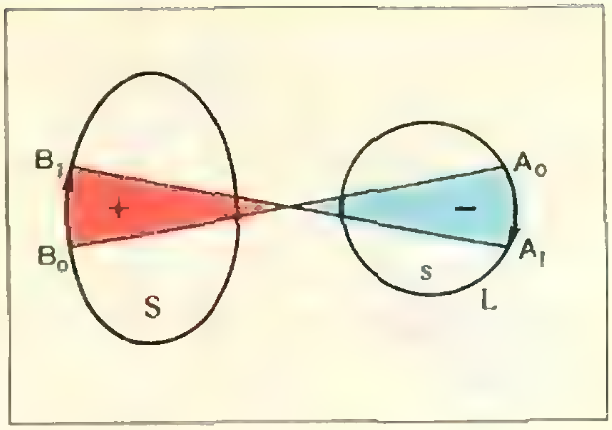


Рис. 6.

Если окружность колесика разбить на некоторое число делений, а на стержне укрепить указатель, то окажется возможным следить за тем, насколько поворачивается колесико. Возникнет простейший счетный механизм. Сразу замечаем, что не всегда второй отсчет (после обвода) оказывается больше первого (до обвода), все зависит от того, в какую сторону будет вращаться колесико. Если сдвинуть стержень из положения A_0B_0 в положение AB, а затем возвратить его снова в исходное, то в результате отсчет останется без изменения, то есть указатель будет стоять против одного и того же деления в начале и в конце этих двух перемещений. Это естественно, так как стержень дважды прошел над параллелограммом B_1A_1AB; один раз площади приписывался положительный знак, другой — отрицательный.

Воспользуемся полученными результатами для вычисления площади S фигуры F с криволинейной границей, например, такой, как на рисунке 5. Для этого один из концов B стержня будем перемещать вдоль границы F в направлении стрелки. Конец A пусть при этом движется по прямой LA. На рисунке 5 показано несколько положений стержня при его перемещении от точки P границы к точкам Q, R и T.

Мы замечаем, что над определяемой площадью S стержень AB пройдет лишь один раз — при перемещении из точки Q к точкам R, T, P. Зато площадь, лежащая вне границы, будет пройдена дважды, и притом в различных направлениях: один раз при движении от точки Q к R и T, а второй — при перемещении от T к P и Q.

Итак, если стержень в конце обхода займет исходное положение, то в результате колесико покажет величину h, отвечающую только площади S. Конец A не обязан двигаться по прямой, он может перемещаться по дуге окружности или замкнутой (направляющей) линии L. Но в последнем случае не только над площадью S, но и над площадью s (рис. 6) фигуры, охватываемой L, стержень проходит лишь один раз. Когда обе границы обходятся в одном направлении, то все элементы площади S остаются справа от стержня AB, а элементы площади s — слева, и потому им присваиваются различные знаки (отсчет колесика отвечает их разности). Если же они обходятся в разных направлениях (рис. 7), то

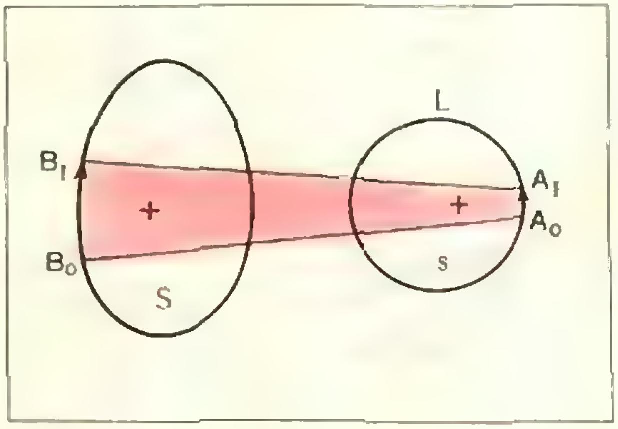


Рис. 7.

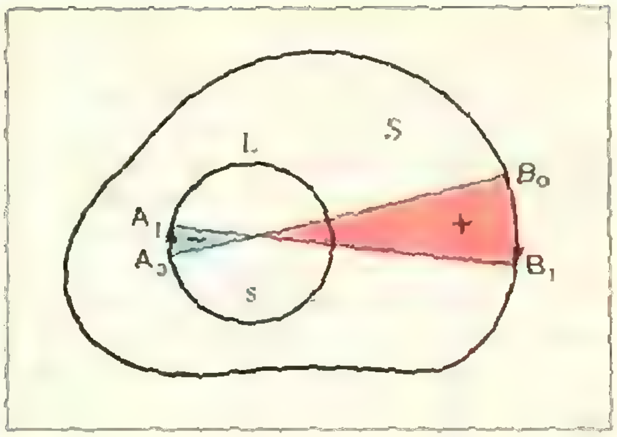


Рис. 8.

отсчет отвечает их сумме. Поэтому

$$lh = S \pm s. \quad (3)$$

В качестве границы s можно выбрать круг радиуса r; тогда $s = \pi r^2$ и искомая площадь составит

$$S = lh \pm \pi r^2.$$

В этой формуле знак плюс выбирается, например, и тогда, когда s лежит внутри S (рис. 8).

Все сказанное означает, что стержень с колесиком (его часто называют интегрирующим) может служить планиметром. Однако такой простой прибор неудобен в работе и вносит большие погрешности. В действительности планиметр устроен несколько сложнее, хотя принцип его работы остается тем же. Имеются планиметры многих типов, выпускаемые различными заводами точной механики. Они отличаются друг от друга конструкциями отдельных элементов, а также выбором кривой, по которой движется конец A стержня. В качестве такой кривой обычно выбирают либо прямую линию (линейный планиметр), либо окружность (полярный планиметр).

Конструкции планиметров

Рисунок 9 дает представление об общем виде полярного планиметра. Полярный рычаг p и обводный рычаг l соединены шарниром b и могут быть отделены друг от друга; на конце обводного рычага имеется острый шпиль F, которым обводят границу площади, и упор f, предохраняющий чертеж от повреждения шпилем. Полярный рычаг вращается вокруг своего конца (полюса), шарнирно соединенного с тяжелой платой $П$ (она не позволяет полюсу сдвигаться). Счетный механизм (рис. 10) связан с обводным рычагом. Его можно сдвигать вдоль этого рычага и укреплять в нужном положении винтом q. Счетный механизм опирается на измерительное колесико R и дополнительный опорный ролик C, придающий прибору устойчивость. Вращение колесика R через червячный винт передается счетному диску Z. Один полный оборот колесика вызывает поворот диска на одно из десяти нанесенных на нем делений. Периметр связанного с роликом счетного барабанчика T разделен на сто малых делений. С помощью расположенного рядом с ним верньера V можно отсчитывать десятые доли малого барабанчика T.

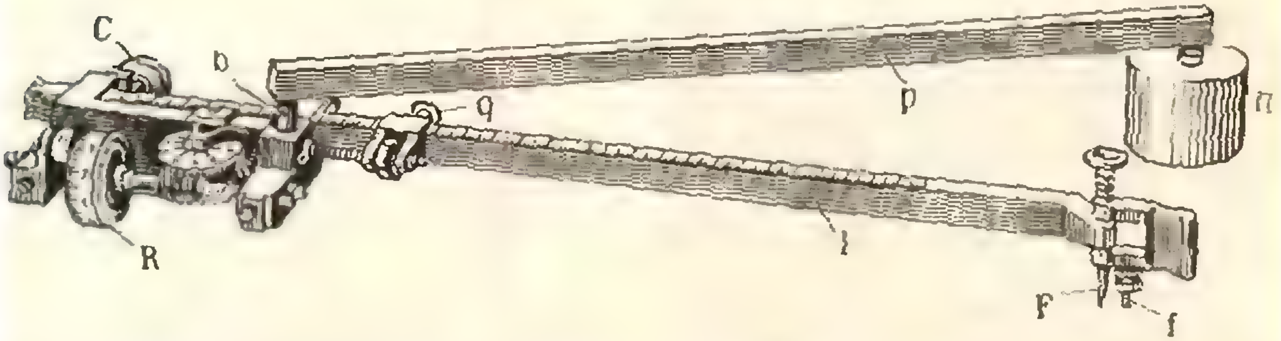


Рис. 9. Полярный планиметр

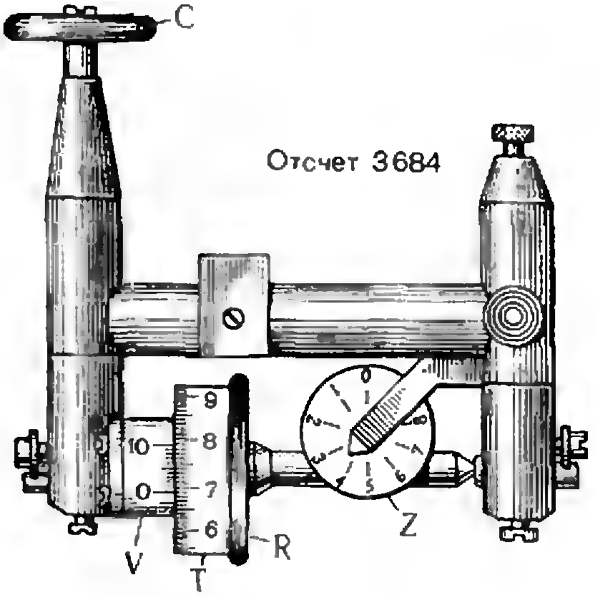


Рис. 10. Счетный механизм полярного планиметра.

Каждый отсчет представляет собой четырехзначное число: сначала записывается количество полных делений на диске Z, затем число больших делений на барабанчике T, потом число полных малых делений на нем и, наконец, число десятых малого деления.

Для определения площади S в делениях планиметра следует установить обводный шпиль F в некоторой точке границы, заметить начальный отсчет, обвести всю границу, и, вернувшись в исходную точку, записать новый отсчет. Затем вычесть из первого отсчета второй; тогда их разность (с точностью до знака) даст число, которое для получения искомой величины h надо умножить на радиус ρ колесика. Чтобы каждый раз не приходилось умножать длину l на величину h, подсчитывают заранее, чему соответствует одно деление планиметра (так называемую «цену деления» планиметра) при определенной длине обводного рычага l. Для этого обводят какую-либо фигуру (например, квадрат или круг), площадь которой можно подсчитать по формулам геометрии. Затем делят эту площадь на разность отсчета в конце и в начале обвода.

В специальном паспорте, который прилагается к каждому прибору, указывается цена деления при различной длине l обводного рычага. Эту длину можно изменять, сдвигая счетный механизм. При сдвигах счетного механизма измерительное колесико смещается от средней точки на ту или иную величину λ. Тем не менее можно доказать, что выведенная выше формула остается по-прежнему справедливой. Исключение представляет случай, когда в результате обвода границы рычаг l совершит полный оборот. В этом случае разность отсчетов надо увеличить на $2\pi l\lambda$.

Самодельный планиметр

Среди всех планиметров имеется один необычайно простой. Это так называемый «планиметр-топорик Прица» (1886 г.). Он может быть изготовлен из куска обыкновенной проволоки, согнутой в виде растянутой буквы П (рис. 11). Один из загнутых концов k заостряется и служит обводным шпилем, другой конец T расплющивается и имеет вид топорика, лезвие которого лежит в одной плоскости с острием. Острие k устанавливается в некоторой точке O внутри измеряемой площади (желательно поближе к центру тяжести обводимой фигуры). Положение точки T_0 касания лезвия топорика с чертежом отмечают; затем, держа топорик отвесно, ведут острие к границе, обводят всю границу и возвращаются в исходную точку O. При этом топорик описывает некоторую кривую (если лезвие острое, она окажется

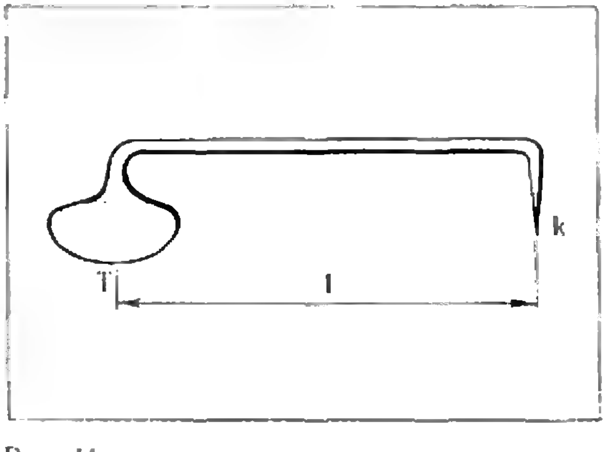


Рис. 11.

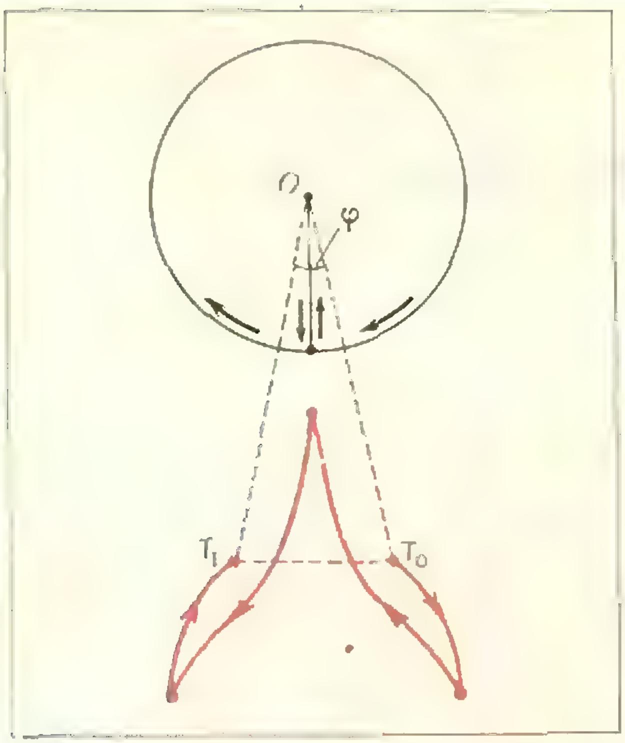


Рис. 12.

нацарапанной на чертеже). Одна из таких линий — линия погони *), возникающая при обводе круга, — показана на рисунке 12. Возвратившись в исходную точку O, отмечают новое положение T_1 лезвия. Чтобы определить теперь площадь обведенной фигуры, надо измерить в радианах угол $\varphi = \angle T_0OT_1$ между начальным и конечным положением планиметра и умножить его на l^2. Если угол невелик, то вместо него достаточно измерить хорду T_0T_1 и составить произведение $l \cdot T_0T_1$. Это правило можно получить из общей теории планиметра **). Оно означает, что планиметр-топорик не нуждается даже в измерительном колесике.

Действительно, предположим, что планиметр-топорик все же снабжен измерительным колесиком, насаженным на его конце (рядом с лезвием). Тогда при обводе границы фигуры F колесико будет только скользить, и потому поворот его окажется нулевым. Если, однако, колесико насадить в середине топорика, то поворот его составит $\frac{l}{2}\varphi$ (почему?). На такую же дугу $\frac{l}{2}\varphi$ повернется колесико при повороте стержня из положения OT_0 в OT_1, а всего — на $l\varphi$. Поэтому алгебраическая сумма площадей, обметенных планиметром, окажется равной $l^2\varphi$. Остается только заметить, что эта величина равна алгебраической сумме искомой площади S и площади s, ограниченной кривой погони (она замыкается поворотом планиметра на угол φ). Можно доказать, что если начальная точка O обвода расположена близко к центру тяжести F, то s близко к нулю, и формула (3) дает:

$$l^2\varphi = S.$$

Планиметр-топорик может легко изготовить каждый из вас. Но уже полярный планиметр требует высокой культуры производства, он измеряет площадь в десять раз точнее планиметра-топорика. Высокой точности (прецизионные) планиметры измеряют площадь в десять раз точнее, чем обычные (ошибка составляет лишь 0,0001 обводимой площади). В этих приборах измерительное колесико катится не по чертежу, который может иметь складки или другие неровности, а по специальному металлическому диску или линейке.

Примечание. Не всегда обход границы фигуры F сопровождается движением конца A по направляющей L строго в одном направлении и заканчивается ее полным обходом: движение против часовой стрелки может сменяться движением по часовой и наоборот. Все зависит от взаимного расположения и конфигурации F и L. В связи с этим рисунки 6, 7 и 8 являются сугубо схематичными.

---

*) По такой кривой должен бежать охотник за зайцем, если он, «поймав зайца на мушку», захочет в течение всей погони держать его под прицельным огнем и при этом не менять направления ружья относительно корпуса.

**) Элементарную геометрическую теорию планиметра-топорика привел академик А. Н. Крылов в 1904 году в статье «On the hatchet planimeter» (Собр. трудов. Т. V).

И. М. Яглом

Оценки углов

Исходной для нас будет служить следующая несложная, но поучительная

Задача 1. *Пусть A, B, C — три произвольные (несовпадающие) точки на плоскости; углы треугольника ABC (точнее, $\angle BAC$, $\angle ABC$ и $\angle ACB$) мы обозначим через α, β и γ. Пусть $\alpha \geqslant \gamma \geqslant \beta$. Какие значения могут принимать α, γ и β?*

Эта задача хорошо иллюстрирует тематику настоящей статьи: в ней обсуждается следующая (в общем виде не решенная до сих пор!)

Основная проблема. *На плоскости даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ углы треугольников, образованных этими точками* *). *Пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_N$. Какие значения могут принимать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$?*

Чтобы представить себе, с чем мы можем встретиться при решении основной проблемы, решим задачу 1.

Решение задачи 1

Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = 3 \cdot 60^\circ$, то наибольший из трех углов треугольника не может быть меньше 60°, а наименьший не может быть больше 60°: $\alpha \geqslant 60^\circ$, $\beta \leqslant 60^\circ$. При этом и α, и β могут быть равными 60° (рис. 1). С другой стороны, наибольший угол α может быть сколь угодно близок к 180° и может даже равняться 180°, если точки A, B и C лежат на одной прямой (рис. 2). Аналогично, наименьший угол β может быть сколь угодно близок к 0° и даже может равняться 0° (см. рис. 2). Наконец, «средний» угол γ тоже может быть равен 0° (см. рис. 2). С другой стороны, так как два угла треугольника долж-

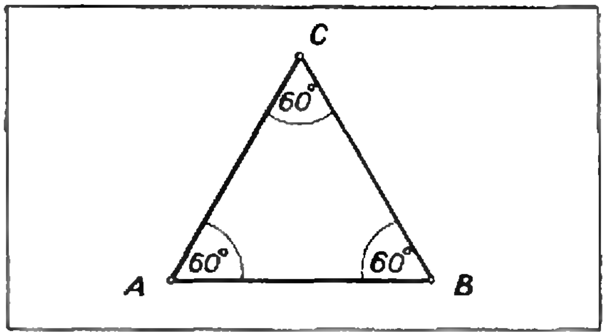


Рис. 1.

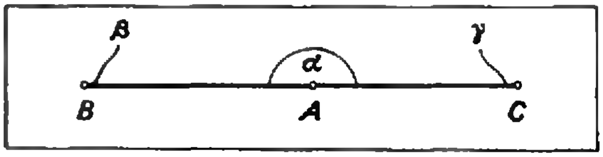


Рис. 2.

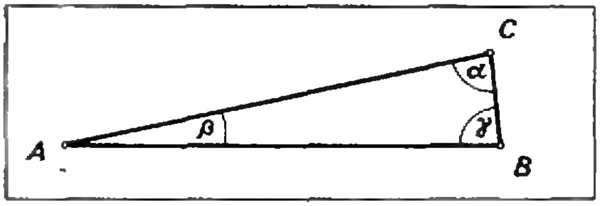


Рис. 3.

---

*) Число N, разумеется, зависит от n. Нетрудно видеть, что

$$N = 3C_n^3 = 3\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2},$$

где C_n^3 — число сочетаний из n по 3, но нам эта формула не понадобится.

ны быть острыми, то $\gamma < 90°$ (случай, когда три точки лежат на одной прямой, не спасет положения, поскольку при этом $\alpha = 180°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 0°$). Однако γ может быть сколь угодно близким к 90° (на рисунке 3 наименьший угол $\beta = \angle BAC$ очень мал, а $\angle ABC = \angle ACB \approx 90°$). Таким образом,

$$60° \leqslant \alpha \leqslant 180°, \quad 0° \leqslant \gamma < 90°, \quad 0° \leqslant \beta \leqslant 60°.$$

Чтобы завершить решение задачи 1 *), нам еще надо доказать, что α может принимать любое значение в пределах $60° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ (и аналогично для углов β и γ). Впрочем, эта часть решения очень проста — она сводится к *построению* треугольника ABC, у которого наибольший угол α (или «средний» угол γ, или наименьший угол β) имеет заданное значение, выбранное в указанных пределах; это вы легко сделаете сами.

Обсуждение решения задачи 1

Прежде всего изменим обозначения. Условимся обозначать вершины треугольника через A_1, A_2, A_3, а его углы — через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Наибольший из углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно обозначить так:

$$\alpha = \max_i \alpha_i,$$

а наименьший из углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так:

$$\beta = \min_i \alpha_i,$$

причем $i = 1, 2, 3$.

max — это сокращение латинского слова *maximum* — «максимум», то есть наибольшее. Знак i под max показывает, что меняется i, то есть задан набор величин α_i (здесь — $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), из которых мы берем наибольшую (а не, скажем, наибольший из вообще возможных углов треугольника $A_1A_2A_3$ — в этом случае мы напишем $\max\limits_{\Delta A_1A_2A_3} \alpha$). Знак $\max\limits_{\Delta A_1A_2A_3}$ обычно употребляется для наибольшей из конечного числа величин (здесь — из трех). Для наибольшей из бесконечного числа величин тоже можно применять знак max, но это опасно — здесь надо еще доказывать, что это наибольшая величина существует (см. далее).

min — сокращение латинского слова *minimum* — «минимум», то есть наименьшее.

В задаче 1* не вызывало никаких затруднений определение самого большого возможного значения α, то есть

$$\max_{\Delta A_1A_2A_3} \alpha = \max_{\Delta A_1A_2A_3} \max_i \alpha_i = 180°,$$

и самого малого возможного значения β, то есть

$$\min_{\Delta A_1A_2A_3} \beta = \min_{\Delta A_1A_2A_3} \min_i \alpha_i = 0°.$$

Наибольший интерес здесь представляло отыскание наименьшего возможного значения α, то есть

$$\min_{\Delta A_1A_2A_3} \alpha = \min_{\Delta A_1A_2A_3} \max_i \alpha_i = 60°,$$

и наибольшего возможного значения β, то есть

$$\max_{\Delta A_1A_2A_3} \beta = \max_{\Delta A_1A_2A_3} \min_i \alpha_i = 60°.$$

Постановка таких «минимаксных» задач характерна для современной «чистой» и (особенно!) прикладной математики.

Значительную часть задачи 1 также составляет оценка наибольшего возможного значения величины γ (наименьшее легко находится: из рисунка 2 следует, что $\min\limits_{\Delta A_1A_2A_3} \gamma = 0°$). Однако здесь нас подстерегает сюрприз: оказывается, что искомого наибольшего значения γ не существует: угол γ может быть сколь угодно близок к 90°, но он никогда не окажется равным 90°. Математики в таком случае говорят, что 90° — это (*точная*) *верхняя грань величины* γ:

$$\sup_{\Delta A_1A_2A_3} \gamma = 90°.$$

sup — это сокращение латинского слова *supremum* — «супремум», то есть высшее. Запись $\sup x_i = \xi$ означает, что $x_i \leqslant \xi$ для любого i, но x_i может быть сколь угодно близким к ξ, то есть ξ — наименьшее из чисел, не меньших чем любое x_i. Можно показать, что если величины x_i ограничены сверху, то есть существует хотя бы одна верхняя грань величин то среди этих верхних граней найдется наименьшая (*точная*), то есть $\sup x_i$ существует.

---

*) Мы приводим здесь подробное решение задачи 1. Указания к решению остальных задач помещены в конце журнала (но не торопитесь туда заглядывать — попробуйте сначала решить задачу самостоятельно). Звездочкой отмечены более трудные задачи; вопросительный знак у номера задачи означает, что решение автору не известно (откуда еще вовсе не следует, что эта задача — трудная; подумайте и над этими задачами).

Аналогично употребляется запись $\inf x_i$. inf — это сокращение латинского слова *infimum* — «инфимум», то есть низшее.

$\inf x_i$ — это *точная нижняя грань*, то есть наибольшее из чисел, не превосходящих любого x_i. В тех случаях, когда это не вызывает затруднений при чтении, мы не будем писать i, $\Delta A_1A_2A_3$ и т. п. под знаками sup, inf, max, min.

Нетрудно понять, с чем связан этот сюрприз. Ясно, что величины $\max\limits_i \alpha_i$ и $\min\limits_i \alpha_i$ существуют — ведь из трех углов α_1, α_2 и α_3 всегда можно выбрать наибольший и наименьший. А число троек $\{A_1, A_2, A_3\}$ точек на плоскости является бесконечным. И здесь мы уже не можем ручаться за то, что найдется такая тройка, которой отвечает наибольшее значение угла γ. Ведь переходить от одной тройки точек к другой, которой отвечает большее значение угла γ, мы можем сколь угодно много раз, и при этом каждый раз может оказаться, что все равно осталась тройка, лучшая, чем все предыдущие.

В принципе, ни одна из величин $\sup\alpha$, $\sup\beta$, $\sup\gamma$, $\inf\alpha$, $\inf\beta$, $\inf\gamma$ не обязана достигаться — и мы должны расценить как удачу то обстоятельство, что величины $\sup\alpha = 180°$, $\sup\beta = 60°$, $\inf\alpha = 60°$ и $\inf\beta = 0°$ достигаются, то есть что существуют $\max\alpha$, $\max\beta$, $\min\alpha$ и $\min\beta$. Для величины γ, как мы видели, $\inf\gamma = 0°$ достигается, а $\sup\gamma = 90°$ — нет.

Аналогично этому, скажем, для величины $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, $\sup\limits_n \frac{1}{n} = 1$ достигается (при $n = 1$), а $\inf\limits_n \frac{1}{n} = 0$ — нет; таким образом, величина $\frac{1}{n}$ имеет максимум и не имеет минимума.

Рассмотрим, наконец, вопрос о том, для каких именно троек точек $P_3 = \{A_1, A_2, A_3\}$ (или $\{A, B, C\}$) достигается максимум или минимум величин α, β и γ. Легко видеть, что $\min\alpha$ и (одновременно) $\max\beta$ достигаются для единственной тройки точек — для вершин правильного треугольника ABC (см. рис. 1) конечно, с точностью до замены треугольника ABC подобным, что, впрочем, не меняет ни одного из его углов. $\max\gamma$, как мы уже знаем, вообще не существует. А величины $\max\alpha$, $\min\beta$ и $\min\gamma$ реализуются бесконечным множеством разных (даже не подобных) троек точек, — ведь средняя точка на рисунке 2 может располагаться в любом месте на отрезке, соединяющем две другие точки.

Теперь мы перейдем к другим задачам.

Задачи, связанные с основной проблемой

Задача 2. а) *Пусть $P_4 = \{A, B, C, D\}$ — произвольная система четырех точек на плоскости; величину наименьшего из 12 углов, определяемых этими точками, обозначим через β. Докажите, что $0° \leqslant \beta \leqslant 45°$.*

б) *Пусть P_5 — произвольная система пяти точек на плоскости; наименьший из углов, определяемых этими точками, обозначим через β. Докажите, что $0° \leqslant \beta \leqslant 36°$.*

в) *Пусть P_6 — произвольная система шести точек на плоскости; наименьший из определяемых этими точками углов обозначим через β. Докажите, что $0° \leqslant \beta \leqslant 30°$.*

Для каких систем из четырех, пяти и шести точек на плоскости достигаются наибольшее и наименьшее значение угла β?

Начало решения задачи 2. Предположим, что рассматриваемые точки — это вбитые в зем-

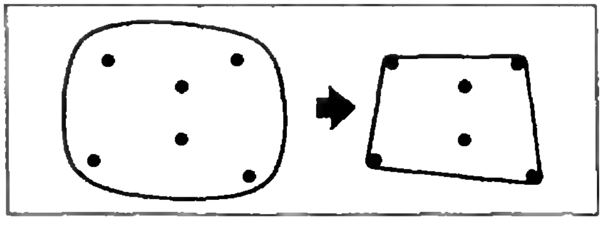


Рис. 4.

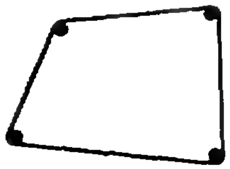


Рис. 5.

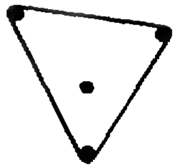


Рис. 6.

Рис. 7.

лю колышки (или вбитые в фанерный лист гвозди); набросим на все эти колышки растянутую резинку и дадим ей сократиться, обтянув колышки (рис. 4). Тогда резинка примет форму выпуклого многоугольника — наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего внутри себя (или на границе) все заданные точки. Этот многоугольник называется выпуклой оболочкой рассматриваемой системы точек; его вершины совпадают с какими-то из этих точек.

Выпуклая оболочка четырех точек может представлять собой четырехугольник (рис. 5), треугольник (рис. 6) или «двуугольник», то есть отрезок (рис. 7); оценить в каждом случае, каким может быть наименьший из углов, образованных заданными точками, мы предоставим читателю.

Задачи 2а и 2б предлагались учащимся 9-х и 10-х классов на первом туре XXVI Московской школьной математической олимпиады (1963 год); у этих задач оказалось довольно много решений.

Если вам удастся решить задачу 2, то, вероятно, у вас не вызовет особых затруднений и следущая (не особенно трудная)

Задача 3. *На плоскости дано n различных точек; обозначим через β наименьший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что*

$$0° \leqslant \beta \leqslant \frac{180°}{n}.$$

Для каких систем из n точек на плоскости угол β принимает наименьшее возможное значение 0° и для каких — наибольшее возможное значение $\frac{180°}{n}$?

Попробуем теперь оценить наибольший из углов, определяемых n точками.

Задача 4. а) *На плоскости даны 4 (различные) точки; обозначим через α наибольший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.*

б) *На плоскости дано 5 точек; обозначим через α наибольший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что $108° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.*

в) *На плоскости дано 6 точек; обозначим через α наибольший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что $120° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.*

Для каких систем из четырех, пяти и шести точек на плоскости достигаются наибольшее и наименьшее значения угла α?

Задача 4 по трудности не превосходит близкую к ней по содержанию задачу 2. Сравнение этих двух задач позволяет усмотреть лишь одно различие между ними, которое можно воспринять как сигнал о том, что задачи об оценке наименьшего угла β и наибольшего угла α могут расходиться по характеру ответов и по трудности решения: в то время как в задачах 2—3 наибольшее значение наименьшего угла β всегда реализуется для единственной системы точек, в задаче 4 наименьшее значение угла α достигается для бесконечного множества разных (то есть не подобных) систем точек. Игнорировать этот «сигнал» не следует; действительно, следующая задача уже совсем не похожа на простые задачи 2—3: она гораздо труднее их.

Задача 5*. а) *На плоскости даны 7 точек ; пусть α — наибольший из углов, задаваемых этими точками. Докажите, что $120° < \alpha \leqslant 180°$, но что для любого угла φ, большего 120° (например, для $\varphi = 120°1''$), можно подобрать 7 точек так, что все задаваемые этими точками углы будут меньше φ (другими словами, докажите, что $\inf \alpha = 120°$, но $\min \alpha$ не существует).*

б) *Докажите, что для систем из 8 точек на плоскости сохраняет силу* *тот же результат, что и для систем из 7 точек (то есть что здесь также* $\inf \alpha = 120^\circ$, *и* $\min \alpha$ *не существует).*

Обратимся снова к фигурирующим в основной проблеме «общим» системам $P_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ из n точек на плоскости; наибольший из углов, определяемых этими точками, мы обозначим через α, а наименьший — через β. Так как, очевидно, наибольшее возможное значение α равно 180°, а наименьшее значение β равно 0°, то задача оценки углов α и β сводится к нахождению $\sup \beta$ (эту величину мы обозначим через $\overline{\beta}$ или поскольку она, разумеется, зависит от n, — через $\overline{\beta}(n)$) и $\inf \alpha$ (эту величину мы будем обозначать через $\underline{\alpha}$ или $\underline{\alpha}(n)$). Найти величину $\overline{\beta}(n)$ несложно:

$$\overline{\beta}(n) = \frac{180^\circ}{n},$$

и эта величина всегда достижима (см. задачу 3). Однако задача нахождения величины $\underline{\alpha}(n)$ не так проста и в общем виде до сих пор еще не решена. Задачи 4 и 5 утверждают, что $\underline{\alpha}(4) = 90^\circ$, $\underline{\alpha}(5) = 108^\circ$ и $\underline{\alpha}(6) = \underline{\alpha}(7) = \underline{\alpha}(8) = 120^\circ$; при этом значения $\underline{\alpha}(4)$, $\underline{\alpha}(5)$ и $\underline{\alpha}(6)$ достижимы, а значения $\underline{\alpha}(7)$ и $\underline{\alpha}(8)$ уже недостижимы.

Задачу определения величины $\underline{\alpha}(n)$ впервые поставил американский геометр Л. Блюменталь; ее решением занимались венгерские математики П. Эрдеш *) и Г. Секереш. П. Эрдеш предположил, что для всех $n \geqslant 6$ $\underline{\alpha}(n) = \frac{k-1}{k} \cdot 180^\circ$, где $2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k$, и что достигается это значение $\underline{\alpha}(n)$ лишь при $n = 6$. Однако доказано до сих пор лишь, что

$$\underline{\alpha}(2^k) = \frac{k-1}{k} \cdot 180^\circ \text{ при } k \geqslant 2$$

и что если $2^{k-1} < n < 2^k$ (где $k \geqslant 3$), то

$$\frac{k-1}{k} \cdot 180^\circ \geqslant \underline{\alpha}(n) > \frac{k-2}{k-1} \cdot 180^\circ$$

(последняя оценка может быть даже слегка усилена).

Обратимся теперь к остальным углам, фигурирующим в проблеме.

Задача 6. *Пусть* P_4 *— произвольная система четырех точек на плоскости;* $\alpha = \alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ *— два самых больших из двенадцати углов, задаваемых этими точками, а* $\beta = \beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$ *— два самых маленьких угла; при этом* $\alpha^{(1)} \geqslant \alpha^{(2)}$, $\beta^{(1)} \leqslant \beta^{(2)}$. *Докажите, что*

а) $72^\circ \leqslant \alpha^{(2)} \leqslant 180^\circ$;
б) $0^\circ \leqslant \beta^{(2)} \leqslant 45^\circ$.

Для каких систем точек реализуются наибольшее и наименьшее значения углов $\alpha^{(2)}$ и $\beta^{(2)}$?

Задача 7. *Докажите, что при всех* $n \geqslant 2$ $\max \alpha(i) = 180^\circ$ *при*

$$1 \leqslant i \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

и $\min\limits_{P_n} \alpha^{(i)} = 0^\circ$ *при*

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} < j \leqslant N = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

Таким образом вопрос об оценках всех N углов $\alpha^{(i)}$ сводится к определению величин $\inf\limits_{P_n} \alpha^{(i)}$, где

$$1 \leqslant i \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

($\inf \alpha^{(i)}$ можно обозначить символом $\underline{\alpha}^{(i)}(n)$) и $\sup \beta^{(j)}$ при

$$1 \leqslant j \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \text{ *)}$$

---

*) Пал Эрдеш — видный современный венгерский математик. Эрдешу принадлежат многие яркие результаты в разных областях математики (теория чисел, математический анализ, теория вероятностей, геометрия и т. д.); однако в результате его деятельности число нерешенных до сих пор задач лишь увеличилось, ибо он поставил больше новых задач, чем решил старых.

*) Заметьте, что $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = N$. Укажем еще, что число подлежащих определению величин $\overline{\beta}^{(j)}$ всегда вдвое больше числа интересующих нас чисел $\underline{\alpha}^{(i)}$, например: 2 и 1 при $n = 3$, 8 и 4 при $n = 4$ и т. д.

($\sup \beta^{(i)}$ можно обозначить символом $\overline{\beta}^{(i)}(n)$). Так, если $n=3$, то необходимо найти три числа $\underline{\alpha}^{(1)}(3)=\underline{\alpha}(3)$, $\overline{\beta}^{(1)}(3)=\overline{\beta}(3)$ и $\overline{\beta}^{(2)}(3)$; мы знаем, что эти числа равны 60°, 60° и 90°, и что первые два из них достижимы, а третье — нет (см. задачу 1). При $n=4$ требуется определить уже 12 чисел: $\underline{\alpha}^{(1)}(4)=\underline{\alpha}(4)$, $\underline{\alpha}^{(2)}(4), \ldots$ и $\overline{\beta}^{(1)}(4)=\overline{\beta}(4)$, $\overline{\beta}^{(2)}(4), \ldots, \overline{\beta}^{(6)}(4)$; из них нам пока известны $\underline{\alpha}^{(1)}=\underline{\alpha}=90^\circ$, $\underline{\alpha}^{(2)}=72^\circ$ и $\overline{\beta}^{(1)}=\overline{\beta}^{(2)}=45^\circ$, причем все эти значения достижимы (см. задачи 2а, 4а и 6). Однако общий вопрос об определении N чисел $\underline{\alpha}^{(i)}(n)$ и $\overline{\beta}^{(i)}(n)$ является достаточно сложным, поскольку пока нам не известны даже величины $\underline{\alpha}^{(1)}(n)=\underline{\alpha}(n)$.

Задача 8?. *Пусть P_4 — система четырех точек на плоскости. Определите* $\inf \alpha^{(3)}\ (=\underline{\alpha}^{(3)}(4))$ и $\sup \beta^{(3)}\ (=\overline{\beta}^{(3)}(4))$. *Достигаются ли значения* $\underline{\alpha}^{(3)}(4)$ *и* $\overline{\beta}^{(3)}(4)$?

Задача 9?. *Определите величины* $\underline{\alpha}^{(2)}(5)$ *и* $\overline{\beta}^{(2)}(5)$.

Задача 10?. *Что еще вы можете сказать об оценках углов* $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(N)}$?

(Простота точной оценки возможных значений последнего угла $\alpha^{(N)}=\beta$ заставляет попытаться оценить возможные значения «предпоследнего» угла $\alpha^{(N-1)}=\beta^{(2)}$; при этом целесообразно начинать с небольших значений n.)

Точки в пространстве

Разумеется, задачи об оценках углов имеют смысл и в стереометрии. Пусть P_n — произвольная система n точек в пространстве (эта постановка не запрещает всем точкам лежать в одной плоскости). Условимся обозначать греческими буквами $\varphi=\varphi^{(1)}$ наибольший из всех задаваемых этими точками углов и $\psi=\psi^{(1)}$ — наименьший. Заметим сразу же, что результат задачи 7 полностью сохраняет силу и для рассматриваемой стереометрической задачи, так что здесь также требуется определить $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ величин

$$\inf_{P_n} \varphi^{(i)}=\underline{\varphi}^{(i)} \qquad \text{и} \qquad \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

величин $\sup \psi^{(i)}=\overline{\psi}^{(i)}$.

Задача 11. *Пусть P_4 — произвольная система четырех точек в пространстве, φ — наибольший из определяемых этими точками углов, а ψ — наименьший угол. Докажите, что*

а) $60^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$ (так что $\underline{\varphi}^{(1)}(4)=\underline{\varphi}(4)=60^\circ$);

б) $0^\circ \leqslant \psi \leqslant 60^\circ$ (так что $\overline{\psi}^{(1)}(4)=\overline{\psi}(4)=60^\circ$).

Для каких расположений четырех точек пространства достигаются значения $\varphi=60^\circ$ *и* $\psi=60^\circ$?

Задача 12? *Для того же случая четырех точек в пространстве найдите наименьшее возможное значение* $\varphi^{(2)}(4)$ *второго по величине угла* $\varphi^{(2)}$ *и наибольшее возможное значение* $\psi^{(2)}(4)$ *предпоследнего по величине* $\psi^{(2)}$ *).

Задача 13? *Для случая пяти точек пространства найдите наименьшее возможное значение* $\underline{\varphi}(5)$ *самого большого угла* φ *и наибольшее возможное значение* $\overline{\psi}(5)$ *самого малого угла* ψ*).

Задача 14?. *Что еще вы можете сказать об оценках углов* $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$, *задаваемых n точками в пространстве?*

В заключение укажем еще, что «задачи об оценках углов» можно ставить и несколько иначе. Мы во всех случаях считали число n точек плоскости или пространства заданным — и при этих условиях стремились оценить те или иные из углов $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(N)}$ или $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$. Однако такую постановку задачи можно и «обратить» — заранее задать ту или иную оценку для (одного или нескольких) углов $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(N)}$ или $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$ и поставить вопрос о том, при каком числе n точек плоскости или пространства эти оценки могут быть удовлетворены. Мы ограничимся здесь лишь двумя примерами подобной постановки задачи, принадлежащими, видимо, все тому же Палу Эрдешу.

---

*) Разумеется, если, скажем, $\min \varphi^{(2)}$ не существует, то потребуется определить $\inf \varphi^{(2)}\ (=\underline{\varphi}^{(2)}(4))$. Это относится и к задаче 13.

Задача 15. *При каком числе n точек*

а) *на плоскости,*

б) *в пространстве*

их можно расположить так, что все образуемые этими точками углы будут не больше 90°?

Задача 16. *При каком числе n точек*

а) *на плоскости*

б)* *в пространстве*

их можно расположить так, что все образуемые этими точками углы будут меньше 90°?

Таким образом, в задаче 15 требуется расположить точки так, чтобы все углы $\alpha^{(i)}$ или $\varphi^{(i)}$ были не больше 90°; в задаче 16 нестрогое неравенство заменяется строгим. П. Эрдеш указал решения простых задач 15а и 16а и высказал предположения об ответах к задачам 15б и 16б. Задача 15б впервые была решена в 1962 году известными математиками Л. Данцером и Б. Грюнбаумом; впоследствии то же решение нашел студент МГУ, член жюри Всесоюзных математических олимпиад Гриша Гальперин. Задачу 16б впервые решил в 1961 году английский математик Г. Крофт; в 1963 году несколько более простые ее решения нашли тот же Б. Грюнбаум и немецкий математик К. Шютте.

Максимум?

Иногда бывает интересно не только решать нерешенную задачу, но и найти лучшее решение той, которая, казалось, была уже решена. Вот одна такая задача.

Возьмем цифры от 1 до 9 и разделим их на четыре группы: в первой группе — три цифры, а в остальных — по две. Зафиксировав порядок цифр в этих группах, мы получим четыре числа. Перемножим теперь трехзначное число на одно из двухзначных а два оставшиеся двухзначных числа между собой. Например:

$$\begin{array}{r}158\\23\\\hline 474\\316\\\hline 3634\end{array}\qquad\begin{array}{r}79\\46\\\hline 474\\316\\\hline 3634\end{array}$$

В обоих случаях произведение равно 3634.

Так вот, нужно распределить те же 9 цифр по той же схеме (с равными произведениями), но получить при этом наибольшее возможное произведение.

Долгое время наибольшим было произведение $174\times32=96\times58=5568$, но затем оно было улучшено, и максимальным стало считаться произведение $584\times12=96\times73=7008$.

Этот результат держался до 1971 года, когда в Японии было найдено новое рекордное решение этой задачи. По-видимому, оно окажется последним, хотя это еще не доказано. Попробуйте найти, чему равно это последнее рекордное произведение или увеличить его.

В. Б.

Г. Б. Куперман,
Е. Д. Щукин

Механические свойства кристаллов

Такие свойства твердых тел как упругость, прочность, поверхностное натяжение определяются силами взаимодействия между атомами и строением кристаллов (типом кристаллической решетки). Изучая силы межатомного взаимодействия, можно, например, определить величину модуля упругости, предела прочности материала, энергии связи кристалла и коэффициента поверхностного натяжения.

Таким образом оцениваются характеристики любых твердых тел, но проще всего это сделать для идеальных ионных кристаллов. В решетке таких кристаллов периодически чередуются положительные и отрицательные ионы.

Для оценки прежде всего необходимо выяснить величину силы единичной межатомной связи, которая в ионных кристаллах определяется силой взаимодействия между двумя ионами.

Силы межатомного взаимодействия

Зависимость сил межатомного взаимодействия *) от расстояния между центрами атомов в твердых телах схематически показана на рисунке 1.

По этому рисунку можно судить о некоторых особенностях сил межатомного взаимодействия.

1. Между атомами одновременно действуют силы притяжения и силы отталкивания. Результирующая сила межатомного взаимодействия — сумма этих двух сил.

2. При уменьшении расстояния между атомами силы отталкивания нарастают значительно быстрее, чем силы притяжения; поэтому существует некоторое расстояние r_0, при котором силы притяжения и силы отталкивания уравновешиваются и результирующая сила становится равной нулю. В кристалле, предоставленном самому себе, ионы располагаются именно на расстоянии r_0 друг от друга. Если расстояние между атомами меньше равновесного ($r < r_0$), то преобладают силы отталкивания, если $r > r_0$, то преобладают силы притяжения.

Эти свойства межатомных сил позволяют условно рассматривать частицы, образующие кристалл (например, ионы Na и Cl в кристалле поваренной соли), как твердые упругие шары, взаимодействующие друг с другом. Деформация растяжения кристалла приводит к увеличению расстояния между центрами соседних шаров и преобладанию сил притяжения, а деформация сжатия — к уменьшению этого расстояния и преобладанию сил отталкивания.

Прочность при растяжении

Пределом прочности обычно называют наибольшее напряжение *), которое

---

*) Подробнее о силах межатомного взаимодействия можно прочитать в статье: Мякишев Г. Я. Взаимодействие атомов и молекул. «Квант», 1971, № 11.

*) Напряжение материала — это упругая сила, действующая на единицу площади сечения, перпендикулярного этой силе.

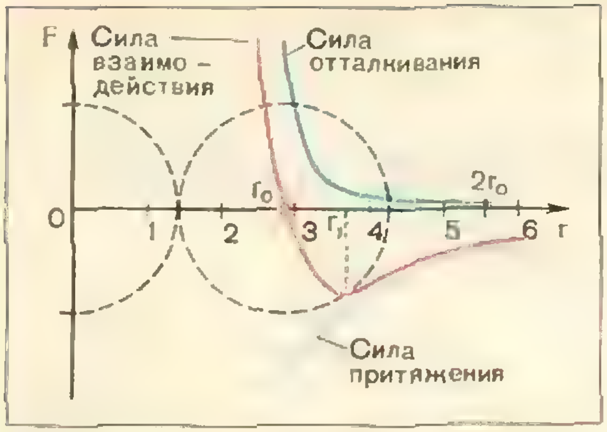


Рис. 1.

может выдержать материал, не разрушаясь. При растяжении образца предел прочности определяется максимальной величиной результирующей силы межатомного притяжения, приходящейся на единицу площади сечения, перпендикулярного направлению растяжения.

Результирующая сила межатомного взаимодействия достигает максимального значения, когда центры атомов находятся на расстоянии r_1 друг от друга (см. рис. 1). Когда растяжение еще более увеличивается, силы взаимодействия становятся настолько малыми, что связи между атомами разрываются.

Обозначим величину наибольшей силы притяжения между двумя атомами (то есть величину силы единичной связи) через F_{max}, а число связей на единице площади сечения, перпендикулярного направлению внешней силы, через $N_{св}$. Тогда предел прочности кристалла

$$\sigma = F_{max} N_{св}.$$

На рисунке 2 показана простейшая модель ионного кристалла поваренной соли (NaCl состоит из положительных ионов натрия и отрицательных ионов хлора). У каждого иона в этом кристалле шесть ближайших соседей с противоположным знаком заряда. При разрыве такого кристалла у каждого атома обрывается по одной связи. Разрыв кристалла схематически изображен на рисунке 3. В рассматриваемой модели число связей, разрываемых на каждом квадратном сантиметре, равно числу атомов, приходящихся на эту площадь ($N_{св} = N_{ат}$). Для простоты мы пренебрегаем взаимодействием между ионами, находящимися друг от друга на расстояниях, больших r_0 (остальные ионы удалены на расстояния не меньше, чем $r_0\sqrt{2}$). Эти взаимодействия дают относительно небольшую поправку. Для оценки предела прочности σ достаточно умножить наибольшее значение силы взаимодействия между двумя атомами на число атомов, приходящихся на единицу площади в плоскости разрыва:

$$\sigma = F_{max} N_{ат}.$$

Оценка величины сил связи

Порядок величины сил связи в ионных кристаллах можно найти, исходя из предположения, что ионы взаимодействуют по закону Кулона. В нашей модели кристалл состоит из чередующихся ионов противоположных знаков, равновесные расстояния меж-

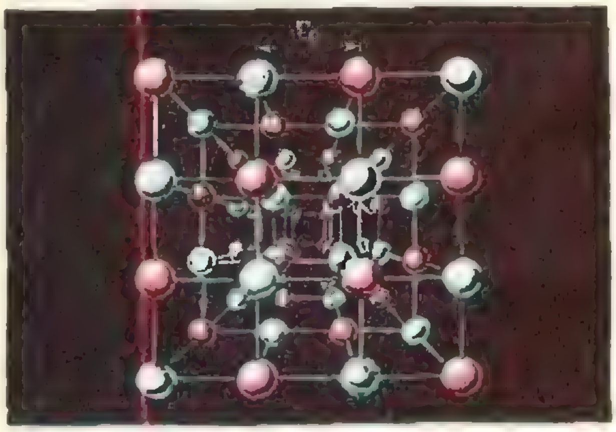


Рис. 2.

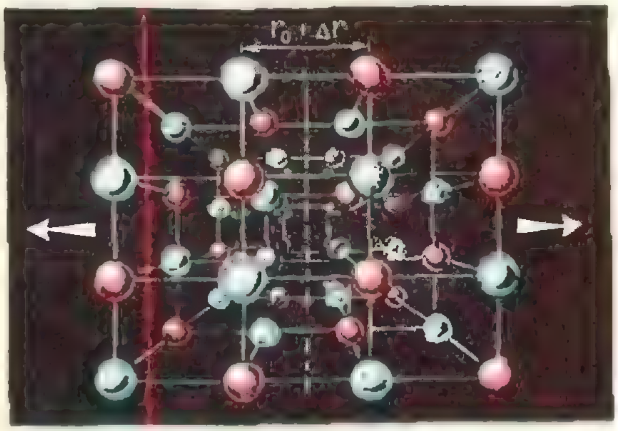


Рис. 3.

ду которыми $r_0 \approx 3\,\text{Å}$ *). Предположим, что деформация остается упругой вплоть до деформации, соответствующей разрыву; иначе говоря, наибольшей упругой деформации соответствует напряжение, равное пределу прочности. Но максимальной упругой деформации приблизительно соответствует максимальное значение силы межатомного притяжения (см. рис. 1).

Опыты с самыми прочными кристаллами показали, что их максимальная относительная упругая деформация $\varepsilon_{\max}$ **) перед разрушением обычно не превышает 10—20%. Положим $\varepsilon_{\max} = \frac{1}{6} \approx 17\%$. Этой относительной деформации соответствует смещение атомов от положения равновесия на расстояние $\Delta r = \varepsilon r_0 = \frac{1}{6}\,3\,\text{Å} = 0{,}5\,\text{Å}$. Таким образом, при подсчете сил межатомного притяжения для рассматриваемой модели кристалла за расстояние между ионами следует брать величину

$$r = r_0 + \Delta r = 3\,\text{Å} + 0{,}5\,\text{Å} = 3{,}5\,\text{Å}.$$

Если учесть, что заряд каждого иона по величине равен заряду электрона, то есть $q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*, то максимальное значение силы притяжения между двумя атомами будет равно

$$F_{\max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = 9\cdot 10^9\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{(3{,}5\cdot 10^{-10})^2} \approx$$
$$\approx 2\cdot 10^{-9}\,(н).$$

Таково по порядку величины значение единичной силы межатомной связи.

Прочность кристалла

Оценим примерное число атомов, приходящихся на единицу поверхности разрыва кристалла.

Диаметр иона равен приблизительно расстоянию между соседними ионами. Мы считали это расстояние равным 3 Å, тогда число атомов на каждом квадратном метре поверхности разрыва кристалла

$$N_{ат} \sim \frac{1}{(3\cdot 10^{-10})^2} \approx 10^{19}\left(\frac{1}{м^2}\right).$$

В нашей модели кристалла число связей, проходящих через единицу площади, равно числу атомов ($N_{св} = N_{ат}$), значит, $N_{св} \approx \approx 10^{19}\ м^{-2}$.

Теперь можно оценить теоретическую величину предела прочности кристаллов:

$$\sigma \approx 2\cdot 10^{10}\ н/м^2.$$

Оценка величины модуля упругости

Если известны значения единичной межатомной связи и, следовательно, предела прочности кристаллов, то можно оценить величину модуля упругости.

По закону Гука в пределах упругой деформации напряжение пропорционально растяжению. Коэффициент пропорциональности между величиной деформации ε и напряжением σ (модуль упругости)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Так как величина прочности по нашей оценке

$$\sigma \approx 2\cdot 10^{10}\ н/м^2,$$

а максимальная упругая деформация $\varepsilon_{\max} \approx \frac{1}{6}$, то модуль упругости

$$E = \frac{2\cdot 10^{10}\cdot 6}{1} \approx 10^{11}\left(\frac{н}{м^2}\right).$$

Результат расчета по порядку величины соответствует экспериментальным данным. Например, модуль упругости стали $2\cdot 10^{11}\ н/м^2$, алюминия $0{,}7\cdot 10^{11}\ н/м^2$, каменной соли — $0{,}4\cdot 10^{11}\ н/м^2$.

---

*) Для кристалла NaCl это расстояние равно 2,814 Å (1 Å = 10^{-10} *м*).

**) Относительная деформация ε при растяжении равна отношению абсолютной деформации тела к длине этого тела в нормальном состоянии.

Оценка величины энергии связи

Зная величину единичной силы межатомной связи, можно найти величину энергии взаимодействия двух атомов. Энергия связи двух атомов определяется работой, необходимой для удаления этих атомов друг от друга на такое расстояние, при котором силы взаимодействия исчезающе малы. Это расстояние (см. рис. 1) примерно равно 2 r_0.

Для упрощения будем считать среднее значение силы взаимодействия при изменении расстояния от r_0 до $2r_0$ равным $\frac{1}{2}\ F_{\max}$. Тогда энергия связи (в расчете на одну связь) равна

$$W_1 = A = F\cdot l \approx F_{\text{ср}}\,(2r_0 - r_0) \approx$$
$$\approx \frac{F_{\max}}{2}\cdot r_0 = \frac{2\cdot 10^{-9}}{2}\cdot 3\cdot 10^{-10} =$$
$$= 3\cdot 10^{-19} (\textit{дж}).$$

Интересно сравнить полученное значение потенциальной энергии взаимодействия частиц в твердом теле (энергии связи) с кинетической энергией их теплового движения, определяемой в среднем величиной kT. При комнатной температуре

$$W_{\text{к}} \sim kT = 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300 \approx$$
$$\approx 4\cdot 10^{-21}\quad (\textit{дж}).$$

Видно, что $W_1 \gg W_{\text{к}}$, то есть в твердом теле энергия межатомного взаимодействия много больше энергии теплового движения.

По известному значению энергии одной связи найдем энергию связи кристалла, то есть энергию, которую необходимо затратить, чтобы разделить кристалл на отдельные атомы, и сравним полученную величину с экспериментальными значениями. На опыте величина энергии связи кристаллического вещества — это теплота испарения твердого тела.

Энергия связи одного моля вещества равна

$$W_{\text{св}} = W_1\, N'\, N_A,$$

где W_1 — энергия одной связи, N' — число связей, приходящихся на один атом, N_A — число Авогадро.

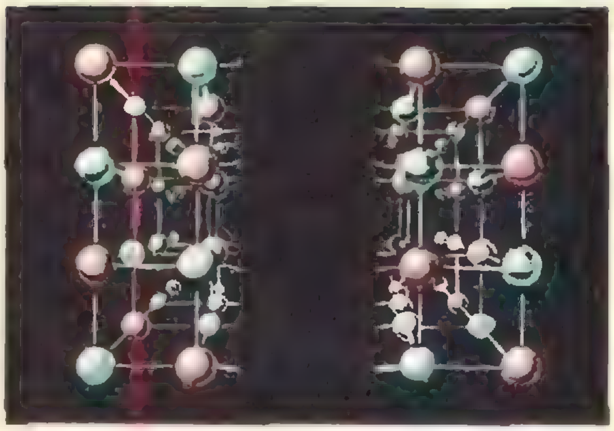


Рис. 4.

В рассматриваемой простейшей решетке (см. рис. 2) на каждый атом приходится по одной связи. Следовательно, величина энергии связи

$$W_{\text{св}} = 3\cdot 10^{-19}\cdot 1\cdot 6{,}02\cdot 10^{23} \approx$$
$$\approx 18\cdot 10^4 \left(\frac{\textit{дж}}{\textit{моль}}\right) \approx 40 \left(\frac{\textit{ккал}}{\textit{моль}}\right).$$

Это значение близко к найденным экспериментально значениям энергии связи различных кристаллов (несколько десятков килокалорий на моль).

Вычисление поверхностного натяжения

Пользуясь рассмотренной моделью, можно оценить и величину удельной поверхностной энергии — коэффициент поверхностного натяжения. Эта величина равна энергии, которой обладает единица поверхности на границе вещества $\left(\alpha = \frac{W}{S}\right)$. При разрыве кристалла сечения S образуется новая поверхность площадью $S_1 = 2\,S$ (рис. 4). Энергия связи единицы поверхности плоскости разрыва твердого тела равна $W' = W_1 \times N_{\text{св}}$, где W_1 — энергия одной связи, а $N_{\text{св}}$ — число связей, приходящихся на один квадратный метр. Эта энергия принадлежит как слою атомов, лежащему с одной стороны плоскости разрыва, так и слою, лежащему с другой стороны.

Поверхностное натяжение

$$\alpha = \frac{W}{S_1} = \frac{W' S N_{\text{св}}}{2S} =$$

$$= \frac{W' N_{\text{св}}}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{19}}{2} = 1{,}5 \left(\frac{\text{дж}}{\text{м}^2} \right).$$

У кристалла NaCl $\alpha \approx 0{,}35$ *дж/м²*.

Рассматривая взаимодействие между ионами, мы смогли оценить порядок величины предела прочности, модуля упругости, энергии связи, коэффициента поверхностного натяжения. Таким образом, мы убедились, что силы взаимодействия между ионами кристаллической решетки, то есть силы, действующие в «микромире», определяют макроскопические свойства твердых тел.

Можно поступить и наоборот — по найденным экспериментально характеристикам механических свойств кристаллов определить величину сил межатомного взаимодействия. Оцените, например, величину сил межатомного взаимодействия по известному значению модуля упругости $E = 10^{11}$ *н/м²*.

Оценки, которые мы проводили, делались в предположении, что рассматриваемый кристалл имеет идеальную структуру решетки. У реальных кристаллов правильность решетки нарушается. Учет этого факта значительно усложняет теоретические расчеты характеристик физических свойств кристаллов. Некоторые из сделанных нами оценок для идеальных кристаллов значительно расходятся с данными, получаемыми из экспериментов.

Стакан воды

Какой стакан устойчивее — до краев полный воды или наполовину пустой?

Если у вас есть два совершенно одинаковых по форме предмета, то более устойчивым будет тот, у которого ниже центр тяжести. Это вы, наверное, знаете. Поэтому, чтобы сделать устойчивее наполненный водой стакан, достаточно отпить из него несколько глотков. При этом центр тяжести, который раньше находился в центре стакана, опустится. Сколько же нужно оставить в стакане воды, чтобы его положение было наиболее устойчивым?

Ведь, если выпить всю воду, то центр тяжести окажется на прежнем месте (дно мы будем считать невесомым). Значит, в какой-то момент центр тяжести занимал самое низкое положение. Как, зная вес пустого и полного стаканов, определить, каким должен быть уровень воды в наиболее устойчивом стакане?

Те, кто знакомы с высшей математикой, вероятно уже сообразили, что для решения достаточно выразить высоту центра тяжести стакана через положение уровня воды в нем, а затем, продифференцировав эту функцию, приравнять производную нулю и найти таким образом минимум. Однако существует и более простое решение этой задачи без всякой высшей математики. Попробуйте найти его.

В. Б.

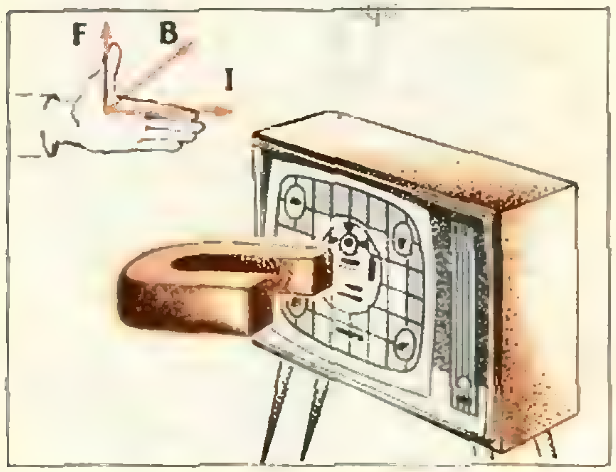
Как определить полюса магнита?

Б. И. Алейников

Вопрос этот совсем не такой простой, каким кажется с первого взгляда. Ведь у нас нет никакой уверенности в том, что полюса магнита не раскрасили в различные цвета просто, чтобы их различать, то есть без связи с их истинным магнетизмом. Кроме того, магнит может быть вообще не маркирован.

Для опыта нужны две вещи — постоянный подковообразный магнит, не обязательно раскрашенный в два цвета (даже интереснее, если полюса магнита заранее не размечены), и ... телевизор. Опыт лучше производить утром или днем, когда по телевидению передают сетку для настройки телевизоров.

Поднесем магнит к экрану включенного телевизора так, как показано на рисунке. Изображение немедленно исказится. В центре сетки имеется маленький кружок. Он заметно сместится вверх или вниз, в зависимости от того, как расположены полюса магнита.



Изображение на экране телевизора создает электронный луч, идущий из глубины трубки на зрителя. Наш магнит отклоняет движущиеся электроны, поэтому изображение смещается. Направление действия магнитного поля на движущийся заряд определяется по правилу левой руки. Нужно расположить ладонь так, чтобы силовые линии входили в нее, а вытянутые пальцы указывали направление тока; тогда отогнутый под углом 90° большой палец укажет направление смещения движущегося заряда. Силовые линии идут от северного к южному полюсу магнита. А направлением тока в правиле левой руки считается «техническое» направление — от плюса к минусу. Так двигались бы положительные заряды. Но в кинескопе движутся электроны, причем летят они на нас. Это эквивалентно тому, что положительные заряды летят от нас. Поэтому вытянутые пальцы левой руки должны быть направлены в экран. Остальное понятно. По смещению центрального кружочка телевизионной сетки определяем, какой полюс магнита поднесен к экрану, северный или южный. Итак, с помощью телевизора можно легко и быстро определять расположение полюсов немаркированного магнита.

Телевизор может помочь и при определении знака полюсов немаркированной батареи. Для этого опыта необходимо иметь батарею, электромагнит с дугообразным сердечником, телевизор, сопротивление, проводник.

Подключим к батарее последовательно электромагнит и сопротивление, подобранное с таким расчетом, чтобы ток не превышал допустимого. Поднося электромагнит к экрану телевизора, определим по правилу левой руки его полюса. Далее по правилу буравчика найдем направление тока и, следовательно, знаки полюсов батареи.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Окрестность фигуры

Ю. И. Ионин,
Л. Д. Курляндчик

Разберем две геометрические задачи.

Задача 1. *В прямоугольник 20×25 бросили 120 единичных квадратов. Доказать, что в прямоугольник можно поместить круг радиуса $^1/_2$, не пересекающейся ни с одним из квадратов.*

Выясним, где может находиться центр круга радиуса $^1/_2$, не пересекающегося с данным единичным квадратом. Геометрическим местом точек, удаленных от квадрата не более чем на $^1/_2$, является фигура, изображенная на рисунке 1 (расстоянием от точки до фигуры называется расстояние до ближайшей точки этой фигуры). Следовательно, центр круга радиуса $^1/_2$, не пересекающего с квадратом, расположен вне изображенной на рисунке 1 фигуры, которую мы назовем $\frac{1}{2}$-окрестностью квадрата. Построим $\frac{1}{2}$-окрестность для каждого из данных 120 единичных квадратов. Центр искомого круга должен лежать вне этих окрестностей. Кроме того, чтобы круг оказался внутри прямоугольника, его центр должен принадлежать меньшему прямоугольнику 19×24, который получится, если сдвинуть каждую сторону исходного прямоугольника внутрь на $\frac{1}{2}$.

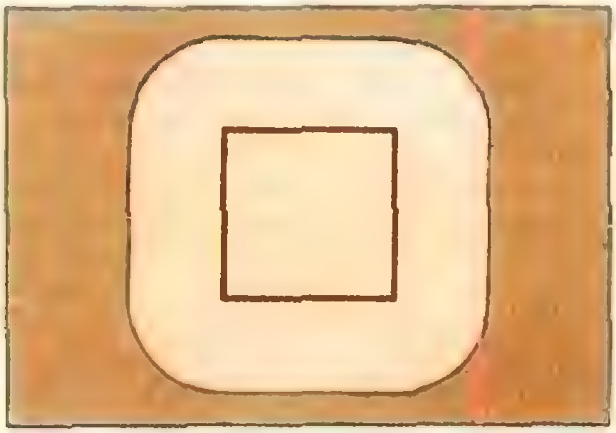


Рис. 1.

Задача будет решена, если удастся доказать, что построенные 120 окрестностей не покрывает полностью меньший прямоугольник.

Оценим площадь, покрываемую этими окрестностями. Каждая окрестность состоит из квадрата со стороной 1, четырех прямоугольников $1\times\frac{1}{2}$ и четырех четвертей круга радиуса $\frac{1}{2}$. Следовательно, площадь одной окрестности равна $1+4\cdot\frac{1}{2}+\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3+\frac{\pi}{4}$. Все 120 окрестностей покрывают площадь, не превосходящую (окрестности могут перекрываться) $120\cdot\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=$ $=360+30\pi$.

В то же время площадь прямоугольника 19×24 равна 456. Остается заметить, что

$$360+30\pi<456,$$

так как $\pi<3{,}2$.

Задача 2. *Плоская фигура площади 1 покрыта конечным числом кругов. Доказать, что из этих кругов можно выбрать один или несколько попарно непересекающихся, занимающих площадь не меньше $\frac{1}{9}$.*

Выберем самый большой из данных кругов и обозначим через R_1

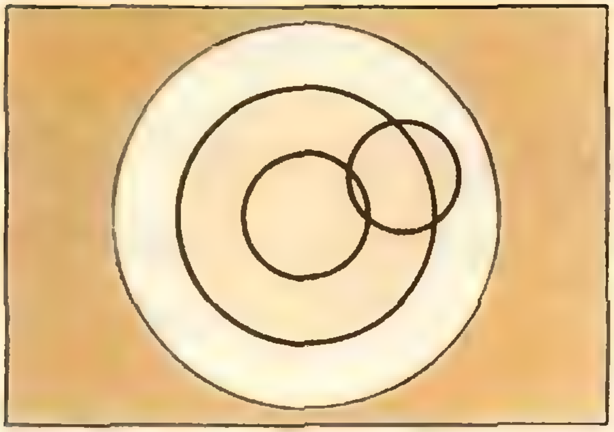


Рис. 2.

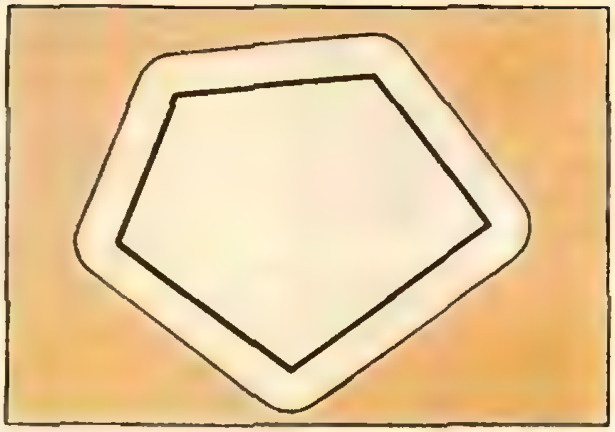


Рис. 3.

его радиус. Если площадь этого круга не меньше $\frac{1}{9}$, задача решена. Предположим, что $\pi R_1^2 < \frac{1}{9}$. Так как радиусы остальных кругов не больше R_1, то центры тех из них, которые пересекаются с выделенным кругом, лежат в R_1-окрестности этого круга. Сами же круги лежат в $2R_1$-окрестности выделенного круга (рис. 2). Так как площадь этой $2R_1$-окрестности, равная $9\pi R_1^2$, меньше 1, то найдутся круги, не пересекающиеся с выделенным. Пусть R_2 — радиус наибольшего из таких кругов. Если $\pi R_1^2 + \pi R_2^2 \geqslant \frac{1}{9}$, задача решена. Если же $\pi R_1^2 + \pi R_2^2 < \frac{1}{9}$, то $9\pi R_1^2 + 9\pi R_2^2 < 1$ и, следовательно, найдется круг, центр которого лежит вне R_1-окрестности первого и вне R_2-окрестности второго круга и который тем самым с этими кругами не пересекается. Обозначим через R_3 радиус наибольшего из кругов, не пересекающихся ни с одним из двух выделенных кругов. Если $\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi R_3^2 \geqslant \frac{1}{9}$ задача решена, в противоположном случае повторяем рассуждение. Таким образом, каждый раз мы либо находим несколько попарно непересекающихся кругов, сумма площадей которых не меньше $\frac{1}{9}$, либо обнаруживаем еще один круг, не пересекающийся ни с одним из найденных. Последнее в конце концов окажется невозможным так как кругов конечное число.

В обеих разобранных задачах полезным оказалось понятие окрестности фигуры.

Определение 1. *Пусть ε — положительное число. ε-окрестностью плоской фигуры F называется множество всех точек плоскости, расстояние *) которых до фигуры F не превосходит ε.*

Можно несколько иначе описать ε-окрестность плоской фигуры.

Определение 2. *Построим круги радиуса ε с центрами в каждой точке фигуры F. Совокупность точек всех этих кругов и есть ε-окрестность фигуры F.*

Понятие ε-окрестности можно ввести и для тел в пространстве. Нужно только вместо кругов рассмотреть шары радиуса ε с центрами в точках тела.

Выясним, что представляет собой ε-окрестность выпуклого многоугольника. Нетрудно понять, что она состоит из самого многоугольника, прямоугольников высоты ε, построенных на его сторонах как на основаниях и расположенных вне многоугольника, и круговых секторов радиуса ε с центрами в вершинах многоугольника (рис. 3). Центральный угол сек-

---

*) Говорят, что точка O находится на расстоянии от фигуры F, если всякий круг с центром O и радиусом, меньшим ε, не пересекается с фигурой F, а всякий круг с радиусом, большим ε, пересекается.

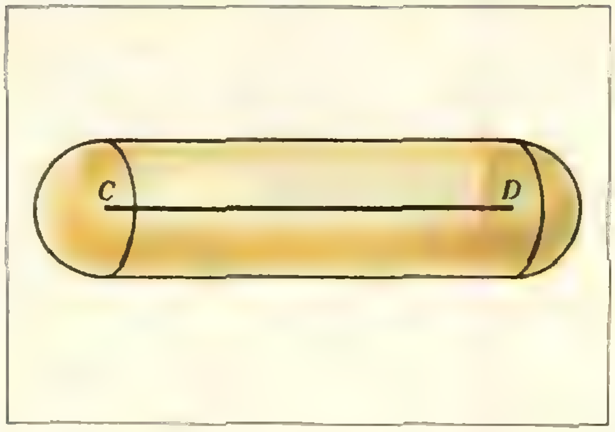


Рис. 4.

тора при каждой вершине многоугольника дополняет до 180° внутренний угол многоугольника при этой вершине. Следовательно, сумма всех центральных углов равна 180° n — —180° (n — 2) =360°, (n—число сторон многоугольника, 180° (n — 2) — сумма его внутренних углов). Это означает, что, расположив секторы без наложений и совместив их центры, мы получим круг радиуса ε. Теперь легко вычислить площадь ε-окрестности выпуклого многоугольника. Она равна $S+P\varepsilon+\pi\varepsilon^2$, где S — площадь многоугольника, а P — его периметр.

Рассмотрим еще одну задачу, которая легко решается, если воспользоваться понятием окрестности фигуры.

Задача 3. *Точки A, B, C, D расположены в пространстве таким образом, что длины отрезков AC и BD не превосходят 1. Доказать, что для каждой точки M отрезка AB можно найти такую точку N отрезка CD, что длина отрезка MN не превосходит 1.*

Доказываемое утверждение можно сформулировать следующим образом: каждая точка отрезка AB отстоит не более чем на 1 от отрезка CD, то есть принадлежит 1-окрестности отрезка CD. Эта окрестность состоит из прямого кругового цилиндра радиуса 1, осью которого служит отрезок CD, и двух полушарий радиуса 1, осью которого служит отрезок CD, и двух полушарий радиуса 1 с центрами в точках C и D, основаниями которых являются основания цилиндра и которые расположены вне цилиндра (рис. 4). Из условия задачи следует, что точки A и B принадлежат 1-окрестности отрезка CD, а так как эта окрестность выпукла, то она содержит весь отрезок AB, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Стороны выпуклого многоугольника периметра P отодвигают параллельно самим себе во внешнюю сторону на расстояние 1 и продолжают до пересечения. Докажите, что площадь многоугольника увеличится при этом более чем на $P+\pi$.

2. Найдите объем ε-окрестности единичного куба.

3. В параллелепипеде 5 × 10 × 25 произвольным образом расположено 120 единичных кубов. Докажите, что в параллелепипед можно поместить шар радиуса $^1/_2$, не имеющий общих точек ни с одним из кубов.

4. На плоскости расположено несколько правильных треугольников, покрывающих площадь 1. Докажите, что из них можно выбрать один или несколько попарно непересекающихся треугольников с суммарной площадью, не меньшей $^1/_{16}$.

5. В квадрат со стороной 38 *см* бросили 100 выпуклых многоугольников, площадь каждого из которых не превосходит π *см*^{2}; а периметр — 2π *см*. Докажите, что в квадрат можно поместить круг радиуса 1, не пересекающийся ни с одним из многоугольников.

6. Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $\frac{S}{P}$.

7. В квадрате со стороной 1 находится 6 отрезков длины $^1/_2$. Доказать, что на некоторых двух отрезках найдутся точки M и N, расстояние между которыми меньше $^1/_4$.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М226, М227» или «...Ф238». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). Решения задач из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.

В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М226—М230; Ф238—Ф242

М226. В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии (но, естественно, по другую сторону и на той же прямой; рис. 1). Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину исходного квадрата?

Ю. И. Ионин

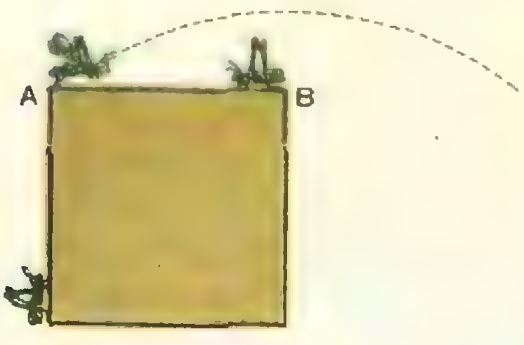


Рис. 1.

М227. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

Е. В. Саллинен

М228. Лист клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток раскрасили в n цветов (каждую клетку закрасили в один из этих цветов или не закрасили вообще). *Правильной* называется раскраска, при которой в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно «докрасить» весь лист правильным образом, если первоначально были правильно закрашены

а) $n^2 - 1$ клетка;
б) $n^2 - 2$ клетки;
в) n клеток?

Д. Логачев

М229. В центре квадрата находится полицейский, а в одной из вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что максимальная скорость полицейского равна u, а гангстера — v. Цель полицейского — оказаться с гангстером на одной стороне квадрата. Докажите, что

а) если $\frac{u}{v} > \frac{1}{3}$, то он может добиться своей цели;

б) если $\frac{u}{v} < \frac{1}{3}$, то гангстер может помешать ему это сделать.

А. Белкин

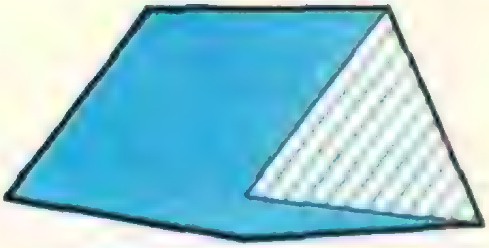


Рис. 2.

М230. Докажите, что из любого выпуклого равностороннего (но не обязательно правильного) пятиугольника можно вырезать правильный треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной пятиугольника (рис. 2).

С. Конягин.

Ф238. Имеются две проволоки квадратного сечения, сделанные из одного и того же материала. Сторона сечения одной проволоки — 1 *мм*, а другой — 4 *мм*. Для того чтобы расплавить первую проволоку, через нее нужно пропустить ток в 10 *а*. Какой ток нужно пропустить через вторую проволоку, чтобы она расплавилась?

Считать, что количество тепла, уходящего в окружающую среду за 1 секунду, пропорционально разности температур проволоки и среды и площади поверхности проволоки, причем коэффициент пропорциональности одинаков для обеих проволок.

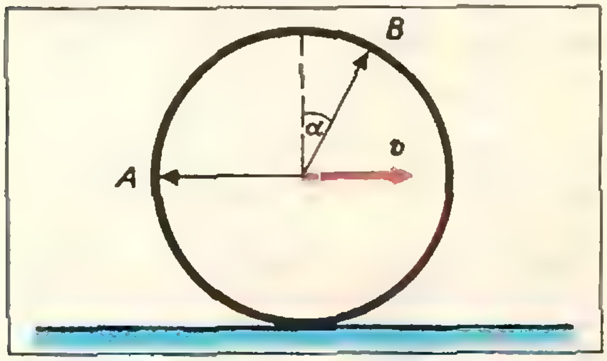


Рис. 3.

Ф239. Колесо радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра колеса постоянна.

Как известно, траекторию криволинейного движения точки в течение малого промежутка времени всегда можно считать дугой окружности. Определить радиусы окружностей, по которым движутся точки колеса A и B, в тот момент времени, когда радиус-вектор точки A горизонтален, а радиус-вектор точки B составляет угол α с вертикалью (рис. 3).

Ф240. Шар-зонд, имеющий нерастяжимую оболочку, поднялся на максимальную высоту и совершает малые колебания около равновесного уровня. Найти период этих колебаний, считая, что на такой высоте плотность воздуха ρ убывает с высотой равномерно на величину $\delta = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\,\rho$ через каждые $h = 100$ *м*. Трением шара о воздух пренебречь.

М. В. Казарновский

Ф241. Кольцо массы m может скользить по стержню длины L. Сила трения между ними F. Определить, какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить стержню, чтобы он пролетел сквозь кольцо, если вначале кольцо покоится.

Опыт проводится в невесомости.

Ф242. Камера-обскура представляет собой прямоугольный ящик, в одной из стенок которого имеется круглое отверстие. Освещенность изображения Солнца, которое получается на противоположной стенке камеры — экране, падает вдвое при удалении от центра изображения к краю на 0,9 радиуса изображения. Во сколько раз освещенность передней стенки камеры больше, чем освещенность в центре изображения?

Г. Л. Коткин

Решения задач

М184—М189; Ф198—Ф202

М184. *Докажите тождество*

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=$$
$$=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Докажем это тождество методом математической индукции. При $n=1$ оно верно, поскольку $C_1^0=C_1^1=1!=1$:

$$\frac{C_1^0}{x}-\frac{C_1^1}{x+1}=\frac{1!}{x(x+1)}.$$

Допустим, что верно тождество

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\frac{C_n^2}{x+2}-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{C_n^{n-1}}{x+n-1}+(-1)^n\times$$
$$\times\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}. \qquad (1)$$

Заменим в (1) x на $x+1$. Получим тождество

$$\frac{C_n^0}{x+1}-\frac{C_n^1}{x+2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{C_n^{n-1}}{x+n}+$$
$$+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n+1}=$$
$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}. \qquad (2)$$

Вычтем почленно (2) из (1) и воспользуемся тем, что

$$C_n^0=C_n^n=C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1,$$
$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$$

для каждого $k=0,1,2,\ \ldots,\ n-1$. Получим

$$\frac{C_{n+1}^0}{x}-\frac{C_{n+1}^1}{x+1}+\frac{C_{n+1}^2}{x+2}-\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{C_{n+1}^n}{x+n}+(-1)^{n+1}\times$$
$$\times\frac{C_{n+1}^{n+1}}{x+n+1}=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n+1}\right)=$$
$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}. \qquad (3)$$

Таким образом, индуктивный шаг проделан и наше равенство доказано при всех n.

Те, кто читал статью В. Н. Вагутена «Числа C_n^k, последовательности и многочлены» в «Кванте» № 2 (1973), заметили, конечно, что в задаче М184 мы получили формулу разности порядка n для последовательности $f(x)=\frac{1}{x}$:

$$\Delta^n f(x)=\frac{(-1)^n\,n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Многие читатели привели доказательство следующего утверждения о единственности тождества вида (1): *если верно тождество*

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{A_k}{x+k}, \qquad (4)$$

где A_k — некоторые числа, то

$$A_k=(-1)^kC_n^k=\frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (5)$$

Действительно, достаточно умножить обе части (4) на общий знаменатель $x(x+1)\ldots(x+n)$ и положить в полученном тождестве $x=-k$. Тогда справа все слагаемые, кроме одного

$$A_k(-k)(-k+1)\ldots(-1)\,1\cdot2\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot(n-k)=A_k(-1)^k\,k!\,(n-k)!$$

обратятся в нуль и мы придем к (5).

М185. *На кафтане площадью 1 помещается 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $^1/_2$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $^1/_5$.*

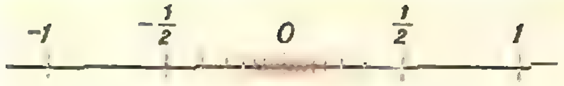


Рис. 1.

Обозначим через x_k площадь части кафтана, покрытую ровно k заплатами ($k = 0, 1, \ldots, 5$). По условию площадь кафтана равна 1, а сумма площадей заплат $= \frac{5}{2}$:

$$S_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$

$$S_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = \frac{5}{2}.$$

Сумма площадей всех 10 попарных пересечений заплат равна

$$S_2 = x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \geqslant -3x_0 - \\ - x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 2S_1 - \\ - 3S_0 = 2,$$

поэтому хотя бы одно из 10 попарных пересечений будет по площади не меньше $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (равенство возможно, только если $x_0 = x_1 = x_4 = x_5 = 0$ и все 10 попарных пересечений равны по площади!).

Решение задачи М185, различных ее вариантов и обобщений тесно связано с одной замечательной общей формулой для аддитивных функций множества — «формулой включений и исключений». Об этой связи подробно рассказывается в отдельной заметке «Заплаты на кафтане», которая будет помещена в 12 номере журнала.

М186. *Найдите все решения уравнения*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

в целых числах, отличных от 1.

Если k — целое число, отличное от 1, то

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2}$$

(на рисунке 1 красными штрихами на числовой оси показаны числа вида $\frac{1}{k}$, $k \neq 1$).

Отсюда сразу следует, что ни одно из чисел x, y, z не может быть отрицательным: если, скажем, $x < 0$, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Итак, достаточно найти решение в целых положительных числах x, y, z.

Мы можем считать, что $1 < x \leqslant y \leqslant z$: остальные решения получатся перестановкой. Другими словами, достаточно найти такие решения, для которых

$$1 > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}.$$

Ясно, что x не может быть больше 3: если $x > 3$, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Поэтому возможны только два случая:

1) $x = 3$ (и тогда, очевидно, $y = z = 3$);
2) $x = 2$. В этом случае должно быть

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

При этом y не может быть больше 4: иначе

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому либо $y = 4$ (и тогда $z = 4$), либо $y = 3$ (и тогда $z = 6$).

Итак, уравнение имеет всего десять решений в целых числах, отличных от 1: шесть, получающихся перестановкой из чисел (2, 3, 6), три, получающиеся перестановкой из чисел (2, 4, 4), и еще одно: $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.

М187. *На плоскости заданы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C треугольника ABC, у которого:*

а) высота AA' равна стороне BC;
б) медиана AA_1 равна стороне AC;
в) медиана AA_1 равна стороне BC;
г) высота CC' равна медиане BB_1;
д) высота BB' равна медиане CC_1.

а) Искомое множество точек C будет, очевидно, симметричным относительно прямой AB; поэтому достаточно исследовать только точки, лежащие в одной из полуплоскостей, на которые прямая AB делит плоскость.

Построим точку D такую, что $DB \perp AB$ и $DB = BA$. В той полуплоскости, которую мы рассматриваем, такая точка D, очевидно, единственна. Если высота AA' равна CB, то (рис. 2)

$$\Delta AA'B = \Delta CBD$$

(углы $A'AB$ и CBD равны, поскольку оба они острые, $AA' \perp BC$ и $AB \perp BD$). Таким образом,

$$\angle BCD = 90°. \qquad (1)$$

Обратно, если для некоторой точки C угол

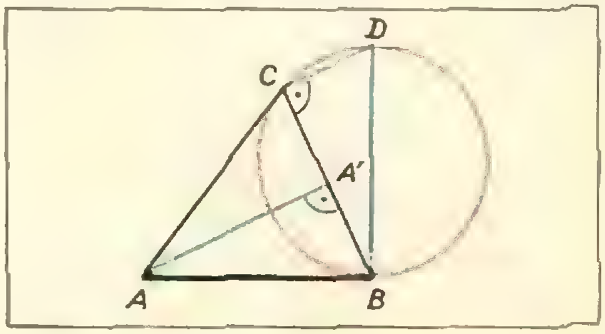


Рис. 2.

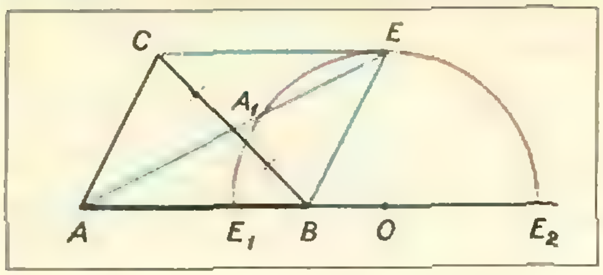


Рис. 3.

BCD прямой, то, очевидно, $\Delta AA'B = \Delta CBD$ и $AA' = BC$. Таким образом, достаточно найти множество точек C, для которых выполнено условие (1) (B и D — фиксированные точки). Это множество, как известно, — окружность с диаметром BD.

б) Пусть E — такая точка на продолжении медианы AA_1, что $A_1E = AA_1$. Тогда $ACEB$ — параллелограмм (рис. 3). Условие $AA_1 = AC$ равносильно тому, что

$$AE = 2BE. \qquad (2)$$

Воспользуемся такой теоремой:

Если A и B — две данные точки плоскости, то множество точек E плоскости, для которых $\frac{AE}{BE} = k$ (k — фиксированное положительное число, отличное от 1). — *окружность, построенная на диаметре E_1E_2, где E_1 и E_2 — точки на прямой AB, для которых*

$$\frac{AE_1}{BE_1} = k \quad и \quad \frac{AE_2}{BE_2} = k$$

(E_1 лежит внутри отрезка AB, E_2 — вне этого отрезка). Ниже мы коротко напомним, как можно доказать эту теорему *).

Из этой теоремы следует, что множество точек E — окружность с диаметром E_1E_2, E_1 и E_2 — точки на прямой AB такие, что

$$\frac{AE_1}{BE_1} = \frac{AE_2}{BE_2} = 2,$$

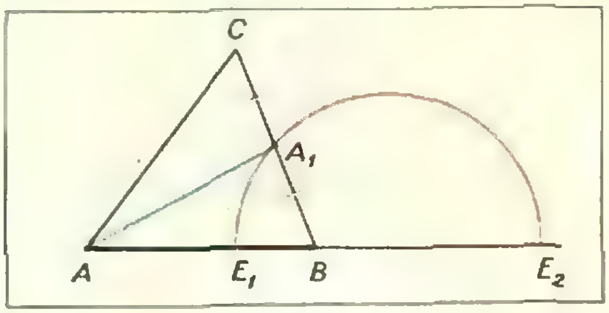


Рис. 4.

и чтобы получить искомое множество точек C, нужно сдвинуть эту окружность на вектор $\overrightarrow{BA}$ (ведь $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$!).

Осталость только доказать теорему. Чисто геометрически это можно сделать по такому плану: если $\frac{AE}{BE} = k = \frac{AE_1}{BE_1} = \frac{AE_2}{BE_2}$, то EE_1 и EE_2 — биссектрисы углов между прямыми AE и BE; поэтому $\angle E_1EE_2 = 90°$, так что E лежит на окружности с диаметром E_1E_2. Обратно, если O — центр этой окружности, то для любой точки E окружности $EO^2 = AO \cdot BO$, то есть треугольники AOE и EOB подобны и

$$\frac{EA}{EB} = \frac{AO}{OE} = \frac{OE}{OB} = k.$$

в) Условие $AA_1 = BC$ эквивалентно тому, что

$$AA_1 = 2BA_1. \qquad (3)$$

Таким образом, геометрическим местом точек A_1 служит та самая окружность, которая использовалась в решении предыдущей задачи (рис. 4), только теперь ее нужно не сдвигать, а подвергнуть растяжению с коэффициентом 2 и центром в точке B: ведь $BC = 2BA_1$!

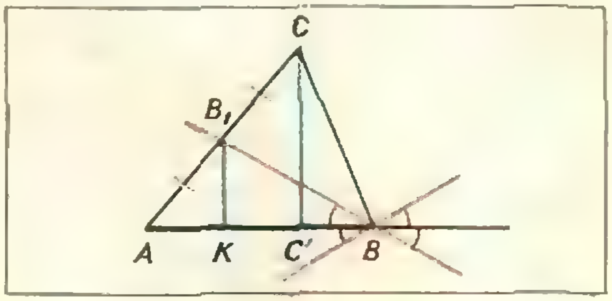


Рис. 5.

г) Опустим из точки B_1 — середины стороны AC — перпендикуляр B_1K на прямую AB. Разумеется, $CC' = 2B_1K$, поэтому условие $CC' = BB_1$ равносильно такому условию (рис. 5): $BB_1 = 2B_1K$ (катет равен половине гипотенузы). Следовательно, $\angle B_1BK = 30°$. Поэтому геометрическое место точек B_1 — четыре луча, выходящие из точки B и образующие с отрезком AB углы в 30° и 150°. Множество точек C получается из него растяжением с коэффициентом 2 и центром в точке A.

д) Пусть L — проекция точки C_1 (середины отрезка AB) на прямую AC. Поскольку (рис. 6) $BB' = CC_1$, то $2C_1L = CC_1$ и $\angle LCC_1 = 30°$. Следовательно, $\angle ACC_1$ равен 30° или 150°, и геометрическим местом точек C будет пара окружностей, проходящих через точки A и C_1.

На рисунке 7 изображены ответы к задачам М187 а)—д). Точки C, лежащие на самой прямой AB, мы не включаем в искомое множество точек (они приводят к «вырожденным» треугольникам ABC); выше

---

*) См. также книги: Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. М., «Наука», 1970, с. 22, 102 и Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. М., «Наука», 1968, с. 32.

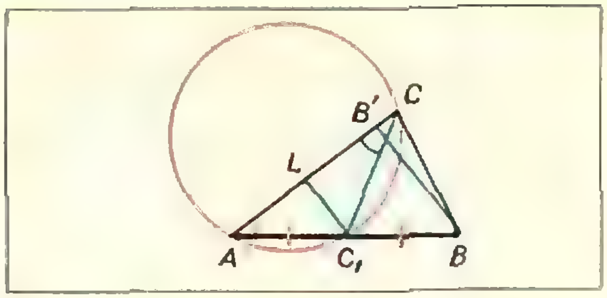


Рис. 6.

мы не оговаривали это в каждом отдельном случае для экономии места.

Мы получили много решений задач **М187** а)—д), но в большинстве из них содержатся недочеты (например, потеряна «половина» ответа, нет полного доказательства «в обе стороны» и т. п.).

Н. Б. Васильев

М188. *Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан не менее чем с n другими (беспосадочными рейсами). Докажите, что даже если отменить любые $n-1$ рейсов, то все равно из любого города можно добраться в любой другой город на самолетах (с пересадками). Укажите все случаи, когда такая «связность» нарушается при отмене n рейсов.*

Предположим, что после отмены некоторых l рейсов «связность» нарушилась. Тогда наверняка есть такие k городов, где $k \leqslant n$, что из них нельзя проехать в остальные $2n-k$ городов. Действительно, рассмотрим некоторый город A и все города, в которых можно из него проехать (возможно, с пересадками). Если их (вместе с A) не больше n, то нужные k городов найдены. Если же их m и $m > n$, то из них нельзя попасть в остальные $2n-m$ городов, а из этих $2n-m < n$ городов нельзя проехать в остальные m городов. Итак, в любом случае найдутся k городов, где $k \leqslant n$, из которых нельзя проехать в остальные $2n-k$ городов. Первоначально каждый из этих городов был связан авиалиниями не менее чем с n городами, поэтому по крайней мере $n+1-k$ рейсов соединяли его не с выделенными k городами и, следовательно были отменены. Значит, всего было отменено не меньше чем $k(n+1-k)$ рейсов. Но $k(n+1-k) > n-1$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, если отменить $n-1$ рейс, то «связность» не нарушается.

Ответим теперь на второй вопрос задачи. Заметим, что $k(n+1-k) = n$ лишь при $k=1$ и $k=n$. Если $k=1$, то это значит, что некоторый город был связан рейсами ровно с n городами и все эти рейсы были отменены. Если $k=n$, то это значит, что некоторые n городов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно соединены авиалиниями, оставшиеся n городов $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ тоже попарно соединены авиалиниями и есть еще n рейсов, соединяющих города A_1 и A_1', A_2 и $A_2', \ldots$ $\ldots, A_n$ и A_n'. На рисунке 8 вы видите схемы авиалиний для $n=2$ и $n=3$.

Л. Г. Лиманов

М189. *Три отрезка AB, EF и CD проходят через одну точку O, причем точка E лежит на отрезке AC, а точка F — на отрезке BD. Докажите, что EF меньше хотя бы одного из двух отрезков — AB или CD (рис. 9).*

Мы воспользуемся тем, что длина биссектрисы в треугольнике не превосходит полусуммы длин заключающих ее сторон (докажите это!). Предположим, что отрезок EF длиннее на Δ большего из отрезков AB, CD ($\max(AB, CD)$). Пусть $\measuredangle AOE \neq \measuredangle EOC$ — в противном случае $EF \leqslant \dfrac{AB+CD}{2}$ и EF не может быть длиннее $\max(AB, CD)$. Пусть для определенности $\measuredangle AOE > \measuredangle EOC$. Построим тогда такой отрезок E_1F_1 (см. рис. 10), что $\measuredangle E_1OE = \measuredangle EOC$. Ясно, что точка E_1 принадлежит отрезку AC, а точка F_1 — отрезку BD. $EF \leqslant \dfrac{CD+E_1F_1}{2}$, поэтому E_1F_1 по крайней мере на 2Δ длиннее $\max(AB, DC)$. Таким образом, мы сумели перейти от отрезка, «большего на Δ», к отрезку, «большему на 2Δ», где Δ — некоторое положительное число. Повторив такой переход k раз, мы получим отрезок E_kF_k, который длиннее $\max(AB, CD)$ по крайней мере на $2^k \cdot \Delta$. Выбрав k достаточно большим, мы можем сделать длину отрезка E_kF_k большей $AB+CD$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что отрезок EF не может быть больше $\max(AB, CD)$. Задача решена.

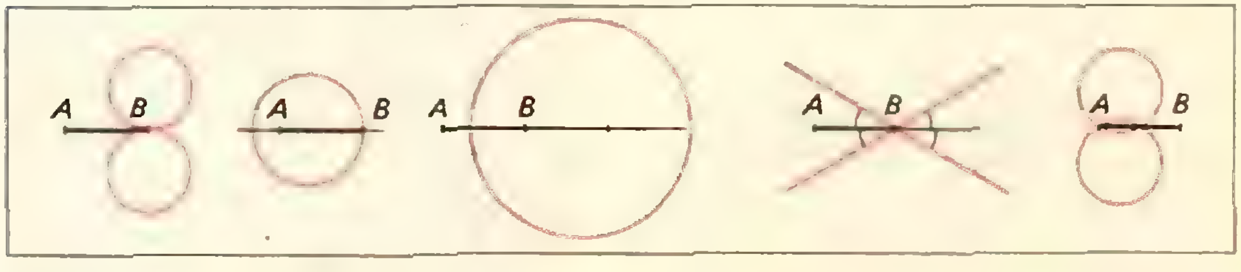


Рис. 7.

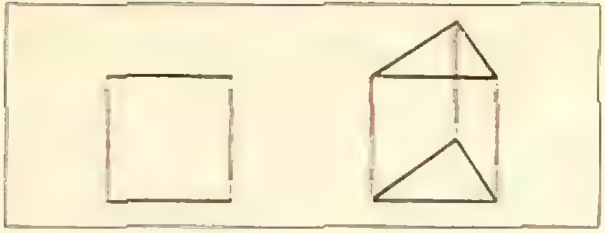


Рис. 8.

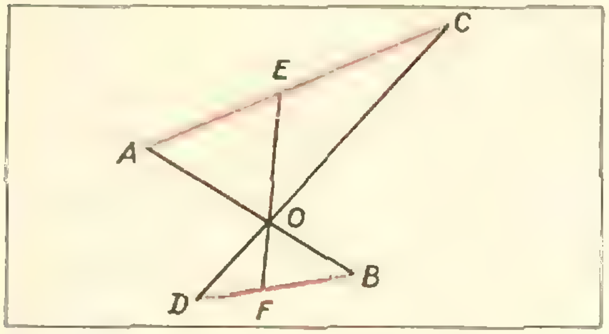


Рис. 9.

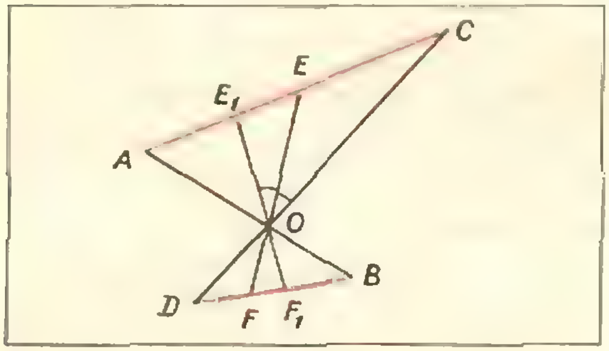


Рис. 10.

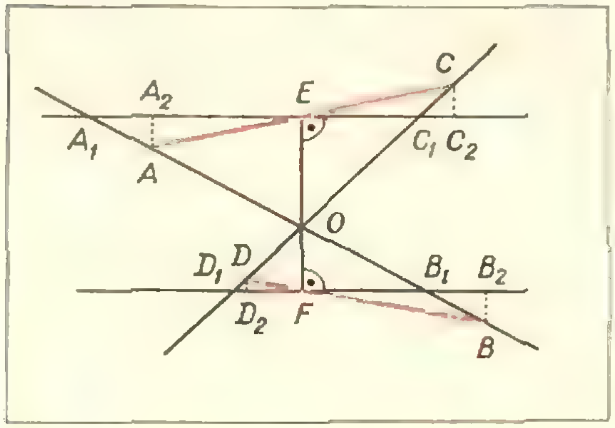


Рис. 11.

Вот второе решение задачи **М189**. Проведем через точки E и F прямые, перпендикулярные EF. Продолжим отрезки OA, OB, OC, OD до пересечения с этими прямыми и введем обозначения, как показано на рисунке 11. Пусть точка A лежит внутри полосы между прямыми, C — вне ее; тогда D должна лежать внутри полосы (иначе, очевидно, $CD > EF$), а B — вне. Из неравенств

$$\frac{AA_2}{CC_2}=\frac{A_2E}{EC_2}\leqslant\frac{A_1E}{EC_1}=\frac{B_1F}{FD_1}\leqslant\frac{B_2F}{FD_2}=\frac{BB_2}{DD_2}$$

следует, что либо $AA_2 \leqslant BB_2$ (и тогда $AB > EF$), либо $CC_2 \geqslant DD_2$ (и тогда $CD > EF$).

Д. Ю. Григорьев

Ф198. *Конькобежец решил затормозить и свел вместе пятки. Хотя это и трудно (почему?), но конькобежцу удается удерживать пятки вместе. Как он будет двигаться дальше?*

Обычно при малых скоростях движения конькобежец тормозит, сводя вместе не пятки, а носки ног. Такое движение конькобежца устойчиво. Однако конькобежец рискует упасть. Поэтому при больших скоростях движения конькобежец (как и хоккеист) тормозит, поворачивая оба конька в одну сторону. При этом он, конечно, тормозит и одновременно едет в сторону. Впрочем, даже сводя носки ног вместе, конькобежец обычно едет попеременно то на одном, то на другом коньке.

Когда лезвие конька расположено по направлению движения конькобежца, конек легко скользит по льду, то есть сила трения очень мала. Если конькобежец хочет затормозить, он ставит конек под некоторым углом к направлению движения, при этом возникает еще одна сила трения, перпендикулярная лезвию. Величина этой силы намного больше первой, так как в этом случае лезвие конька как бы срезает лед. Для простоты в дальнейшем будем говорить только об этой, перпендикулярной лезвию, силе трения.

Пусть конькобежцу удалось свести пятки вместе. Из рисунка 12, а видно, что в этом случае кроме сил сопротивления $F_{с.1}$ и $F_{с.2}$, направленных против скорости v, существуют силы F_1' и F_2', стремящиеся развести коньки в стороны. Вот почему конькобежцу приходится прикладывать усилия, чтобы удержать пятки вместе.

Как будет двигаться конькобежец после того, как он свел пятки ног? Ответить на этот вопрос нетрудно, так как из опыта известно, что в этом случае конькобежец развернется и затем будет ехать задом наперед. Труднее объяснить, почему это происходит. Здесь важны, по-видимому, несколько факторов.

Один из них — зависимость сил трения, перпендикулярных плоскости конька, от угла, который образует плоскость конька с направлением движения конькобежца. Если угол равен нулю, то эта сила тоже равна нулю, при угле, равном 90°,— сила максимальна. (Зависимость силы трения от угла связана

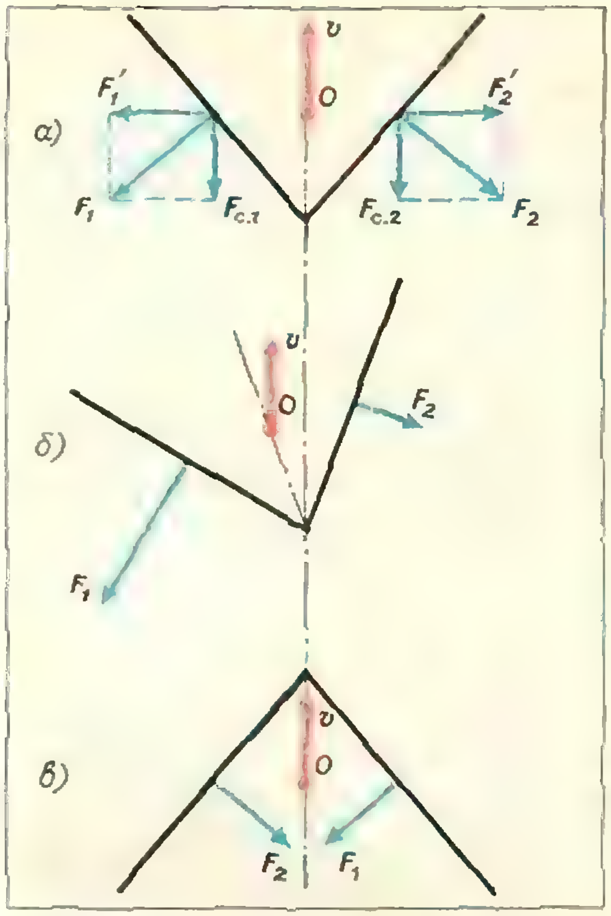


Рис. 12.

с изменением количества льда, «срезаемого» коньком в единицу времени.) Пусть в силу каких-то случайных причин, например, из-за неровностей льда, конькобежец повернулся на некоторый угол (рис. 12, *б*). В этом случае *сила F_2 уменьшится, а сила F_1 увеличится*. Следовательно, изменятся и моменты сил относительно оси, проходящей через центр тяжести конькобежца. Это приведет к тому, что конькобежец развернется и будет ехать задом наперед (рис. 12, *в*). Такое положение конькобежца устойчиво (покажите это!).

Другой возможный фактор — это то, что при резких поворотах ног положение центра тяжести не успевает измениться. Нетрудно сообразить, что это тоже приводит к увеличению момента силы F_1 и уменьшению момента силы F_2.

Возможно, играют роль и другие факторы, так что для *того чтобы дать полный* ответ, нужны эксперименты, которые позволили бы оценить влияние каждого из факторов. Возможно, эти эксперименты поставит кто-нибудь из наших читателей. Тогда мы продолжим обсуждение этой задачи.

Ф199. *Нейтрон легко проходит через слой свинца, но задерживается в таком же слое парафина, воды или другого соединения, содержащего водород. Объясните, почему.*

При прохождении нейтрона через вещество он сталкивается с атомами вещества и передает им часть своей кинетической энергии. Благодаря этому он тормозится. Покажем, что при столкновении с атомом водорода нейтрон передает ему бо́льшую часть своей энергии, чем при столкновении с атомом свинца. Будем считать нейтрон и атом вещества шарами, между которыми происходит центральный абсолютно упругий удар. Обозначим массу атома M, массу нейтрона m, скорость нейтрона до столкновения с атомом v_0, после столкновения с атомом v и скорость атома после столкновения u. Положим, что атом до столкновения покоился (в действительности он колеблется около положения равновесия, однако в силу хаотичности этого движения им можно пренебречь). Посмотрим, как зависит энергия, передаваемая этому атому при столкновении, от отношения масс атома и нейтрона, то есть от отношения масс сталкивающихся шаров.

Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

$$mv_0 = Mu + mv.$$

Перепишем эту систему так:

$$v_0^2 - v^2 = ku^2,$$

$$v_0 - v = ku$$

(здесь $k = \dfrac{M}{m}$ — отношение массы атома к массе нейтрона), откуда

$$u = v\frac{2}{k+1}.$$

Теперь можно найти энергию атома после столкновения (ее потерял при столкновении нейтрон):

$$W_a = \frac{Mu^2}{2} = 4\frac{Mv^2}{2}\frac{1}{(k+1)^2} =$$

$$= 4\frac{M}{m}\frac{mv^2}{2}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Так как $\dfrac{mv^2}{2} = W_0$ — это начальная энергия нейтрона, то

$$W_a = 4\frac{k}{(k+1)^2}W_0 = \frac{4}{k + \dfrac{1}{k} + 2}W_0.$$

Исследуем полученное выражение. Очевидно, что при $k = 0$ и $k \to \infty$ $W_a \to 0$.

Так как функция $\dfrac{k}{(k+1)^2}$ непрерывна, то *при некотором значении k она будет* максимальна (рис. 13). Ясно, что максимум функции соответствует минимуму выражения в знаменателе, которое можно за-

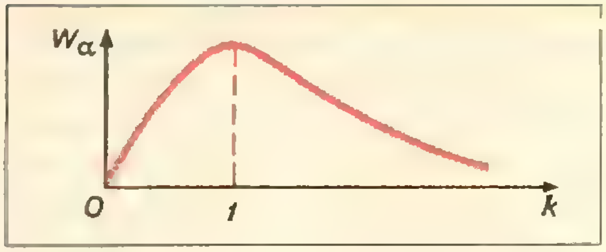


Рис. 13.

писать так:

$$2+\left(k+\frac{1}{k}\right).$$

Согласно теореме о среднем*) сумма $k+\frac{1}{k}$ минимальна при равенстве слагаемых, то есть когда $k=\frac{1}{k}$ или $k=1$. При этом $W_a=W_0$.

Итак, нейтрон передает атому максимальную часть своей начальной кинетической энергии при равенстве масс нейтрона и атома, как в случае атома водорода.

При $k=207$, как в случае свинца, нейтрон при столкновении с атомом передает ему примерно $\frac{4}{209}$ своей кинетической энергии.

Все рассуждения в принципе остаются справедливыми и для нецентральных ударов. Так как столкновения нейтрона с атомами вещества происходят многократно, начальная кинетическая энергия нейтрона довольно быстро переходит в тепло.

Этим и объясняется то, что нейтроны хорошо задерживаются водой, парафином или другими соединениями, содержащими атомы водорода, и легко проходят через такие же блоки свинца.

Ф200. *В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный гелий происходит нагревание газа до температуры T. Оценить величину T, если напряжение на конденсаторе $U=30$ кв, емкость конденсатора $C=18$ мкф и газ занимает объем 10 л при давлении 10^{-2} мм рт. ст.*

Для оценки будем считать, что при разрядке конденсатора вся его энергия расходуется только на нагревание гелия, то есть на увеличение его внутренней энергии. Поэтому можно записать, что

$$\frac{CU^2}{2}=\Delta W_{вн}.$$

Гелий—одноатомный газ. Поэтому его внутренняя энергия $W_{вн}$ равна $\frac{3}{2}RTn$, и ее изменение $\Delta W_{вн}=\frac{3}{2}Rn\,(T-T_0)$, где R—универсальная газовая постоянная, n—число молей газа, T_0—начальная температура. Согласно уравнению газового состояния

$$P_0V_0=nRT_0$$

и

$$n=\frac{P_0V_0}{T_0R},$$

где P_0, V_0, T_0—начальные параметры гелия (T_0 можно считать равной комнатной, то есть 300° К). Таким образом, получаем

$$\frac{CU^2}{2}=\frac{3}{2}R\frac{P_0V_0}{RT_0}(T-T_0),$$

откуда

$$\frac{T}{T_0}=\frac{CU^2}{3P_0V_0}+1\approx 1,2\cdot 10^6$$

и $T\approx 3,6\cdot 10^8$ градусов по Кельвину.

При решении задачи мы предполагали, что можно пренебречь теплообменом с окружающей средой, нагреванием пластин конденсатора, излучением энергии электромагнитных волн. Полученный результат резко отличается от экспериментальных данных, поэтому следует заметить, что наши допущения противоречат действительности. Например, учет теплообмена с окружающей средой уменьшает температуру сразу на несколько порядков (примерно до тысяч градусов).

Ф201. *Если к некоторому сопротивлению подключить аккумулятор, то зависимость тока в цепи от времени будет такой, как показано на рисунке 14 красной линией. Если к этому же сопротивлению подключить другой такой же аккумулятор, но частично разряженный, то зависимость тока от времени будет такой, как показано на рисунке 14 синей линией. Если оба аккумулятора подключить к тому же сопротивлению вместе, соединив их параллельно, то вначале по цепи будет идти ток 1,5 а. Нарисуйте график дальнейшего изменения тока в цепи со временем.*

Внутреннее сопротивление аккумулятора в процессе разрядки не меняется.

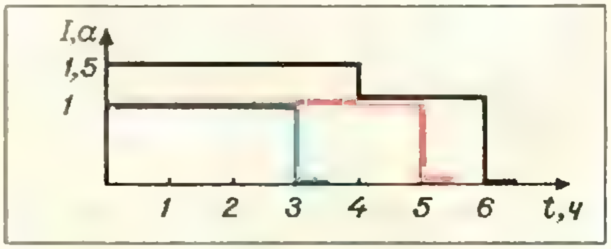


Рис. 14.

---

*) См. статью: Боровинский Л. А. Задачи на максимум и минимум. «Квант», 1973, № 5.

Так как аккумуляторы имеют одинаковые э. д. с. и внутренние сопротивления, то при их параллельном соединении через них будут идти одинаковые токи, равные половине тока через сопротивление, то есть 0,75 *а*. Оба аккумулятора при этом будут разряжаться.

По условию задачи емкость *) первого аккумулятора равна 1 *а*·3 *ч* = 3 *а*·*ч*. Поэтому второй аккумулятор будет разряжаться в течение четырех часов $\left(\frac{3\ a\cdot ч}{0{,}75\ a} = 4\ ч\right)$; емкость первого к концу этого процесса уменьшится до 2 *а*·*ч*. После этого второй аккумулятор будет вести себя аналогично конденсатору, на котором есть некоторое напряжение, но ток через него не идет. Действительно, как только э. д. с. этого аккумулятора начнет уменьшаться, первый аккумулятор будет его подзаряжать до э. д. с., равной напряжению на зажимах первого аккумулятора.

Начиная с этого момента первый аккумулятор будет работать только на внешнее сопротивление. Так как его оставшаяся емкость равна 2 *а*·*ч*, а по сопротивлению идет ток 1 *а*, то его энергии хватит на два часа работы.

Следовательно, в течение четырех часов по сопротивлению идет ток 1,5 *а*, затем в течение двух часов — 1 *а*. График изменения тока со временем показан на рисунке 14 черной линией.

Ф202. *Труба радиуса r заполнена пористым веществом плотности* ρ_0. *Невесомый поршень, на который действует постоянная сила F, вдвигаясь в трубу, уплотняет вещество до плотности* ρ *(рис. 15). С какой скоростью движется поршень, если уплотнение происходит скачком, то есть в трубе как бы перемещается с некоторой скоростью поверхность, справа от которой плотность вещества* ρ_0, *а слева* ρ? *В начальный момент эта поверхность совпадает с плоскостью поршня.*

Будем считать, что труба достаточно велика, так что граница областей с различной плотностью находится далеко от конца цилиндра. Тогда ясно, что единственной горизонтальной силой, действующей на вещество в цилиндре, является сила *F*; поэтому изменение импульса вещества в цилиндре равно импульсу этой силы.

Каждая из приведенных в движение частиц вещества движется со скоростью движения границы между областями с различной плотностью. Обозначим эту скорость *c*, а скорость движения поршня *v*.

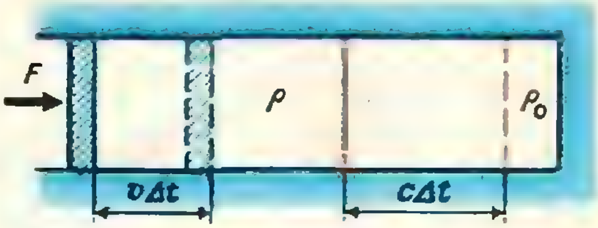


Рис. 15.

За время Δt поршень переместится на расстояние $v\Delta t$, и в движение придут те частицы, которые находятся в объеме $v\Delta t\pi r^2$, причем плотность этих частиц равна ρ_0 (остальные частицы, плотность которых равна $\rho - \rho_0$, уже движутся со скоростью *c*). Так как скорость каждой из частиц равна *c*, то импульс, который приобретают частицы вещества за время Δt, равен $v\Delta t\rho_0 c\pi r^2$. Этот импульс, как мы уже говорили, равен импульсу силы *F*. Следовательно,

$$F\Delta t = \pi v\rho_0 c r^2\Delta t. \qquad (1)$$

Ясно, что скорости *c* и *v* не независимы. Из условия сохранения массы следует, что масса вещества, которое находится в объеме $v\Delta t\pi r^2$, при смещении поршня на расстояние $v\Delta t$ должна распределиться по объему $c\Delta t\pi r^2$, причем здесь она будет иметь плотность $\rho - \rho_0$. Поэтому

$$v\rho\Delta t\pi r^2 = c(\rho-\rho_0)\Delta t\pi r^2.$$

Отсюда

$$c = v\frac{\rho}{\rho-\rho_0}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в формулу (1), получим

$$F = \pi v^2\frac{\rho\rho_0}{\rho-\rho_0}r^2,$$

и

$$v = \sqrt{\frac{F}{\pi r^2}\,\frac{\rho-\rho_0}{\rho\rho_0}}.$$

И. Ш. Слободецкий

---

*) Емкость аккумулятора — это максимальный заряд, который можно получить от него при разрядке.

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Высота пирамиды

М. Л. Крайзман

Что можно сказать о высоте произвольной пирамиды? Довольно мало. Разве только повторить, по существу, *определение*: высота пирамиды проходит через вершину пирамиды и перпендикулярна ее основанию.

Однако, если про пирамиду известны некоторые дополнительные сведения, то положение высоты можно охарактеризовать подробнее. Так, всем хорошо известен тот факт, что в *правильной* пирамиде высота проходит через центр лежащего в основании правильного многоугольника. Опыт приемных экзаменов показывает, что абитуриенты обычно твердо знают положение высоты пирамиды, у которой все боковые ребра равны, но испытывают большие затруднения, если нужно определить положение высоты пирамиды, у которой, например, равны между собой только два смежных боковых ребра.

В настоящей статье мы проследим, какие особенности пирамиды позволяют получить дополнительную информацию о том, как проходит высота пирамиды. В приводимых ниже утверждениях устанавливается связь между свойствами пирамиды и положением ее высоты. Эти утверждения *не следует, конечно, заучивать. Но* их полезно осознать и научиться «видеть», решая ту или иную задачу о пирамидах.

Утверждение 1. *Если боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то высота пирамиды проходит в плоскости этой грани, а основание высоты лежит на той стороне основания (или на ее продолжении), по которой эта грань пересекается с плоскостью основания.*

В самом деле, если боковая грань ASB перпендикулярна плоскости основания пирамиды (рис. 1), то, согласно теореме о перпендикуляре, опущенном на одну из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющем общую точку с другой из этих плоскостей, высота SO пирамиды принадлежит плоскости боковой грани ASB. При этом основание O высоты пирамиды находится на стороне AB основания (или на ее продолжении). Другими словами, высотой пирамиды является высота треугольника ASB.

Утверждение 2. *Если два смежных боковых ребра пирамиды равны, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, проведенном через середину той стороны основания, из концов которой исходят эти боковые ребра.*

Действительно, пусть SO — высота пирамиды (рис. 2); тогда OA и OB — проекции ребер SA и SB на плоскость основания. Если $SA = SB$, то (по известному свойству проекций равных наклонных)

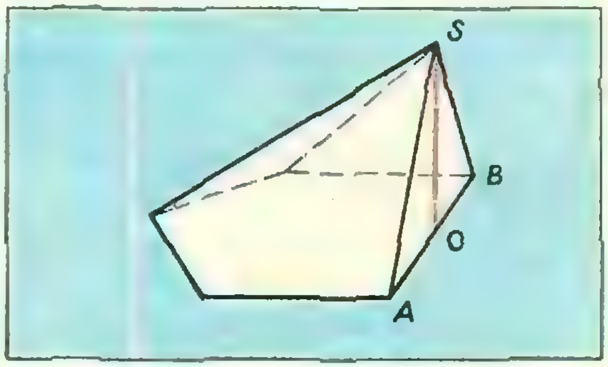


Рис. 1.

$OA = OB$, то есть точка O (лежащая в плоскости основания) равноудалена от концов стороны AB основания. Следовательно, основание O высоты SO пирамиды лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости основания пирамиды) через середину стороны AB.

Утверждение 3. *Если две смежные боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного теми сторонами основания, через которые проходят эти боковые грани.*

Пусть равны двугранные углы, образуемые с плоскостью основания боковыми гранями ASB и BSC (рис. 3). Если SO — высота пирамиды, а SMO и SKO — линейные углы этих двугранных углов, то прямоугольные треугольники SOM и SOK равны (ибо SO — общий катет и $\angle SMO = \angle SKO$); поэтому $OM = OK$. Но тогда равны прямоугольные треугольники OMB и OKB, а потому $\angle OBA = \angle OBC$. Следовательно, BO — биссектриса угла ABC.

Утверждение 4. *Если боковое ребро пирамиды образует равные углы с двумя примыкающими к нему сторонами основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного этими сторонами основания.*

Пусть $\angle SBA = \angle SBC$ (рис. 3). Проведем высоты SM и SK боковых граней ASB и BSC; прямоугольные треугольники SMB и SKB равны. Отсюда вытекает, что $SM = SK$, а потому и $OM = OK$. Но тогда равны прямоугольные треугольники OMB и OKB, вследствие чего $\angle OBA = \angle OBC$.

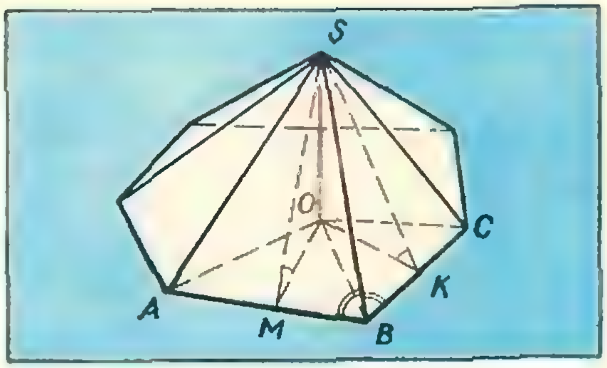


Рис. 3.

Утверждение 5. *Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно пересекающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, восставленном (в плоскости основания пирамиды) к этой стороне из точки ее пересечения с этим боковым ребром.*

Действительно, пусть боковое ребро SB пирамиды перпендикулярно стороне AB основания (рис. 4). Опустим высоту SO пирамиды и проведем прямую через точки O и B. По теореме о трех перпендикулярах заключаем, что $OB \perp AB$, то есть основание O высоты пирамиды в самом деле лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости основания) к стороне основания AB через вершину основания B.

Утверждение 6. *Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре,*

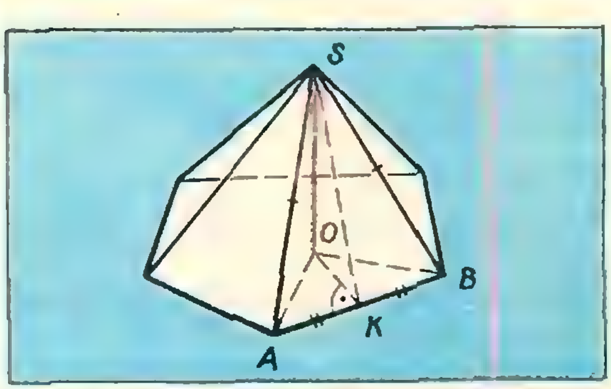


Рис. 2.

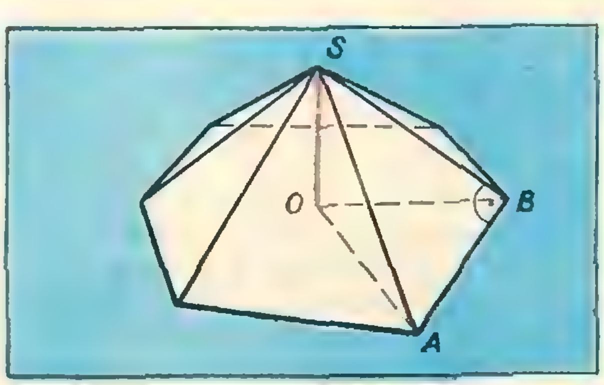


Рис. 4.

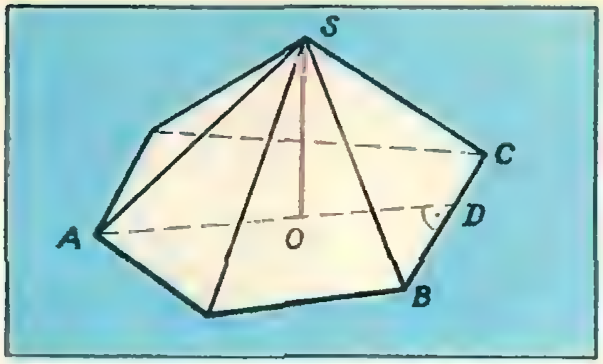


Рис. 5.

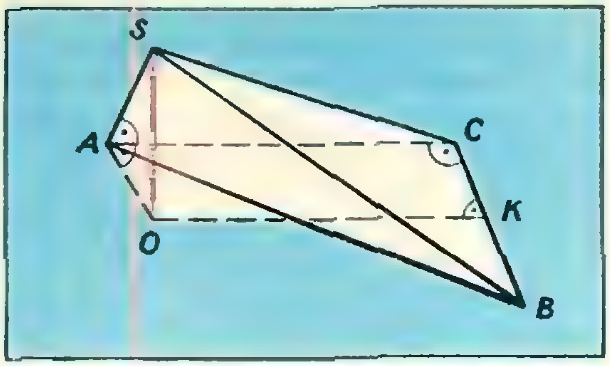


Рис. 6.

опущенном на эту сторону из точки пересечения этого бокового ребра с плоскостью основания.

В самом деле, если боковое ребро SA перпендикулярно стороне BC основания пирамиды (рис. 5), то, проведя высоту SO пирамиды и прямую через точки A и O, по теореме о трех перпендикулярах заключаем, что $OA \perp BC$.

Особенно важным является следующий частный случай утверждения 6: *если боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на той высоте лежащего в основании пирамиды треугольника, которая опущена на эту сторону.*

Таковы шесть особенностей пирамиды, каждая из которых оказывает свое специфическое влияние на положение ее высоты. Полезно отметить, что если пирамида обладает какими-либо двумя из этих особенностей, то положение высоты пирамиды определяется точно, то есть можно *однозначно* указать точку, являющуюся основанием высоты пирамиды. Вот примеры.

1) *Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно плоскости основания, то это боковое ребро и служит высотой пирамиды.*

2) *Если все боковые ребра пирамиды равны между собой, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, описанной около лежащего в основании пирамиды многоугольника.*

3) *Если все боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, вписанной в лежащий в основании пирамиды многоугольник.*

Мы рекомендуем читателям самостоятельно доказать эти утверждения. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых задач.

Задача 1. *Найти объем пирамиды $SABC$, если*

$$SA = BC = 8,\ AB = SB = SC = 17,\ AC = 15.$$

Для решения заметим, что $17^2 = 15^2 + 8^2$; отсюда, применяя теорему, обратную теореме Пифагора, к треугольникам ABC и ASC, можно заключить, что

$$\angle ACB = \angle SAC = 90^\circ.$$

Так как $AC \perp AS$ (см. рис. 6), то основание O высоты пирамиды SO лежит на перпендикуляре, восставленном (в плоскости треугольника ABC) в точке A к стороне AC (см. утверждение 5). Далее, так как $SB = SC$, то точка O лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости треугольника ABC) через середину K отрезка BC (см. утверждение 2).

Следовательно, $ACKO$ — прямоугольник. Теперь из прямоугольного треугольника SOA находим высоту пирамиды:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = 4\sqrt{3},$$

после чего легко определяется объем пирамиды: $V_{SABC} = 80\sqrt{3}$.

Задача 2. *В пирамиде $SABC$ ребра AS и BC взаимно перпендику-*

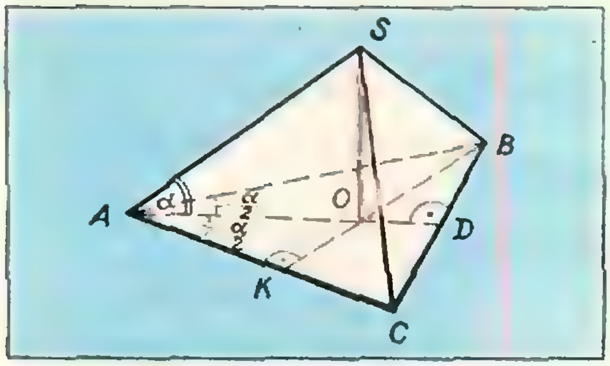


Рис. 7.

лярны, а углы наклона боковых граней ASB и BSC к плоскости основания равны между собой. Определить объем пирамиды, если $AB = 15$, $AC = 13$, $BC = 14$, $SB = 10{,}5$.

Так как $AS \perp BC$ (рис. 7), то основание O высоты пирамиды SO лежит на высоте AN треугольника ABC (см. утверждение 6). Поскольку грани ASB и BSC одинаково наклонены к плоскости ABC, то, согласно утверждению 3, точка O одновременно лежит на биссектрисе BK угла ABC.

Следовательно, основанием O высоты пирамиды является точка пересечения высоты AN и биссектрисы BK треугольника ABC.

Вычислив площадь треугольника ABC по формуле Герона: $S = 84$, легко находим, что

$$AN = 12, \quad BN = 9.$$

Используем, далее, свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника ABN:

$$\frac{ON}{AO} = \frac{BN}{AB}, \quad \frac{x}{12-x} = \frac{9}{15},$$

откуда $ON = x = 4{,}5$. Из прямоугольного треугольника ONB теперь определяем OB, а затем из прямоугольного треугольника SOB вычисляем высоту пирамиды: $OS = 3$. Следовательно, объем пирамиды $V_{SABC} = 84$.

Задача 3. *В треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра SB и SC равны между собой, а углы наклона боковых граней ASB и ASC к плоскости основания равны. Определить объем пирамиды, если $AB = 15$, $BC = 14$, $AC = 13$, $AS = 18$ (рис. 8).*

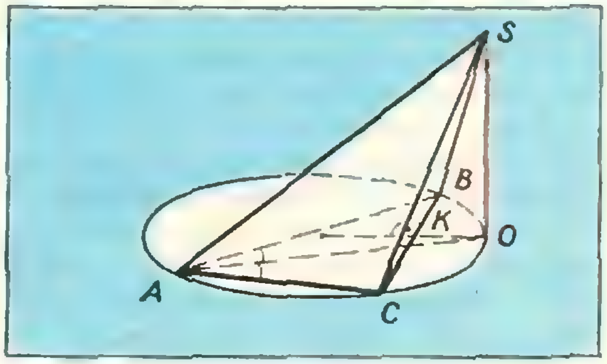


Рис. 8.

Основание O высоты SO будет точкой пересечения перпендикуляра, восставленного к стороне BC в ее середине, и биссектрисы AO угла BAC (см. утверждения 2 и 3). Поскольку $AB \neq AC$, эти прямые пересекаются в единственной точке, являющейся серединой дуги BC окружности, описанной вокруг треугольника BAC. Далее находим: $S_{\triangle ABC} = 84$ (по формуле Герона) и $R_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4S} = \frac{65}{8}$. Отсюда $OK = R - \sqrt{R^2 - KC^2} = 4$, $OC^2 = OK^2 + KC^2 = 65$, $\sin \measuredangle OAC = \sin \measuredangle OCK = \frac{OK}{OC} = \frac{4}{\sqrt{65}}$, $\cos \measuredangle OAC = \frac{7}{\sqrt{65}}$, и по теореме косинусов из $\triangle AOC$ находим AO: $AO = 2\sqrt{65}$ (легко показать, что надо брать больший корень получающегося квадратного уравнения). Теперь $OS = \sqrt{AS^2 - AO^2} = 8$, $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot 8 = 224$.

Задача 4. *В основании пирамиды лежит равнобедренный треуголь-*

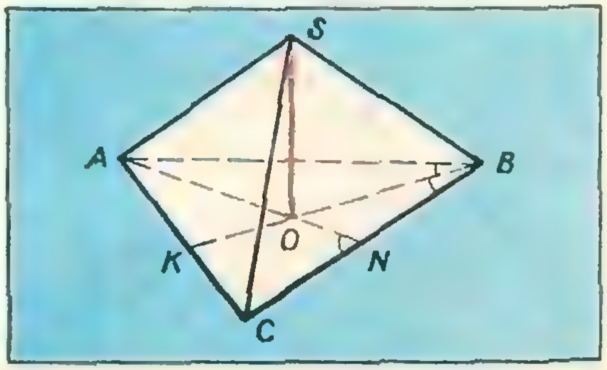


Рис. 9.

ник с боковой стороной a и углом при вершине α. Боковое ребро, исходящее из вершины угла α, образует с плоскостью основания также угол α. Определить объем пирамиды, если ее скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

Вершина S пирамиды проектируется на плоскость основания в точку пересечения высот треугольника ABC (см. утверждение 6). Легко найти площадь треугольника ABC (рис. 9): $S=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$. Далее, из $\triangle ABK$ находим: $AK=a\cos\alpha$, из $\triangle AOK: AO=\frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ и из

$$\triangle AOS:\quad OS=AO\cdot\operatorname{tg}\alpha=2a\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда $V_{SABC}=\frac{1}{3}a^3\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

1. Сформулировать утверждения, обратные утверждениям 1—6. Справедливы ли эти обратные утверждения?

2. (МГУ, мехмат, 1961). В треугольной пирамиде высота, проведенная из вершины, попадает в точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании. Показать, что тем же свойством обладают и все высоты пирамиды, опущенные из вершин основания на боковые грани.

3. (МГУ, мехмат, 1962). В треугольной пирамиде $SABC$ высота, опущенная из вершины S, проходит через точку пересечения высот треугольника ABC. Кроме того известно, что $SB=b$, $SC=c$, $\measuredangle BSC=90^\circ$. Найти отношение площадей граней ASB и ASC.

4. (МГУ, физфак, 1966). В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной b, причем $b\neq a$. Найти площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом.

5. (МГУ, мехмат, 1971). Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

6. В основании треугольной призмы лежит равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{11}$ *см*. Определить объем призмы, если ее боковое ребро равно 6 *см*, а одна из вершин верхнего основания удалена от противоположных вершин нижнего основания на 5 *см*.

О признаках делимости на 1973

I признак. Зачеркнуть последнюю цифру числа и прибавить к полученному числу произведение вычеркнутой цифры на 592. Если полученное число делится на 1973, то и исходное число делится на 1973. Последовательно выполняя эту операцию, мы придем к четырехзначному числу.

Пример. Делится ли на 1973 число 2 430 736?

1) $243\,073+592\cdot6=$
$=243\,073+3552=246\,625$,
2) $24\,662+592\cdot5=$
$=24\,662+2960=27\,622$,
3) $2762+592\cdot2=2762+$
$+1184=3946$.

Но 3946 делится на 1973. Следовательно, 2 430 736 делится на 1973.

II признак. Зачеркнуть последнюю цифру. Оставшееся число умножить на 3 и от полученного результата отнять произведение вычеркнутой цифры на 197. Если полученное число делится на 1973, то и исходное число делится на 1973.

Пример. Делится ли на 1973 число 2 430 736?

1) $243\,073\cdot3-197\cdot6=$
$=729\,219-1182=728\,037$,
2) $72\,803\cdot3-197\cdot7=$
$=218\,409-1379=217\,030$,
3) $21703\cdot3-197\cdot0=$
$=65\,109$,
4) $6510\cdot3-197\cdot9=$
$19\,530-1773=17\,757$,
5) $1775\cdot3-197\cdot7=$
$=5325-1379=3946$,
6) $394\cdot3-197\cdot6=0$.

Следовательно, 2 430 736 делится на 1973.

В. М. Розентуллер

Московский физико-технический институт

Московский физико-технический институт готовит инженеров-физиков-исследователей по новейшим областям физики и техники.

Особенность системы обучения, принятой в физико-техническом институте, состоит в том, что здесь фундаментальное высшее образование сочетается со специальной подготовкой в так называемых базовых научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро, где созданы специальные кафедры института.

На первых курсах студентам дается общенаучная подготовка.

Математика, общая и теоретическая физика, общественные науки изучаются в объеме университетских курсов, чтобы будущие специалисты хорошо владели знаниями, составляющими основу образования физика-исследователя. Быстрому ознакомлению с возрастающим потоком научно-технической информации способствует углубленное изучение иностранных языков.

Обучение конкретной специальности и самостоятельная исследовательская работа в базовом институте начинается уже со второго — третьего курсов.

В базовом институте студент слушает лекции по специальности, участвует в работе научных семинаров, глубоко входит в исследовательскую работу лабораторий института. Будущий специалист имеет дело с новейшими приборами; участвует в решении не модельных, специально для его практики придуманных задач, а актуальных проблем, стоящих перед лабораторией. Дипломная работа каждого студента МФТИ входит, как правило, в тематический план базового института. В творческой обстановке научного коллектива студент проходит неоценимую школу воспитания. Работа под непосредственным руководством крупного ученого во многом предопределяет успех его будущей самостоятельной деятельности.

Среди базовых институтов МФТИ — ведущие научные центры Москвы (см. «Квант» № 6, 1972).

Институт готовит специалистов на семи факультетах: факультет радиотехники и кибернетики, факультет общей и прикладной физики, факультет аэрофизики и космических исследований, факультет молекулярной и химической физики, факультет физической и квантовой электроники, факультет аэромеханики и летательной техники, факультет управления и прикладной математики.

На каждом из факультетов подготовка ведется по широкому кругу специальностей, охватывающему большинство областей современной физики, техники и кибернетики.

Ниже мы публикуем варианты вступительных экзаменов по математике и физике 1973 года.

Математика

Вариант I

1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член, равный $^1/_2$. Сумма всех членов прогрессии, стоящих до него, равна 60, а сумма всех членов, стоящих после него, равна $^1/_4$. Определить порядковый номер этого члена прогрессии.

2. Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ имеют внутреннее касание в точке A. Через точку B, лежащую на бо́льшей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Определить длину отрезка AB, если $BC=a$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\log_2(y+x)-\log_2 x=2\log_4 2+\log_2(3y-x) \\ \log_2\dfrac{xy+3}{x^2-y+3x+1}-2\log_4\dfrac{y}{x}=0. \end{cases}$$

4. Решить уравнение:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}=$$
$$=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}.$$

5. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной 4 *см*, а длина каждого бокового ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равна 6 *см*. Прямой круговой цилиндр расположен так, что его ось лежит в плоскости BB_1D_1D, а точки A_1, C_1, B_1 и центр O квадрата $ABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра. Определить радиус цилиндра.

Вариант 2

1. Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член первой прогрессии является знаменателем второй, а знаменатель первой прогрессии является первым членом второй прогрессии. Отношение суммы первой прогрессии к сумме квадратов всех ее членов равно $^8/_3$, а такое же отношение для второй прогрессии равно $^9/_2$. Найти сумму каждой из этих прогрессий.

2. Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC, касается основания BC в точке B и пересекает боковую сторону AC в точке D. Определить длину боковой стороны AB, если $AD:DC=k$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(65-2^{2+y})=4-y \\ \log_2\dfrac{2x+y}{y-2x+6}=\log_2(x-1)-\log_2(2-x). \end{cases}$$

4. Решить уравнение:
$\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x+3\operatorname{ctg} 3x+4\operatorname{ctg} 4x=0.$

5. Сторона основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1 *см*, а каждое из боковых ребер имеет длину $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *см*. Прямой круговой цилиндр расположен так, что точка A_1 и середина M ребра CC_1 лежат на его боковой поверхности, а ось цилиндра параллельна прямой AB_1 и отстоит от нее на расстоянии $^1/_4$ *см*. Определить радиус цилиндра.

Физика

Билет 1

1. Груз весом $P=1\,T$ опускается с помощью лебедки с постоянной скоростью $v=4$ *м/с* (рис. 1). Какова будет максимальная сила натяжения троса при внезапной остановке лебедки, если коэффициент упругости троса равен $k=0{,}5$ *Т/см*? Весом троса и трением пренебречь.

2. Когда количество водяных паров в воздухе больше (и во сколько раз) — после месяца затяжных дождей с мокрым снегом в ноябре при 0° С и относительной влажности 95% или после месяца сухой жары в июле при 35° С и влажности 40%? Давление насыщенного пара при 0° С — 4,6 *мм рт. ст.*, при 35° С — 42 *мм рт. ст.*

3. Протекающий через сопротивление $R=100$ *ом* ток изменяется во времени по закону $I=k\sqrt{t}$, где $k=1$, если время измеряется в секундах, а ток — в амперах. Какое время протекал ток, если на сопротивлении выделилось количество тепла $Q=3{,}5$ *кдж*?

4. В спектре излучения аргонового лазера наиболее интенсивными являются линии с длинами волн $\lambda_1=4{,}88\cdot10^{-5}$ *см* и $\lambda_2=5{,}15\cdot10^{-5}$ *см*. При каких значениях преломляющего угла α призмы, поставленной на пути лучей (рис. 2), из призмы выйдет пучок, содержащий компоненту λ_2 и не содержащий компоненту λ_1? На первую грань призмы лучи падают нормально. Зависимость показателя преломления материала призмы от длины волны имеет вид:

$$n=1+\frac{a}{\lambda^2},\quad \text{где}\quad a=2{,}38\cdot10^{-9}\ см^2.$$

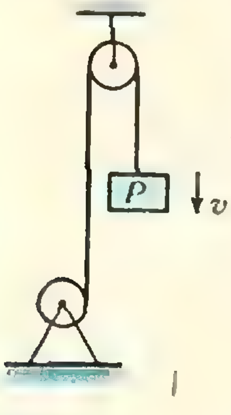


Рис. 1.

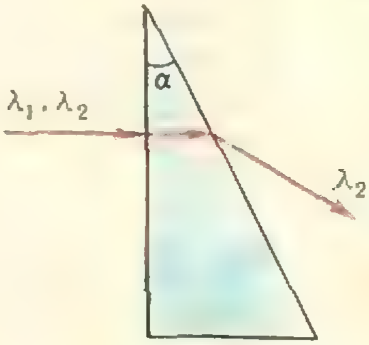
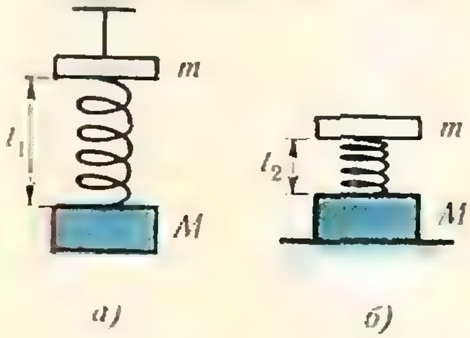


Рис. 2.



а) б)

Рис. 3.

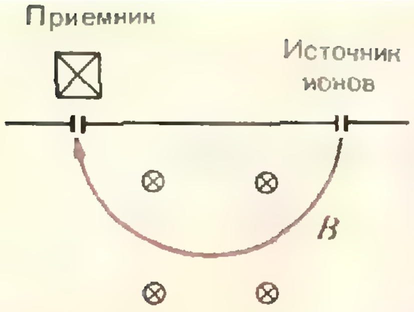


Рис. 4.

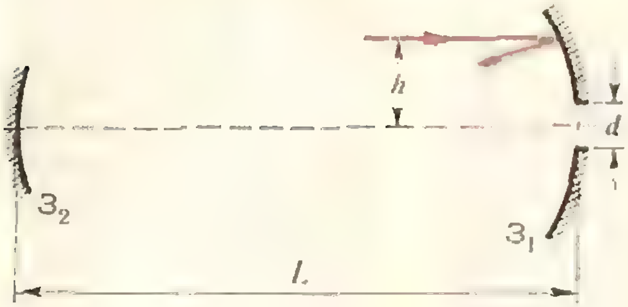


Рис. 5.

Билет 2

1. Пружина скрепляет два груза, массы которых m и M (рис. 3). Когда система подвешена за верхний груз (положение a), длина пружины равна l_1. Если систему поставить на подставку (положение $б$), длина пружины равна l_2. Определить длину ненапряженной пружины l_0.

2. В вертикально расположенном сосуде сечения s, закрытом поршнем массы m, находится воздух. Когда на поршень положили свинцовую болванку массы M, расстояние его от дна цилиндра уменьшилось в n раз. Во сколько раз изменилась температура воздуха в цилиндре? Внешнее давление равно p_0.

3. В масс-спектрометре пучок ионов проходит ускоряющую разность потенциалов U и через выходную щель попадает в однородное поперечное магнитное поле с индукцией B (рис. 4). После прохождения дуги окружности в 180° ионы попадают в приемник. Найти расстояние между входной щелью приемника и выходной щелью ускоряющей камеры. Отношение заряда иона к его массе q/m считать известным.

4. В оптической системе, предназначенной для задержки во времени короткого светового импульса, используется многократное отражение света от двух вогнутых сферических зеркал $З_1$ (радиус кривизны $R_1=10$ *м*) и $З_2$ (радиус кривизны $R_2=1$ *м*), расположенных на расстоянии $L=5{,}5$ *м* друг от друга (рис. 5). В центре зеркала $З_1$ имеется отверстие диаметра $d=2$ *мм*. На это зеркало на высоте $h=15$ *см* от оси падает короткий световой импульс в виде тонкого луча, параллельного оси. Оценить, через какое время этот луч выйдет через отверстие.

Кольца Сатурна

Среди планет Солнечной системы Сатурн — единственная планета, окруженная кольцами. Этих колец четыре. Последнее, почти невидимое, было открыто всего два года назад.

Недавно американские ученые Томас Макдонаф и Нил Брайс выдвинули гипотезу о существовании у Сатурна пятого кольца. По их мнению «виновником» возникновения этого кольца является самый большой из 10 спутников Сатурна — Титан. Титан является в Солнечной системе уникальным. Он — единственный спутник планеты, обладающий атмосферой. Плотность воздуха атмосферы Титана почти такая же, как у Земли (воздух Титана состоит главным образом из водорода и метана). Плотная атмосфера Титана постоянно рассеивается: находящиеся в верхних слоях атмосферы частицы воздуха, скорость которых достаточно велика, выходят из сферы притяжения спутника. Частицы, «вырвавшиеся» из сферы притяжения Титана, попадают в мощное гравитационное поле Сатурна и «выводятся» на орбиту вокруг планеты. Таков, по мнению американских ученых, механизм образования нового кольца Сатурна.

Т. П.

Книга о Вселенной

К концу 50-х годов нашего столетия развитие астрономии, физики, биологии и ряда других наук позволило на научной основе подойти к решению издавна интересовавшей человечество проблемы о существовании жизни вне Земли и, в частности, о существовании жизни разумной. Если в предшествовавший период ученым приходилось поневоле ограничиваться отдельными догадками, а проблема в целом была отдана на откуп писателям-фантастам, то теперь появились конкретные научные исследования условий возникновения жизни, распространенности жизни, в том числе и разумной, во Вселенной, возможности связи с внеземными цивилизациями. Были проведены и экспериментальные работы. В 1959 году американские ученые Д. Коккони и Ф. Моррисон рассмотрели возможность связи между цивилизациями с помощью электромагнитных волн и предложили искать сигналы внеземных цивилизаций на природном стандарте длин волн — вблизи радиолинии с длиной волны 21 *см*, испускаемой межзвездным нейтральным водородом. Уже в 1960 году эта идея нашла практическое воплощение: с помощью радиотелескопа, зеркало которого имело диаметр 27 *м*, Ф. Дрейк в США в течение нескольких месяцев пытался уловить сигналы искусственного происхождения от двух близких к нам звезд, похожих на Солнце: ε Эридана и τ Кита. Сигналов поймать не удалось, но первые попытки вряд ли и могли дать положительный результат.

ВСЕЛЕННАЯ
ЖИЗНЬ
РАЗУМ

И. С. ШКЛОВСКИЙ

Мы упомянули только о двух работах, а таких исследований появилось довольно много. Возникла необходимость обобщения всех этих новых результатов по проблеме, находящейся на стыке многих наук. Пожалуй, первым таким обобщающим трудом явилась популярная монография известного советского астрофизика, ныне члена-корреспондента Академии наук СССР и члена Национальной Академии наук США И. С. Шкловского «Вселенная, жизнь, разум», выпущенная Издательством АН СССР в 1962 году. Написанная живо и увлекательно, она вместе с тем отличается достаточной научной строгостью, хотя по необходимости содержит и множество гипотез.

В соответствии со своим названием книга разделена на три части. Первая часть посвящена проблемам астрономии. Это — систематический рассказ о небесных телах и их системах, о физических условиях на них, об их эволюции. Раздел этот имеет самостоятельную ценность, так как дает хорошее представление о современном состоянии астрономии. Во второй части автор рассматривает условия, необходимые для возникновения и развития жизни на планетах, анализирует понятие «жизнь» и исследует возможность существования жизни на других планетах Солнечной системы. Последняя, третья часть охватывает различные стороны проблемы «Разумная жизнь во Вселенной». Здесь и обсуждение возможности осуществления межзвездной связи оптическими и радиометодами, а также с помощью автоматических зондов, соображения о темпах развития человечества, о возможностях прямых контактов между различными цивилизациями и многое другое.

Книга И. С. Шкловского получила широкую известность как в нашей стране, так и за рубежом. В 1965 году вышло ее второе издание, а в 1973 году — третье (переработанное и дополненное)*). За 11 лет, прошедших с момента выпуска первого издания книги, появилось множество научных статей и ряд монографий, посвященных рассматриваемой проблеме; прошло также несколько международных совещаний.

С помощью наземных установок и космических аппаратов продолжалось изучение физических условий на планетах и спутниках Солнечной системы. Выяснилось, например, что условия на Венере вряд ли допускают возможность существования на ней каких-либо форм жизни. С большой степенью уверенности можно говорить и об отсутствии жизни на Луне. Условия на Марсе оказались гораздо более суровыми, чем предполагали раньше, что, конечно, усилило позиции скептиков, отрицающих возможность существования жизни на этой планете. Снимки спутников Марса — Фобоса и Деймоса, — полученные автоматической межпланетной станцией, свидетельствуют о том, что это огромные глыбы естественного происхождения, усеянные кратерами — следами столкновения с другими телами. Эти снимки опровергают гипотезу автора книги об искусственном происхождении спутников Марса, которой в первых двух изданиях уделялось довольно много места и от которой И. С. Шкловский в третьем издании отказывается. Много нового узнали исследователи и о других планетах Солнечной системы.

---

*) Шкловский И. С. Вселенная, жизнь, разум. Изд. третье, дополненное и переработанное. М., «Наука», 1973.

В связи с общепризнанной идеей о том, что благоприятные условия для возникновения жизни существуют только на планетных телах, небезынтересны и результаты поисков планет у других звезд. Особенно впечатляющи исследования так называемой звезды Барнарда, одной из самых близких к Солнцу. Вокруг этой звезды обращаются по крайней мере три планеты, близкие по своей массе к Юпитеру. Теперь можно не сомневаться в широкой распространенности планетных систем во Вселенной.

Развивались теоретические и экспериментальные исследования проблемы связи с внеземными цивилизациями, главным образом, с помощью радиосигналов. Опыты Дрейка были повторены, в частности, и в Советском Союзе, в Горьком, под руководством В. С. Троицкого. Исследовались 12 звезд, довольно близких к Солнцу (удаленных от него на 10—60 световых лет). И в этом случае никаких искусственных сигналов обнаружено не было. Сейчас разрабатываются более чувствительные системы, способные принимать сигналы от объектов, удаленных от нас на тысячи световых лет.

Продолжались исследования условий, необходимых для возникновения и развития жизни на планетах, а также попытки решения важнейшего вопроса о путях возникновения живого вещества из неживого.

Некоторые итоги проводившегося в течение 10—15 лет комплексного научного изучения проблемы существования жизни на других мирах и возможности установления связи с внеземными цивилизациями были подведены на советско-американском совещании ученых, состоявшемся в сентябре 1971 года в Бюраканской обсерватории (Армения). Были приглашены и ученые ряда других стран. На совещании присутствовали астрономы, физики, радиофизики, кибернетики, биологи, лингвисты, антропологи, историки, социологи. Уже это простое перечисление специальностей ученых, принявших участие в работе совещания, дает некоторое представление о широте круга рассматривавшихся на нем вопросов.

Готовя третье издание своей книги, автор учел результаты всех новых исследований и итоги Бюраканского совещания, которому он посвятил отдельную главу.

Книга И. С. Шкловского дает отчетливое и полное представление о современном состоянии исследований в области рассматриваемой проблемы. Эту книгу смело можно рекомендовать широкому кругу читателей, интересующихся современным естествознанием. Следует, однако, помнить, что это — не развлекательная брошюра, а книга, требующая определенной подготовки, и читать ее нужно внимательно.

И. Е. Евгеньев

Кант и часы

Один из крупнейших немецких философов Иммануил Кант (1724—1804), профессор Кенигсбергского университета вел столь размеренный образ жизни, что граждане Кенигсберга проверяли свои часы, когда видели как он выходит из своего дома и направляется быстрым шагом на лекции в университете.

Однажды вечером Кант с ужасом заметил, что его настенные часы остановились. К тому же свои карманые часы он накануне отдал ремонтировать. Однако он придумал как выйти из создавшегося положения.

Кант завел часы. Заметив положение стрелок, он отправился к своему другу Шмидту, который жил примерно на расстоянии одного километра от дома философа. При входе в квартиру Шмидта Кант взглянул на часы, висевшие в коридоре. Уходя от Шмидта, он снова посмотрел на часы. Домой Кант возвращался по тому же пути, которым шел к Шмидту, своим обычным размерениым шагом. Придя домой Кант немедленно и точно поставил стрелки своих часов.

Как Кант узнал точное время?

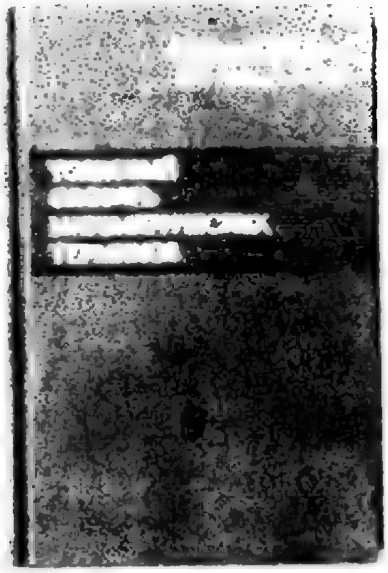
Л. К.

Что такое «центроид»?

Любая современная наука обладает своим специфическим языком, в котором используются весьма много специальных терминов. Более того, развитие науки приводит к увеличению ее словаря, так что зачастую ученые одной специальности, но разной специализации с трудом понимают друг друга. Очень ярко, а, может быть, и наиболее ярко, это свойство современной науки проявляется в математике. Иногда учителю математики трудно разобраться в современной работе, например, по математической логике. Особенно это проявилось в связи с введением новой программы по математике. В таких случаях хорошую помощь может оказать толковый словарь.

Издательство «Просвещение» проявило ценную инициативу, издав «Толковый словарь математических терминов» *). Основная цель этого словаря — оказать помощь учителям математики и школьникам в ознакомлении с математической терминологией. Со времени издания этой книги прошло достаточно времени, так что уже можно подвести некоторые итоги, оценить, в какой мере удалось авторам словаря решить стоявшую перед ними весьма сложную задачу.

Прежде всего факты: выпущенный тиражом 102 тысячи (бóльшими тиражами физико-математическая редакция издает разве что пособия для абитуриентов), словарь исчез с прилавков буквально в 2—3 недели. И, например, автор настоящей заметки, не сумев приобрести его в магазине, вынужден был прибегнуть к помощи знакомых. Быстрое исчезновение словаря с прилавков книжных магазинов свидетельствует прежде всего о насущной необходимости подобного издания. Но вот то, что за прошедшие 8 лет этот словарь являлся весьма редким гостем букинистов (пришлось не полениться и обойти несколько московских букинистических магазинов; диалог был примерно таким: «У вас есть словарь математических терминов?» — Нет.» — «А бывает?» — «Да, бывает, но редко»), позволяет надеяться, что словарь оказался полезным его владельцам, и, как говорят математики, отсюда следует, что авторы словаря достигли намеченной цели. Хотя, опять-таки, может, дело лишь в том, что других изданий, способных заменить словарь, просто нет, а «на безрыбье и рак — рыба».



Попытаемся оценить содержание словаря по существу. В последнее время в различных исследованиях широкое распространение получил так называемый «метод экспертных оценок», суть которого в двух словах сводится к следующему: если какому-либо объекту или явлению трудно или даже невозможно дать точную количественную объективную оценку, обращаются к помощи нескольких экспертов-специалистов, выводят некую среднюю из оценок, данных этими экспертами, которую и приписывают исследуемому объекту. В качестве субъективной оценки одного из таких экспертов будем рассматривать настоящую заметку. Прежде чем выставить свою оценку, попытаемся ее хоть немного обосновать. Написание всякого словаря начинается с составления перечня слов, которые собираются в него включить. Поскольку словарь предназначается в помощь учителям и школьникам, то вполне естественно выглядит весьма полное представительство в словаре терминов, относящихся к элементарной математике. Ограниченные объемом книги, авторы при сборе терминов, относящихся к высшей математике, бесспорно вынуждены руководствоваться собственными вкусами. Мне кажется разумным тяготение авторов к тем разделам высшей математики, которые изучаются на младших курсах большинства высших учебных заведений (дифференциальное и интегральное исчисление, высшая алгебра), а также к геометрическим дисциплинам, т. е. к разделам, непосредственно примыкающим к школьной элементарной математике и в настоящее время уже вошедшим в пробные школьные учебники. Хотя и здесь можно найти немало терминов, несправедливо, на мой взгляд обойденных авторами (например, «коразмерность», «признаки сходимости рядов»). Это, однако, в большой степени объясняется размерами словаря (приблизительно 1800 терминов). Для сравнения отметим, что изданный в ГДР в 1961 году небольшой двухтомный математический словарь содержит около 200 тысяч слов. А ведь большинство немецких терминов имеет русские эквиваленты.

---

*) Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г. Толковый словарь математических терминов. М., «Просвещение», 1965.

Теперь о содержании статей. Как и должно было бы быть, опять-таки наиболее подробными и полными являются статьи, относящиеся к разделам элементарной математики, и, что особенно важно, авторы очень внимательно отнеслись к определениям в элементарной математике, в то время как в различных других изданиях — школьных учебниках и даже «Большой Советской Энциклопедии» — определения не всегда точны. Например, довольно часто встречается такое определение призмы: «Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы». Это определение неверное (почему? — проверьте это самостоятельно), о чем и говорится в соответствующей статье справочника.

Конечно, не все термины элементарной математики объяснены достаточно полно, в частности, статью «Косинусов теорема» неплохо было бы пополнить теоремой косинусов для четырехугольника, но в целом этот раздел словаря заслуживает самой высокой оценки.

Что касается терминов, относящихся к различным разделам высшей математики, то, к сожалению, они объясняются иногда не столь тщательно. Тут и не совсем верное определение числа «*e*» (статья «Замечательные пределы»), и ошибочная формулировка леммы Гейне—Бореля. В ряде статей имеются ссылки на отсутствующие в словаре статьи. Так, в статье «Случайная величина» есть ссылки на отсутствующую статью «Распределения закон», но зато в словаре имеется статья «Распределение», на которую и следовало сослаться. В статье «Рефлексивность» есть ссылка на статью «Бинарные отношения», которой в словаре нет.

В ряде статей, связанных друг с другом взаимоссылками, по-разному обозначаются одинаковые элементы. Так, в статьях «Группа», «Группоид», «Квазигруппа» элементы множеств обозначаются малыми латинскими буквами (a, b, c,...), а в статье «Полугруппа» они же обозначаются большими латинскими буквами (A, B, C,...). Список неточностей, погрешностей и опечаток можно было бы, к сожалению, продолжить. Но не они определяют лицо этого интересного и весьма нужного словаря. Не делая скидок авторам, можно считать, что в общем «первый блин» отнюдь не вышел комом.

Чего бы мне хотелось пожелать авторам словаря? Во-первых, более тщательно подойти к отбору терминов, которые будут включены в словарь. Может быть, стоило бы обратиться к ведущим специалистам в различных отраслях математики с просьбой просмотреть перечень терминов и пополнить его, если они сочтут необходимым. Во-вторых, учесть недочеты, отмеченные как в этой рецензии, так и в других критических выступлениях, письменных и устных, причем особенно важно учесть мнение тех, кому этот словарь в первую очередь предназначен. И тогда, будем надеяться, словарь получит еще более высокую оценку.

И, наконец, несколько слов в адрес издательства. Было бы целесообразно продолжить эту ценную инициативу и как можно скорее переиздать эту весьма нужную и полезную книгу. Мы надеемся, что в ближайшее время «Толковый словарь математических терминов» уже можно будет купить в магазине, не прибегая к помощи знакомых.

Ну, а что такое «центроид» да и многое другое, вы узнаете, прочитав эту книгу.

К. И. Кашин

Еще одна олимпиада

15 апреля 1973 года в городе Скопле проходила XVI республиканская математическая олимпиада школьников Македонии. Ниже мы приводим некоторые из предлагавшихся на ней задач.

1. Докажите, что если $1 + x + y = 0$, то $1 + x^3 + y^3 = 3xy$.

2. Дана прямая p и две точки A и B не лежащие на ней. Среди треугольников ABX, где X — точка прямой p найти треугольник с наименьшим периметром.

3. Про равнобедренный треугольник ABC известно, что его можно разбить на два равнобедренных треугольника. Найти углы этого треугольника.

4. Дано уравнение $a^4x^2 + 6a^2bx + 5b^2 = 0$; $a, b \neq 0$
а) Докажите, что его корни действительны при любых значениях параметров;
б) Выясните при каких значениях параметров выполняется соотношение

$$\frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{x_1x_2}{5} + 1.$$

5. В точке B окружности с диаметром AB проведена касательная. Найти точку окружности, равноудаленную от точки A и касательной.

6. Пусть AB — диаметр окружности, а M — некоторая точка, не лежащая ни на окружности ни на прямой AB. Пусть A_1 и B_1 точки пересечения прямых MA и MB и окружности, а S — точка пересечения прямых AB_1 и A_1B. Докажите, что прямая MS перпендикулярна к AB.

7. Пусть k нечетное положительное число. Докажите, что произведение k последовательных нечетных чисел делится на k.

М. Л.

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1973 году и представляющие интерес для наших читателей.

В IV квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга—почтой»).

МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука»

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. И., Розов Н. Х. *Пособие по математике для поступающих в вузы* (*избранные вопросы элементарной математики*). Издание 3-е, переработанное и дополненное (объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 04 к.).

В книге доступно и популярно изложены отдельные важные разделы элементарной математики. Анализируя решения задач вступительных экзаменов в вузы, авторы уделяют много внимания разбору типичных ошибок, допускаемых абитуриентами.

Книга будет полезна не только абитуриентам, но и учителям средней школы.

При подготовке 3-го издания авторами был учтен опыт вступительных экзаменов последних лет.

2. Зайцев В. В., Рожков В. В., Сканави М. И. *Элементарная математика.* Издание 2-ое, переработанное и дополненное (объем 25 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 08 к.).

Книга представляет собой систематическое изложение элементарной математики. Изложение теоретических вопросов сопровождается разбором задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в различные вузы.

Книга рассчитана на учителей средней школы, учеников 10-х классов и лиц, готовящихся к вступительным экзаменам в вузы.

3. Розенфельд Б. А., Сергеева И. Д. *Стереографическая проекция* (объем 4 л., тираж 30 000 экз., цена 15 к.).

Книга посвящена изложению метода проектирования сферы на плоскость и применению этого вида проектирования в астрономии и географии.

Последний раздел книги посвящен изложению геометрии Лобачевского и, в частности, рассказывает о проектировании плоскости Лобачевского на обычную плоскость.

Книга рассчитана на учителей средней школы и на школьников 9 и 10 классов.

4. Розенфельд Б. А., Рожанская М. М., Соколовская З. К. *Абу-р-Райхан ал-Беруни* (объем 15 л., тираж 10 000 экз., цена 95 к.).

Книга посвящена жизни и деятельности крупнейшего ученого средневековья — Беруни *).

Книга рассчитана на широкий круг читателей, включая школьников старших классов.

Издательство «Мир»

5. Фаермарк Д. С. *Задача пришла с картины* (объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.).

Эта своеобразная книга построена на интересном сюжете. Отталкиваясь от известной картины Н. П. Богданова-Бельского «Устный счет», автор рассказывает о жизни художника и о его картине. Обращаясь к математической задаче, условие которой написано на картине, автор рассказывает о многих задачах, связанных с целыми числами, об истории этих задач и о крупных русских, советских и зарубежных ученых, внесших большой вклад в теорию чисел.

Написанная ярким эмоциональным языком, книга безусловно будет интересна широким кругам читателей.

6. Гасс С. *Занимательное путешествие по стране линейного программирования* (объем 12 л., тираж 75 000 экз., цена 62 к.).

В книге популярно и доходчиво изложены вопросы линейного программирования. Автор, не вникая в детали и опуская сложные расчеты, очень доходчиво рассказывает о переходе от конкретных задач к их математическим моделям, как соотносится эта модель с реальной действительностью. Рассказывая о возникших при этом трудностях, автор показывает пути их преодоления.

В специальном математическом приложении (которое можно опустить при первом чтении) автор более детально знакомит читателя с математическими вопросами линейного программирования.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Просвещение»

7. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. *Основные понятия в школьном курсе математики* (объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 85 к.).

В книге излагаются основные понятия математики (теория множеств, элементы математической логики, аксиоматика, равенства, уравнения, геометрические преобразования векторов и так далее) применительно к школьному курсу математики.

Книга будет полезна учителям математики средней школы. Ее также с интересом прочтут школьники старших классов.

---

*) См. «Квант», 1973, № 9, с. 2.

М. Л. Смолянский

ФИЗИКА

Издательство «Наука»

1. Смородинский Я. А., Шварцбург А. Б. *Законы механики* (объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 62 к.).

В книге, основываясь только на материале школьного курса физики, подробно разбираются задачи движения материальной точки на плоскости, колебания, движение жидкости и газа, законы небесной механики.

Книга предназначена школьникам старших классов, но она также будет полезна учителям физики, ведущим факультативные занятия.

2. *Физика. Часть II. Оптика и волны.* Под редакцией Ахматова А. С., издание 2-е (объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 29 к.).

Эта книга является переводом американского учебника для средней школы по курсу общей физики. Полный курс состоит из четырех частей: «Вселенная», «Оптика и волны», «Механика», «Электричество и строение атома».

Публикуемая вторая часть курса «Оптика и волны» явится полезным дополнением к существующим учебникам по физике.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, имеющих отношение к школьному курсу физики.

3. *Над чем думают физики.* Выпуск 10. *Атомное ядро* (объем 12 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.).

Сборник научно-популярных статей, переведенных из американского журнала «Scientific American», посвящен достижениям физики атомного ядра и их приложениям.

Статьи написаны крупными специалистами-физиками. Их с интересом прочтут и учителя средней школы, и любознательные школьники старших классов.

Издательство «Атомиздат»

4. Гладков К. А. *Атом от А до Я.* Издание 2-е, переработанное и дополненное (объем 12 л., тираж 150 000 экз., цена 60 к.).

Это—маленькая энциклопедия ядерной физики, дающая простое, но достаточно полное представление о ядерной физике.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Просвещение»

5. Балаш В. А. *Задачи по физике и методы их решения.* Издание 3-е, переработанное и дополненное (объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 85 к.).

В этой книге, предназначенной в первую очередь для лиц, готовящихся к конкурсным экзаменам в институт, собраны задачи повышенной трудности по всему курсу физики. Эти задачи предлагались на вступительных экзаменах в ряде московских вузов (МГУ, МИФИ, МФТИ и так далее). Все задачи приведены с подробными решениями. Краткие теоретические вводки перед каждым разделом помогают вспомнить законы, лежащие в основе решения задач.

Книга полезна школьникам 9—10 классов.

6. Кац Ц. Б. *Биофизика на уроках физики* (объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 40 к.).

В книге излагаются элементы биофизики и бионики.

Она представляет интерес для учителей физики средней школы и для школьников старших классов.

7. Прокофьев О. Н. *Удивительное рядом* (объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.).

В этой книге рассказывается о новой науке — бионике.

Книга представляет интерес для учащихся 8—10 классов.

НАУЧНАЯ ФАНТАСТИКА

Издательство «Молодая гвардия»

1. Альтов Г. *Третье тысячелетие* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 62 к.).

Научно-фантастический роман, рассказывающий о далеком будущем Земли, о дальних космических путешествиях людей, о встречах с обитателями иных планет и контактах с ними.

Роман построен на остроприключенческом сюжете.

2. Жемайтис О. *Багряная звезда* (объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 50 к.).

Научно-фантастическая повесть о первой советской экспедиции на Марс. Космонавты раскрывают многие загадки таинственной планеты и, главное, находят следы великой цивилизации, существовавшей сотни тысяч лет назад.

3. Журавлева В. *Золотые кони дерзания* (объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 70 к.).

Книга научно-фантастических рассказов о жизни и открытиях психолога Киры Сафрай. Наука подходит к великим открытиям в психологии, приближается к расшифровке тайн творчества. Показать человека, который сделает для психологии то, что сделали Эйнштейн и Бор для физики, показать пути к открытиям, драму идей — такую цель преследует автор этого сборника. В этом своеобразие, привлекательность и смысл книги.

Т. С. Петрова

«Квант» для младших школьников

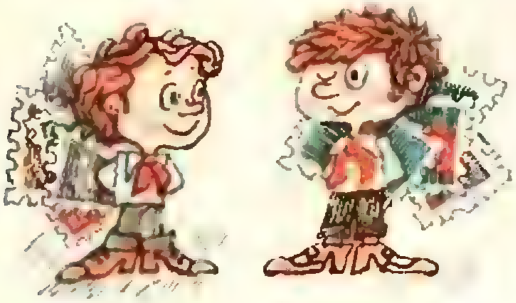
Задачи

1. Расшифруйте умножение

```
          *   *   *
          *   *   *
      ---------------
      *   6   *   *
  *   *   6   6
  6   *   6
  -------------------
  *   *   *   *   *
```

2. Велосипед имеет передний и задний тормоз. В каком порядке их нужно включать при резкой остановке?

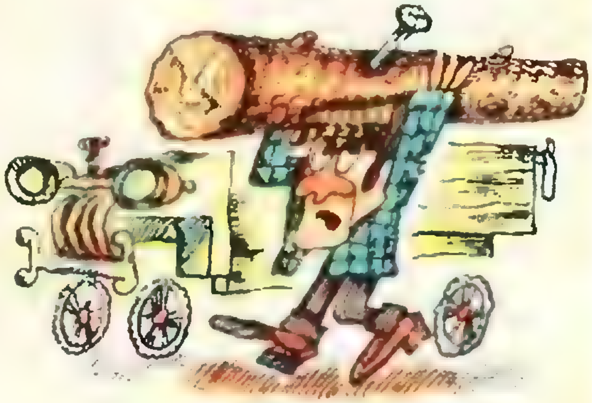
3. Я и мой друг приобрели за 3 дня 18 марок. Сегодня я купил столько марок, сколько мой друг вчера и сегодня, но зато позавчера он купил на 2 марки больше, чем я вчера и позавчера. Сколько же марок приобрел каждый из нас?



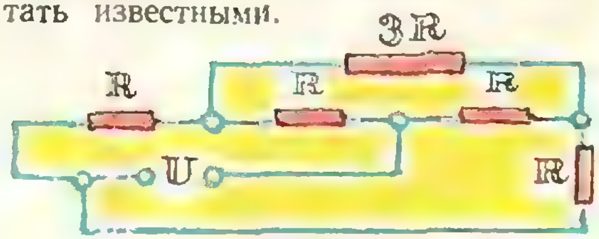
4. Что произойдет, если включенный электронагреватель вынуть на некоторое время из воды?

5. В кузове грузовой машины оставили бревно с гвоздем в середине. Бревно при движении машины свободно каталось в кузове и царапало дно. Какая часть дна кузова может быть испорчена?

Размеры кузова: 3 *м* × 2 *м*; длина бревна 2 *м*.



6. Какой ток идет через сопротивление $3R$ в схеме, показанной на рисунке? Величины всех сопротивлений и напряжение U считать известными.



Художник Э. В. Назаров

А. С. Варпаховский

Тайны совершенных чисел и дружественных пар

В восьмом номере нашего журнала за 1971 год была опубликована заметка И. Я. Депмана об истории так называемых совершенных чисел — чисел, равных сумме своих делителей. В продолжение этой темы мы помещаем переработанную статью М. Гарднера *), в которой рассказывается о замечательных свойствах этих чисел. Публикация для «Кванта» подготовлена А. С. Варпаховским.

Пожалуй, ни одни числа не имеют такой захватывающей истории, как числа совершенные и их ближайшие родственники — дружественные числа.

Первый важный шаг в построении теории совершенных чисел был сделан еще Евклидом, который установил, что формула $2^{n-1}(2^n-1)$ дает совершенное число всякий раз, когда множитель в скобках оказывается простым (для этого необходимо, чтобы n было простым, хотя далеко не для всякого простого числа n число 2^n-1 также является простым).

Вот доказательство теоремы Евклида. Пусть у числа $2^{n-1}(2^n-1)$ множитель в скобках простой. Тогда делителями этого числа, отличными от самого числа, будут

$$1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1},$$
$$(2^n-1), 2(2^n-1), 4(2^n-1), \ldots, 2^{n-2}\times(2^n-1).$$

Возьмем сумму всех этих делителей:

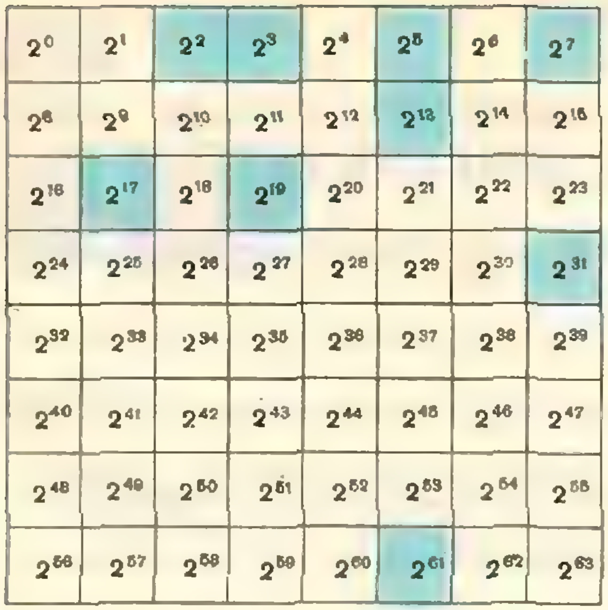
$$(1+2+4+8+\ldots+2^{n-1})+(1+2+4+8+\ldots+2^{n-2})\times(2^n-1)=(2^n-1)+(2^{n-1}-1)\times(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1).$$

Следовательно, число $2^{n-1}(2^n-1)$ — совершенное.

Спустя 2000 лет Леонард Эйлер доказал, что формула Евклида определяет все четные совершенные числа. Любопытно, что до сих пор никому не удалось найти нечетное совершенное число, и, возможно, такого вообще не существует. Поэтому в дальнейшем, говоря о совершенных числах, мы будем подразумевать четные совершенные числа. Удивительная формула Евклида тесно связана с обычной геометрической прогрессией со знаменателем 2 (1, 2, 4, 8, 16, . . .). Вспомним древнюю историю о персидском царе и авторе шахматной игры. Восхищенный этой игрой, царь предложил автору самому выбрать себе награду. Тот, на первый взгляд, изъявил очень скромное желание, попросив положить на первую клетку шахматной доски одно зернышко пшеницы, на вторую — два зернышка, на третью — четыре и таким способом заполнить все 64 клетки. Оказалось, что число зерен в последней клетке равно 9 223 372 036 854 775 808, а удвоенное это число без 1 равно суммарному числу зерен на доске, что в несколько тысяч раз превышает годовой урожай пшеницы во всем мире. Написав в каждой клетке шахматной доски число зерен, которое должно быть в ней, и забрав из каждой клетки по одному зернышку, увидим, что оставшееся в клетке

---

*) Scientific American», 1968, № 3.



2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}
2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Рис. 1.

число зерен в формуле Евклида определяется выражением $2^n - 1$. Если это число простое, то, умножив его на число зерен в предыдущей клетке, то есть на 2^{n-1}, получим совершенное число. (см. рис. 1).

Простые числа ряда $2^n - 1$ называют числами Мерсенна по имени французского математика XVII века, занимавшегося их изучением *). На рисунке 1 закрашены те клетки, в которых после вычитания 1 получаются числа Мерсенна. Таких клеток на доске 9 — им соответствуют первые девять совершенных чисел.

Совершенные числа обладают рядом таинственных и вместе с тем замечательных свойств. Например, все совершенные числа «треугольные». Это означает, что если взять, допустим, шарики в количестве, равном совершенному числу, то их можно расположить так, что они образуют равносторонний треугольник.

Иначе говоря, каждое совершенное число есть сумма вида $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$.

Также легко можно заметить, что каждое совершенное число, за исключением 6, есть частичная сумма ряда из кубов нечетных чисел $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots$

А вот еще одно свойство совершенных чисел: сумма обратных значений делителей совершенного числа, включая и само число как делитель, всегда равна 2. Так, для числа 28 имеем

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2.$$

До сегодняшнего дня остаются без ответа два важных вопроса: существует ли нечетное совершенное число и существует ли наибольшее четное совершенное число? До сих пор не найдено ни одного нечетного совершенного числа, но вместе с тем и не доказано, что такого числа не существует. Ответ на второй вопрос зависит от того, является ли ряд простых чисел Мерсенна бесконечным, так как каждое простое число этого ряда приводит к совершенному числу. Было замечено, что при подстановке первых четырех чисел Мерсенна (3, 7, 31, 127) вместо n в формулу $2^n - 1$ снова получаются числа Мерсенна. Более 70 лет математики надеялись, что такая закономерность должна привести к заключению о бесконечности ряда простых чисел Мерсенна. Однако в 1953 году вычислительная машина разрушила их надежды. Было обнаружено, что

---

*) См. также «Квант», 1971, № 8, с. 3.

в случае $n = 2^{13} - 1 = 8191$ (простое число Мерсенна) число $2^{8191} - 1$ не просто. Так до сих пор и не известно, является ли ряд Мерсенна бесконечным или в нем имеется самое большое число.

Оре в книге «Теория чисел и ее история» цитирует забавное высказывание Питера Барлоу из его книги «Теория чисел», вышедшей в 1811 году. Барлоу, вычислив девятое совершенное число, заявил, что «это наибольшее число, которое когда-либо будет найдено, потому что совершенные числа не более чем любопытны и вряд ли кому-либо придет в голову пытаться найти большее совершенное число». Однако в 1876 году французский математик Эдвард Лукас, автор классической четырехтомной работы по занимательной математике, объявил об открытии двенадцатого совершенного числа $2^{126}(2^{127} - 1)$. Позднее у Лукаса появились сомнения в том, что $2^{127} - 1$ есть простое число Мерсенна, но впоследствии его простота подтвердилась. $2^{127} - 1$ — наибольшее число Мерсенна, найденное без помощи вычислительной машины. В таблице 1 приведены выражения по формуле Евклида для 23 известных совершенных чисел, выписаны первые восемь из них (дальнейшие числа содержат слишком много знаков) и указано число десятичных знаков для каждого из этих чисел. Последнее известное совершенное число, которое имеет 22 425 делителей, появилось на свет в 1963 году после того, как вычислительная машина Иллинойского университета обнаружила 23-е число Мерсенна. В честь этого события на почтовых отправлениях математического отделения университета ставили штамп с надписью: «$2^{11213} - 1$ — простое число».

Обобщением совершенных чисел являются дружественные числа. Возьмем любое число и просуммируем его делители для получения второго числа. Затем просуммируем делители второго числа и так далее в надежде, что в конце концов мы придем к исходному числу. Если исходное число получается на первом шаге, то, значит, цепочка имеет лишь одно звено, а само число — совершенное. При двузвенной цепочке два числа образуют дружественную пару: сумма делителей одного из чисел равна другому числу. Наименьшие дружественные числа, образующие пару, равны 220 и 284.

В 1636 году Пьер Ферма нашел другую дружественную пару чисел: 17 296 и 18 416. Он и Рене Декарт независимо друг от друга дали правило образования дружественных пар, не подозревая, что это правило было сформулировано еще в IX веке одним арабским астрономом *). Третью пару нашел Декарт: 9 363 584 и 9 437 056. В XVIII веке Эйлер опубликовал

Таблица 1

	Формула	Число	Количество знаков
1	$2^{1}(2^{2}-1)$	6	1
2	$2^{2}(2^{3}-1)$	28	2
3	$2^{4}(2^{5}-1)$	496	3
4	$2^{6}(2^{7}-1)$	8 128	4
5	$2^{12}(2^{13}-1)$	33 550 336	8
6	$2^{16}(2^{17}-1)$	8 589 869 056	10
7	$2^{18}(2^{19}-1)$	137 438 691 328	12
8	$2^{30}(2^{31}-1)$	2 305 843 008 139 952 128	19
9	$2^{60}(2^{61}-1)$		37
10	$2^{88}(2^{89}-1)$		54
11	$2^{106}(2^{107}-1)$		65
12	$2^{126}(2^{127}-1)$		77
13	$2^{520}(2^{521}-1)$		314
14	$2^{606}(2^{607}-1)$		366
15	$2^{1278}(2^{1279}-1)$		770
16	$2^{2202}(2^{2203}-1)$		1 327
17	$2^{2280}(2^{2281}-1)$		1 373
18	$2^{3216}(2^{3217}-1)$		1 937
19	$2^{4252}(2^{4253}-1)$		2 561
20	$2^{4422}(2^{4423}-1)$		2 663
21	$2^{9688}(2^{9689}-1)$		5 834
22	$2^{9940}(2^{9941}-1)$		5 985
23	$2^{11212}(2^{11213}-1)$		6 751

---

*) Жителем месопотамского города Харрана — Абу-л-Хасаном Сабитом ибн Корра ибн Марван ас-Саби ал-Харрани (ок. 830—901). (*Прим. ред.*)

список 64 дружественных пар, однако, как показала позднейшая проверка, в двух случаях он ошибся. В 1830 году Адриен Мари Лежандр нашел еще одну дружественную пару, а в 1867 году шестнадцатилетний итальянский юноша Б. И. Паганини удивил математический мир, объявив, что числа 1184 и 1210 — дружественные. Это была вторая по величине пара, которую все проглядели. И хотя, возможно, Паганини нашел эту пару методом проб и ошибок, имя его навсегда вошло в историю теории чисел.

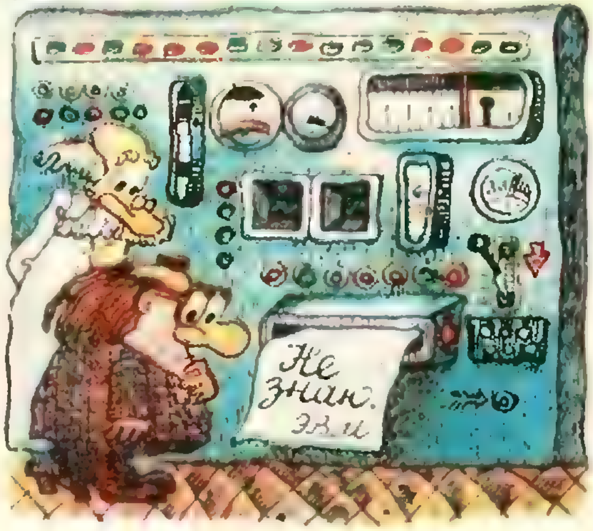
Сегодня известны более 600 дружественных пар; многие числа пар состоят более чем из 30 цифр. Последняя известная пара была вычислена на ЭВМ в 1964 году. В таблице 2 приведены дружественные пары в диапазоне чисел от 0 до 100 000.

Все известные дружественные пары состоят либо из двух четных чисел, либо (что гораздо реже) из двух нечетных. Но никто не доказал, что не существует дружественной смешанной пары. Брэтли и Мак-Кэй выдвинули гипотезу, что все нечетные дружественные числа кратны 3, а сумма чисел, образующих дружественную пару, кратна 9. Никто еще не предложил общей формулы для всех дружественных пар, и неизвестно, конечно или бесконечно число таких пар.

В настоящее время известны только две цепочки чисел, которые приводят к исходному числу и имеют больше чем два звена. В 1918 году французский математик П. Пуле нашел цепочку из пяти звеньев (12 496, 14 288, 15 472, 14 536, 14 264) и поразительную цепочку из 28 звеньев (28 — совершенное число), которая начинается с числа 14 316. А вот трехзвенную цепочку до сих пор найти не удалось, несмотря на обширные поиски с помощью ЭВМ. И эти поиски будут продолжаться до тех пор, пока не встретится трехзвенная цепочка или пока какой-нибудь математик, специализирующийся в теории чисел, не докажет, что таких цепочек нет.

Таблица 2

1	220	284
2	1 184	1 210
3	2 620	2 924
4	5 020	5 564
5	6 232	6 368
6	10 744	10 856
7	12 285	14 595
8	17 296	18 416
9	63 020	76 084
10	66 928	66 992
11	67 095	71 145
12	69 615	87 633
13	79 750	88 730



К статье «Оценки углов»

2. Если точка D находится внутри треугольника ABC, то хотя бы один из 6 углов, на которые AD, BD и CD делят углы треугольника, не больше 30°. В силу этого нам достаточно рассмотреть случай, когда выпуклая оболочка точек не содержит внутри себя ни одной точки. Далее заметьте, что сумма всех углов n-угольника равна $180°\,(n-2)$, а диагонали делят эти углы на $n\,(n-2)$ частей. См. также указание к задаче 3.

3. Предположим, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пронумерованы так, что $\angle A_nA_1A_2$ — угол k-угольника M ($k \leqslant n$), являющегося выпуклой оболочкой данных точек, и что лучи $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{n-1}, A_1A_n$ следуют один за другим именно в таком порядке (все эти лучи проходят внутри или по границе угла $A_2A_1A_n$; некоторые из них могут и совпадать). Если B — точка на продолжении луча A_1A_n за A_1, то $180° = \angle BA_1A_n = \angle BA_1A_2 + \angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \ldots + \angle A_{n-1}A_1A_n = \angle A_1A_2A_n + \angle A_1A_nA_2 + \angle A_2A_1A_3 + \ldots + \angle A_{n-1}A_1A_n$. Поэтому если все углы $A_iA_jA_h$ не меньше β, то $180° \geqslant n\beta$, откуда $\beta \leqslant \frac{180°}{n}$.

Величина $\frac{180°}{n}$ угла β достигается для системы n точек, совпадающей с вершинами правильного n-угольника. При этом для того, чтобы выписанное выше неравенство обращалось в равенство для каждой вершины многоугольника M, необходимо и достаточно, чтобы M был правильным n-угольником.

4. а) Выпуклая оболочка 4-х точек может быть или четырехугольником, или треугольником, внутри которого лежит четвертая точка, или отрезком. В первом случае хотя бы один из углов четырехугольника не меньше 90°; во втором случае хотя бы один из «внутренних» углов не меньше 120°; в третьем случае четыре угла равны 180°.

б) Выпуклая оболочка 5-ти точек может быть или пятиугольником, или четырехугольником, или треугольником, или отрезком (последний случай интереса не представляет, здесь $\alpha = 180°$). В первом случае хотя бы один из углов пятиугольника не меньше $\frac{3}{5} \cdot 180° = 108°$, в третьем случае хотя бы один из углов не меньше 120°. Наконец, если выпуклая оболочка — четырехугольник, то пятая точка лежит внутри одного из двух треугольников, на которые четырехугольник разбивает его диагональ; тем самым этот случай сводится к уже разобранному.

в) Если выпуклая оболочка — шестиугольник, то хотя бы один его угол не меньше $\frac{4}{6} \cdot 180° = 120°$; в противном случае найдутся либо 3 точки, лежащие на одной прямой (тогда $\alpha = 180°$), либо точка, лежащая внутри треугольника, образованного тремя другими точками (этот треугольник — либо выпуклая оболочка данных точек, либо одна из частей выпуклой оболочки, на которые ее разрезают выходящие из одной вершины диагонали).

Для случая четырех точек значение $\alpha = 90°$ достигается для вершин любого прямоугольника; аналогично этому в задачах 4б и 4в наименьшее значение α достигается для вершин выпуклого многоугольника с равными углами.

5. Так как уже для шести точек плоскости наибольший из образованных ими углов не меньше 120°, то это справедливо и для любого большего числа точек. При этом и значение $\alpha = 120°$ при большем числе точек недостижимо, так как иначе **каждые** шесть из рассматриваемых (разных!) точек должны являться вершинами шестиугольника с углами в 120°, что невозможно.

Далее достаточно рассмотреть (скажем, центрально-симметричный) шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ с углами по 120°, причем такой, что $A_1A_2 \ll A_2A_3 \ll A_3A_4$ (знак $\ll$ означает «много меньше»), точки A_7A_8 находятся на биссектрисах углов A_3 и A_6 шестиугольника на одинаковом и очень малом расстоянии от вершин A_3 и A_6; тогда наибольший из углов, образованных точками $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$, будет незначительно превосходить 120° (сделайте примерный чертеж).

6. а) Если выпуклая оболочка M данных точек — отрезок, то $\alpha^{(2)} = 180°$; если M — треугольник, то минимум два «внутренних» угла не меньше 90°. Пусть теперь M — четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ и A_1 — самый большой из углов этого четырехугольника; тогда $\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \angle A_3A_4A_1 + \angle A_4A_1A_3 + \angle A_2A_1A_3 = 360°$ и, следовательно, хотя бы один из этих углов не меньше $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$. Значение $\alpha^{(2)} = 72°$ достигается, если все рассматриваемые углы равны 72°.

б) Если выпуклая оболочка M данных точек — отрезок, то $\beta^{(2)} = 0°$; если M — треугольник, то два наименьших угла M — острые, каждый из них делится на две части, меньшая из частей не больше 45°. Наконец, если M — четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, то $\angle A_1A_2A_4 + \angle A_2A_4A_1 + \angle A_2A_1A_3 + \angle A_4A_1A_3 = 180°$ и $\angle A_4A_2A_3 + \angle A_2A_4A_3 + \angle A_1A_3A_1 + \angle A_4A_3A_1 = 180°$; в каждой из этих сумм хоть один из углов не больше 45°.

Значение $\beta^{(2)} = 45°$ реализуется, например, для квадрата.

7. Рассмотрите n точек, лежащих на одной прямой.

11. Оба результата сразу следуют из того, что сумма всех 12 углов, задаваемых четырьмя точками, равна 720° (сумма углов четырех треугольников); поэтому хотя бы один из углов не меньше $\frac{1}{12}\cdot 720^\circ = 60^\circ$ и хотя бы один из углов не больше 60°.

Значения $\varphi = 60^\circ$ и $\psi = 60^\circ$ реализуются лишь для системы P_4, состоящей из вершин правильного тетраэдра.

15. См. решение задачи М130, «Квант» № 11, 1972.

16. а) Лишь 3 точки.

б) Рассмотрим «выпуклую оболочку» наших точек, то есть наименьший выпуклый многогранник M, содержащий внутри себя или на границе все данные точки (M можно представить себе как многогранник, ограниченный «резиновой пленкой», натянутой на наши точки и стремящейся сократить свою поверхность).

В рассматриваемом случае ни одна из точек не может находиться внутри M и все грани M — остроугольные треугольники (в силу результата задачи 16а).

Пусть теперь пять точек удовлетворяют условию задачи. В таком случае M имеет пять вершин, то есть, если P и $Г$ — число ребер и граней многогранника M, то

$$5 - P + Г = 2$$

(теорема Эйлера; см., например, «Квант» № 4, 1972, статья А. П. Савина «Карты и раскраски»). С другой стороны, так как каждая из $Г$ граней содержит по три ребра и каждое ребро принадлежит двум граням, то $3Г = 2P$, то есть

$$P = \frac{3}{2}Г,$$

откуда сразу можно найти, что $Г = 6$ и $P = 9$. С другой стороны, если B_3 и B_4 — число 3-гранных и 4-гранных углов M, то $B_3 + B_4 = 5$ и $3B_3 + 4B_4 = 2P = 18$, откуда вытекает, что $B_3 = 2$ и $B_4 = 3$. Так устанавливается, что M обязательно является «треугольной бипирамидой», то есть состоит из двух треугольных пирамид $ABCD$ и $ABCE$, сложенных общим основанием ABC.

Теперь, используя то, что все 10 треугольников ABC, ABD, . . ., CDE являются остроугольными, с использованием теоремы косинусов устанавливается, что, например,

$$AB^2 + AC^2 > DB^2 + DC^2 \qquad (*)$$

(это неравенство далее потребуется).

Рассмотрим теперь шесть точек, удовлетворяющих условию задачи. В этом случае аналогично первой части решения с использованием теоремы Эйлера устанавливается, что выпуклая оболочка M данных точек может быть либо «четырехугольной бипирамидой $ABCDEF$, то есть многогранником, образованным двумя четырехугольными пирамидами $ABCDE$ и $ABCDF$, сложенными общим основанием $ABCD$, либо «искривленной пятиугольной пирамидой» $ABCDEF$, в которой точка F соединена со всеми вершинами «искривленного пятиугольного основания $ABCDE$, составленного из трех примыкающих треугольников ABC, ACD и ADE. В первом случае, дважды применяя неравенство (*) к 5-вершинникам $ACDEF$ и $ABCEF$, мы получим

$$FA^2 + FC^2 > EA^2 + EC^2 \text{ и } EA^2 + EC^2 > FA^2 + FC^2,$$

что невозможно; во втором случае, применяя то же неравенство к 5-вершинникам $ACDEF$ и $ABCDE$, получим

$$CF^2 + CA^2 > DF^2 + DA^2$$

и

$$DF^2 + DA^2 > CF^2 + CA^2,$$

что, разумеется, тоже невозможно.

Итак, наибольшее число точек, совместимое с условиями задачи, равно 5.

К статье «Окрестность фигуры»

1. Указание. Полученный многоугольник содержит 1-окрестность исходного многоугольника.

2. $V = 1 + 6\varepsilon + 12\cdot\frac{\pi\varepsilon^2}{4} + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 =$

$$= 1 + 6\varepsilon + 3\pi\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

4. Можно рассуждать так же, как при решении задачи 2 в тексте. Проверьте, что отношение площади правильного треугольника со стороной 1 к площади его 1-окрестности $\frac{\sqrt{3}}{12 + \sqrt{3} + 4\pi}$ больше $^1/_{16}$.

6. Решение. Нужно доказать, что внутри многоугольника есть точка, отстоящая от его контура более чем на $\frac{S}{P}$, то есть не принадлежащая $\frac{S}{P}$-окрестности контура многоугольника. Часть этой окрестности, расположенная внутри многоугольника, заштрихована на рис. 1. Высота каждого из прямоугольников, изображенных на

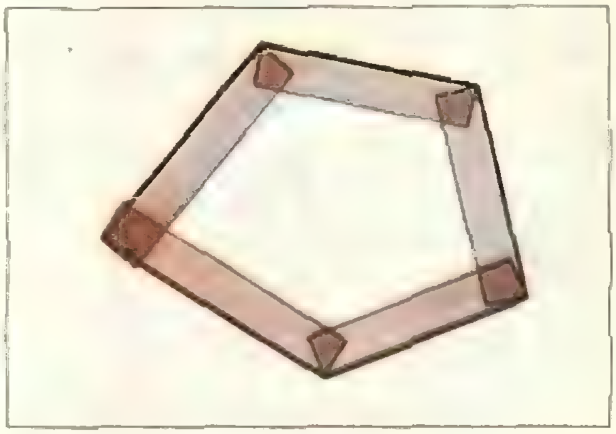


Рис. 1.

этом рисунке, равна $\frac{S}{P}$. Площадь заштрихованной фигуры меньше суммы площадей прямоугольников, то есть меньше $\frac{S}{P}\cdot P=S$. Следовательно, в многоугольнике остаются незаштрихованные точки, что и требовалось доказать.

К статье «Высота пирамиды»

3. $\frac{b}{c}$.

4. $\left(\frac{a\sqrt{2a^2+4b^2}}{2a+\sqrt{2a^2+4b^2}}\right)^2$. Указание. Показать, что рассматриваемая пирамида обладает лишь одной парой взаимно-перпендикулярных скрещивающихся ребер. Доказать затем, что плоскость искомого сечения параллельна этим взаимно перпендикулярным скрещивающимся ребрам.

5. $^2/_3$. Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида; показать, что $AB=AC=BS=CS$ и $AS=BC$, а высота SO пирамиды лежит в грани BSC. Доказать затем, что SA и BC — наибольшие ребра пирамиды.

6. 22 *см*^{3}.

К статье «Московский физико-технический институт»

Математика

Вариант I

1. Номер члена равен 5.

2. Пусть O, O_1 — центры данных окружностей (рис. 2). Касательная BC может занимать любое из двух положений, указанных на рисунке 2. Пусть D — точка пересечения AB с меньшей окружностью. Соединим точки B и O, а также D и O_1. Треугольники OBA и O_1DA — равнобедренные ($OB=OA=R$, $O_1D=O_1A=r$), поэтому углы OBA, OAB, O_1DA равны. Это означает, что прямые OB и O_1D — параллельны. Обозначим длины отрезков BD и AB соответственно x и y. Тогда, учитывая, что $AD=y-x$, из подобия треугольников O_1DA и OBA получаем:

$$\frac{y-x}{y}=\frac{r}{R}. \qquad (1)$$

Кроме того,

$$y\cdot x=a^2 \qquad (2)$$

(BA — секущая, BC — касательная к меньшей окружности).

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$y=a\sqrt{\frac{R}{R-r}}.$$

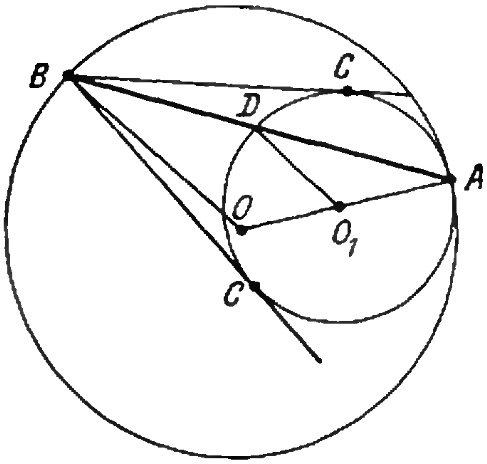


Рис. 2.

3. В обоих уравнениях системы переходим к логарифмам по основанию 2 и потенцируем:

$$\begin{cases}\dfrac{(y+x)^2}{x}=2(3y-x)\\ \dfrac{xy+3}{x^2-y+3x+1}=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

После упрощения этой системы получим:

$$\begin{cases}y^2-4xy+3x^2=0\\ y^2-3xy+3x-y=0.\end{cases} \qquad (1)$$

Второе уравнение системы (1) преобразовываем к виду: $(y-3x)(y-1)=0$. Рассмотрим последовательно два случая

1) $y=1$. Из первого уравнения системы (1) получаем: $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. Подстановка значений (1, 1) и $(\frac{1}{3}, 1)$ в оба уравнения исходной системы обращает их в тождества. Поэтому пары чисел (1, 1), $(\frac{1}{3}, 1)$ будут решениями этой системы.

2) $y=3x$. При таких y первое уравнение системы (1) превращается в тождество. Подстановка значений $x=c$, $y=3c$ в оба уравнения исходной системы превращает их в тождества лишь при $c>0$. Поэтому пары чисел $(c, 3c)$ будут решениями этой системы при $c>0$.

Решение $(\frac{1}{3}, 1)$, полученное в случае (1) является одним из решений вида $(c, 3c)$ при $c=\frac{1}{3}$.

4. После приведения левой части к общему знаменателю преобразуем ее к виду

$$\frac{\cos 2x+1}{\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{2\cos^2 x}{\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{2\cos x}{\cos 2x}.$$

Второе слагаемое правой части уравнения переносим в левую часть и снова приводим ее к общему знаменателю

$$\frac{2\cos x\cdot\cos 3x+1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}=\frac{\cos 4x+\cos 2x+1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}=$$

$$=\frac{2\cos^2 2x+\cos 2x}{\cos 2x\cdot\cos 3x}=\frac{2\cos 2x+1}{\cos 3x}.$$

Теперь уравнение имеет вид

$$\frac{2\cos 2x+1}{\cos 3x}=\frac{1}{\sin x},$$

откуда

$$\frac{2\sin x\cos 2x+\sin x}{\cos 3x}=1,$$

$$\frac{\sin 3x-\sin x+\sin x}{\cos 3x}=1,$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=1,\ \operatorname{tg} 3x=1.$$

Последнее уравнение имеет те же решения, что и исходное, при условии, что

$$\sin x\neq 0,\ \cos x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0,\ \cos 3x\neq 0 \quad (1)$$

Далее находим: $3x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Теперь определим, при каких n для этих значений x будут выполнены условия (1). Очевидно, $\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\neq 0$ при $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Условие $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$ эквивалентно условию $\sin 4x\neq 0$, то есть $x\neq\frac{\pi}{4}p$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Решив уравнение $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{4}p$ относительно целых чисел n при p — целых, найдем, что $n=3k+2$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Значит, для $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, где n — целое, $n\neq 3k+2$, $k=0, \pm 1, \dots$ Условие (1) выполнено, и эти значения представляют собой все решения исходного уравнения.

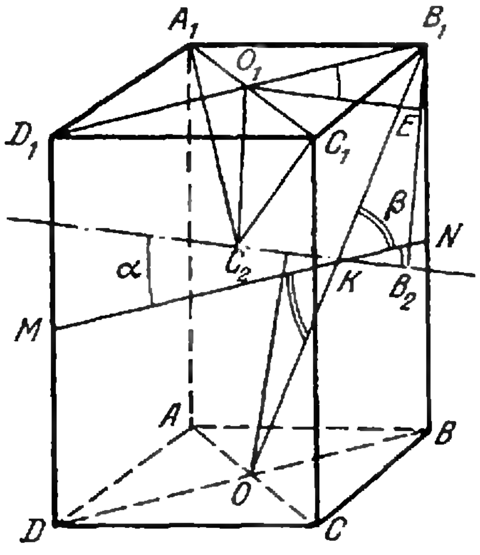


Рис. 3.

5. Рассмотрим два случая:

1) Ось цилиндра пересекает прямую OB_1. Тогда нетрудно видеть, что она пересекает ее в середине K отрезка OB_1. Через точку K проведем отрезок MN параллельно DB (рис. 3), тогда $B_1N=NB=3$ *см*, $KN=\frac{1}{2}OB=\sqrt{2}$ *см*. Пусть угол $B_1KN=\beta$, тогда $KB_1\sin\beta=B_1N=3$ *см*, $KB_1\cdot\cos\beta=KN=\sqrt{2}$ *см*. Обозначим угол, образуемый осью цилиндра с прямой MN через α,

$$-\beta<\alpha<\pi-\beta. \quad (1)$$

Опустим из точек B_1, C_1, A_1 перпендикуляры на ось цилиндра — B_1B_2, C_1C_2, A_1C_2 соответственно. При этом заметим, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости B_1D_1DB, и потому перпендикуляр O_1C_2, проведенный из точки O_1 к оси цилиндра, будет проекцией наклонных C_1C_2 и A_1C_2 на плоскость B_1D_1DB, значит и сами наклонные C_1C_2 и A_1C_2 будут перпендикулярны оси цилиндра. В треугольнике KB_1B_2 имеем $B_1B_2=R=KB_1\sin(\beta+\alpha)=(3\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha)$ *см*, где R — радиус цилиндра. Проведем O_1E перпендикулярно B_1B_2. Очевидно, что угол B_1O_1E равен α. Тогда в треугольнике B_1O_1E имеем $B_1E=O_1B_1\cdot\sin\alpha=2\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$ *см*. Теперь $O_1C_2=EB_2=B_1B_2-B_1E=(3\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha)$ *см*. Наконец, в треугольнике $C_2O_1C_1$ имеем $C_1C_2^2=R^2=C_2O_1^2+O_1C_1^2$. Подставив сюда полученные выражения для R, C_2O_1 и $O_1C_1=2\sqrt{2}$ *см*, будем иметь:

$$(3\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha)^2=(3\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha)^2+8.$$

Решив это уравнение, найдем

$$\alpha=\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi}{2}n,$$
$$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Условию (1) удовлетворяют только два значения: $\alpha_0=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$, причем оба угла α_0 и α_1 находятся в интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Далее находим $\sin\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha_0=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\alpha_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, $R_0=3\cos\alpha_0+\sqrt{2}\sin\alpha_0=\frac{4}{3}\sqrt{6}$ *см*, $R_1=\frac{5}{3}\sqrt{3}$ *см*.

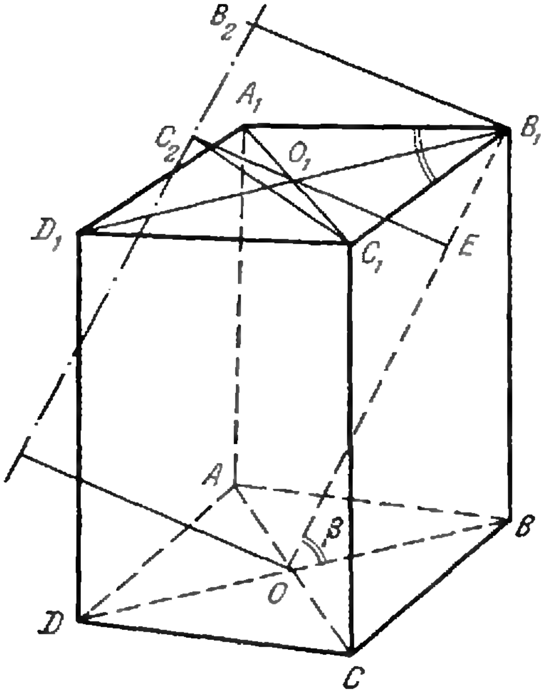


Рис. 4.

2) Ось цилиндра параллельна прямой OB_1. В этом случае OB_1—образующая цилиндра. Проведем из точек B_1, C_1, A_1 перпендикуляры к оси цилиндра—B_1B_2, C_1C_2, A_1C_2 (рис. 4). Как и в случае 1), отрезок O_1C_2 перпендикулярен оси цилиндра, а его продолжение O_1E перпендикулярно прямой OB_1. Находим: $OB_1 = 2\sqrt{11}$ *см*, $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $O_1E = 6\sqrt{\frac{2}{11}}$ *см*. Далее, $C_2E = B_2B_1 = R$, $C_2O_1 = \left(R - 6\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ *см* и в треугольнике $C_2O_1C_1$ имеем $C_2C_1^2 = C_2O_1^2 + O_1C_1^2$, то есть

$$R^2 = \left(R - 6\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2 + 8,$$

откуда

$$R_3 = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{2}{11}}\ \text{см}.$$

Вариант 2

1. $S_1 = \frac{3}{4}$, $S_2 = \frac{2}{3}$.
2. $AB = R\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}$.
3. $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$, $(c,\ -2)$, где $1<c<2$.
4. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n$, $n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$
5. $R = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Физика

Билет 1

1. $10\ T$.
2. $\frac{m_{\text{VII}}}{m_{\text{XI}}} = 3{,}5$.
3. $t = 8{,}4\ c$.
4. $0{,}5 < \sin\alpha < 0{,}526$.

Билет 2

1. $l_0 = \frac{ml_1 + Ml_2}{m+M}$.
2. $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{p_0 + \frac{m+M}{S}g}{p_0 + \frac{m}{S}g}$.
3. $d = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$.
4. $t \approx \frac{6L}{c} = 1{,}1\cdot10^{-7}c$.

К задачам «На клетчатой бумаге»

(см. «Квант» № 9, 1973, с. 17)
Смотри рисунок 5.

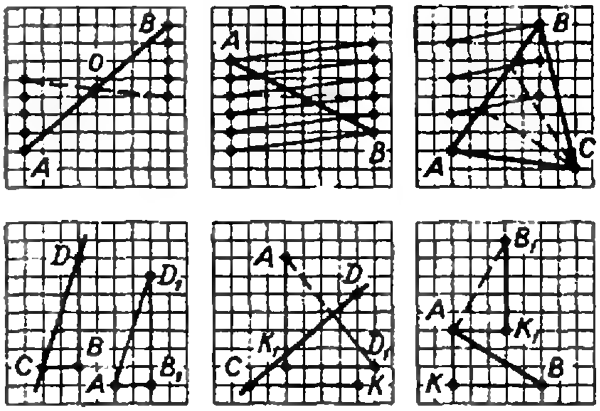


Рис. 5.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 9, 1973)

1. Петя живет на 5-м этаже.
2. $8126 \times 2 = 16\,252$.
3. Масса толстого конца больше.
4. При нагревании вода, которая содержится в древесине, расширяется и разрывает древесные волокна.
5. Давая задний ход, машинист сдвигает буфера всех вагонов. Когда после этого он трогает состав вперед, вагоны начинают двигаться по одному, и машинист может сдвинуть состав.

К задаче М189.

Указание. Длина биссектрисы $l = \frac{2ab}{a+b}\cos\varphi/2$, где a и b—длины сторон, заключающих биссектрису, а φ — угол между ними.

К задачам (см. с. 21)

1. Если A и B — две наиболее удаленные друг от друга точки, то все остальные точки лежат на окружности (соответственно на сфере) S с диаметром AB.

а) 3 или 4.

б) Исключим две наиболее удаленные друг от друга точки A и B, пусть C и D — наиболее удаленные из оставшихся точек. Тогда все точки лежат на сфере S с диаметром AB и сфере s с диаметром CD, то есть все точки принадлежат пересечению S и s; далее надо отдельно рассмотреть случаи, когда S и s совпадают и когда они не совпадают.

В первом случае рассмотрение множества («геометрического места») таких точек M, что $\triangle ABM$ — прямоугольный, сразу приводит к выводу, что, кроме A, B, C, D, мы не имеем ни одной точки. Во втором случае с использованием теоремы Пифагора легко устанавливается, что если точки A, B, M и N удовлетворяют условию задачи, то либо $\sphericalangle AMN = \sphericalangle BNM = 90°$, либо $\sphericalangle ANM = \sphericalangle BMN = 90°$, откуда также можно вывести, что ни одной точки, отличной от A, B, C и D, рассматриваемое множество точек не содержит.

Итак, число точек здесь также равно 3 или 4.

2. Сколь угодно большое. В самом деле, пусть, скажем, на плоскости уже выбрано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удовлетворяющих условию задачи. Соединим между собой каждые две точки A_i и A_j и через A_i и A_j проведем перпендикулярно к A_iA_j прямые, которые ограничивают некоторую «полосу», причем все точки, лежащие вне этой полосы, образуют с A_i и с A_j тупоугольный треугольник. Построенные полосы не могут заполнять всю плоскость, ибо каждая прямая, не параллельная ни одной из них, пересекает совокупность всех полос по конечному числу отрезков и, значит, содержит точки, не принадлежащие ни одной полосе. Присоединив такую точку A_{n+1} к имеющимся n точкам, мы получим совокупность $n+1$ точек, удовлетворяющих условию задачи.

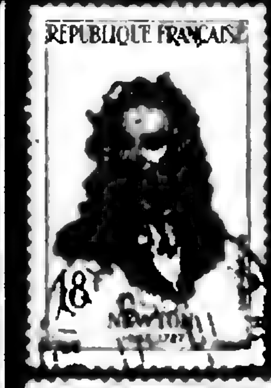
Корректор Н. Б. Румянцева

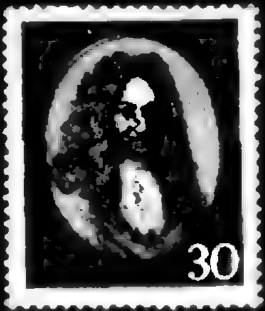
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант 10», тел. 234-08-11. *Сдано в набор* 7/VII-73 г.
Подписано в печать 19/VIII-73 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,50 Уч. изд. л. 6,80 Тираж 349 170 экз.
Т-11200. Цена 30 коп. Заказ 1296

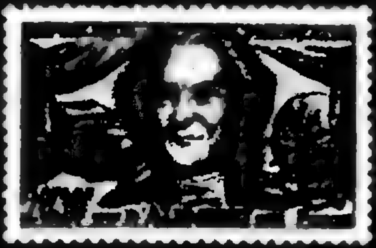
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

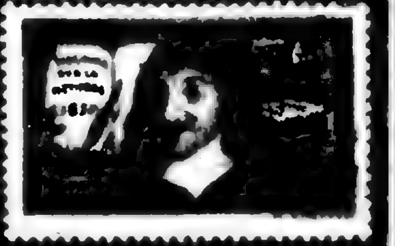
Рукописи не возвращаются

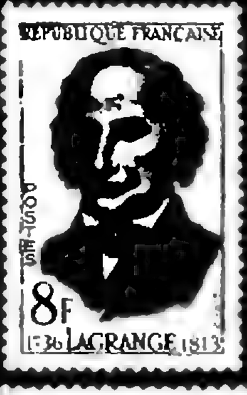
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

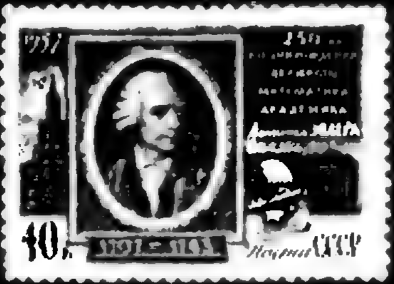












НА МАРКАХ — ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Открытие дифференциального и интегрального исчисления принадлежит к числу важнейших достижений математической мысли. Оно составило целую эпоху в развитии всех точных наук.

Дифференциальное и интегральное исчисление было создано почти одновременно **Исааком Ньютоном** (1643—1727) и **Готфридом Вильгельмом Лейбницем** (1646—1716). Портреты этих великих ученых вы видите на марках, выпущенных во Франции и ФРГ.

На фото приведена также французская марка с портретом **Рене Декарта** (1596—1650), заложившего основы аналитической геометрии. Он ввел понятие переменной величины, без которого открытия Ньютона и Лейбница были бы невозможны. На марке Декарт изображен на фоне своих сочинений, слева раскрыта одна из его знаменитых книг «Рассуждение о методе».

Дальнейшее развитие дифференциальное и интегральное исчисление получило в трудах **Леонарда Эйлера** (1707—1783), **Жана Д'Аламбера** (1717—1783) и **Жозефа Луи Лагранжа** (1736—1813).

Биографы Эйлера, говоря о его математических сочинениях, впервые вводят в дифференциальное и интегральное исчисление понятие «красота».

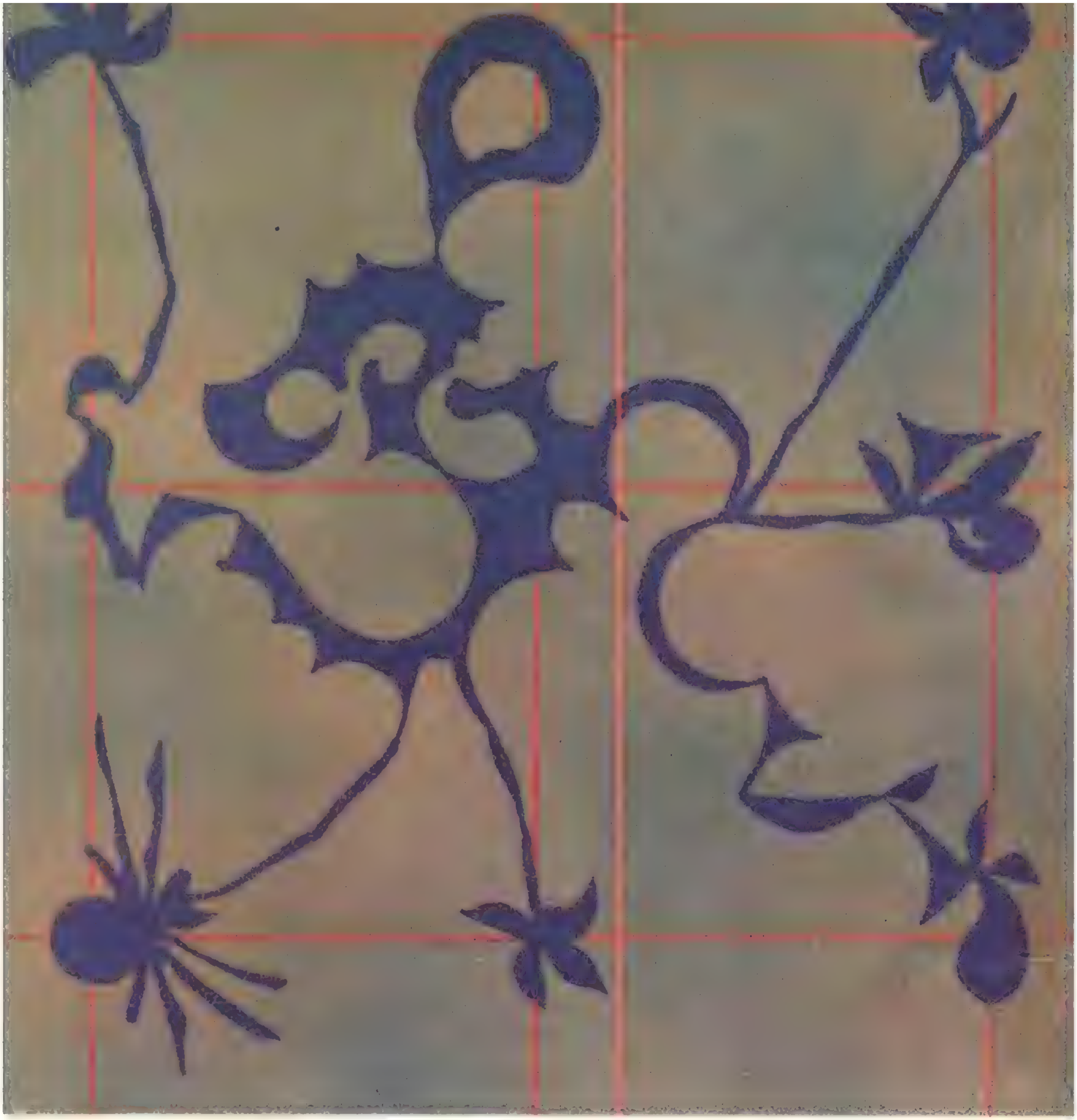
Д'Аламбер в 26 лет разработал общие правила составления и решения дифференциальных уравнений (в 23 года он уже был избран членом Французской Академии наук).

Жозеф Луи Лагранж — знаменитый французский математик — ввел методы интегрирования дифференциальных уравнений.

Портреты этих ученых приведены на советской и французских марках.

На советской марке Л. Эйлер изображен на фоне Петербургской и Берлинской Академий наук, членом которых он являлся.

А. В. Алтыкис



На рисунке сверху изображена замысловатая фигура, лежащая на листе клетчатой бумаги. На ее «территорию» попало девять узлов (узлами мы назвали точки пересечения горизонтальных и вертикальных прямых, линующих бумагу). А нельзя ли сдвинуть ее по бумаге так, чтобы в занимаемую ее площадь попало меньше узлов? Оказывается можно: если площадь произвольной фигуры, лежащей на клетчатой бумаге, меньше n (площадь одного квадрата принята за единицу), то ее можно сдвинуть так, что на ее территорию попадает не больше $(n-1)$ узлов. Это утверждение называется теоремой Блихфельда. Постарайтесь ее доказать. После этого вам останется убедиться, что площадь нашей фигуры меньше единицы, и, значит, ее можно вообще сдвинуть с узлов.

На первой странице обложки вы видите модель идеального ионного кристалла. Свойства кристаллических веществ определяются строением их кристаллической решетки. О том, как по микроскопическим характеристикам найти механические параметры вещества рассказывается в статье Г. Б. Купермана и Е. Д. Щукина «Механические свойства кристаллов».

НОМЕР
11

Основан в 1970 году

Квант

1973
11

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
главный художник
А. И. Климанов
С. М. Козел
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин
художественный редактор
Т. М. Макарова
И. Б. Мамулова
Н. А. Минц
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ

2 *В. З. Кресин.* Природа сверхпроводимости
11 *Р. С. Гутер, Ю. Л. Полунов.* Машина управляет
17 *М. А. Гинцбург.* Измерение магнитных полей на Луне
25 *Н. Б. Васильев.* Последовательность прыжков

Лаборатория «Кванта»

32 *И. И. Воробьев.* Поверхностное натяжение чертит гиперболу

Математический кружок

34 *М. Б. Балк, Н. А. Григорьев.* Механика помогает геометрии

Задачник «Кванта»

40 Задачи М231—М235, Ф243—Ф247
42 Решения задач М191—М194, Ф203—Ф207

Практикум абитуриента

52 *С. В. Овчинников, И. Ф. Шарыгин.* Числовые данные в геометрических задачах
57 *И. П. Гурский.* Кинематика прямолинейного движения материальной точки
61 *М. В. Драгнев.* Университет Дружбы народов имени Патриса Лумумбы
62 *А. Н. Борзяк, В. И. Давыдов, П. Т. Дыбов, И. И. Наслузов.* Телевидение готовит в вуз

XV международная математическая олимпиада школьников

64 *И. С. Петраков, В. А. Скворцов.* XV математическая
71 *М. Л. Смолянский.* История Международных олимпиад

Рецензии, библиография

74 *А. Н. Колмогоров.* Полезная книга
75 *В. Н. Березин, Н. М. Доронина.* Книга о международных математических олимпиадах

«Квант» для младших школьников

76 Задачи
77 Почему подушка мягкая?
78 **Ответы, указания, решения**

Смесь (с. 33, 51)

Рисунок, приведенный на первой странице обложки, иллюстрирует эффект Мейснера — необычное взаимодействие сверхпроводящего тока с магнитным полем. Рассказ о явлении сверхпроводимости мы помещаем в этом номере журнала (см. с. 2).

© «Квант», 1973 год

В. З. Кресин

Природа сверхпроводимости

В начале XX-го века физикам удалось проникнуть в область температур, близких к абсолютному нулю. Это привело к возникновению совершенно новой области науки — физики низких температур.

Вещество, изучаемое в столь «холодных» лабораториях, находится в совершенно необычных условиях. Они отличаются от привычных условий тем, что температура понижена почти на 300°.

В мире низких температур наблюдается целый ряд весьма своеобразных явлений. И самые замечательные из них — это два «сверхъявления»: сверхпроводимость, о которой пойдет речь в этой статье, и сверхтекучесть жидкого гелия.

Сверхпроводящее состояние вещества

Открытие сверхпроводимости. Явление сверхпроводимости было открыто немногим более 60 лет тому назад, в 1911 году. В лаборатории голландского физика Камерлинг-Оннеса исследовалось электрическое сопротивление металлов при сверхнизких температурах.

Камерлинг-Оннеса интересовало, как изменяется способность чистых металлов проводить электрический ток при понижении температуры. Сопротивление движению электронов в чистом металле возникает за счет тепловых колебаний ионов, расположенных в узлах кристаллической решетки. При понижении температуры эти колебания становятся менее интенсивными, что приводит к уменьшению сопротивления. В качестве объекта исследования была выбрана ртуть, так как ее можно было легко очистить от примесей. Вначале сопротивление ртути действительно уменьшалось с понижением температуры. Однако при $T = 3{,}71°$ *) (в дальнейшем эта точка получила название критической температуры и стала обозначаться $T_к$) произошло непредвиденное. Электрическое сопротивление скачком обратилось в нуль (рис. 1). При температурах, меньших $T_к$, ток протекал по металлу без всякого сопротивления. Позднее Камерлинг-Оннес писал: «Не осталось сомнений в существовании нового состояния ртути, в котором сопротивление фактически исчезает... Ртуть перешла в новое состояние, которое в соответствии с его необыкновенными электрическими свойствами можно назвать сверхпроводящим состоянием»**.)

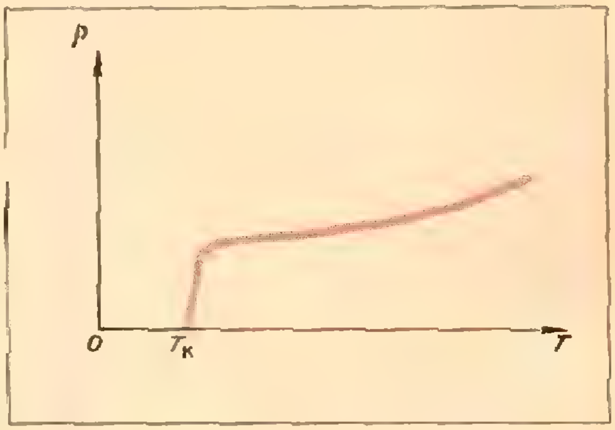


Рис. 1.

---

*) Здесь и ниже мы приводим значения температуры по шкале Кельвина.

**) Из речи, произнесенной при вручении Нобелевской премии.

Отсутствие электрического сопротивления означает, что при протекании тока полностью отсутствуют потери энергии. Ведь тепловые потери при прохождении тока по обычным, несверхпроводящим металлам (такие металлы называют нормальными) обусловлены сопротивлением проводника. Это видно из известной формулы, выражающей закон Джоуля — Ленца:

$$Q = I^2 Rt.$$

В сверхпроводнике электроны не испытывают сопротивления и не теряют энергии. Поэтому сверхпроводящий ток не затухает.

В 1959 году был поставлен такой эксперимент. В металлическом кольце был наведен сверхпроводящий ток. Через два с половиной года приборы не отметили никакого уменьшения этого тока. Отсутствие тепловых потерь приводит к тому, что время циркуляции тока по кольцу практически бесконечно велико.

Сверхпроводящие вещества. Впервые эффект сверхпроводимости был обнаружен при исследовании ртути. Однако вскоре были открыты новые сверхпроводники.

В настоящее время известно около 25 элементов, переходящих при понижении температуры в сверхпроводящее состояние. Самая высокая критическая температура у ниобия ($T_к = 9{,}2°$), а самая низкая — у иридия. У иридия сверхпроводимость обнаруживается при температуре всего 0,140°. Сейчас достигнуты температуры в тысячные доли градуса. Возможно, многие элементы окажутся сверхпроводниками при температурах более низких, чем $T_к$ иридия.

Основную часть сверхпроводящих веществ составляют не чистые вещества, а сплавы и соединения. Сейчас известно около 500 таких сверхпроводящих веществ, и их число все время увеличивается. Во многих лабораториях мира ведется интенсивный поиск новых сверхпроводящих материалов.

Самые высокие температуры, при которых сохраняется свойство сверхпроводимости, наблюдаются именно в сплавах. Долгие годы «рекордсменом» был сплав ниобия с оловом Nb_3Sn, критическая температура которого 18,1°. В настоящее время самой высокой $T_к$ обладает сложное соединение $Nb_3Al \cdot Nb_3Ge$, синтезированное несколько лет тому назад и сохраняющее свойство сверхпроводимости вплоть до температуры $T_к = 20{,}1°$.

Уже простое изучение свойств сверхпроводников позволяет сделать некоторые интересные выводы.

Существуют сплавы (например, сплав меди с серой CuS или золота с висмутом Au_2Bi), компоненты которых порознь сверхпроводниками не являются.

Бериллий становится сверхпроводящим только в том случае, если образец приготовлен в виде тонкой пленки, толщина которой не превышает 10^{-5} *см*.

Различные металлы неодинаково проводят электрический ток. Можно было бы ожидать, что такие хорошие проводники, как медь, золото, серебро, у которых сопротивление в обычных условиях и так очень мало, легче других веществ переходят в состояние сверхпроводимости. Однако на опыте наблюдается совсем другая картина. Именно в этих металлах сверхпроводимость не обнаружена. Важность этого факта отмечалась физиками еще задолго до создания теории сверхпроводимости. Так, в книге Я. Г. Дорфмана и И. К. Кикоина, вышедшей 40 лет тому назад *), читаем: «То обстоятельство, что ни Ag, ни Cu, ни другие наилучшие проводники не переходят в сверхпроводящее состояние, но, наоборот,... плохие проводники... обладают этой удивительной особенностью, свидетельствует о том, что механизм сверхпроводимости совершенно отличен от механизма обычной проводимости».

---

*) Я. Г. Дорфман, И. К. Кикоин. Физика металлов. ГТТИ, 1933.

Недавно было обнаружено, что некоторые полупроводники также могут при низких температурах переходить в сверхпроводящее состояние.

Особое состояние вещества. Слово «сверхпроводимость» отражает способность веществ проводить электрический ток без всякого сопротивления. Но это — не единственная особенность сверхпроводников. Сверхпроводящий переход — это не только исчезновение электрического сопротивления. Это переход в совершенно новое физическое состояние. В сверхпроводниках наблюдаются аномалии почти всех известных физических свойств. О чем бы ни шла речь — о теплоемкости, о поглощении света или звука, о поведении в магнитном поле — всегда отмечают особые свойства сверхпроводников, резко отличающиеся от свойств обычных металлов. При переходе через критическую температуру $T_{\text{к}}$ мы попадаем в мир особых законов. Именно поэтому мы и будем говорить не просто о сверхпроводимости, а о сверхпроводящем состоянии вещества.

Остановимся сначала на главном вопросе: какова природа сверхпроводимости? Как объясняется явление сверхпроводимости и что происходит в веществе, когда его температура приближается к абсолютному нулю?

Как объясняется явление сверхпроводимости?

Сверхпроводимость была открыта, как упоминалось выше, в 1911 году. Открытие Камерлинг-Оннеса вызвало огромный интерес. Многие физики пытались разными способами объяснить исчезновение электрического сопротивления и другие особенности сверхпроводящего состояния. Среди них были А. Эйнштейн, еще в 1920 году отмечавший аналогию сверхпроводимости и ферромагнетизма; один из создателей квантовой механики В. Гейзенберг, пытавшийся объяснить сверхпроводимость особенностями электростатического взаимодействия электронов, и многие, многие другие.

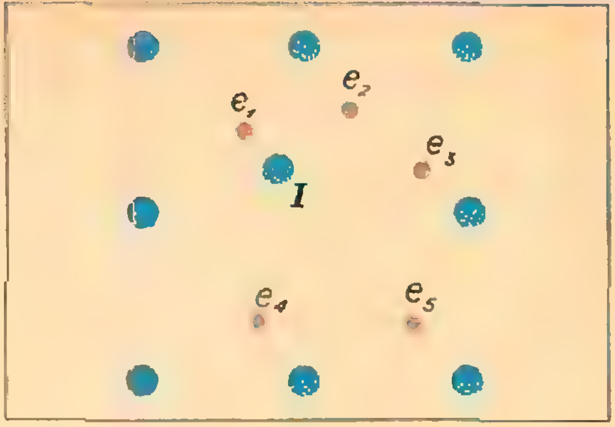


Рис. 2.

Однако прошло почти полвека, прежде чем удалось решить эту загадку. Только в 1957 году появилась работа американских физиков Д. Бардина, Л. Купера и Д. Шриффера, в которой была изложена теория сверхпроводимости.

Притяжение между электронами. Название этого раздела может вызвать законное удивление. *В самом деле, электроны как части*цы с одноименными электрическими зарядами должны не притягиваться, а отталкиваться друг от друга. Оказывается, однако, что эффект сверхпроводимости определяется именно наличием сил межэлектронного притяжения.

Электронный газ в металле или полупроводнике находится под воздействием кристаллической решетки, *благодаря чему и появляется меж*электронное притяжение. Попробуем наглядно представить себе механизм возникновения этого притяжения. Рассмотрим взаимодействие каких-нибудь двух электронов e_1 и e_2, находящихся в металле (рис. 2). Между ними действуют, прежде всего, обычные силы кулоновского отталкивания. Но, кроме того, наличие кристаллической решетки приводит к появлению дополнительного межэлектронного взаимодействия. Электрон e_1

притягивает один из ионов кристаллической решетки и смещает его (например, ион *I* на рис. 2) из положения равновесия. Электрическое поле, создаваемое ионом *I*, действует и на остальные электроны, поэтому смещение иона сказывается и на них. Таким образом, с «помощью» ионов возникает дополнительное электрическое взаимодействие электронов. Теория сверхпроводимости доказывает, что оно носит характер притяжения.

Таким образом, кристаллическая решетка и есть та промежуточная среда, которая создает притяжение между электронами. Само притяжение можно представить себе следующим образом. Электрон притягивает ионы кристаллической решетки. В результате деформации решетки электрон оказывается окруженным «облаком» положительного заряда. Представьте, что величина этого положительного заряда превышает по величине заряд электрона, тогда электрон вместе с окружающей его ионной «шубой» оказывается положительно заряженной системой, которая и притягивается к другому электрону. При высоких температурах достаточно интенсивное тепловое движение отбрасывает частицы друг от друга, размывает ионную «шубу», что фактически уменьшает силы притяжения. При низких же температурах силы притяжения играют очень важную роль.

Может возникнуть вопрос: не противоречит ли существование межэлектронного притяжения известным законам физики? Если два электрона находятся в вакууме, то, конечно, они отталкиваются друг от друга. В среде сила их взаимодействия равна $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}$ (ε — диэлектрическая проницаемость среды). Среда может иметь отрицательную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon < 0$. Это приводит к изменению знака силы, и электроны в такой среде будут притягиваться друг к другу. Решетка кристалла и оказывается той средой, которая делает отрицательной диэлектрическую проницаемость в сверхпроводнике.

Таким образом, при температурах, близких к абсолютному нулю, между электронами действует кулоновское отталкивание и дополнительное притяжение. Все дальнейшее зависит от того, какая из этих сил окажется большей по величине. Если вплоть до абсолютного нуля преобладает отталкивание, металл остается нормальным и его свойства радикально не изменяются. Если же при некоторой температуре начинают преобладать силы притяжения, то вещество переходит в сверхпроводящее состояние.

Электронные пары. Притяжение между электронами, приводящее к сверхпроводимости, характеризуется рядом интересных особенностей. Если мы будем следить за поведением какого-нибудь электрона в сверхпроводнике, то окажется, что этот электрон неодинаково притягивается к разным электронам. Он «выберет» один определенный электрон, к которому будет притягиваться наиболее сильно. В частности, этот «выбранный» в данный момент электрон будет иметь противоположный импульс.

Электронная система в сверхпроводнике оказывается разбитой на пары связанных электронов. Состав электронных пар не стабилен. Он все время меняется, так что электронная система весьма динамична. Это выглядит так, как будто электроны собрались на балу и исполняют танец, во время которого постоянно меняются партнеры.

Особо следует остановиться на вопросе о размере электронной пары. Он составляет величину порядка 10^{-4} *см*. Для сравнения заметим, что период кристаллической решетки примерно 10^{-8} *см*, так что электроны, входящие в пару, находятся друг от друга на огромном расстоянии в 10^4 периодов решетки. И тем не менее именно они наиболее сильно притягиваются друг к другу. Если состояние одного из электронов, входящих в пару, меняется под действием какой-нибудь силы (например, под влиянием магнитного поля), то это изменение сразу же скажется и на поведении другого электрона. В сверхпроводниках наблюдается редчайший в неживой природе пример дальней связи.

При повышении температуры возрастает роль хаотического теплового движения. Межэлектронное притяжение ослабевает, и, наконец, при некоторой температуре (это и есть критическая температура $T_к$) вещество переходит из сверхпроводящего в обычное, нормальное состояние.

Отсутствие электрического сопротивления. Сверхпроводники замечательны тем, что в них электроны не отталкиваются, а притягиваются друг к другу.

Под действием сил притяжения электронная система превращается в связанный коллектив. Между частицами действуют силы сцепления.

В нормальных металлах электронный газ может увеличивать свою энергию любыми сколь угодно малыми порциями. В сверхпроводнике электронный газ не может поглощать любую энергию. Минимальная порция энергии, которую он может поглотить, — энергия связи электронной пары. Картина разрыва электронной пары похожа на распад атомного ядра. Нейтроны и протоны связаны в единое целое, и для разрыва системы требуется конечная энергия — энергия связи атомного ядра.

Электрическое сопротивление связано, как известно, с рассеянием электронов тепловыми колебаниями решетки или примесями *). Механическая энергия движущихся электронов при этом переходит в тепловую энергию. Представьте себе, что электронная система движется в кристалле с малой скоростью (сила тока при этом невелика). Тогда взаимодействие электронов с решеткой будет слишком слабым для того, чтобы возбудить электронную систему. Электронному газу при этом может быть сообщена энергия, меньшая энергии связи. Но электроны в сверхпроводнике, как уже было сказано, не могут ее поглотить. Поэтому они движутся так, как будто нет никакого рассеяния. А это и означает отсутствие электрического сопротивления, то есть возникновение эффекта сверхпроводимости.

Если же ток превышает некоторое значение, называемое критическим, то столкновения электронной системы с ионами или примесями становятся достаточно интенсивными и свойство сверхпроводимости исчезает.

О некоторых свойствах сверхпроводников

Эффект Мейсснера. Говоря о свойствах сверхпроводников, мы в основном отмечали, что они пропускают ток без всякого сопротивления. В этом разделе мы расскажем еще о некоторых особенностях сверхпроводящего состояния.

Предположим, что сверхпроводник помещен во внешнее магнитное поле. Оказывается, что поле не в состоянии проникнуть в толщу сверхпроводника.

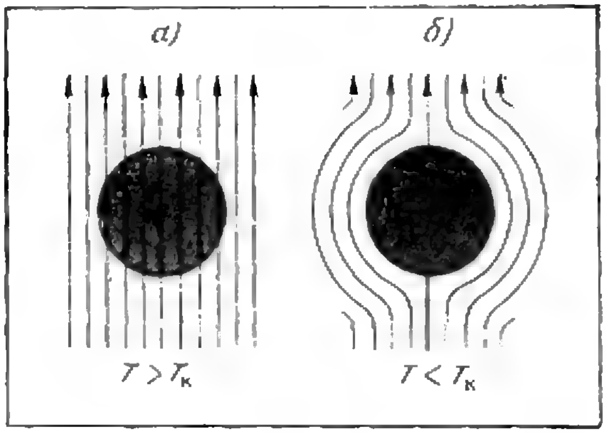


Рис. 3.

---

*) Подробнее о природе сопротивления рассказано в статье М. И. Каганова и Г. Л. Любарского «Электрон движется с трением» («Квант», 1973, № 6).

При температурах, больших $T_к$, силовые линии магнитного поля проникают в вещество, как во всякий нормальный металл (рис. 3, *а*). Начнем понижать температуру, не выключая при этом магнитного поля. Как только достигается критическая температура $T_к$, происходит переход в сверхпроводящее состояние; при этом силовые линии выталкиваются из толщи образца (рис. 3, *б*). Это явление, называемое эффектом Мейснера, было открыто в 1933 году.

Как же происходит выталкивание магнитных силовых линий из сверхпроводника? Ответ на этот вопрос тесно связан с самим эффектом сверхпроводимости, то есть с возможностью протекания незатухающих электрических токов.

Предположим, что мы хотим в веществе поддерживать постоянный электрический ток. В нормальном металле для этого необходимо создать постоянное электрическое поле. Магнитное поле не подходит для этой цели, так как оно не совершает никакой работы, а это необходимо, поскольку существует сопротивление движению электронов, возникают тепловые потери, и поэтому необходим непрерывный подвод энергии.

Совершенно иные процессы разыгрываются в сверхпроводниках. Сопротивление в них равно нулю, и поэтому для поддержания электрического тока никакой работы не требуется. Постоянный ток в сверхпроводниках может создаваться магнитным полем. Это очень важная особенность электромагнетизма сверхпроводников.

Вернемся теперь к эффекту Мейснера. Когда сверхпроводник вносится во внешнее магнитное поле, в его поверхностном слое возникает вызванный этим полем сверхпроводящий ток. Этот ток, как и всякое движение зарядов, создает собственное магнитное поле, которое противоположно внешнему магнитному полю. В теории сверхпроводимости доказывается, что внутри сверхпроводника происходит полная компенсация этих полей, поэтому магнитное поле там отсутствует. Таким образом, поверхностный слой сверхпроводника является магнитным экраном, не пропускающим внутрь вещества магнитное поле.

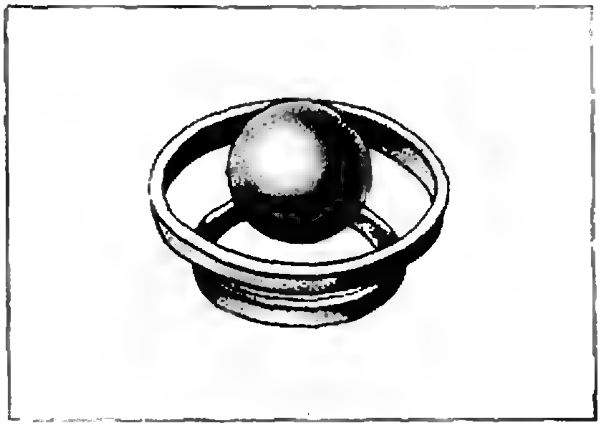


Рис. 4.

«Гроб Магомета». Эффект Мейсснера дает возможность наблюдать целый ряд очень необычных явлений.

Вот, например, одно из них. Если взять металлическое кольцо, в котором циркулирует сверхпроводящий ток, и над ним поместить сферу, также находящуюся в сверхпроводящем состоянии, то мы увидим, что сфера (если она не очень тяжелая) висит над кольцом без всякой поддержки.

На рисунке 4 изображена сфера, висящая над сверхпроводящими кольцами. Как же объясняется возможность такого подвешивания?

При протекании тока по кольцу в окружающем пространстве появляется магнитное поле. Выше мы говорили о том, что сверхпроводящий ток может создаваться магнитным полем. Именно такой ток и возникает в металлической сфере. Этот ток имеет такое направление, при котором его собственное магнитное поле противоположно полю, создаваемому током в кольце. Это следует из закона сохранения энергии так же, как и правило Ленца, определяющее направление индукционного тока.

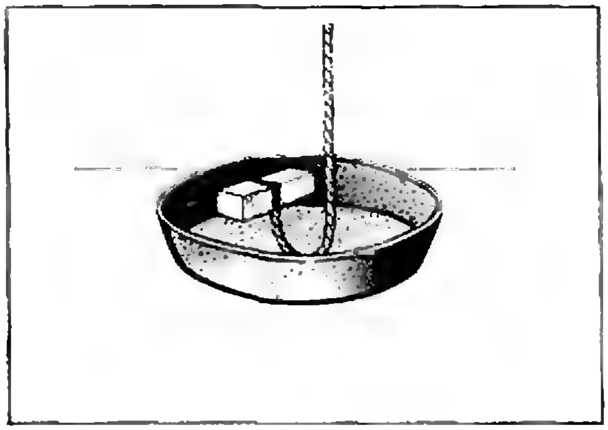


Рис. 5.

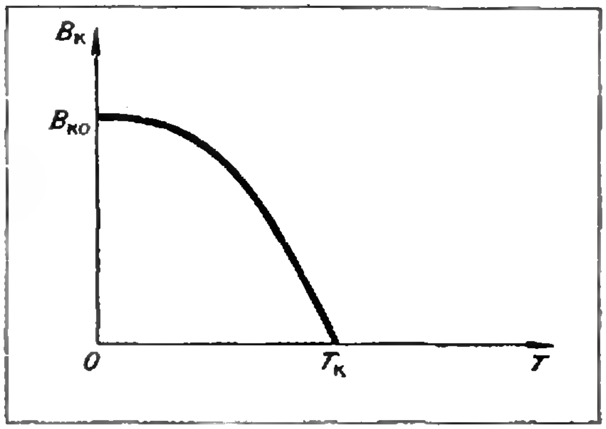


Рис. 6.

Направления токов в кольце и в сфере оказываются противоположными, а это приводит к появлению силы отталкивания. Сфера висит на высоте, определяемой равенством силы ее тяжести и силы отталкивания токов.

На рисунке 5 показан другой эксперимент. Постоянный магнит висит над металлическим образцом, в котором магнитным полем индуцируется сверхпроводящий ток. Этот эксперимент похож на предыдущий. Роль колец, создающих магнитное поле, играет постоянный магнит. Этот эксперимент получил шуточное название «гроб Магомета» (по преданию, гроб пророка Магомета висел в воздухе без всякой поддержки).

Сверхпроводники в магнитном поле. Критическое поле. Если увеличивать внешнее магнитное поле, то при некотором его значении $B_к$ (это значение называется критическим магнитным полем) сверхпроводящее состояние разрушается, и вещество переходит в обычное нормальное состояние. Величина $B_к$ зависит от температуры. Чем ближе мы подходим к критической температуре, тем меньше величина $B_к$ и тем легче разрушается состояние сверхпроводимости.

На рисунке 6 показано, как с ростом температуры изменяется величина критического поля $B_к$. Наиболее устойчиво сверхпроводящее состояние при абсолютном нуле (значение $B_{ко}$, соответствующее $T = 0°$, максимально). Когда температура становится равной $T_к$, величина критического магнитного поля, естественно, обращается в нуль.

Таким образом, металл можно перевести из сверхпроводящего в нормальное состояние и не повышая его температуры. Такой переход может произойти при воздействии на сверхпроводник магнитного поля.

Не следует считать поэтому, что вещество при температурах, меньших $T_к$, — обязательно сверхпроводник. Оно может быть и нормальным металлом, если величина окружающего магнитного поля превышает $B_к$.

На первый взгляд может показаться, что сверхпроводящий ток, протекающий без тепловых потерь, идеально подходит для создания сколь угодно сильных магнитных полей. Ведь при использовании обычных электромагнитов большую роль играют джоулевы потери. Если мы хотим получить очень сильные магнитные поля, то необходимо в обмотках создавать достаточно сильные токи; при этом из-за тепловых потерь провода могут просто расплавиться.

В сверхпроводниках из-за отсутствия тепловых потерь такой опасности нет. Поэтому и может показаться, что при увеличении сверхпроводящего тока мы можем получить любое требуемое значение индукции магнитного поля. Однако как только поле достигает значения $B_к$, сверхпроводимость разрушается, и поэтому дело обстоит не так просто.

Был обнаружен тем не менее класс сверхпроводящих веществ, способных создавать мощные магнитные поля и выдерживать сильные токи. Но описание их свойств — это предмет особого рассказа.

Говоря об электромагнитных свойствах сверхпроводников, следует отметить еще одну любопытную особенность, обусловленную наличием пар связанных электронов.

Основным законом, описывающим постоянный ток в нормальном металле, является закон Ома, который может быть записан в так называемой локальной форме: $j = E/\rho$ (ρ — удельное сопротивление проводника, E — напряженность электрического поля, j — плотность тока). Согласно закону Ома, величина тока в определенном месте металла определяется значением электрического поля в этом же месте.

В сверхпроводниках все выглядит совершенно иначе. Постоянный сверхпроводящий ток создается, как мы уже отмечали, не электрическим, а магнитным полем. Но разница состоит не только в этом. Из-за межэлектронной связи оказывается, что если внешнее поле подействует на какой-нибудь электрон в сверхпроводнике, то это действие «почувствует» и другой электрон, связанный с ним в пару.

Поместим сверхпроводник во внешнее магнитное поле. Электроны, находящиеся в поверхностном слое (в толщу образца поле не проникает), приходят в движение, и создается сверхпроводящий ток. При этом электрон движется как благодаря непосредственному действию на него внешнего магнитного поля, так и под влиянием других, связанных с ним электронов, также находящихся под воздействием поля. Поэтому ток, возникающий в данном месте сверхпроводника, определяется не только значением внешнего поля в этом месте, но и значением его в некоторой области. Такая связь тока с внешним полем, в отличие от случая нормального металла, называется нелокальной.

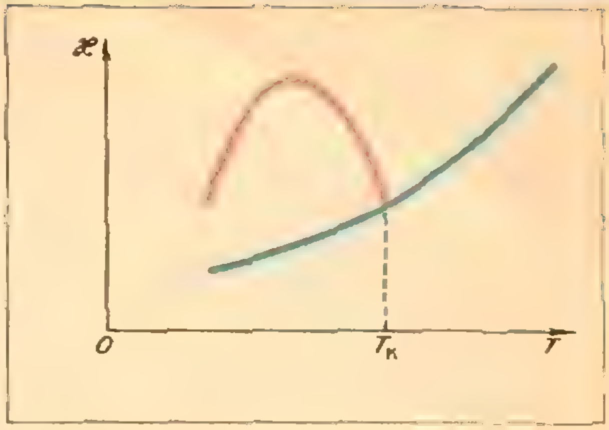


Рис. 7. Теплопроводность χ нормального металла *отмечена на рисунке синей линией*, теплопроводность сверхпроводника — красной.

Тепловые свойства. Теплоемкость сверхпроводников при температурах, далеких от $T_к$, оказывается очень малой величиной, намного меньшей теплоемкости нормального металла, взятого при той же температуре (переход в нормальное состояние при этой же температуре можно осуществить с помощью магнитного поля). Поэтому температура сверхпроводников очень легко изменяется при подведении или, наоборот, при отводе теплоты.

Очень необычна картина передачи тепла в сверхпроводниках. Теплопроводность обычного металла меняется при изменении температуры. Например, способность сплавов проводить тепло уменьшается с понижением температуры. Сверхпроводящий сплав ведет себя совершенно иначе. После перехода в состояние сверхпроводимости его теплопроводность не убывает, а возрастает с понижением температуры, затем она достигает максимума и только после этого начинает убывать (рис. 7).

Это еще раз показывает, что сверхпроводимость — не только отсутствие

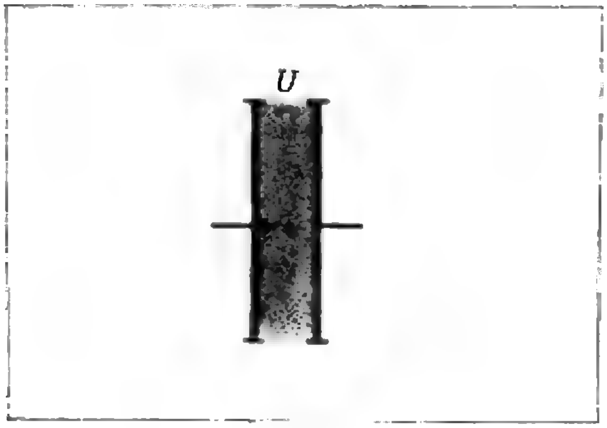


Рис. 8.

электрического сопротивления, а особое состояние вещества.

Эффект Джозефсона. Рассмотрим контакт (рис. 8), состоящий из двух сверхпроводящих пленок, разделенных тонким (около 10^{-7}*см*) слоем изолирующего вещества. Электроны могут переходить из одной пленки в другую. Мы не станем здесь обсуждать вопрос о механизме прохождения электронов сквозь диэлектрический слой, поскольку это не относится непосредственно к предмету нашего рассказа. Отметим только возможность наблюдения удивительного явления, открытого всего лишь несколько лет тому назад.

Если к контакту приложить *постоянную* разность потенциалов, то через него потечет *переменный* сверхпроводящий ток. Этот переменный ток, так же, как, например, ток в колебательном контуре, будет излучать электромагнитные волны, и это излучение наблюдается на опыте.

Этот эффект носит имя английского физика Джозефсона, теоретически предсказавшего в 1962 году возможность его наблюдения.

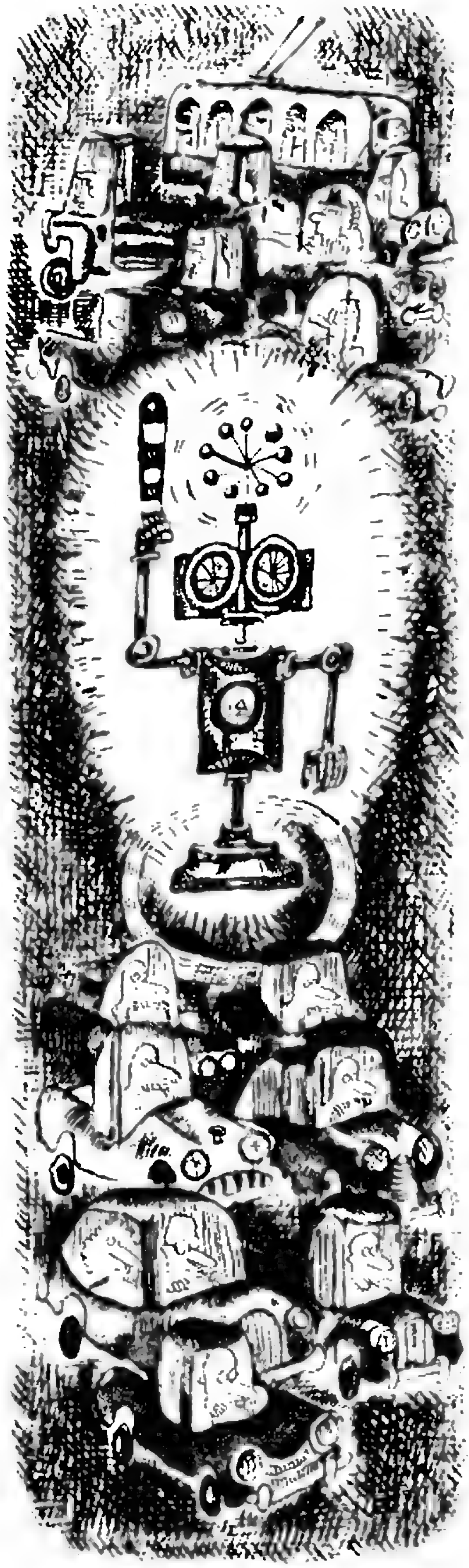
Как мы уже говорили, в сверхпроводнике возникают связанные электронные пары. Эти пары проходят через диэлектрический слой и приобретают при этом энергию $2eU$ (U — разность потенциалов, приложенная к контакту). В обычном металле эта энергия превратилась бы в тепловую. При протекании сверхпроводящего тока сопротивления нет, и полученная электронной парой порция энергии $2eU$ излучается в виде кванта с энергией $h\nu = 2eU$. На опыте и наблюдается излучение с частотой $\nu = 2eU/h$.

Излучать электромагнитные волны может только переменный ток. Именно такой ток и течет через контакт Джозефсона.

В выражение для частоты излучения входит удвоенный заряд электрона. Это связано с существованием электронных пар; полный заряд каждой равен $2e$. Одиночный электрон при прохождении разности потенциалов U приобретает энергию eU. Тот факт, что на опыте действительно наблюдается излучение с частотой $\nu = 2eU/h$, можно рассматривать как экспериментальное подтверждение правильности представления о существовании в сверхпроводниках связанных электронных пар.

Эффект Джозефсона позволяет создавать переменный ток с помощью постоянной разности потенциалов.

Мы рассказали о природе сверхпроводимости и о некоторых эффектах, наблюдаемых в сверхпроводниках. Физика сверхпроводимости еще очень «молода» и, несомненно, в этой области можно ожидать раскрытия еще многих тайн.



Машина управляет

Р. С. Гутер,
Ю. Л. Полунов

Недавно сотрудники американского журнала «Компьютерс энд аутомейшн» подсчитали, что из шестисот «профессий» электронных вычислительных машин около ста пятидесяти приходится на долю так называемых «управляющих» машин — машин, которые управляют быстротекущими технологическими и экспериментальными процессами. Мы хотим здесь рассказать о том, как машины управляют и почему для этого понадобились вычисления.

Как управляет человек

По шоссе мчится автомобиль. Шофер управляет движением машины. Обгоняя попутный транспорт и разъезжаясь со встречными машинами, водитель непрерывно следит за дорогой. Он намечает траекторию и скорость движения и изменяет положение педалей и руля машины так, чтобы фактические траектория и скорость как можно меньше отличались от намеченных. Мозг — руки — машина — глаза — мозг — вот система управления автомобилем.

В электрической печи сушатся формы для отливок. Температура в печи не должна выходить за определенные пределы. Рабочий следит за стрелкой прибора, связанного с электрическим термометром внутри печи. Если стрелка приближается к заданным границам, то рабочий увеличивает или уменьшает ток в нагревательном элементе, передвигая движок реостата, чтобы стрелка возвратилась в нужное положение.

На плите варится борщ. Повар пробует борщ и добавляет те или иные продукты или изменяет силу огня до тех пор, пока содержимое кастрюли не придет в соответствие с его представлениями о готовом и вкусном блюде. Легко видеть, что принципы его действий те же, что и шофера, и рабочего у сушильной печи. Различие в действиях определяется лишь особенностями технологических процессов.

Алгоритмы управления

Во всех наших примерах фигурировал человек. Однако его можно исключить из системы управления. Если закон управления каким-либо объектом точно сформулирован в виде последовательности правил действий (*алгоритма*), то, в принципе, можно создать устройство и составить программу, осуществляющую этот алгоритм без участия человека. Такие системы принято называть *системами автоматического управления*.

Например, для управления сушильной печью достаточно выходной сигнал электрического термометра подать в устройство управления двигателя, связанного с движком реостата. Алгоритм управления ясен: если температура в печи начала падать, то двигатель должен повернуться в одну сторону, увеличивая ток в печи; если же температура растет, то двигатель должен уменьшить ток, повернувшись в противоположную сторону.

Отвлекаясь от физической сущности процессов, протекающих в системах управления, мы можем выделить блоки, общие для этих систем: объект управления, управляющая система, исполнительные органы и органы (устройства), передающие в управляющую систему информацию о целях и результатах управления. Графическое изображение такой системы (*блок-схема*) приведено на рисунке 1. Советуем читателю определить, что именно играет роль того или иного блока в каждом из приведенных примеров.

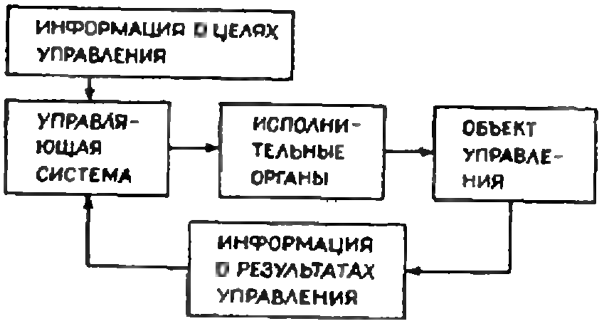

ИНФОРМАЦИЯ О ЦЕЛЯХ УПРАВЛЕНИЯ
УПРАВЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА
ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОРГАНЫ
ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ
ИНФОРМАЦИЯ О РЕЗУЛЬТАТАХ УПРАВЛЕНИЯ

Рис. 1.

Описанные системы управления называют *замкнутыми системами* или *системами с обратной связью*. На принципе обратной связи — передаче информации с выхода системы на ее вход — основано регулирование процессов в живых организмах, технических устройствах, экономических и общественных системах.

Чтобы понять роль обратной связи, надо познакомиться с разомкнутыми системами, в которых такая связь отсутствует. Примером может служить автомат по продаже газированной воды.

Как работает этот автомат? Опущенная в отверстие монета проверяется по весу и, падая затем дальше, замыкает электрическую цепь. Включенный ею электромагнит притягивает рычаг, открывающий клапан (кран) на время, достаточное для наполнения стакана водой.

Бывают случаи, когда автомат «не доливает». Он делает это, разумеется не по «злому умыслу», просто за время эксплуатации изменились свойства электромагнита или рычага, и он открывает клапан на более короткий срок.

Попробуем видоизменить автомат так, чтобы возникла обратная связь. Для этого нужно иметь устройство, измеряющее уровень жидкости в стакане. Выходной сигнал этого устройства надо подать в обмотку электромагнита так, чтобы клапан оставался открытым до тех пор, пока не придет сигнал «стакан полон». Такая система будет более гибкой, ей не страшны изменения.

Замкнутые системы автоматического управления появились значительно позже разомкнутых. Автомат для открывания дверей был создан Героном Александрийским около двух тысяч лет тому назад. Первые же регуляторы с обратной связью — регулятор температуры Дребеля, паровой регулятор уровня Ползунова, регулятор оборотов Уатта — появились в XVII—XVIII столетиях. Они выполняли сравнительно простую работу: поддерживали какой-либо параметр на определенном уровне.

Управление без обратной связи

По мере развития техники сложность объектов управления неизмеримо возросла. Человеку становится все труднее и труднее управлять созданными им машинами. К примеру, оператору скоростного прокатного стана приходится выполнять до ста (!) операций в минуту — нажимать кнопки, поворачивать штурвалы и рукоятки, передвигать рычаги. Работать в таком темпе без ошибок человек долго не может.

На помощь пришли вычислительные машины. Наиболее типичным примером использования вычислительной машины в разомкнутой системе управления является работа станков с программным управлением. Вот как они работают.

Исходная информация для составления программы обработки заготовки берется из рабочего чертежа. Технолог намечает нужную последовательность обработки, разбивает геометрический контур детали на участки, образуемые прямыми или кривыми линиями, определяет координаты *опорных точек* (мест сопряжения отдельных участков контура, центров дуг и т. д.) и задает параметры линий, соединяющих опорные точки. Вся эта информация кодируется (в двоичной или десятичной системе счисления) и наносится на перфоленту или перфокарты, которые вводятся в специализированную вычислительную управляющую машину — *интерполятор*.

Технолог задает координаты лишь некоторых (опорных) точек на поверхности детали. Но движение рабочих органов станка необходимо обеспечить в каждый момент времени. Следовательно, информация должна поступать в управляющую систему станка непрерывно и соответствии с законом движения инструмента по каждой координате. Этот поток числовой информации создается интерполятором, вычисляющим положение рабочих органов станка для каждого элемента детали.

Результаты вычислений интерполятора либо непосредственно поступают в управляющую систему станка, либо предварительно записываются на магнитную ленту в так называемом *унитарном коде* (с основанием, равным единице) и лишь затем передаются в управляющую систему.

В унитарном коде каждое число записывается последовательностью единиц в количестве, равном записываемому числу. Например, число 5 запишется так: 1 1 1 1 1. Необходимость преобразования двоично-кодированной информации в унитарный код, то есть в последовательность единичных импульсов, определяется конструкцией исполнительных органов станков с программным управлением — *шаговых двигателей*. Шаговый двигатель устроен так, что каждый единичный импульс, поступающий в его обмотку, вызывает поворот вала двигателя на строго определенный угол. Следовательно, перемещение рабочего органа (резца,фрезы и т. п.), связанного с валом двигателя, будет пропорционально числу импульсов, пришедших в управляющее устройство станка.

Преобразование информации в интерполяторе осуществляется таким образом, чтобы число выходных единичных импульсов было равно двоично-кодированной координате контура, а время, за которое выдается это число импульсов, — заданному времени обработки участка контура от одной точки до другой.

Станки с программным управлением, впервые появившиеся в конце 50-х годов, в настоящее время получили повсеместное распространение. Они составляют основу будущих, полностью автоматизированных предприятий.

Управление с обратной связью

Замкнутые системы управления, использующие вычислительные машины, получили наиболее широкое распространение в химической и металлургической промышленности, в тепловой и атомной энергетике. В замкнутых системах управляющее воздействие вырабатывается с учетом информации о ходе процесса. Устройства, собирающие эту информацию, называют *датчиками*.

Выходной сигнал таких датчиков, как правило, представляет собой некоторую физическую величину, имеющую непрерывный характер. Чтобы цифровая вычислительная машина восприняла информацию датчиков, непрерывная (часто говорят — *аналоговая*) величина должна быть преобразована в цифровую форму в двоичной системе счисления. Поэтому важной составной частью управляющей машины является *аналого-цифровой преобразователь*.

Входной величиной аналого-цифрового преобразователя являются напряжение или ток, угловое или линейное перемещение или положение какого-либо устройства. Зачастую аналоговая величина предварительно преобразуется из своей исходной формы в другую, более удобную для преобразования, например, давление преобразуется в перемещение.

Рассмотрим в качестве примера одну из возможных схем преобразования напряжения в число импульсов. Пусть на вход преобразователя подается напряжение $U_{вх}$ (рис. 2, *а*). Преобразователь работает дискретно, то есть измеряет напряжение через определенные промежутки времени (такты), в течение которых входное напряжение можно считать приблизительно постоянным.

Начало каждого такта отмечается *тактовым импульсом*, который испускается *генератором тактовых импульсов* (рис. 2, *б*). Тактовый импульс запускает *генератор счетных импульсов* (рис. 2, *в*), *генератор пилообразного напряжения* (рис. 2, *г*) и включает счетчик.

Пилообразное напряжение и входное напряжение $U_{вх}$ подаются на два входа *схемы совпадения*, которая в момент их совпадения (рис. 2, *д*) выдает импульс (рис. 2, *е*), запирающий счетчик. Число счетных импульсов (рис. 2, *ж*), попавших в счетчик, будет пропорционально промежутку времени между тактовым и запирающим импульсами, а этот промежуток пропорционален величине входного напряжения $U_{вх}$.

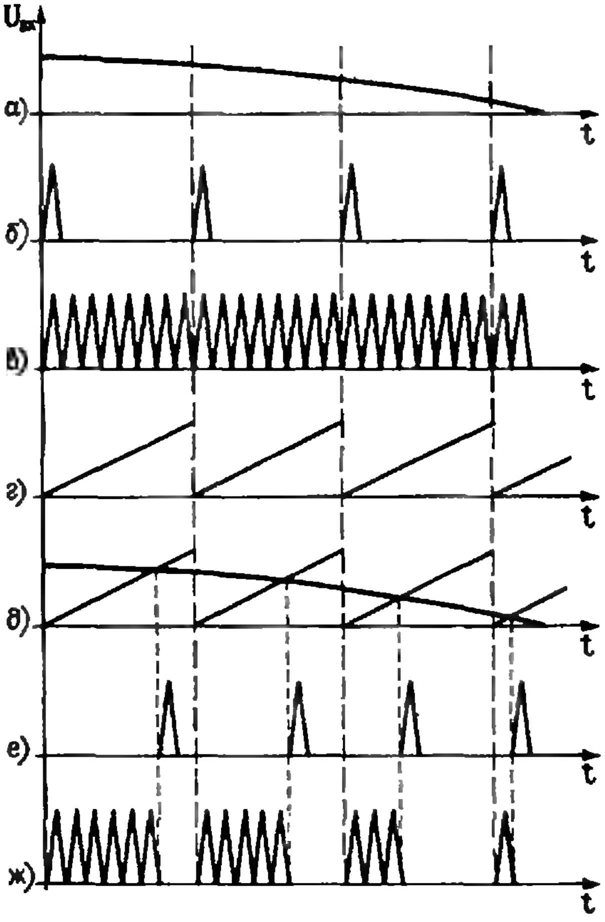
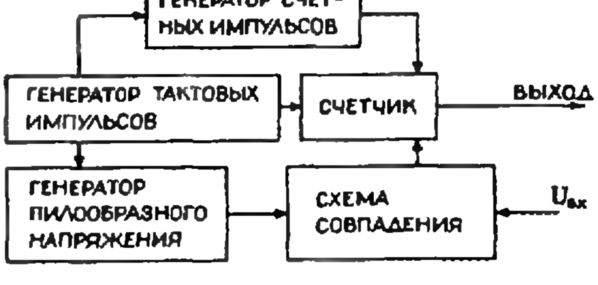


Рис. 2.

Таким образом, в этом аналого-цифровом преобразователе осуществляется следующая цепь преобразований: аналоговая величина → → напряжение → временной интервал → → цифровая форма. Блок-схема такого преобразователя показана на рисунке 3.

Кроме преобразования аналоговой величины в цифровую форму, нередко требуется и обратное преобразование. Дело в том, что вычислительная ма-



ГЕНЕРАТОР СЧЕТНЫХ ИМПУЛЬСОВ
ГЕНЕРАТОР ТАКТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ
СЧЕТЧИК
ВЫХОД
ГЕНЕРАТОР ПИЛООБРАЗНОГО НАПРЯЖЕНИЯ
СХЕМА СОВПАДЕНИЯ
$U_{вх}$

Рис. 3.

шина вырабатывает сигнал в цифровой форме. Если исполнительным органом системы автоматического управления является шаговый двигатель, который управляется цифровым сигналом, то никаких дополнительных преобразований не требуется. Если же в качестве исполнительного органа применяется обычный двигатель (заслонка, регулятор), требующий непрерывного входного сигнала, то нужен *цифро-аналоговый преобразователь*. Такие преобразователи основаны на тех же принципах, что и рассмотренные выше аналого-цифровые.

Блок-схема замкнутой системы управления технологическим процессом с использованием электронной вычислительной машины изображена на рисунке 4. Видно, что, кроме вычислительной машины, система управления содержит довольно много дополнительного оборудования, необходимого для связи машин с управляемым объектом.

Прежде всего, необходимы датчики величин, характеризующих управляемый процесс. К ним относятся:

а) *входные параметры процессов* (давление, температура, расход сырья, потребление тепловой и электрической энергии и т. д). Эти величины могут быть управляемыми (если мы можем их изменить с помощью управляющих сигналов) или неуправляемыми (если мы не можем их изменить);

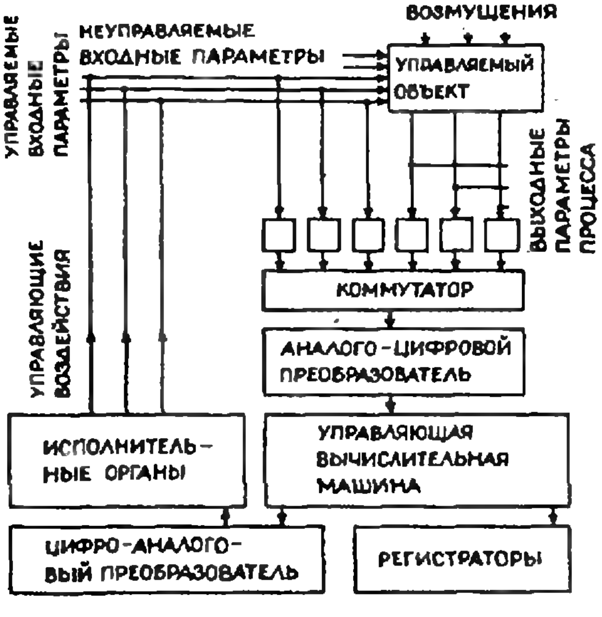

ВОЗМУЩЕНИЯ
НЕУПРАВЛЯЕМЫЕ ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ
УПРАВЛЯЕМЫЕ ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ
УПРАВЛЯЕМЫЙ ОБЪЕКТ
ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПРОЦЕССА
УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ
КОММУТАТОР
АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ
ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОРГАНЫ
УПРАВЛЯЮЩАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА
ЦИФРО-АНАЛОГОВЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ
РЕГИСТРАТОРЫ

Рис. 4.

б) *возмущения, нарушающие нормальный ход процессов* (колебания температуры окружающей среды, сетевого напряжения и т. д.);

в) *выходные параметры процессов* (количество и качество основного и побочного продуктов, их температура, состав и т. д.).

Вся информация должна быть преобразована в цифровой вид и введена в вычислительную машину. Кроме этой информации, в машину необходимо ввести *алгоритм управления*, переведенный на машинный язык (*программу управления*). Именно благодаря программе машина сможет рассчитать, какие управляющие воздействия нужны в данной ситуации, чтобы регулируемый процесс шел наивыгоднейшим образом.

Как составляется алгоритм

Составление алгоритма управления для каждой системы или, точнее, для каждого управляемого процесса, представляет собой сложную задачу. Очень часто не удается получить строгое математическое описание сложных процессов и выразить зависимость между характеризующими их величинами в аналитической форме. Тогда приходится прибегать к экспериментальным методам установления таких зависимостей.

Полученные сведения и описания используются для построения математической модели объекта, которая представляется в виде программы и вводится в управляющую машину. Кроме такой модели, необходимо иметь также точный критерий оптимальности процесса, определяющий цель управления *). Чаще всего

---

*) Насколько важна четкая формулировка цели управления, читатель может судить по рассказу американского писателя-фантаста Р. Шекли, Страж-птица, М., «Молодая гвардия», 1968 (Библиотека научной фантастики. Т. 16).

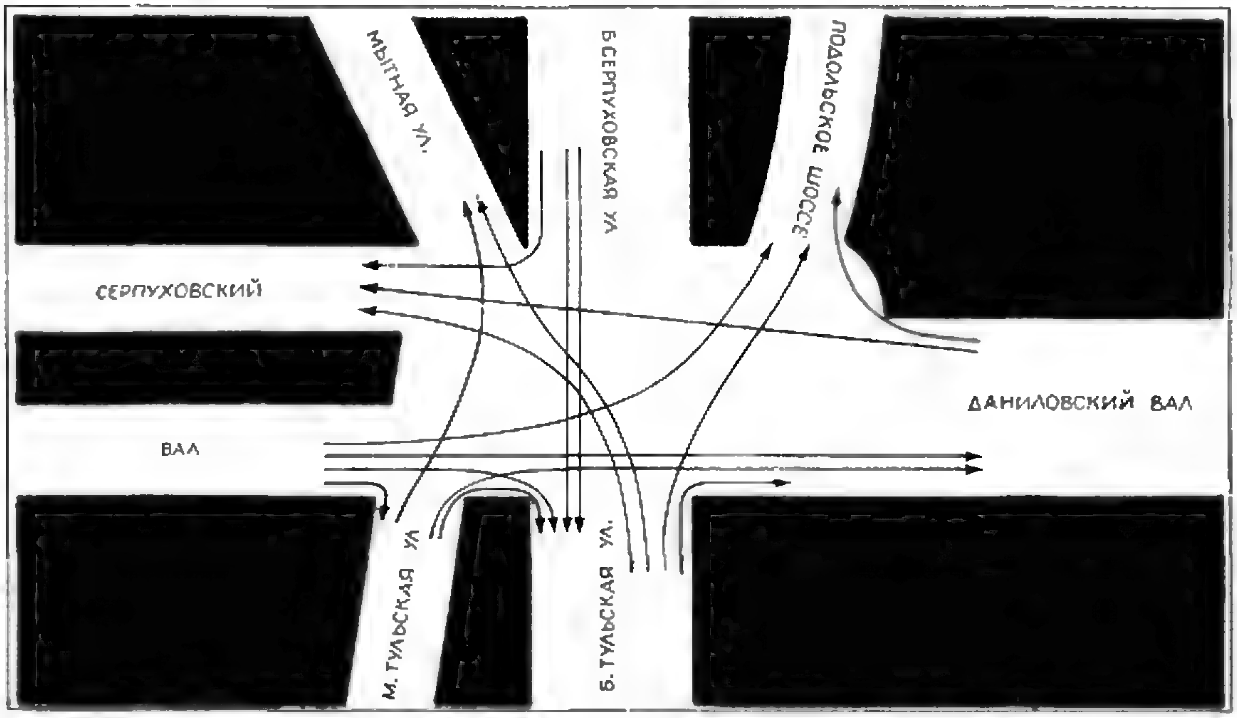


Рис. 5.

целью управления является достижение максимального экономического эффекта. Однако, иногда приходится иметь дело и с другими критериями, например максимальной производительностью, минимальными затратами или кратчайшим сроком.

В ряде случаев управляющий алгоритм удается снабдить «способностью самообучения». Это означает, что программа будет иметь возможность анализировать результаты управляющих воздействий и соответствие выбранной математической модели процесса его реальному течению и вносить требуемые коррективы в математическую модель.

Система «СТАРТ»

Все читатели, наверное, видели автоматический светофор — простейшую незамкнутую систему. В нем свет переключается в определенном порядке через определенные промежутки времени без учета фактической ситуации на перекрестке. Летом 1972 года на площади Серпуховской заставы в Москве (с довольно сложной схемой движения, см. рис. 5) была включена система автоматического управления транспортным потоком. От датчиков, расположенных под проезжей частью улиц, выходящих на площадь, в систему подаются сведения о числе машин, движущихся по каждому направлению. Для каждого возможного положения светофоров вычислительная машина подсчитывает число движущихся и простаивающих автомашин и определяет среднее время простоя в расчете на одну машину, после чего выбирает положение светофоров так, чтобы время простоя было минимальным.

В 1974 году в Москве должна быть введена в эксплуатацию система автоматического регулирования транспортных потоков «СТАРТ», которая будет «заведовать» всеми светофорами внутри Садового кольца столицы. Для каждого внутреннего узла схемы можно будет рассчитать число машин, подходящих к этому узлу по различным направлениям.

Алгоритм управления для такой системы включает в себя расчет среднего времени простоя машин; *критерий оптимальности* (условие наивыгоднейшего протекания процесса) — минимальность этого времени простоя.

М. А. Гинцбург

ИЗМЕРЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ЛУНЕ

Коротко о приборе

Еще в глубокой древности было известно, что Земля действует на магнитную стрелку, как если бы она была гигантским магнитом. И до сих пор ученые не могут ответить на вопрос о причине возникновения земного магнитного поля и законах его изменения во времени (оно медленно меняется на протяжении тысячелетий). Поэтому огромный интерес для науки представляет вопрос о том, есть ли магнитные поля у других космических тел — у Луны, Марса, Венеры и так далее, отличающихся от Земли внутренним строением, размерами и периодом суточного вращения. Из сравнения магнетизма планет и магнетизма Земли можно будет понять, что явилось причиной появления магнитного поля на Земле.

Магнитные поля, правда, очень слабые — примерно в 6000 раз меньше земного, — есть и в межпланетном пространстве. Во всей Солнечной системе от Солнца и до Нептуна нельзя указать места, где бы не было этих слабых полей.

Для измерения магнитных полей на планетах и в межпланетном пространстве почти на всех космических кораблях устанавливаются специальные приборы — так называемые феррозондовые магнитометры. Это один из основных космических приборов.

Феррозондовый магнитометр СГ (название нашего советского прибора этого типа) был установлен на третьем советском искусственном спутнике Земли (он измерял магнитное поле Земли на высотах в сотни километров), на спутниках «Электрон» (высоты в десятки тысяч километров), на станциях «Венера-4» и «Луна-2», на искусственных спутниках Луны «Луна-10», «Луна-19», на «Луноходе-2», на советских искусственных спутниках Марса «Марс-2» и «Марс-3» и так далее.

На рисунке 1 показано, как устанавливается магнитометр на станции «Луна» (он укрепляется на длинной, 2—3 метра, штанге).

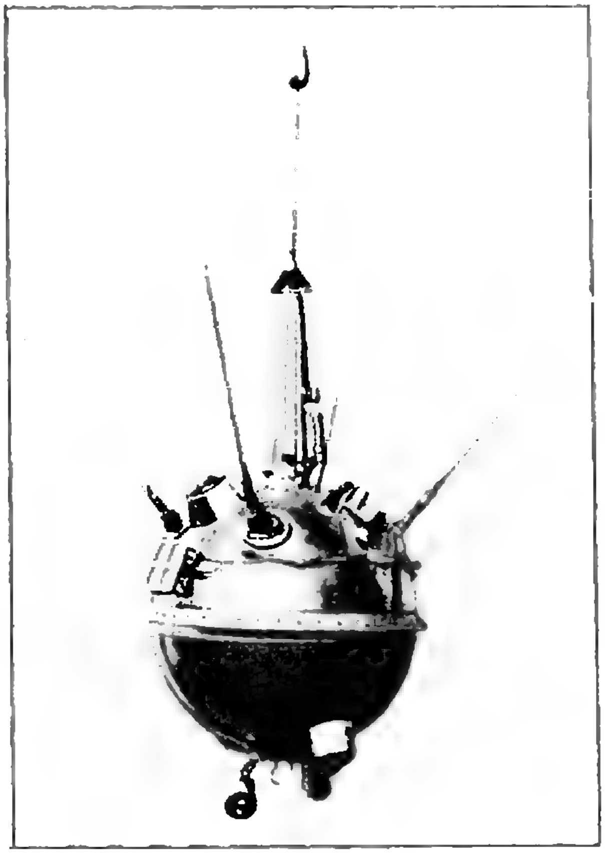


Рис. 1.

Этот прибор, по существу, — специальная разновидность трансформатора.

Обычный трансформатор состоит из двух обмоток, первичной и вторичной, навитых на общий ферромагнитный сердечник *). В магнитометре СГ сердечником служит тонкая лента из пермаллоя—специального сплава железа (20%) и никеля (80%).

Индукция B результирующего магнитного поля в сердечнике складывается из двух частей: индукции B_0 поля, создаваемого током намагничивающей катушки, и индукции B_Φ поля, создаваемого ориентированными элементарными токами в самом веществе. Отношение $\frac{B}{B_0} = \frac{B_0 + B_\Phi}{B_0} = \mu$, называемое магнитной проницаемостью вещества, для ферромагнетиков много больше единицы (то есть $B_\Phi \gg B_0$) **).

Произведение индукции B на площадь S сечения сердечника, перпендикулярного вектору **B**, то есть BS, называется магнитным потоком.

По закону электромагнитной индукции изменение магнитного потока во времени порождает во вторичной обмотке электродвижущую силу индукции, величина которой пропорциональна скорости изменения магнитного потока и числу витков во вторичной обмотке. Если число витков во вторичной обмотке больше, чем в первичной, мы получим в ней напряжение большее, чем в первичной (повышающий трансформатор). Назначение трансформатора — повысить (или понизить) напряжение, поданное в первичную обмотку.

В магнитометре, как и в трансформаторе, имеется первичная и вторичная обмотки, навитые на общий пермаллоевый сердечник (схему магнитометра см. на рис. 8 в Приложении). В первичную обмотку от специального генератора подается переменный ток с частотой 5000 *гц*. Этот ток создает в пермаллоевом сердечнике переменный магнитный поток Φ, а изменение во времени этого потока индуцирует во вторичной обмотке э. д. с. индукции. Величина э. д. с. измеряется специальными приборами, установленными на космическом аппарате, и передается по радио на Землю.

Однако цель магнитометра — не повышение или понижение напряжения, а измерение постоянного во времени слабого внешнего магнитного поля, в котором находится прибор.

Внешнее поле изменяет магнитную проницаемость сердечника и тем влияет на вторичное напряжение (принцип действия магнитометра подробнее описан в Приложении). Сердечники трансформаторов изготавливаются из трансформаторной стали — сплава железа и кремния; слабые внешние магнитные поля не меняют магнитной проницаемости этого материала.

Магнитометр имеет три взаимно перпендикулярные катушки; они измеряют составляющие поля в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Чувствительность прибора очень высока. Так, например, магнитометр, установленный на искусственном спутнике Луны «Луна-10», регистрировал изменения магнитной индукции величиной в 1 гамму. (γ — единица измерения магнитной индукции; $1\gamma = 10^{-9}$ *тл*. Магнитное поле у поверхности Земли — 30÷60 тысяч гамм, межпланетное поле — 5γ.)

Первое измерение магнитных полей Луны («Луна-2»)

Станция «Луна-2» была запущена в Советском Союзе 12 сентября 1959 года и достигла Луны 14 сентября 1959

---

*) Напомним, что ферромагнитными называют материалы, способные сильно намагничиваться, даже когда они находятся в сравнительно слабом внешнем магнитном поле (в основном это железо, никель и некоторые их соединения и сплавы).

**) Величина магнитной проницаемости может сильно меняться при изменении внешнего магнитного поля. В частности, пермаллой отличается тем, что при очень слабых внешних полях значение μ резко изменяется с изменением внешнего поля.

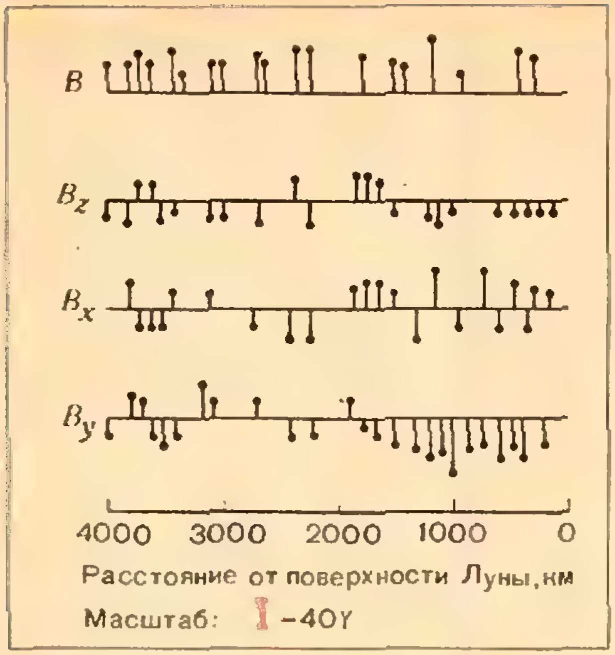


Рис. 2.

года. На ракете был установлен магнитометр СГ.

На рисунке 2 приведены показания всех трех катушек магнитометра при падении ракеты на Луну. Вверху показан модуль (абсолютная величина) поля $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$. Чувствительность прибора составляла 30γ. Как видно из рисунка 2, постоянного поля, большего 100γ, прибор не обнаружил. Если бы такое поле на поверхности Луны существовало, то при чувствительности прибора 30γ оно было бы обнаружено. Последнее свое показание прибор передал с высоты 55 *км* над лунной поверхностью. Следовательно, постоянного поля, превышающего 100γ, на участке поверхности, куда упала ракета, нет.

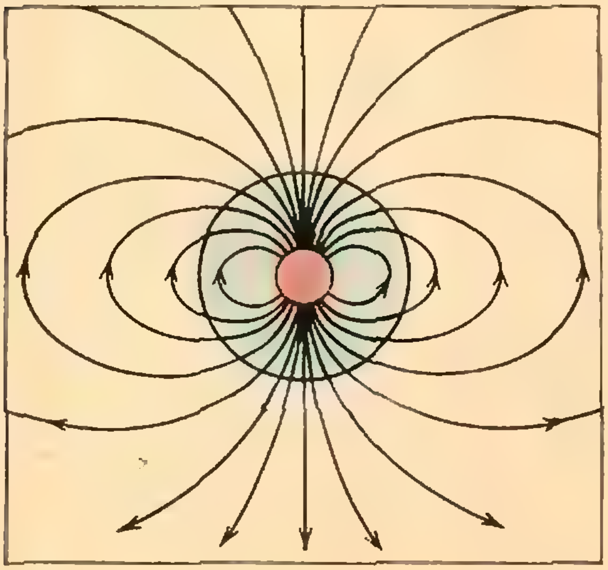


Рис. 3.

В чем значение этого результата?

Во-первых, он важен для понимания внутренней структуры Луны. Земное магнитное поле создается, по-видимому, сложной системой течений расплавленных металлов в ядре Земли (рис. 3). Отсутствие на Луне магнитного поля, близкого по величине к земному, говорит о том, что в ядре Луны нет токов, создающих магнитное поле.

Во-вторых, отсутствие в недрах Луны магнитного поля в корне меняет характер взаимодействия Луны с ионами и электронами, падающими на ее поверхность.

Солнце кроме видимого света, ультрафиолетовых, инфракрасных и рентгеновских лучей испускает также потоки электронов и ионов — так называемый солнечный ветер. Скорость ионов солнечного ветра (на 95% это ионы водорода — протоны) — от 300 до 700 *км/с* в зависимости от условий на Солнце (от его активности). Кроме этого ветра Солнце испускает и частицы гораздо бо́льших энергий, так называемые солнечные космические лучи. Если средняя энергия протонов солнечного ветра

$$W = \frac{mv^2}{2} \approx \frac{1{,}6\cdot 10^{-24}(5\cdot 10^7)^2}{2} = 2\cdot 10^{-9}\,\textit{эрг} \approx 3200\ \textit{эв},$$

то средняя энергия частиц, входящих в состав солнечных космических лучей, — 100 ÷ 200 миллионов электрон-вольт. Солнечные космические лучи летят от Солнца во все уголки Солнечной системы, они летят и к Земле. Но на поверхность Земли эти частицы не попадают: магнитное поле Земли на высотах в 60—80 тысяч *км* от ее поверхности преграждает путь солнечным космическим лучам. Поясним, как это происходит.

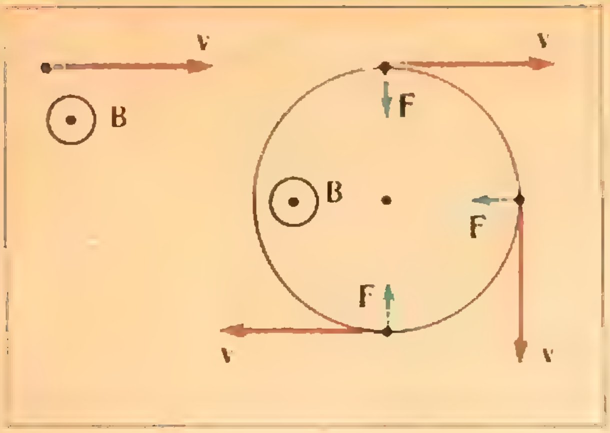


Рис. 4.

Движущиеся ионы — это ток. На ток в магнитном поле действует сила **F**, перпендикулярная направлению поля и вектору скорости.

На рисунке 4 показано, как влияет магнитное поле Земли на движение ионов солнечного ветра. Из рисунка видно, что прямолинейная траектория иона при попадании его в магнитное поле Земли искривляется и переходит в окружность.

Однако поток быстрых ионов может искажать магнитное поле, на которое он налетает. Теория показывает, что результат взаимодействия солнечного ветра с магнитным полем Земли зависит от соотношения между кинетической энергией ионов, находящихся в единице объема пространства, «заполненного» солнечным ветром, — $n\frac{mv^2}{2}$ (n — плотность ионов) и плотностью энергии магнитного поля (энергии, приходящейся на единицу объема пространства), которая пропорциональна величине $B^2/2$ (B — величина индукции магнитного поля Земли на данной высоте от ее поверхности). Далеко от Земли, на расстояниях свыше 100 000 *км*, магнитное поле Земли мало́ и $n\frac{mv^2}{2} \gg \frac{B^2}{2}$ — солнечный ветер движется беспрепятственно. На меньших расстояниях $n\frac{mv^2}{2} < \frac{B^2}{2}$, траектории ионов искривляются магнитным полем Земли, и на расстояния, меньшие ~ 60 тысяч *км* от поверхности Земли, солнечный ветер не проникает.

Однако, не будучи в состоянии «пробить» магнитный щит, солнечный ветер деформирует магнитное поле Земли. Область магнитного поля Земли, несколько деформированного солнечным ветром, называется магнитосферой.

За Землей магнитосфера образует магнитный хвост Земли. Искаженные силовые линии поля Земли в этой

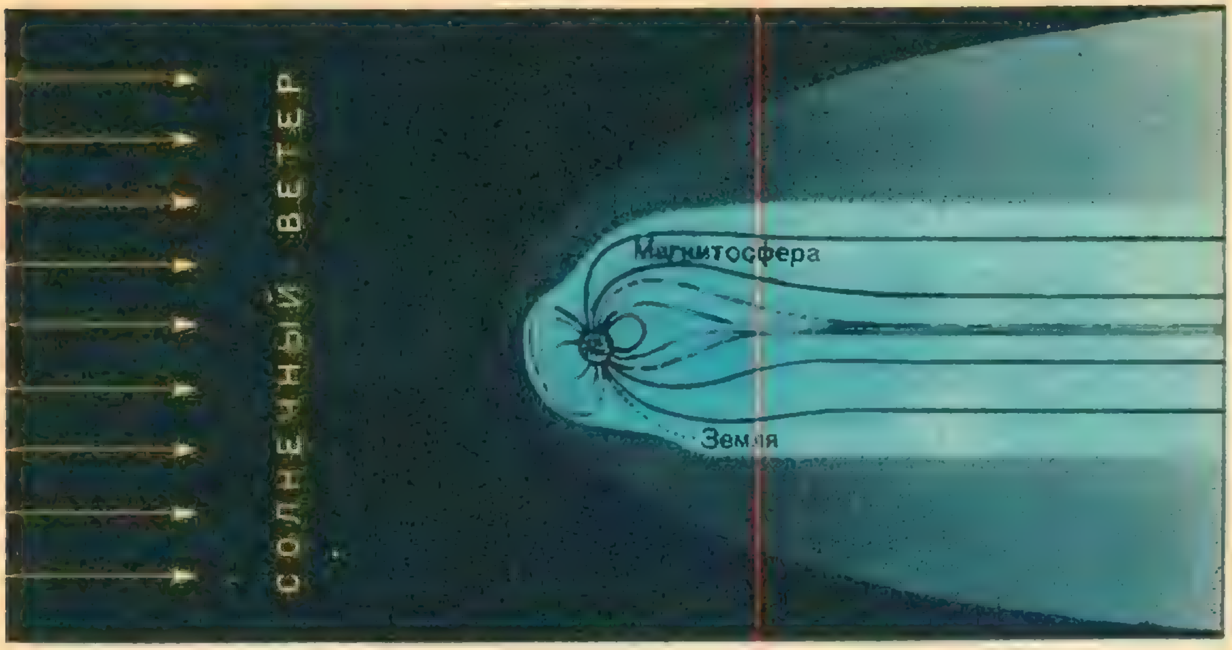


Рис. 5.

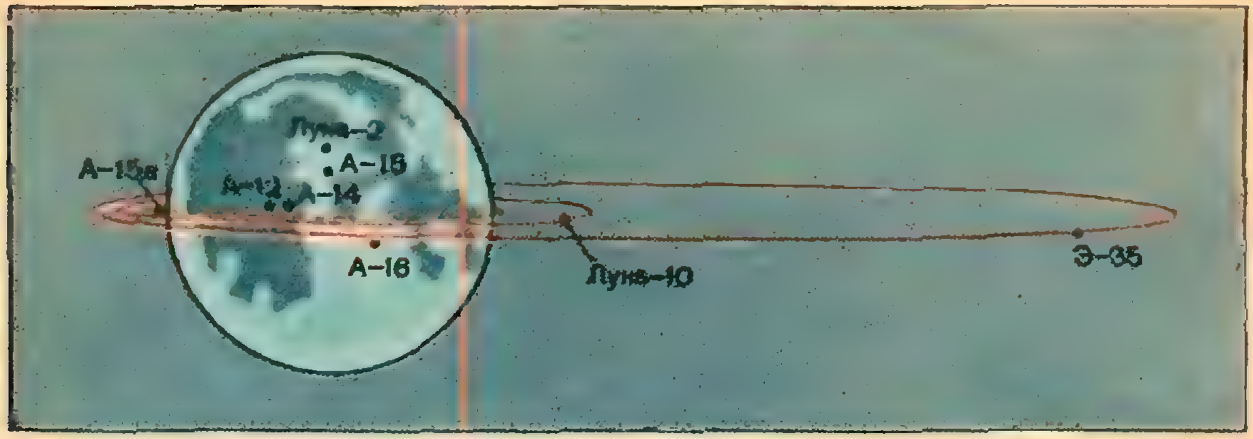


Рис. 6.

области замыкаются на расстояниях порядка 1 миллиона *км* от ее поверхности. На рисунке 5 область магнитосферы показана голубым цветом (черные линии — магнитные силовые линии).

В области, примыкающей снаружи к границе магнитосферы, магнитное поле солнечного ветра искажено влиянием земного поля. Эта область (на рисунке 5 она более темная, чем магнитосфера) — область «возмущенного» солнечного ветра. Ее ближайшая к Земле внешняя граница проходит на расстоянии ~ 100 000 *км* от поверхности Земли. За этой границей существует невозмущенный солнечный ветер (черный цвет на рисунке 5), движущийся от Солнца прямолинейно.

Магнитосфера Земли — это внешний щит толщиной 60 000 *км*, предохраняющий нас как от губительного действия солнечных космических лучей, так и от менее опасных ионов солнечного ветра. Следующий, внутренний щит образует земная атмосфера.

Магнитные измерения, выполненные на ракете «Луна-2», впервые показали, что на Луне нет сильного магнитного поля. Там нет и второго щита — атмосферы. Поэтому солнечные космические лучи беспрепятственно бомбардируют лунную поверхность; радиационная опасность на Луне намного больше, чем на Земле.

Измерения на искусственных спутниках Луны

На рисунке 6 показаны орбиты искусственных спутников Луны. На всех этих спутниках были установлены феррозондовые магнитометры.

Чувствительность магнитометра, установленного на первом в истории искусственном спутнике Луны «Луна-10» (он был запущен в Советском Союзе в апреле 1966 года), была 1γ. Магнитная съемка выполнялась вдоль траектории спутника на высотах от 350 до 1017 *км* над лунной поверхностью.

В 1967 году был выведен на орбиту вокруг Луны американский спутник «Эксплорер-35». На нем был установлен феррозондовый магнитометр, аналогичный нашему СГ.

Результаты измерений «Луны-10» и «Эксплорера-35» подтвердили измерения «Луны-2». Луна не имеет собственного магнитного поля (поля ядра) и ведет себя по отношению к магнитному полю солнечного ветра как немагнитный шар с низкой электропроводностью (что указывает на отсутствие жидкого ядра). Ионы солнечного ветра и космические лучи беспрепятственно достигают ее поверхности.

В 1971 году были запущены искусственные спутники «Луна-19» и «Аполлон-15а» (на рисунке 6 орбита «Аполлона-15а» показана пунктиром; этот спутник был запущен с косми-

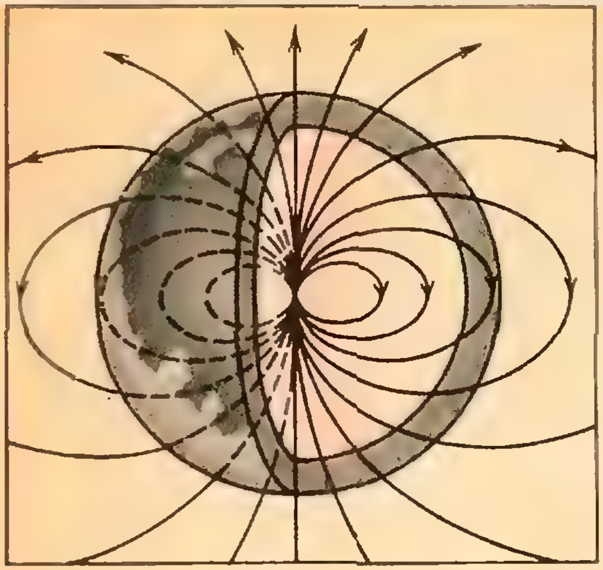


Рис. 7а.

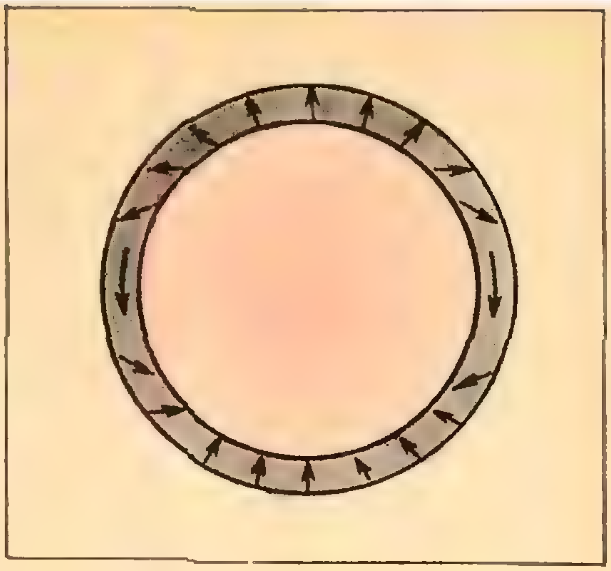


Рис. 7б.

ческого корабля «Аполлон-15»). Эти спутники летали на небольших высотах над лунной поверхностью («Аполлон-15а» — 110 ÷ 140 *км*) и подтвердили вывод об отсутствии на Луне магнитного поля, создаваемого ядром, с еще большей точностью.

Намагничивание лунных образцов

Магнитного поля ядра на Луне нет. Но вот на Землю были доставлены образцы горных пород Луны, и измерения показали, что эти образцы намагничены.

Как возникло это намагничивание?

Первое естественное объяснение — гипотеза о существовании у Луны в далеком прошлом магнитного поля, которое впоследствии исчезло. Допустим, что когда-то Луна имела расплавленное ядро, создающее сильное магнитное поле (рис. 7а). Это поле намагнитило горные породы на поверхности, содержащие железо. Затем, при остывании Луны и замедлении ее суточного вращения, магнитное поле ядра исчезло. Однако намагниченные толщи лунной поверхности сохранили свои магнитные свойства — так называемое остаточное намагничивание (рис. 7б).

Основную долю остаточного намагничивания порода приобретает при остывании: следовательно, при остывании Луны поле ядра было. По остаточному намагничиванию, зная состав образца, можно судить и о величине магнитного поля, в котором этот образец остывал. С другой стороны, возраст горных пород можно определить по относительному содержанию радиоактивных элементов и продуктов их распада*).

Такие совместные измерения радиоактивности и намагничивания образцов лунной породы показали, что примерно 3,1 миллиарда лет назад на Луне существовало собственное магнитное поле не меньше 1000γ.

Магнитометры на поверхности Луны («Аполлон-12, -14, -15», «Луноход-2»)

Возникает и новая задача — измерить распределение поля этого остаточного намагничивания по поверхности Луны.

Почему магнитометры, установленные на спутниках Луны, не зарегистрировали поля остаточного намагничивания на Луне? Дело в том, что измерения на спутниках Луны для этой цели непригодны. Поле ядра, если оно существует, у поверхности планеты существенно меняется (убывает) на расстояниях порядка радиуса планеты. Поэтому магнитное поле Земли на высоте в 6000 *км* приблизительно в 8 раз меньше его значения у поверхности и составляет около 4000γ. И если на высотах 100—1000 *км* над лунной поверхностью магнитного поля не обнаружено, то это означает лишь, что у Луны нет поля ядра, но ничего не говорит о поверхностном магнитном поле.

---

*) О радиоактивных методах определения возраста горных пород можно прочитать в статье: Кузнецов В. И. Часы на миллиарды лет. «Квант», 1973, № 4.

Поле остаточного намагничивания — поверхностное, оно быстро убывает с высотой, и для его регистрации надо установить магнитометр на поверхности Луны.

Такой эксперимент был осуществлен космонавтами космического корабля «Аполлон-12» 19 ноября 1969 года. Они установили феррозондовый магнитометр, привели его в действие. Прибор продолжал работать много месяцев и в отсутствие космонавтов, а его показания автоматически передавались радиопередатчиком на Землю.

На рисунке 6 черными точками (А-12, А-14, А-15) показаны места установки магнитометров космонавтами кораблей «Аполлон».

На протяжении нескольких месяцев по лунной поверхности двигался самоходный аппарат «Луноход-2», управляемый по радио с Земли. На нем также был установлен феррозондовый магнитометр СГ.

Магнитные измерения на поверхности Луны показали, что поле поверхностного намагничивания в разных участках лунной поверхности имеет разную величину: 38γ («Аполлон-12»), 43γ, 100γ (переносный магнитометр с «Апполлона-14»).

Насколько быстро это поверхностное поле убывает с высотой, показывает следующий пример. Когда спутник, запущенный с ракеты «Аполлон-15», пролетал на высоте 100 *км* над участком лунной поверхности, где «налунный» магнитометр «Аполлона-14» зарегистрировал поле в 100γ, он не обнаружил никакого следа этого поля.

За последний, 1973 год, в результате измерений, полученных с помощью корабля «Аполлон-17», наши взгляды на строение Луны претерпели эволюцию. Получено много данных в пользу горячего ($t^\circ > 1000^\circ$ С) ядра. Но токов, которые создавали бы магнитное поле, в ядре нет. Магнитное поле Луны обусловлено остаточным намагничиванием коры и, возможно, процессами в слоях под корой, на глубинах 100—200 *км*.

Марс, Юпитер, Венера

Советский феррозондовый магнитометр СГ, установленный на станции «Венера-4», измерил магнитное поле (~ 10 γ) на расстояниях вплоть до 200 *км* от поверхности Венеры. Собственного магнитного поля Венеры на этих расстояниях не обнаружено.

Ценную информацию дал магнитометр СГ, установленный на искусственных спутниках Марса «Марс-2» и «Марс-3». На высоте 2000 *км* над поверхностью Марса обнаружено поле в 27γ, что в 8 раз превышает межпланетное поле. Если последующие измерения подтвердят, что это собственное поле Марса, то таким может быть только поле ядра: поле поверхностного намагничивания на высотах в 1000—2000 *км* исчезает.

Наряду с измерениями на Марсе на очереди измерение магнитных полей на самой большой планете — Юпитере. По спектру радиоизлучения Юпитера в диапазонах метровых и сантиметровых волн можно с достаточной уверенностью утверждать, что Юпитер обладает сильным магнитным полем — в сотни раз более сильным, чем поле Земли. Природа и характер поля Юпитера еще совсем непонятны. Для измерения магнитных полей на Юпитере на космических кораблях

«Пионер-10» и «Пионер-11», запущенных недавно к Юпитеру, установлены феррозондовые магнитометры. В декабре этого года будут получены результаты измерений кораблем «Пионер-10» поля Юпитера.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Феррозондовый магнитометр

Поле, возникающее в сердечнике, определяется суммарным полем, создаваемым током первичной катушки и тем слабым внешним постоянным (или мало меняющимся во времени) полем, в котором находится магнитометр: $B = \mu B_{\text{сум}} = \mu(B_1 \sin \omega t + B_0)$. Магнитная проницаемость материала сердечника—пермаллоя—зависит от величины индукции $B_{\text{сум}}$: $\mu = a - bB^2_{\text{сум}}$ (a, b—некоторые постоянные коэффициенты, a—безразмерный, размерность b $[b] = \frac{1}{[B^2]}\Big)$. Так что магнитный поток через сечение сердечника, перпендикулярное силовым линиям суммарного магнитного поля, равен

$$\Phi = S(aB_{\text{сум}} - bB^3_{\text{сум}}) = S[a(B_1 \sin \omega t + B_0) - b(B_1 \sin \omega t + B_0)^3] =$$
$$= S(aB_1 \sin \omega t + aB_0 - bB_1^3 \sin^3 \omega t - 3bB_0B_1^2 \sin^2 \omega t - 3bB_0^2B_1 \sin \omega t - bB_0^3).$$

Принцип действия магнитометра: он «выделяет» четвертый член $\left(-3bB_0B_1^2 \sin^2 \omega t\right) = = \frac{3}{2} bB_0B_1^2 (1 - \cos 2\omega t)$ и по создаваемой им во вторичной обмотке электродвижущей силе измеряет B_0. Но как подавить остальные слагаемые потока?

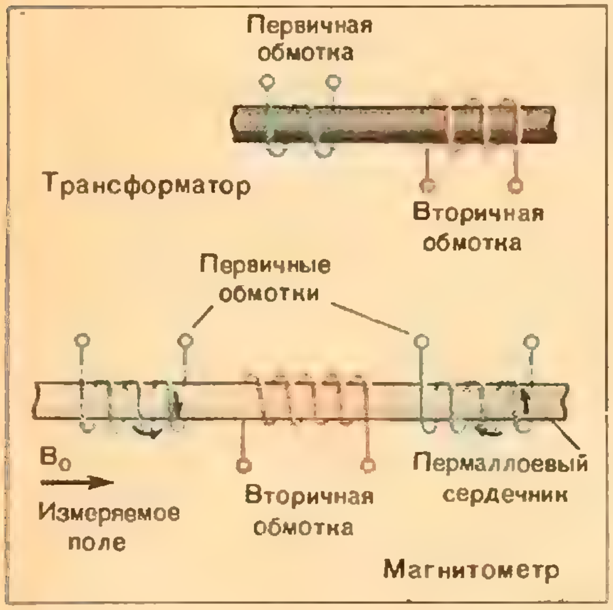


Рис. 8.

Для этой цели на сердечник надеваются не одна, а две первичные обмотки, намотанные в противоположные стороны (см. рис. 8). Эти обмотки создают в вакууме поля $B_1 \sin \omega t$ и $-B_1 \sin \omega t$ соответственно. В сердечнике суммарный поток от двух обмоток $\Phi_{\text{сум}} = S[a(B_1 \sin \omega t + B_0) - b(B_1 \sin \omega t + B_0)^3] + S[a(-B_1 \sin \omega t + B_0) - b(-B_1 \sin \omega t + B_0)^3] = S(2aB_0 - 2bB_0^3 - 3bB_0B_1^2 + 3bB_0B_1^2 \cos 2\omega t)$ имеет частоту в два раза большую, чем частота питающего тока. Соответственно такой прибор называется датчиком второй гармоники.

Если бы прибор работал в линейном режиме (то есть магнитный поток в сердечнике был равен $\Phi = S[a(B_0 + B_1 \sin \omega t)]$), то созданный слабым межпланетным полем магнитный поток $\Phi_1 = aB_0S$ было бы трудно регистрировать из-за его малости. Переменный во времени поток $\Phi_2 = aSB_1 \sin \omega t$ ничего бы для измерения поля не давал, он не зависел бы от измеряемого поля B_0. Кубическая (то есть нелинейная) зависимость $\Phi = \Phi(B_{\text{сум}})$ вносит в поток слагаемое $(3bB_0B_1^2 \cos 2\omega t)$, пропорциональное как индукции B_0 измеряемого внешнего поля, так и квадрату индукции возбуждающего поля. Это уже не малая величина, к тому же ее можно регулировать, изменяя ток возбуждения.

Почему из ряда ферромагнитных материалов выбран именно пермаллой? Прежде всего, кривая намагничивания пермаллоя содержит нелинейные кубические члены. Кроме того, благодаря высокой магнитной проницаемости пермаллоя, достигающей уже в слабых полях величины $\mu = 100\,000$, малые намагничивающие поля создают в сердечнике большую индукцию. Изменение этой индукции во времени вызывает большую э. д. с. во вторичной обмотке, амплитуда которой пропорциональна величине измеряемого поля, а частота равна удвоенной частоте питающего тока. Создаваемый этой э. д. с. ток во вторичной обмотке усиливается специальной схемой, выпрямляется, и его постоянная составляющая служит мерой поля B_0.

Н. Б. Васильев

Последовательность прыжков

В этой заметке мы решим задачу **М190** из «Задачника Кванта» — задачу о блохе, прыгающей по двум прямым. Ее можно решать по-разному. Мы сведем эту задачу к такому вопросу: пусть задано два или несколько перемещений плоскости, оставляющих данную точку O неподвижной (это могут быть повороты или симметрии); какое преобразование плоскости получится, если последовательно выполнить данные преобразования одно за другим?

Поскольку этот вопрос интересен и сам по себе, а не только в связи с решением задачи про блоху, мы будем иногда отклоняться в сторону и предлагать упражнения, не относящиеся непосредственно к задаче **М190**.

Вначале напомним формулировку задачи.

На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b. В точке A_0, находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b, сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, ..., руководствуясь следующими правилами (рис. 1):

1) *точки A_0, A_1, A_2, ... лежат на прямой a, точки B_0, B_1, B_2, ... — на прямой b;*

2) $A_0B_0 = B_0A_1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = \ldots = 1$;

3) *точка A_{n+1} не совпадает с A_n, кроме случая, когда $A_nB_n \perp a$ (и аналогично B_{n+1} совпадает с B_n только, если $B_nA_{n+1} \perp b$).*

(*Условиями* 1) — 3) *последовательность прыжков определяется однозначно.*)

Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, то есть в некоторый момент она попадет в начальную точку A_0 и затем будет последовательно проходить те же самые точки B_0, A_1, B_1, ..., как в начале пути; а если — иррациональным числом, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Конечно, интересно разобраться не только в том, «зациклится» путь блохи или нет, но и вообще разобраться, как устроена последовательность точек

$$A_0, B_0, A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots \tag{1}$$

например, научиться по номеру n определять положения точек A_n и B_n. В нашем решении будет получен ответ и на этот вопрос. В дальнейшем вместо слова «блоха» мы часто будем употреблять слово «точка».

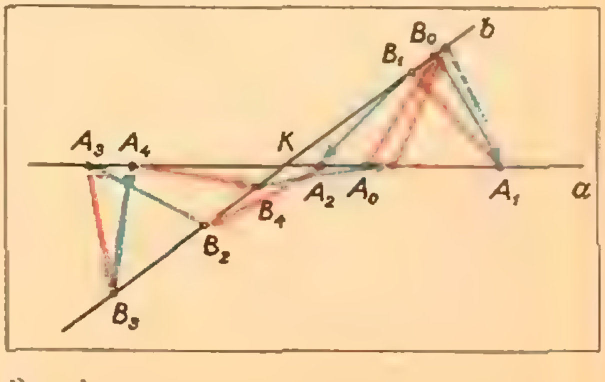


Рис. 1.

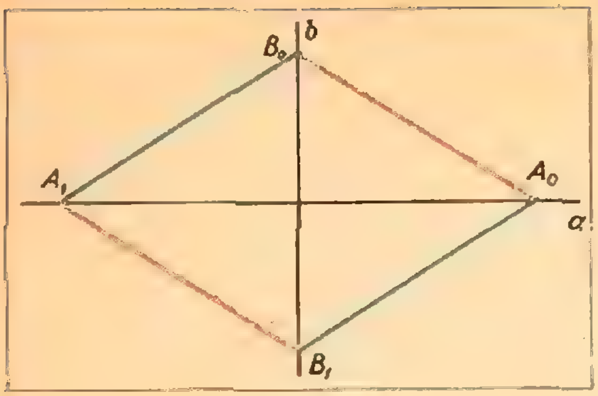


Рис. 2.

1. Точка прыгает по двум прямым

Естественно начать с эксперимента: провести две прямые, вооружиться циркулем (еще удобнее — измерителем) и, взяв какую-то точку A_0 в качестве начальной, посмотреть, как выглядит «траектория» блохи. На рисунке 1 построен один такой пример: точки A_0, B_0, A_1, B_1, ... последовательно соединены красными и голубыми отрезками (со стрелками), указывающими путь блохи. Можно повторить такой эксперимент, взяв другой угол между прямыми или другую начальную точку. После нескольких проб становится ясно, что точки A_n (и B_n) попадают то по одну, то по другую сторону от точки пересечения K прямых a и b. Правда, *строгой периодичности* тут нет: например, на рисунке 1 блоха бывает на каждом из лучей с вершиной K иногда подряд два раза, иногда — три. И, конечно, эксперимент не позволяет узнать, попадает ли блоха через несколько шагов в начальную точку A_0: ведь построения мы можем выполнять только приближенно, так что по чертежу мы никак не сможем уловить разницу между рациональным и иррациональным углом. (Сразу ясен лишь случай, когда угол — прямой; рис. 2.)

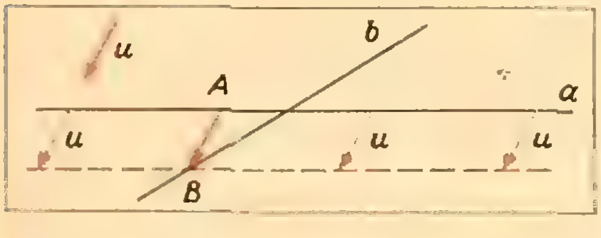


Рис. 3.

Но зато наши рисунки могут подсказать более простую закономерность, определяющую путь блохи, чем правила 1) — 3), сформулированные в условии задачи.

2. Направления прыжков

Последовательные звенья ломаной — траектории блохи — это векторы единичной длины

$$\overrightarrow{A_0B_0},\ \overrightarrow{B_0A_1},\ \overrightarrow{A_1B_1},\ \overrightarrow{B_1A_2},\ \ldots \qquad (2)$$

(Каждый вектор показывает, каков очередной прыжок.)

Заметим, что если мы знаем вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{A_nB_n}$ (пусть он нарисован где-то в стороне, на плоскости), то мы сможем определить, где лежат точки A_n и B_n.

Действительно, верна такая

Лемма. *Пусть a и b — пересекающиеся прямые. Для любого вектора $\mathbf{u}$ (на плоскости) найдутся две точки A (на прямой a) и B (на прямой b) такие, что вектор $\overrightarrow{AB}$ равен данному вектору $\mathbf{u}$. Точки A и B определяются однозначно.*

Доказательство (рис. 3). Если мы хотим, чтобы начало вектора лежало на прямой a и этот вектор равнялся $\mathbf{u}$, то конец его должен попасть на прямую a', полученную параллельным переносом прямой a на вектор $\mathbf{u}$ (на рисунке 3 прямая a' проведена пунктиром). Поэтому точка B должна лежать в точке пересечения прямой b с прямой a'. После этого *легко находится* и *точка* A.

Упражнение 1. Даны две точки C и D и две прямые a и b. Найдите на прямых a и b соответственно точки A и B такие, чтобы

а) середины отрезков AC и BD совпадали;

б) четырехугольник $ABCD$ был трапецией, у которой основание AB вдвое больше основания CD.

Возьмем на плоскости точку O и будем все векторы последовательности

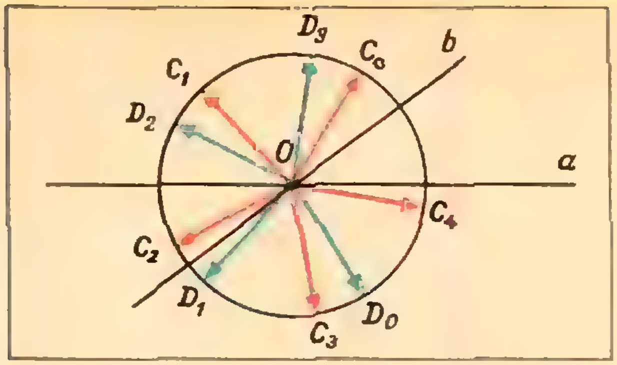


Рис. 4.

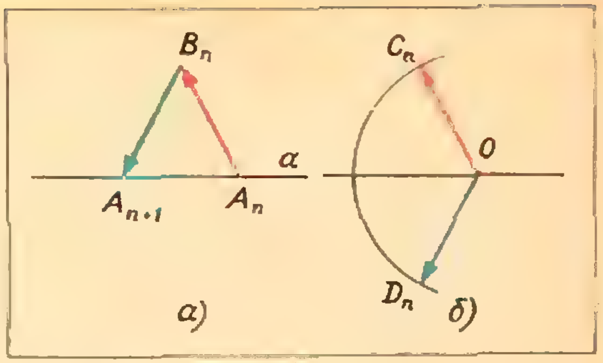


Рис. 6.

(2) откладывать от этой точки. Эти векторы, равные соответственно векторам последовательности (2), обозначим так:

$$\overrightarrow{OC_0},\ \overrightarrow{OD_0},\ \overrightarrow{OC_1},\ \overrightarrow{OD_1},\ \dots \qquad (3)$$

Из леммы следует, что, зная последовательность (3), мы можем восстановить последовательность точек (1): например, зная $\overrightarrow{OC_n}$, можно найти и A_n и B_n.

На рисунке 4 изображены «направления прыжков» (3) для последовательности, изображенной на рисунке 1. Заметьте, что красные векторы $\overrightarrow{OC_n}$ (отвечающие прыжкам с прямой a на прямую b; $n = 0, 1, 2, \dots$) образуют между собой равные углы. Оказывается, что это — общий факт, справедливый для любой последовательности прыжков. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. *Если угол между прямыми a и b* равен γ, *то угол между векторами $\overrightarrow{OC_n}$ и $\overrightarrow{OC_{n+1}}$ равен* 2γ.

Это — основное соображение в задаче **М190**. Теорему можно доказать, пользуясь тем, что любые два соседних звена ломаной в последовательности (2) являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника, причем основание этого треугольника попеременно лежит то на прямой a, то на прямой b. Основная трудность доказательства связана с тем, что звенья ломаной могут быть по-разному расположены относительно данным прямых. Например, чтобы доказать теорему для $\gamma = 60°$, пришлось бы рассмотреть 10 случаев, изображенных на рисунке 5 (остальные получаются из них симметрией относительно точки пересечения прямых a и b). Мы поступим иначе: пользуясь понятиями «преобразование» и «произведение преобразований», мы приведем общее доказательство, охватывающее сразу все случаи.

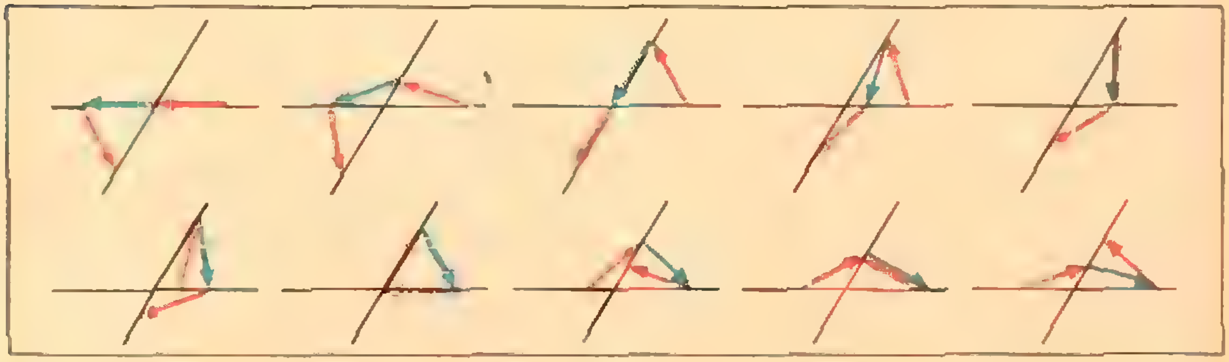


Рис. 5.

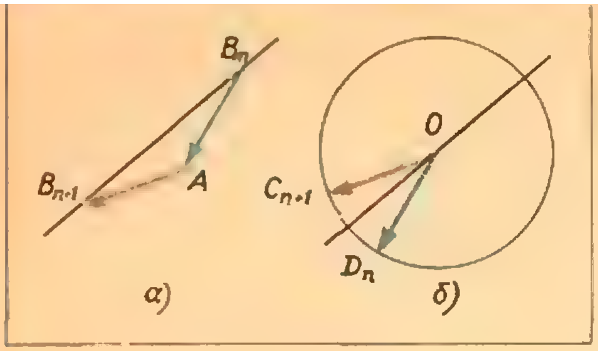


Рис. 7.

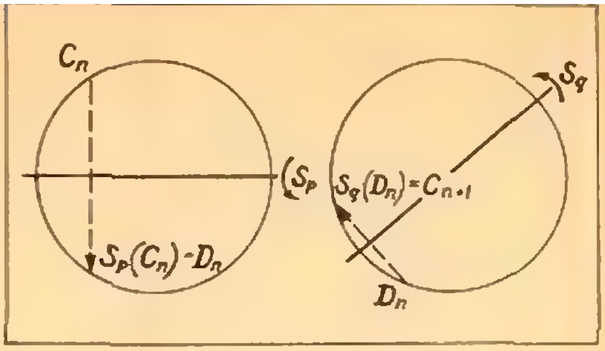


Рис. 8.

3. Точка прыгает по окружности

Сравним еще раз рисунки 1 и 4. Выделим из них фрагменты, состоящие из двух последовательных звеньев (те самые «равнобедренные треугольники», о которых шла речь выше; рис. 6, а, б и 7, а, б). Глядя на эти рисунки, легко сформулировать простое правило, по которому строится последовательность (3).

Обозначим через p и q прямые, проходящие через точку O и параллельные соответственно прямым a и b; тогда в последовательности (3) после вектора $\overrightarrow{OC_n}$ идет вектор $\overrightarrow{OD_n}$, симметричный ему относительно прямой p; после вектора $\overrightarrow{OD_n}$ идет вектор $\overrightarrow{OC_{n+1}}$, симметричный ему относительно прямой q (здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Упражнение 2. Проверьте, что это правило в точности соответствует правилам 1)—3) в условии задачи (в том числе в «вырожденных» случаях).

Упражнение 3. а) Докажите, что если последовательность (1) попадет в точку A_0 более двух раз, то она будет периодической и при этом некоторая точка C_n совпадает с C_0.

б) Приведите пример, когда последовательность попадает в точку A_0 дважды: A_1 совпадает с A_0, но B_1 уже не совпадает с B_0.

Указание. Для точки A на прямой a существует не более двух векторов, начинающихся в A, кончающихся на прямой b и имеющих длину 1.

Сформулируем теперь еще раз задачу **М190** (вернее, ту задачу, к которой она свелась), но будем говорить не о преобразованиях векторов $\overrightarrow{OC_n}$ и $\overrightarrow{OD_n}$, а о преобразованиях их концов — точек, лежащих на единичной окружности.

Пусть p и q — две прямые, проходящие через точку O. Обозначим через S_p преобразование симметрии относительно прямой p и через S_q преобразование симметрии относительно прямой q. (Мы можем рассматривать эти преобразования, как преобразования всей плоскости на себя; например, S_p каждой точке X плоскости ставит в соответствие точку $S_p(X)$, симметричную точке X относительно прямой p. Но в дальнейшем нам потребуется рассматривать точки на единичной окружности с центром O. Ясно, что преобразования S_p и S_q отображают единичную окружность на себя.) Пусть C_0 — некоторая точка, находящаяся на расстоянии 1 от O, и

$$C_0,\ D_0,\ C_1,\ D_1,\ C_2,\ D_2,\ \ldots \qquad (4)$$

— последовательность, определяемая условиями

$$D_n = S_p(C_n),\quad C_{n+1} = S_q(D_n) \qquad (5)$$

(рис. 8). Мы должны доказать, что точка C_n при некотором n совпадает с C_0 в том и только в том случае, если угол γ между прямыми p и q выражается рациональным числом градусов.

Итак, задача о прыжках по двум прямым свелась к задаче о прыжках по окружности.

А теорема, которую мы должны доказать в первую очередь, утверждает, что $\smile C_nC_{n+1} = 2\gamma$, где γ — угол между p и q.

4. Произведение преобразований

Наше правило перехода (5) еще упростится, если мы каждые два последовательных прыжка объединим в один: в *последовательности*

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots \tag{6}$$

каждая последующая точка получается из предыдущей по такому правилу:

$$C_{n+1} = S_q\,(S_p\,(C_n)), \tag{7}$$

то есть надо к C_n применить S_p, а затем к полученной точке — S_q.

Определение. Пусть K и L — два преобразования множества M на себя. *Произведением* преобразований K и L называется такое преобразование R, которое точке X из M ставит в соответствие точку $L(K(X))$. Таким образом, произведение преобразований K и L — это просто результат последовательного выполнения двух преобразований: сначала K, а затем L. Произведение R обозначается так: $R = L \cdot K$. Запись K и L именно в таком порядке («справа налево») удобна тем, что для любой точки X имеет место равенство:

$$R\,(X) = L \cdot K\,(X) = L\,(K(X)). \tag{8}$$

Мы специально уточнили, в каком порядке записываются «сомножители», потому что для умножения преобразований, вообще говоря, не выполняется равенство $L \cdot K = K \cdot L$ (см. ниже упражнение 4).

Точно так же определяется произведение трех и большего числа преобразований: $R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ означает, что нужно сделать сначала R_3, затем R_2, затем R_1. Наконец, запись $R = (R_1)^n$ означает, что R — это результат n-кратного применения преобразования R_1.

Вернемся к нашим S_p и S_q — преобразованиям симметрии относительно прямых p и q. Каково будет их произведение? (Сейчас нам удобнее считать, что S_p и S_q — преобразования всей плоскости на себя.) Ясно, что точка O останется при преобразовании $S_q \cdot S_p$ на месте: она переходит в себя и при преобразовании S_p, и при преобразовании S_q. Что происходит с остальными точками?

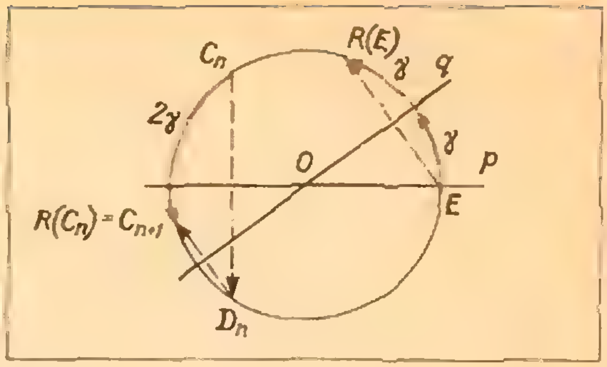


Рис. 9.

Наглядно это преобразование можно представить себе так. При преобразовании S_p вся плоскость переворачивается вокруг прямой p и накладывается на себя «другой стороной». После второго преобразования S_q — симметрии относительно прямой q — плоскость снова переворачивается на прежнюю сторону. Ясно, что перемещением плоскости, имеющим неподвижную точку O и не меняющим «ориентации» плоскости (не переворачивающим плоскость на другую сторону), может быть только поворот вокруг точки O. Таким образом, $R = S_q \cdot S_p$ — это поворот плоскости на некоторый угол вокруг точки O. На какой именно угол? Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно взять одну какую-то точку и посмотреть, что произойдет с ней. Пусть угол от прямой p до прямой q равен γ (мы будем отсчитывать углы против часовой стрелки). Возьмем точку E на прямой p (рис. 9) и найдем $R\,(E)$. Ясно, что $S_p\,(E) = E$: каждая точка прямой p при преобразовании S_p переходит в себя. А затем точка E попадает на прямую, симметричную прямой p относительно прямой q, то есть повернется вокруг точки O на угол 2γ. Итак, если угол от p до q равен γ, то $R = S_q \cdot S_p$ — поворот на угол 2γ. Отсюда следует наша основная теорема:

$$\smile C_nC_{n+1} = 2\gamma.$$

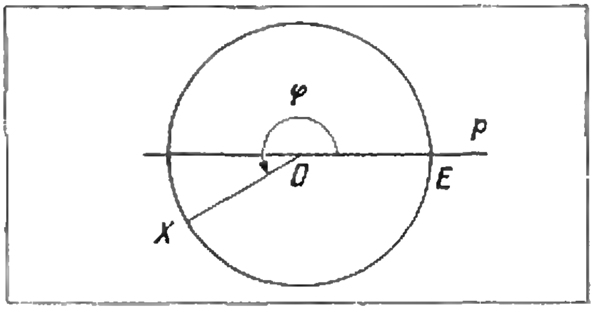


Рис. 10.

Упражнение 4. Убедитесь в том, что преобразование $S_p \circ S_q$ — поворот на угол (-2γ), то есть поворот на 2γ по часовой стрелке (см. синие отрезки на рис. 4). Таким образом, если угол γ отличен от нулевого или прямого угла, то $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$.

5. Запись поворотов и симметрий окружности

Вычислять произведение преобразований можно и формально. Для этого нужно ввести координаты. Поскольку нас интересуют только перемещения плоскости, имеющие данную точку O неподвижной, мы можем вместо преобразований плоскости говорить об отображениях единичной окружности с центром O на себя — о поворотах и симметриях.

Координату окружности введем так. Выберем начало отсчета E — одну из точек пересечения прямой p с единичной окружностью. Каждой точке X окружности поставим в соответствие величину угла EOX, отсчитываемого от OE против часовой стрелки и измеряемого в градусах (рис. 10); при этом точке X соответствует множество чисел

$$\varphi,\ \varphi \pm 360^\circ,\ \varphi \pm 2\ 360^\circ,\ \ldots$$

— числам, отличающимся на целое кратное 360°, соответствует одна и та же точка окружности.

Упражнение 5. а) Преобразование S_p — симметрия относительно прямой p — задается формулой $S_p(\varphi) = -\varphi$.

б) Преобразование R^α — поворот на угол α (против часовой стрелки) — задается формулой $R^\alpha(\varphi) = \varphi + \alpha$.

в) Пусть прямая q составляет угол γ с прямой p. Преобразование S_q мы будем далее обозначать через S_γ, чтобы явно указывать, какой угол образует прямая q с «начальной» прямой p. (В частности, вместо S_p мы будем писать S_0.) Тогда

$$S_\gamma(\varphi) = 2\gamma - \varphi.$$

Замечание. Конечно, $R^{\alpha+360^\circ n} = R^\alpha$ и $S_{\gamma+180^\circ n} = S_\gamma$ для любого целого n (угол, который составляет прямая q с прямой p, определен с точностью до прибавления любого кратного 180°). Это как раз соответствует тому, что φ определено с точностью до прибавления целого кратного 360°.

Упражнение 6. а) Докажите, что $R^\gamma \circ S_0 \circ R^{-\gamma} = S_\gamma$. Каков геометрический смысл этого равенства?

б) Докажите, что $S_{\gamma_1} \circ S_{\gamma_2} = R^{2\gamma_1 - 2\gamma_2}$ (отсюда, в частности, следует, что $S_0 \circ S_\gamma = R^{-2\gamma}$ и $S_\gamma \circ S_0 = R^{2\gamma}$.

в) Проверьте, что $R^\alpha \circ R^\beta = R^{\alpha+\beta}$

г) Докажите, что $S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma - \frac{\beta}{2}}$

д) Чему равно произведение $R^\alpha \circ S_\gamma$?

Решим для примера задачу г). Пусть точке X соответствует число φ. Тогда точке $S_\gamma \circ R^\beta(X)$ соответствует число

$$S_\gamma\left(R^\beta(\varphi)\right) = S_\gamma(\varphi + \beta) = 2\gamma - (\varphi + \beta) = \\ = 2\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) - \varphi,$$

поэтому, как мы знаем (упражнение 5 в)), $S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma - \frac{\beta}{2}}$.

Упражнение 7. Докажите, что

а) $\left(R^\alpha\right)^n = R^{\alpha n}$

б) $(S_\gamma)^2 = I$, где I — тождественное преобразование (I оставляет все точки на месте).

6. Окончание решения задачи про блоху

Итак, мы выяснили, что в последовательности (6) точек каждая следующая получается из предыдущей поворотом на угол 2γ, где γ — угол между прямыми p и q. Поэтому C_n получается из C_0 поворотом на угол $2\gamma n$. Для того чтобы C_n и C_0 совпали, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота был целым, кратным 360°. Ясно, что если

$$2\gamma n = 360^\circ k, \text{ где } k \text{ — целое},$$

то γ измеряется рациональным числом градусов. Обратно, если $\gamma = \frac{p}{q}$ градусов, то для $n = 180^\circ q$ получим

$$2\gamma n = 360^\circ p, \text{ где } p \text{ — целое},$$

поэтому $C_n = C_0$.

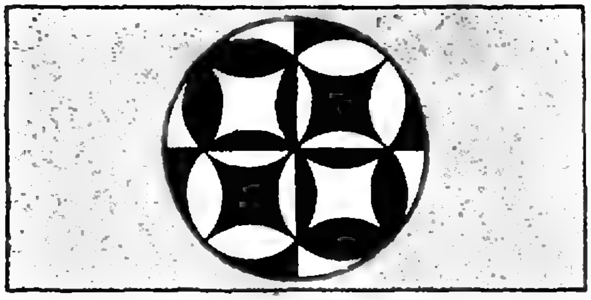


Рис. 11.

В заключение еще раз предлагаем вам поупражняться в «прыжках, поворотах и симметриях».

7. Несколько упражнений

Хотя большинство вопросов сформулировано ниже для конкретных чисел, очень советуем вам попытаться отвечать на аналогичные вопросы в общем виде (для произвольных значений параметров). Иногда это даже проще.

8. Пусть угол γ между прямыми a и b равен 60°, а угол отрезка $\overrightarrow{A_0B_0}$ с лучом KA_0 — 7°. Какой угол будет составлять с этим лучом отрезок $\overrightarrow{A_{100}B_{100}}$? Отрезок $\overrightarrow{B_{100}A_{101}}$?

9. Пусть угол γ равен одному радиану и $KA_0=1$. Выясните, принадлежит ли точка A_{1973} лучу KA_0 или находится на другой половине прямой a.

10. Докажите, что период траектории блохи (наименьшее $n>1$, при котором $A_n=A_0$) зависит только от угла γ, но не зависит от того, из какой точки стартует блоха. Чему равен этот период, если $\gamma=72°$? Попробуйте проверить этот факт «экспериментально».

11. Пусть $\gamma=37°$. Сколько раз подряд точки последовательности $A_0, A_1, A_2, \ldots$ будут встречаться на луче KA_0 (укажите наибольшее и наименьшее значения)?

Если вы захотите решить в общем виде и следующие упражнения — про узоры в круге, — то вам придется, вероятно, воспользоваться той небольшой теорией, которая содержится в упражнениях 6 и 7. Под узором мы понимаем просто некоторое множество точек M, выделенное внутри единичного круга: можно считать, что круг белый, а это множество выкрашено черной краской. Мы говорим, что узор переходит сам в себя при преобразовании P, если $P(M)=M$.

12. Придумайте узор, который

а) переходит в себя при повороте на 180°, но не имеет ни одной оси симметрии;

б) имеет ось симметрии, но не переходит в себя ни при каком повороте (отличном от тождественного преобразования);

в) переходит в себя при повороте на 60° и не имеет оси симметрии;

г) переходит в себя при повороте на 60° и имеет ось симметрии; какое наименьшее число осей симметрии он может иметь?

13. а) Какое количество осей симметрии имеет правильный n-угольник? Узор на рисунке 11?

б) Узор переходит в себя при повороте на 48°. Можно ли утверждать, что он перейдет в себя при повороте на 12°? На 18°?

г) Узор имеет две оси симметрии, образующие угол 66°. Какое наименьшее число осей симметрии он может иметь? Перечислите все значения углов, при повороте на которые этот узор заведомо переходит в себя.

Поверхностное натяжение чертит гиперболу

И. И. Воробьев

Один из методов измерения коэффициента поверхностного натяжения жидкости основан на поднятии столбика смачивающей жидкости в капилляре. Однако не всегда под рукой имеются капиллярные трубочки и микроскоп для определения их внутреннего диаметра.

Оказывается, капилляры вполне можно заменить двумя стеклянными пластинками. Опустите пластинки в сосуд с водой и постепенно сближайте их параллельно друг другу. Вода поднимается между пластинками — ее втягивает сила поверхностного натяжения (рис. 1).

Легко рассчитать коэффициент поверхностного натяжения σ по высоте подъема воды y и зазору между пластинками d. Сила поверхностного натяжения $F = 2\,\sigma L$, где L — длина пластинки (двойка появилась из-за того, что вода соприкасается с обеими пластинками). Эта сила удерживает слой воды массы $m = \rho L d y$, где ρ — плотность воды. Таким образом,

$$2\,\sigma L = \rho L d y g.$$

Отсюда можно найти коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{1}{2}\rho g d y. \qquad (1)$$

Но интереснее сделать так: с одного конца сжать пластинки вместе, а с другого оставить небольшой зазор (рис. 2). Вода поднимется и образует между пластинками удивительно правильную поверхность (конечно, если стекло чистое и сухое).

Нетрудно сообразить, что сечение этой поверхности вертикальной плоскостью — гипербола. В самом деле, достаточно в формулу (1) вместо d подставить новое выражение для зазора в данном месте. Из подобия соответствующих треугольников (см. рис. 2) $d = D\frac{x}{L}$. Здесь D — зазор на конце, L — по-прежнему длина пластинки, а x — расстояние от места соприкосновения пластинок до места, где определяется зазор и высота уровня. Таким образом,

$$\sigma = \frac{1}{2}\rho g y D \frac{x}{L},$$

или

$$y = \frac{2\sigma L}{\rho g D}\cdot\frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) действительно является уравнением гиперболы.

Для проведения опыта можно взять пластинки размером 10×

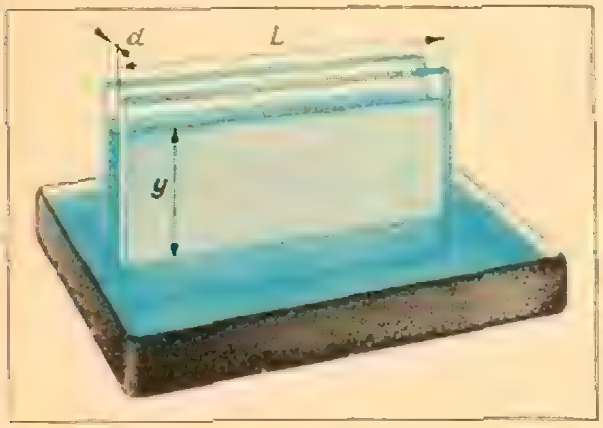


Рис. 1.

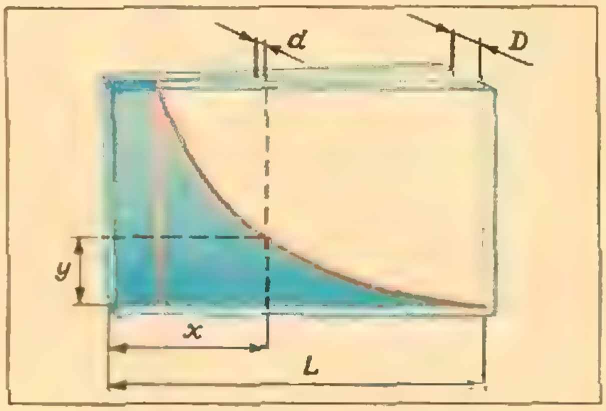


Рис. 2.

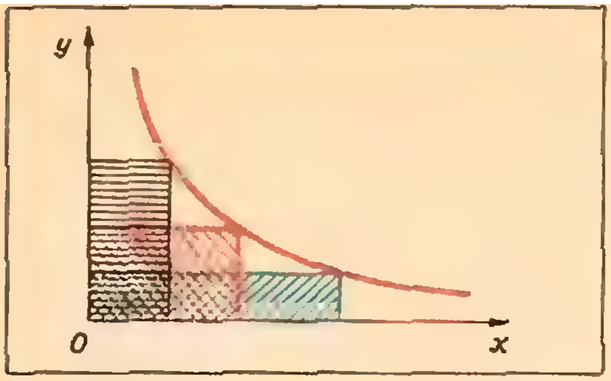


Рис. 3.

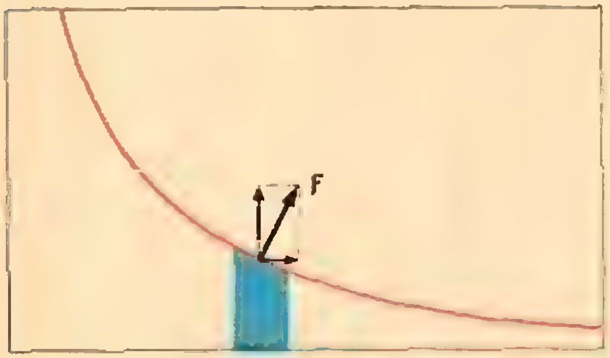


Рис. 4.

× 20 *см*, зазор на конце установить в толщину спички, а в качестве сосуда использовать ванночку для проявления фотобумаги. Для удобства измерений на внешнюю сторону одной из пластинок наклейте миллиметровую бумагу.

Имея график, начерченный водой, можно проверить, действительно ли получилась гипербола. Для проверки воспользуйтесь тем, что площади всех прямоугольников под гиперболой (рис. 3) одинаковы.

Если у вас есть термометр для измерения температуры воды, то можно исследовать зависимость поверхностного натяжения от температуры. Можно также изучить влияние примесей.

В заключение подумайте над таким вопросом: сила поверхностного натяжения F направлена перпендикулярно линии соприкосновения воды со стеклом (рис. 4). Вертикальная составляющая этой силы уравновешена силой тяжести столбика воды. Чем же уравновешена ее горизонтальная составляющая?

«Эффект Паули»

Вольфганг Паули был стопроцентным теоретиком. Его неспособность обращаться с любым экспериментальным оборудованием вошла у друзей в поговорку. Утверждали даже, что ему достаточно просто войти в лабораторию, чтобы в ней что-нибудь сразу же переставало работать. Это мистическое явление окрестили «эффектом Паули» (в отличие от знаменитого «принципа Паули» в квантовой теории). Из документально зарегистрированных проявлений эффекта Паули самым поразительным, несомненно, является следующий. Однажды в лаборатории Джеймса Франка в Геттингене произошел настоящий взрыв, разрушивший дорогую установку. Время этого ЧП было точно зафиксировано. Как потом оказалось, взрыв произошел именно в тот момент, когда поезд, в котором Паули следовал из Цюриха в Копенгаген, остановился на 8 минут в Геттингене.

Из книги «Физики продолжают шутить»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Механика помогает геометрии

М. Б. Балк, Н. А. Григорьев

> *... Я счел нужным написать тебе и... изложить некоторый особый метод, при помощи которого ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем.*
>
> *Архимед. «Послание к Эратосфену. О механических теоремах».*

Со времен Архимеда простейшие понятия механики — и, в первую очередь, понятие о центре тяжести системы материальных точек — неоднократно и с большим успехом привлекались для доказательства геометрических теорем. Так, с помощью механических соображений Архимед впервые доказал теорему о трех медианах треугольника, нашел формулу для вычисления объема шара. Впоследствии механические соображения использовались для вычисления объемов различных тел вращения, нахождения геометрических мест точек, доказательства неравенств и для решения многих других задач из геометрии и алгебры *).

Эта статья написана по материалам занятий, проведенных с учащимися X классов в Смоленском городском физико-математическом кружке (19 октября 1972 г.) и в Ивановской ЮМШ (1 декабря 1972 г.). В ней мы расскажем об одной механической теореме, принадлежащей известному французскому математику Лагранжу (1736—1813), и покажем, как эта теорема позволяет сравнительно легко решать трудные задачи из области элементарной геометрии. Как мы увидим, эта теорема по существу является прямым следствием из теоремы Пифагора.

Центр тяжести

Пусть имеются (см. рис. 1) две материальные точки (точечные массы): A массы m_1 (будем писать короче так: (A, m_1)) и B массы m_2 (B, m_2).

Центр тяжести C двух материальных точек (A, m_1) и (B, m_2) — это точка, расположенная на отрезке AB и удовлетворяющая следующему соотношению («правило рычага» Архимеда):

$$m_1 \cdot AC = m_2 \cdot CB.$$

Если в точке C поместить массы *обеих* материальных точек m_1 и m_2, то возникающую при этом материальную точку $(C, m_1 + m_2)$ условимся называть материальным центром точек (A, m_1) и (B, m_2). Материальный центр трех материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3) (рис. 2) определяется так: сначала следует найти материальный центр $(C, m_1 + m_2)$ точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2), а затем — материальный центр $(Z, m_1 + m_2 + m_3)$ точек $(C, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3). Точка Z будет центром тяжести системы трех материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3).

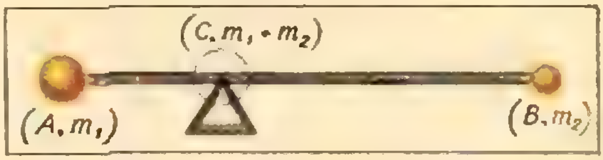


Рис. 1.

---

*) См. также М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, М., Физматгиз, 1959 («Библиотека математического кружка», выпуск 9), и В. А. Успенский, Некоторые приложения механики к математике, М., Физматгиз, 1958 («Популярные лекции по математике», выпуск 27).

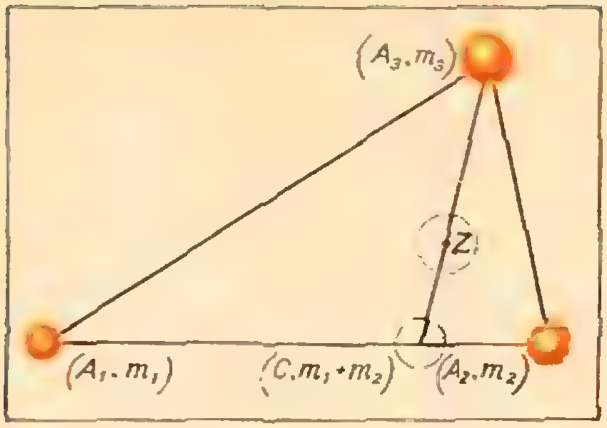


Рис. 2.

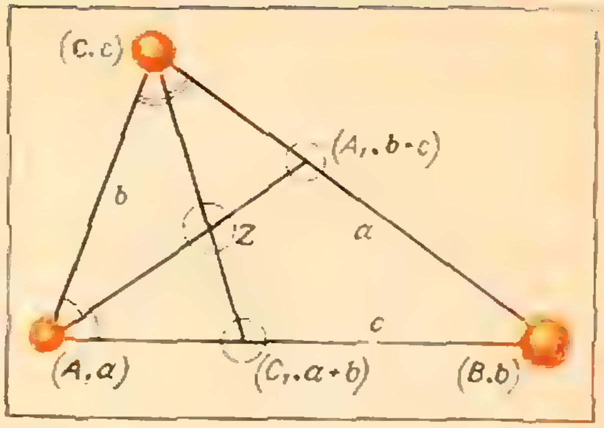


Рис. 3.

Аналогичным образом определяются материальный центр и центр тяжести системы из любого числа (n) материальных точек*).

Теперь решим одну задачу.

Задача 1. *В треугольнике ABC (рис. 3) длины сторон BC, CA и AB равны соответственно a см, b см и c см. Поместим в вершины A, B, C массы a г, b г и c г соответственно. Найти центр тяжести этих трех материальных точек.*

Обозначим через Z центр тяжести материальных точек (A, a), (B, b), (C, c), а через C_1 — центр тяжести материальных точек (A, a) и (B, b). Тогда

$$a \cdot AC_1 = b \cdot C_1B,$$

откуда

$$AC_1 : C_1B = b : a = AC : CB.$$

Отсюда следует, что CC_1 — биссектриса угла C. Заменим точки (A, a) и (B, b) их материальным центром $(C_1, a+b)$. Тогда центр тяжести Z должен оказаться на отрезке CC_1. Точно так же можно убедиться в том, что точка Z должна оказаться на биссектрисе AA_1. Следовательно, Z — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Отметим здесь одно полезное свойство центра тяжести.

Пусть Z — центр тяжести n материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), …, (A_n, m_n), расположенных на плоскости по одну и ту же сторону от некоторой прямой α (рис. 4). *Пусть y_1, y_2, …, y_n и z — расстояния от точек A_1, A_2, …, A_n, Z до прямой α. Тогда*

$$z = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \quad (1)$$

В справедливости этой формулы при $n = 2$ легко убедиться, воспользовавшись правилом рычага. Затем легко доказать формулу (1) при $n = 3$, сведя этот случай к случаю $n = 2$. Для произвольного n формула (1) доказывается методом математической индукции. Попробуйте провести это доказательство самостоятельно.

Момент инерции

Понятие «момент инерции» было введено Леонардом Эйлером (1707—

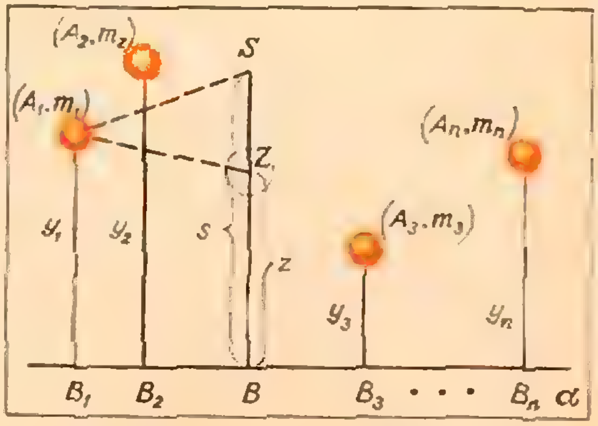


Рис. 4.

---

*) Можно доказать, что положение центра тяжести не зависит от нумерации точек, то есть что данное нами определение «корректно».

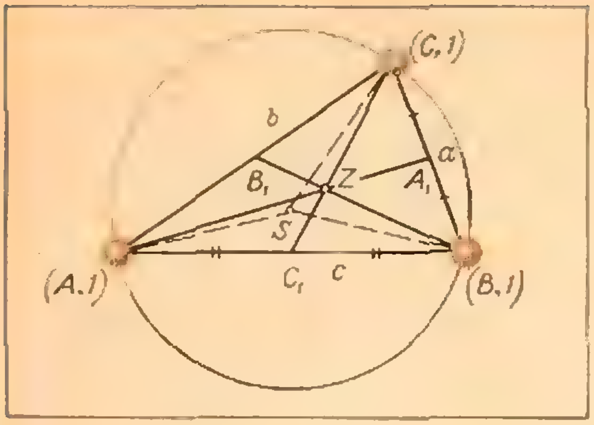


Рис. 5.

1783) более 200 лет тому назад. Пусть имеется система из n материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n), и пусть выбрана еще некоторая точка S. *Моментом инерции данной системы точек относительно точки S называется величина*

$$J_S = m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + \ldots + m_n \cdot SA_n^2 \quad (2)$$

(сумма произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний от точки S). Короче записывают формулу (2) так:

$$J_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot SA_i^2 .$$

Задача 2. *Около треугольника ABC со сторонами a, b, c описана окружность* (рис. 5). *Обозначим через Z точку пересечения медиан треугольника, через S — центр описанной окружности. Вычислить моменты инерции системы материальных точек* $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ *относительно точки Z и относительно точки S.*

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника, Z — точка их пересечения. Тогда

$$J_Z = 1 \cdot ZA^2 + 1 \cdot ZB^2 + 1 \cdot ZC^2 = \frac{4}{9}\left(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2\right) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \quad (3)$$

$$J_S = 1 \cdot SA^2 + 1 \cdot SB^2 + 1 \cdot SC^2 = 3R^2,$$

где $R = \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$ ($S_{\triangle ABC}$ находится по формуле Герона).

Теорема Лагранжа

В 1783 году Лагранж обратил внимание на справедливость следующего утверждения.

Пусть J_S — момент инерции системы материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), ..., (A_n, m_n) относительно произвольной данной точки S, J_Z — момент инерции той же системы относительно ее центра тяжести Z. Тогда

$$J_S = J_Z + M \cdot SZ^2, \quad (4)$$

где

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Доказательство*). Пусть α — такая прямая, что все точки A_1, A_2, ..., A_n лежат по одну сторону от нее и $\alpha \perp SZ$ (см. рис. 4). Пусть B_1, B_2, ..., B_n, B — проекции точек A_1, A_2, ..., A_n, Z на прямую α; $A_1B_1 = y_1$, $A_2B_2 = y_2$, ..., $A_nB_n = y_n$, $BZ = z$, $BS = s$. Из трапеций A_1B_1BZ и A_1B_1BS имеем:

$$SA_1^2 - ZA_1^2 = (y_1 - s)^2 - (y_1 - z)^2 = [(y_1 - z) - (s - z)]^2 - (y_1 - z)^2.$$

Упростив правую часть и умножив обе части на m_1, получим:

$$m_1 \cdot SA_1^2 - m_1 \cdot ZA_1^2 = m_1 \cdot SZ^2 - 2(s - z)(m_1 y_1 - m_1 z).$$

---

*) Мы ограничиваемся случаем, когда все данные материальные точки лежат в одной плоскости; однако утверждение справедливо и при произвольном расположении точек в пространстве (см. упомянутую выше книгу: М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, с. 75—76).

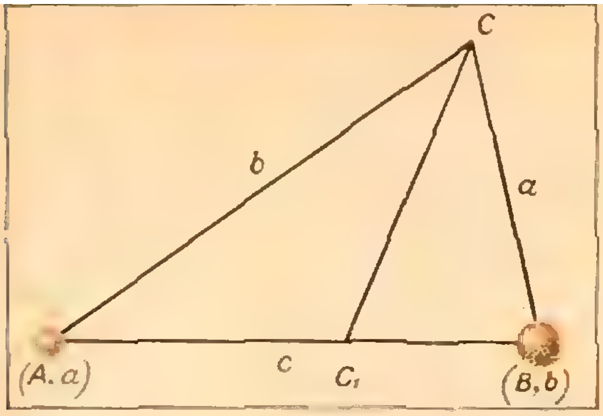


Рис. 6.

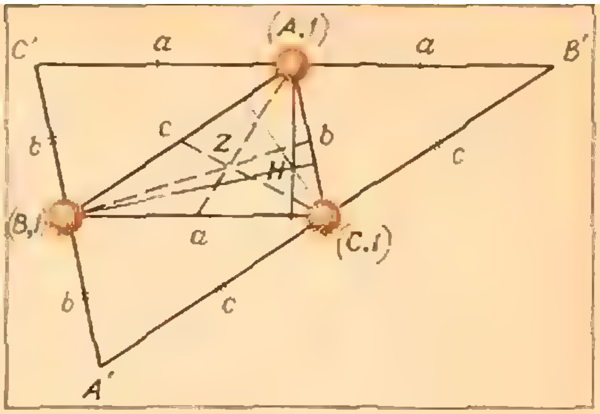


Рис. 7.

Аналогично

$$m_2 \cdot SA_2^2 - m_2 \cdot ZA_2^2 = m_2 \cdot SZ^2 - 2(s-z)(m_2y_2 - m_2z),$$

. . . .

$$m_n \cdot SA_n^2 - m_n \cdot ZA_n^2 = m_n \cdot SZ^2 - 2(s-z)(m_ny_n - m_nz).$$

Складывая почленно эти равенства и учитывая определение момента инерции (2) и формулу (1), получим требуемое равенство:

$$J_S - J_Z = M \cdot SZ^2.$$

Задача 3. *Ребро правильного тетраэдра $SABC$ равно a. Вычислить радиус R описанного около тетраэдра шара.*

Поместим в четырех вершинах тетраэдра массы по 1 грамму. Тогда центр тяжести образовавшихся четырех материальных точек совпадает с центром Z описанного шара. Имеем $J_S = 3a^2$, $J_Z = 4R^2$, $M = 4$ и по формуле (4) получаем: $3a^2 = 4R^2 + 4R^2$, откуда $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Задача 4. *Зная длины a, b, c сторон треугольника ABC, вычислить длину биссектрисы CC_1* (рис. 6).

Поместим в точки A и B такие массы, чтобы точка C_1 оказалась их центром тяжести. Для этого заметим, что по известному свойству биссектрисы $AC_1 : C_1B = AC : CB$, то есть $a \cdot AC_1 = b \cdot C_1B$. Значит, в точку A надо поместить массу в a граммов, а в точку B — b граммов, центром тяжести материальных точек (A, a) и (B, b) будет точка C_1.

По формуле (4) имеем $(a+b) \times \times CC_1^2 = J_C - J_{C_1}$, то есть

$$(a+b)\,CC_1^2 = (a \cdot CA^2 + b \cdot CB^2) - (a \cdot C_1A^2 + b \cdot C_1B^2).$$

Из равенств $AC_1 : C_1B = b : a$, $AC_1 + C_1B = c$ находим:

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b}, \quad C_1B = \frac{ac}{a+b}.$$

Поэтому из (5) следует:

$$CC_1^2 = ab\left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right].$$

Задача 5. *Зная стороны a, b, c треугольника ABC, вычислить расстояние между точкой Z пересечения медиан этого треугольника и точкой H пересечения его высот.*

Поместим в вершины A, B, C (рис. 7) равные массы (по 1 грамму). По формулам (3) и (4) имеем

$$3HZ^2 = J_H - J_Z = HA^2 + HB^2 + HC^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Для вычисления расстояний HA, HB, HC построим треугольник $A'B'C'$, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника ABC и проходят через его вершины. В треугольнике $A'B'C'$ точка H — центр описанной окружности (проверьте!),

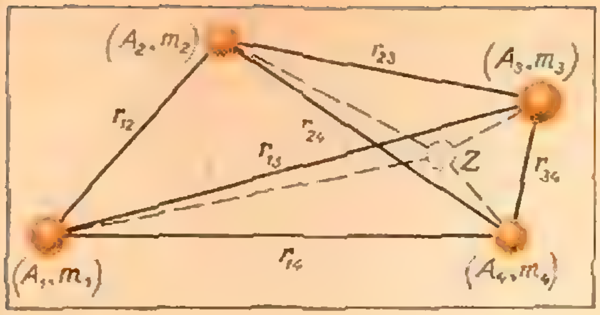


Рис. 8.

и поэтому $HA' = HB' = HC' = R'$, где R' — радиус окружности, описанной около $\triangle A'B'C'$. Так как

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 2,$$

то $R' = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Отсюда $HA^2 = C'H^2 - a^2 = 4R^2 - a^2$, $HB^2 = 4R^2 - b^2$, $HC^2 = 4R^2 - c^2$. Поэтому

$$HZ^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

где $R = \frac{abc}{4S}$, а площадь S треугольника ABC вычисляется через его стороны по формуле Герона.

Другая формула для момента инерции

Остановимся теперь еще на одной формуле для момента инерции, которая находит важные применения в механике (особенно в небесной механике при исследовании так называемой «задачи n тел»). Эта формула оказывается очень полезной и для решения чисто геометрических задач.

Пусть имеется n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$ (рис. 8). Расстояние между точками A_i и A_k обозначим через r_{ik}. (Например, r_{24} — это расстояние A_2A_4.) Выражение

$$\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} m_i m_k r_{ik}^2$$

обозначает сумму всевозможных слагаемых вида $m_i m_k r_{ik}^2$, где i и k — любые целые числа между 1 и n, i меньше, чем k. (Например,

$$\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant 3} m_i m_k r_{ik}^2$$

обозначает $m_1m_2r_{12}^2 + m_1m_3r_{13}^2 + m_2m_3r_{23}^2$.)

Оказывается, что момент инерции J_Z системы материальных точек относительно ее центра тяжести Z можно выразить через взаимные расстояния между этими точками и их массы:

$$J_Z = \frac{1}{M} \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} m_i m_k r_{ik}^2 \qquad (6)$$

($M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ — суммарная масса всей системы).

Доказательство мы проведем только для случая $n = 4$, но из рассуждений будет ясно, что оно пригодно при любом n.

По теореме Лагранжа имеем:

$$m_1 \cdot J_{A_1} = m_1 J_Z + m_1 \cdot M \cdot ZA_1^2,$$

или, подробнее:

$$m_1m_2r_{12}^2 + m_1m_3r_{13}^2 + m_1m_4r_{14}^2 = m_1J_Z + m_1 \cdot M \cdot ZA_1^2.$$

Аналогично

$$m_2m_1r_{12}^2 + m_2m_3r_{23}^2 + m_2m_4r_{24}^2 = m_2J_Z + m_2 \cdot M \cdot ZA_2^2,$$
$$m_3m_1r_{13}^2 + m_3m_2r_{23}^2 + m_3m_4r_{34}^2 = m_3J_Z + m_3 \cdot M \cdot ZA_3^2,$$
$$m_4m_1r_{14}^2 + m_4m_2r_{24}^2 + m_4m_3r_{34}^2 = m_4J_Z + m_4 \cdot M \cdot ZA_4^2.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем:

$$2 \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant 4} m_i m_k r_{ik}^2 = M \cdot J_Z + M \cdot J_Z,$$

что равносильно требуемому равенству (6) (при $n = 4$).

Задача 6. *В окружность радиуса R вписан правильный 100-угольник $A_1A_2A_3 \ldots A_{100}$. Вычислить сумму σ квадратов длин всех его диагоналей и всех его сторон.*

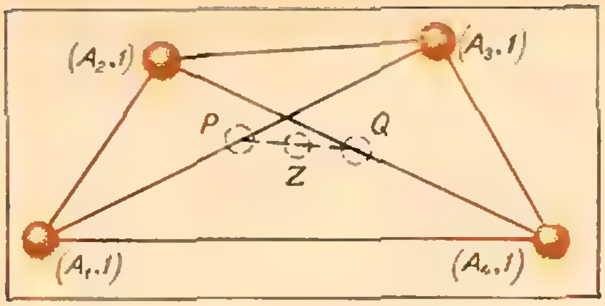


Рис. 9.

Поместим в каждую вершину многоугольника массы по 1 грамму. Центр тяжести возникшей системы материальных точек совпадает с центром O круга. По формуле (6) имеем

$$\sigma = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant 100} A_iA_k^2 = MJ_0 = (100R)^2.$$

Задача 7. *Зная радиус R окружности, описанной около данного треугольника ABC, и радиус r окружности, вписанной в этот же треугольник, вычислить расстояние d между их центрами.*

Пусть S — центр описанной окружности, Z — центр вписанной окружности, a, b, c (*см*) — длины сторон треугольника. Поместим в вершины A, B, C массы соответственно a, b и c граммов. Центром тяжести этой системы окажется точка Z. По формуле (4) имеем

$$J_S - J_Z = (a+b+c)\,d^2. \qquad (7)$$

По формулам (2) и (6) находим:

$$J_S = a \cdot SA^2 + b \cdot SB^2 + c \cdot SC^2 = (a+b+c)\,R^2, \qquad (8)$$

$$J_Z = \frac{abc^2 + bca^2 + cab^2}{a+b+c} = abc. \qquad (9)$$

Кроме того, по известным формулам для площади треугольника имеем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}(a+b+c)\,r,$$

откуда

$$abc = 2Rr\,(a+b+c). \qquad (10)$$

Из формул (7) — (10) следует, что

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Это и есть искомая формула («формула Эйлера»).

Задача 8. *Известно, что в параллелограмме разность между суммой квадратов длин всех его сторон и суммой квадратов длин его диагоналей равна нулю. Эйлер доказал, что в произвольном четырехугольнике эта разность равна учетверенному квадрату расстояния между серединами диагоналей* (рис. 9). *Доказать это утверждение.*

Поместим в вершинах четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ равные массы (по 1 грамму), и пусть Z — центр тяжести образовавшейся системы материальных точек. По определению (2) и по формуле (6) имеем

$$J_Z = ZA_1^2 + ZA_2^2 + ZA_3^2 + ZA_4^2 = \frac{1}{4}\left(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_1A_4^2 + A_1A_3^2 + A_2A_4^2\right). \qquad (11)$$

Рассмотрим теперь систему из двух материальных точек $(A_1, 1)$ и $(A_3, 1)$ (их центр тяжести — середина P отрезка A_1A_3). Применим формулу (4):

$$ZA_1^2 + ZA_3^2 = PA_1^2 + PA_3^2 + 2ZP^2 = \frac{1}{2}A_1A_3^2 + \frac{1}{2}PQ^2. \qquad (12)$$

Аналогично

$$ZA_2^2 + ZA_4^2 = \frac{1}{2}A_2A_4^2 + \frac{1}{2}PQ^2. \qquad (13)$$

Из (11), (12) и (13) следует искомая формула Эйлера:

$$(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2) - (A_1A_3^2 + A_2A_4^2) = 4PQ^2.$$

Упражнения

1. Решите задачу 4 другим способом, воспользовавшись формулой (6).

2. Пусть Z — центр окружности вписанной в треугольник ABC $(BC=a,\ CA=b,\ AB=c)$. Докажите, что

$$a \cdot ZA^2 + b \cdot ZB^2 + c \cdot ZC^2 = abc.$$

3. Какую фигуру представляет собой множество всех точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний от вершин заданного в этой плоскости квадрата $A_1A_2A_3A_4$ со стороной a есть постоянная величина c^2, если $c^2 > 2a^2$?

4. В некотором треугольнике расстояние между точкой пересечения медиан и центром описанной окружности в три раза меньше радиуса этой окружности. Докажите, что треугольник прямоугольный.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 декабря 1973 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М231, М232» или «...Ф243». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).

Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М231—М235; Ф243—Ф247

М231. Найдите все решения в натуральных числах уравнения

$$n^x + n^y = n^z.$$

Р. Егорян, ученик 9 класса

М232. а) Докажите, что к конечному множеству точек на плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить еще одну точку так, что это свойство сохранится.

б) * Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек на плоскости?

П. С. Панков

М233 *. В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее — 1973 раза (рис. 1). Сколько раз будет написано число 1973?

Г. А. Гальперин

М234. Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка — четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют $^1/_3$ их длины. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две стороны которого составляют по $^1/_3$ соответствую-

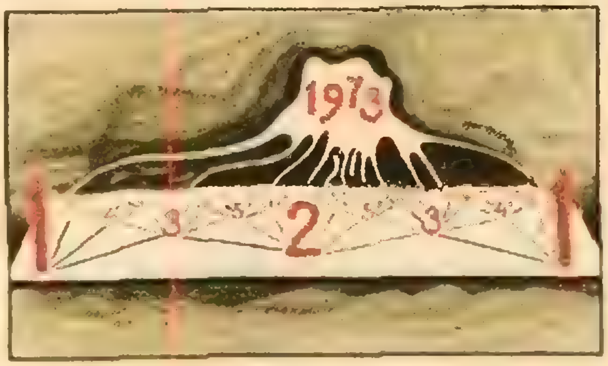


Рис. 1.

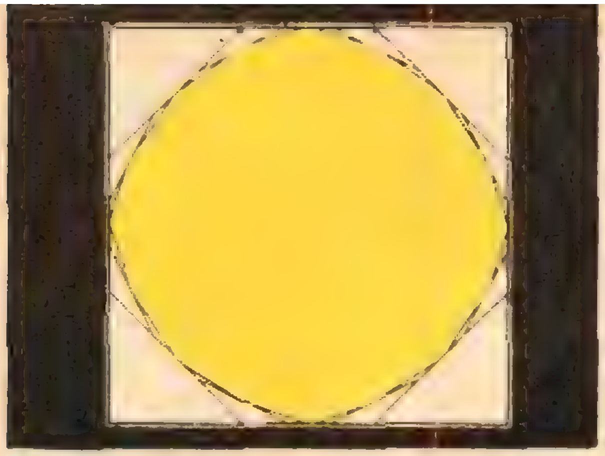


Рис. 2.

щих сторон 8-угольника, и так далее (рис. 2). Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (то есть образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам).

С. Конягин, ученик 10 класса

М235*. По арене круглого цирка радиуса 10 *м* бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 *км*. Докажите, что сумма всех углов, на которые он поворачивал (рис. 3), не меньше 2998 радиан.

И. Н. Бернштейн

Ф243. Почему при ярком освещении те, кто пользуется не очень сильными очками, могут читать и без очков?

И. А. Соловейчик

Почему для того, чтобы сфотографировать одновременно два объекта, один из которых находится дальше другого, и получить на фотопленке резкое изображение обоих объектов, обычно уменьшают диаметр отверстия объектива (объектив диафрагмируют)?

Ф244. К двум точкам прикреплены цепочка длины l и концы двух стержней, сумма длин которых тоже равна l, а свободные концы шарнирно связаны. Чей центр тяжести находится ниже — цепочки или стержней?

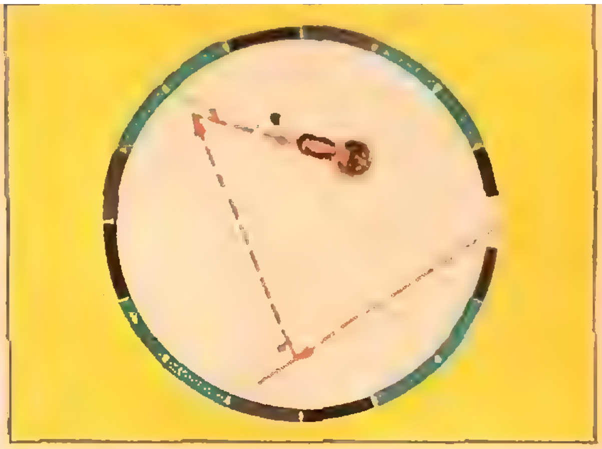


Рис. 3.

Ф245. Имеется равномерно заряженная полусфера. а) Показать, что плоскость, «закрывающая» эту полусферу, эквипотенциальна. б) Определить напряженность поля в точках этой плоскости.

Плотность заряда полусферы равна σ.

Ф246. Теплоизолированный сосуд объемом $2V$ разделен пополам тонкой перегородкой. В одной половине сосуда находится одноатомный газ с температурой T_1 и давлением p_1, в другой половине — другой одноатомный газ с давлением p_2 и температурой T_2. Найти установившуюся температуру смеси газов после того, как убрали перегородку.

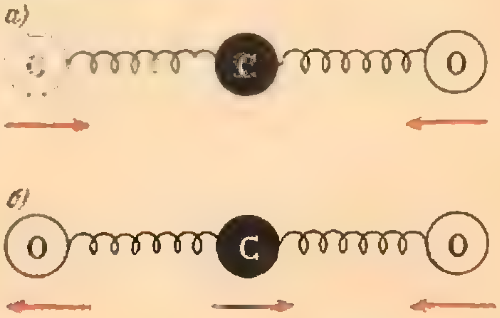


Рис. 4.

Ф247. Модель молекулы углекислого газа CO_2 — три шарика, соединенные пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать линейные колебания двух типов: *а*) или *б*) (рис. 4). Найти отношение частот этих колебаний.

Г. Л. Коткин

Решения задач

М191—М194; Ф203—Ф207

М191. *На плоскости даны две точки A и B и прямая l, проходящая через точку A и не проходящая через точку B. Через точки A и B проводится произвольная окружность. Пусть O — ее центр, C — ее точка пересечения с прямой l, отличная от A. Найдите геометрическое место середины отрезков OC.*

Мы найдем последовательно множества (все они оказываются прямыми линиями, рис. 1):

m_1 центров O;

m_2 середин отрезков OA — точек K;

m_3 середин высот OL равнобедренных треугольников AOC — точек P;

m_4 середин отрезков OC — точек M.

Множество m_1, как хорошо известно, — прямая, проведенная перпендикулярно отрезку AB через его середину. Обозначим через D и E точки пересечения прямой m_1 соответственно с прямой l и с перпендикуляром, восставленным к прямой l в точке A (случай, когда прямые m_1 и l параллельны, очень прост, но должен быть рассмотрен отдельно); через G — середину отрезка AE; через F и H — такие точки прямой l, что $AF = FD = DH$ (рис. 1).

Теперь нужно доказать три утверждения:

(1) Множество середин отрезков, у которых один конец (A) фиксирован, а другой расположен на данной прямой (DE), — прямая линия (FG; рис. 2).

(2) Множество середин отрезков, параллельных заданному направлению (AE) с концами на двух данных прямых (ED и AD), — прямая линия (DG; рис. 3).

(3) Множество вторых концов отрезков, параллельных заданному направлению (l), первые концы и середины которых расположены на данных прямых (FG и DG), — прямая линия (HG; рис. 4).

Все эти утверждения доказываются несложно и почти одинаково. Докажем для примера (3). Во-первых, ясно, что любая точка M на прямой HG удовлетворяет нужному условию: если через точку M провести прямую, параллельную l, и обозначить через K и P ее точки пересечения с прямыми FG и DG, то P будет серединой отрезка KM

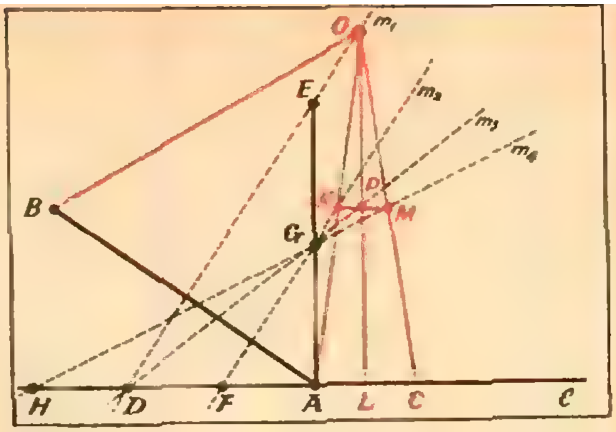


Рис. 1.

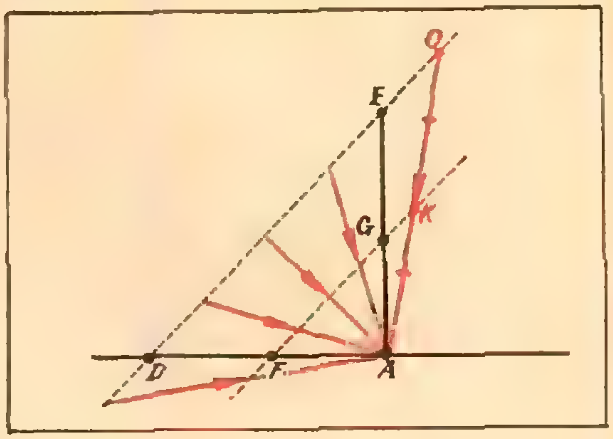


Рис. 2.

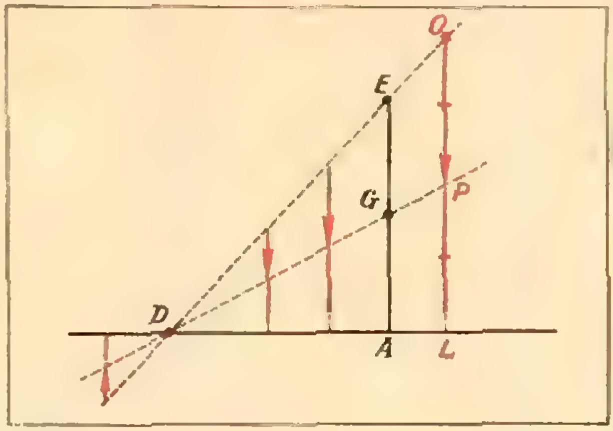


Рис. 3.

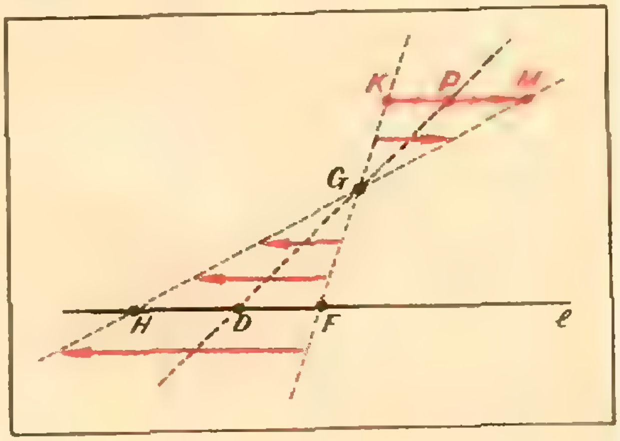


Рис. 4.

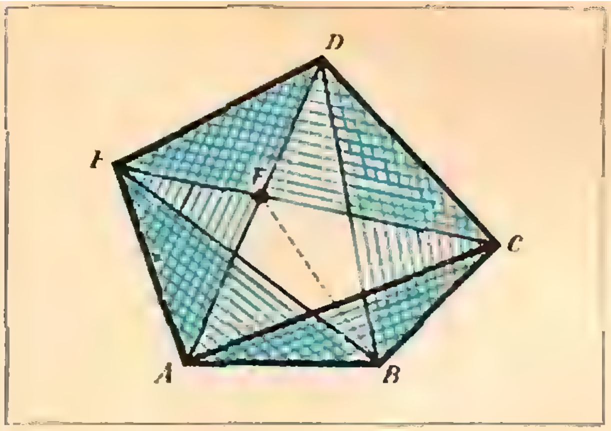


Рис. 5.

(это легко доказать с помощью подобия, используя равенство $HD = DF$). Во-вторых, на любой прямой, параллельной l, очевидно, лежит только одна точка искомого множества. Поэтому других точек (не лежащих на прямой HG) в этом множестве быть не может.

Остальные доказательства проведите сами.

Рассмотрите также случай, когда $AB \perp l$; в этом случае все три прямые (m_2), (m_3), (m_4) сливаются в одну параллельную l и делящую отрезок AB в отношении $1 : 3$.

M192. *Даны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Найдите наибольшее m, обладающее таким свойством: какие бы m из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся $1000 - m$ чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.*

Докажем, что наибольшее m равно 499. Прежде всего, проверим, что никакое m, большее или равное 500, не обладает нужным свойством. Действительно, если $m \geqslant 500$, то, вычеркнув первые m чисел (от 1 до m), мы оставим числа от $m + 1 \geqslant 501$ до 1000, среди которых ни одно, очевидно, не делится на другое (все попарные отношения меньше двух).

Теперь докажем, что $m = 499$ обладает нужным свойством. Другими словами, докажем, что среди любых 501 чисел от 1 до 1000 найдутся два, из которых одно делится на другое (аналогичная задача решена в книге «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», ч. 1, «Арифметика и алгебра» № 91, «Наука», 1965).

Поставим в соответствие каждому числу (из 501) его наибольший нечетный делитель: числу $2^k (2l + 1)$ ставится в соответствие число $(2l + 1)$. Всего нечетных чисел, меньших 1000, существует только 500. Следовательно, каким-то двум из 501 чисел будет соответствовать одно и то же нечетное число. Из таких двух чисел одно обязательно получится из другого умножением на некоторую степень двойки.

M193. *Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон и диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.*

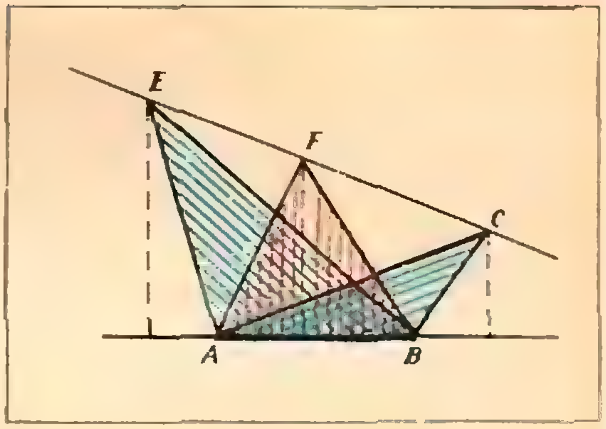


Рис. 6.

Приведем одно из наиболее коротких решений, присланное *А. Макаричевым* (Львов).

Докажем, что сумма площадей некоторых четырех из пяти треугольников, о которых говорится в условии, больше площади пятиугольника.

Пусть дан произвольный выпуклый пятиугольник. Обозначим его вершины буквами $ABCDE$ так, чтобы площадь треугольника ABC была наименьшей из площадей треугольников ABC, BCD, CDE, DEA и EAB (см. рис. 5). Пусть F — точка пересечения AD и EC. Поскольку точка F лежит на отрезке EC, площадь S_{ABF} заключена между S_{ABE} и S_{ABC} (рис. 6). Но мы знаем, что $S_{ABC} \leqslant S_{ABE}$. Поэтому $S_{ABF} \leqslant S_{ABE}$.

Аналогично, поскольку точка F лежит на AD и $S_{ABC} \leqslant S_{BCD}$, то $S_{BCF} \leqslant S_{BCD}$.

Но треугольники AED, EDC, ABF и BCF покрывают пятиугольник (кусок EFD — дважды). Поэтому сумма их площадей больше S_{ABCDE}. Тем более

$$S_{ABE} + S_{AED} + S_{EDC} + S_{BCD} \geqslant$$
$$\geqslant S_{ABCDE}.$$

Наше утверждение доказано.

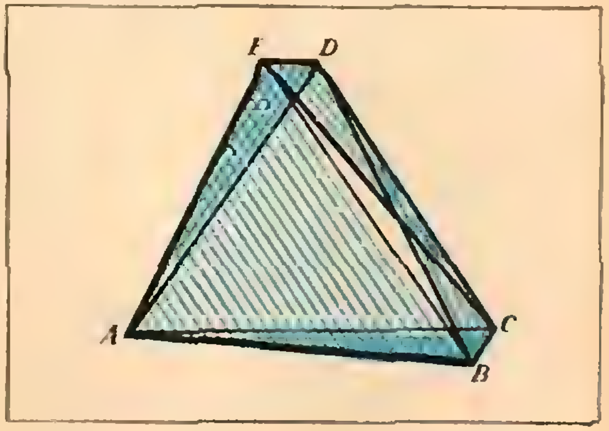


Рис. 7.

Пример, приведенный на рисунке 7, показывает, что отношение площади пяти треугольников к площади пятиугольника может быть очень близко к 1.

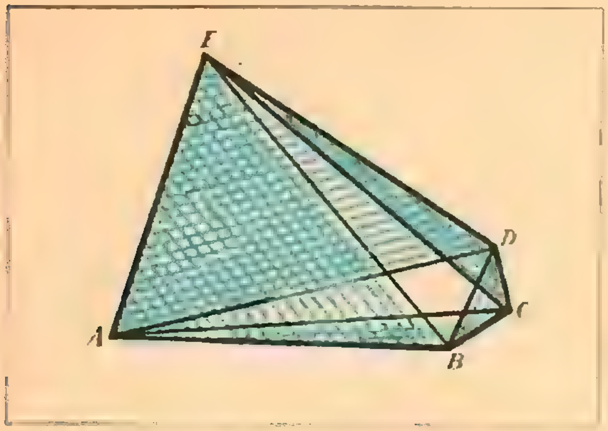


Рис. 8.

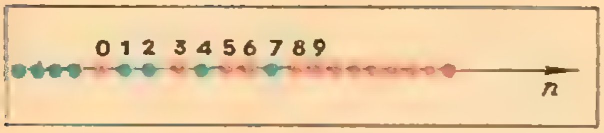


Рис. 9.

Нетрудно видеть, что это отношение не больше 2. Рисунок 8 показывает, что его можно сделать сколь угодно близким к 2.

М194. *Даны два взаимно простых натуральных числа a и b. Известно, что всякое целое число можно представить в виде $ax+by$, где x и y — целые. Рассмотрим множество M целых чисел, которые представим в виде $ax+by$, где x и y — целые* неотрицательные числа.

а) Каково наибольшее число c, не принадлежащее множеству M?

б) Докажите, что из двух чисел n и $c-n$ (где n — любое целое) одно принадлежит M, а другое нет.

(На рисунке 9 для $a=5$ и $b=3$ целые точки, принадлежащие множеству M, — красные, не принадлежащие — голубые).

Нарисуем на плоскости систему координат Oxy и сформулируем нашу задачу на геометрическом языке. Каждую пару целых чисел (x, y) мы будем называть «целой точкой» и изображать красной точкой, если обе ее координаты неотрицательны ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), и синей точкой — если хотя бы одна координата отрицательна (рис. 10). Взаимно простые натуральные числа a и b мы считаем фиксированными (на рисунке мы возьмем $a=5$, $b=3$). Для каждого n уравнение

$$ax+by=n$$

определяет, как известно, прямую. Обозначим ее через l_n. Разумеется, все прямые l_n параллельны друг другу. Пусть n — целое. Будем считать прямую l_n красной, если она проходит хотя бы через одну красную точку, и синей — в противном случае *). Мы должны выяснить, каково наибольшее c, которому соответствует синяя прямая l_c, и доказать, что тогда из двух прямых l_n и l_{c-n} одна — синяя и одна — красная (n — любое целое число).

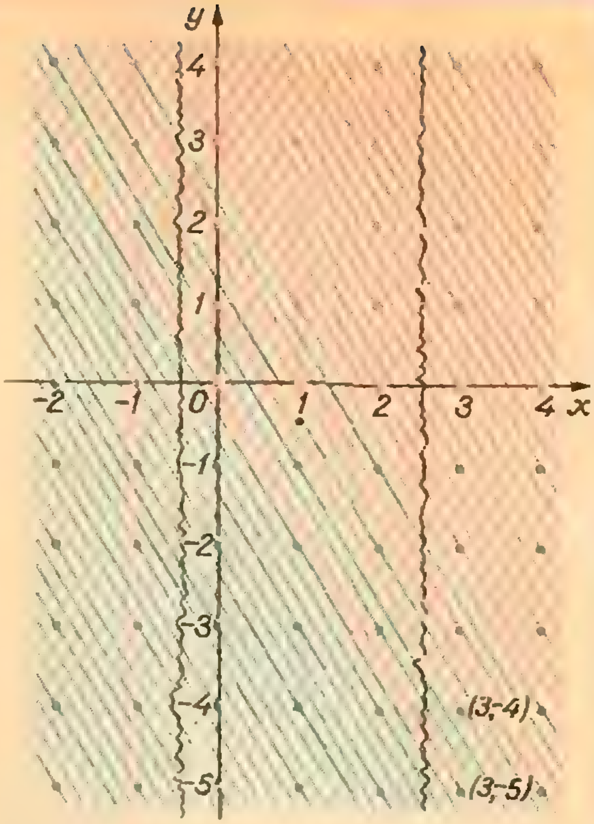


Рис. 10.

Мы будем пользоваться в нашем решении перемещениями плоскости, которые отображают множество целых точек на себя и одновременно каждую прямую l_n переводят в ту же самую или некоторую другую прямую $l_{n'}$ из нашего семейства. Это, во-первых, параллельные переносы на любой вектор (p, q) с целыми p и q:

$$(x, y) \mapsto (x+p,\ y+q),$$

и, во-вторых, повороты на 180° (или, что то же самое, симметрии относительно точки) с любыми центрами $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$, где p и q — целые:

$$(x, y) \mapsto (p-x,\ q-y).$$

Докажем, что на каждой прямой l_n целые точки встречаются через равные промежутки.

---

*) Как следует из сказанного в условии, каждая прямая l_d переходит хотя бы через одну целую точку. Ниже мы докажем этот факт.

Лемма 1. *Если* (x_0, y_0) — *целая точка на прямой* l_n, *то ближайшими к ней целыми точками на* l_n *будут* $(x_0 - b, y_0 + a)$ *и* $(x_0 + b, y_0 - a)$ (a и b взаимно просты[1]).

Рассмотрим прямую l_0, проходящую через (0, 0). Пусть $(-b_1, a_1)$ — ближайшая к (0, 0) целая точка l_0 такая, что $b_1 > 0$, $a_1 > 0$ (мы еще не знаем, что $b_1 = b$, $a_1 = a$). (x_0, y_0) — целая точка l_n. При переносе на вектор (x_0, y_0) отрезок прямой l_0 от (0, 0) до $(-b_1, a_1)$ перейдет в отрезок l_n от (x_0, y_0) до $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$. Тем самым, точка $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$ будет ближайшей к (x_0, y_0) точкой l_n сверху. Точно так же при переносе на вектор $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$ — тот же отрезок прямой l_0 перейдет в отрезок прямой l_n от $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$ до (x_0, y_0). Следовательно, и на этом отрезке целыми точками будут только его концы.

Отсюда уже следует, что на любой прямой l_n (если на ней есть хоть одна целая точка) промежуток между соседними целыми точками один и тот же: a_1 единиц по оси Oy и b_1 — по оси Ox. Это, в частности, относится и к прямой l_0. Поскольку $(-b, a)$ принадлежит l_0, то отсюда следует, что $b = db_1$, $a = da_1$, где d — некоторое целое число. Но числа a и b по условию взаимно просты. Значит, $d = 1$, то есть $a = a_1$, $b = b_1$. Лемма 1 доказана.

Из этой леммы следует, что каждая прямая l_n, где n — целое, переходит ровно через одну точку внутри полосы $0 \leqslant x \leqslant b - 1$. При этом, очевидно (см. рис. 10), если прямая красная, то есть где-то переходит через красную точку, то ее целая точка в выделенной полосе тоже будет красной (а точка синей прямой, разумеется, синяя).

Теперь заметим, что при симметрии относительно точки $\left(\frac{b-1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right)$

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (b - 1 - x, -1 - y),$$

полоса $0 \leqslant x \leqslant b - 1$ переходит в себя, причем красные точки переходят в синие, и наоборот. Прямая l_n после этой симметрии переходит в прямую $l_{ab-a-b-n}$: если $ax + by = n$, то $ax' + by' = a(b - 1 - x) + b(-1 - y) = ab - a - b - n$. (Через центр симметрии, где

$$a\left(\frac{b-1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{ab - a - b}{2},$$

ни одна из наших прямых может и не проходить; на рис. 10 центр — точка $(1, -\frac{1}{2})$.)

Ясно, что самая нижняя красная прямая — это l_0. Следовательно, самая верхняя синяя прямая — это l_{ab-a-b}. Итак, наибольшее число, не принадлежащее множеству, — это

$$c = ab - a - b,$$

и из двух чисел n и $c - n$ одно принадлежит M, а другое — нет.

Мы пользовались тем, что каждое целое n можно представить в виде $ax + by$, где x и y — целое. Это тоже нетрудно доказать с помощью «решетки».

Лемма 2. *На каждой прямой* l_n, *где* n — *целое, есть хотя бы одна целая точка.*

Достаточно доказать, что целая точка (x_0, y_0) есть на прямой l_1: если $ax_0 + by_0 = 1$, то $a(nx_0) + b(ny_0) = n$, так что (nx_0, ny_0) будет принадлежать l_n.

Рассмотрим параллелограмм с вершинами (0,0); (0, 1); $(b, 1 - a)$; $(b, -a)$, две меньшие стороны которого равны 1, а большие лежат на прямых l_0 и l_b. Внутри этого параллелограмма (не в вершинах) лежит $b - 1$ целая точка: на каждой прямой $x = 1$, $x = 2$, $x = b - 1$ — по одной. С другой стороны, всего этот параллелограмм пересекают как раз столько же — $(b - 1)$ — прямых l_n: $l_1, l_2, \ldots, l_{b-1}$ (не считая l_0 и l_b). Поскольку более одной целой точки, координаты x которых отличаются меньше чем на b, прямая l_n иметь не может, то, стало быть, все точки в количестве $(b - 1)$ лежат по одной штуке на каждой прямой. В частности, есть целая точка и на l_1. Лемма 2 доказана.

Н. Б. Васильев

Ф203. *В электронном генераторе использован триод, в котором расстояние между катодом и анодом равно 1 мм. Оценить максимальную частоту колебаний, которые можно получить, используя этот генератор, если анодное напряжение составляет 200 в.*

Периодическое колебание тока в анодной цепи лампы генератора достигается периодическим изменением потенциала сетки лампы. Время t, за которое происходит одно колебание потенциала сетки, должно быть не меньше времени τ пролета электрона от катода к аноду. Максимальную возможную частоту колебаний, получаемых с помощью данного генератора, можно определить из условия

$$\tau = t \Rightarrow \nu_{\max} = \frac{1}{\tau}.$$

(Если $\tau > t$, то электрон не успевает достигнуть катода до «запирания» лампы.)

Напряженность поля между электродами $E = \frac{U}{d}$ (мы не учитываем меняющееся поле сетки), ускорение электрона равно $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}$. Следовательно,

$$d = a\frac{\tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d^2m}{Ue}}.$$

Поэтому $\nu_{\max} = \sqrt{\frac{Ue}{2d^2m}} \approx 3\,000$ *Мгц.*

И. Ш. Слободецкий

Ф204. *Космический корабль подлетает к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. В момент максимального сближения с Луной на короткое время включается тормозной двигатель, и корабль переходит на круговую орбиту спутника Луны. Определить изменение скорости корабля при торможении. Радиус Луны $R_{\text{Л}} = 1740$ км, ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_{\text{Л}} = 1{,}7$ м/с².*

Примечание. *На параболической траектории полная энергия корабля равна нулю.*

При движении космического корабля по параболической траектории в любой точке траектории выполняется условие

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = 0,$$

то есть

$$\gamma\frac{mM_{\text{Л}}}{R} = \frac{mv^2}{2},$$

где $M_{\text{Л}}$ — масса Луны, m — масса корабля, R — расстояние от корабля до Луны, v — скорость корабля в данной точке, γ — гравитационная постоянная. В момент максимального приближения к Луне $R = R_{\text{Л}}$ (так как траектория почти касается поверхности Луны, мы пренебрегаем высотой орбиты по сравнению с радиусом Луны $R_{\text{Л}}$). Скорость корабля в этот момент максимальна; найдем ее из условия

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \gamma\frac{M_{\text{Л}}m}{R_{\text{Л}}};$$

отсюда

$$v_{\max} = \sqrt{2\gamma\frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} = \sqrt{2g_{\text{Л}}R_{\text{Л}}}$$

($v_{\max}$ — вторая космическая скорость для Луны). При движении по круговой орбите центростремительное ускорение кораблю сообщает сила тяготения. Следовательно, при торможении скорость корабля надо понизить до величины v_1, определяемой из условия

$$\frac{mv_1^2}{R_{\text{Л}}} = \gamma\frac{M_{\text{Л}}m}{R_{\text{Л}}^2}$$

(согласно второму закону Ньютона). Отсюда

$$v_1 = \sqrt{\gamma\frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} = \sqrt{g_{\text{Л}}R_{\text{Л}}}\ .$$

Изменение скорости при торможении

$$\Delta v = v_{\max} - v_1 = g_{\text{Л}}R_{\text{Л}}(\sqrt{2} - 1) \approx$$
$$\approx 700 \text{ м/с}.$$

С. М. Козел

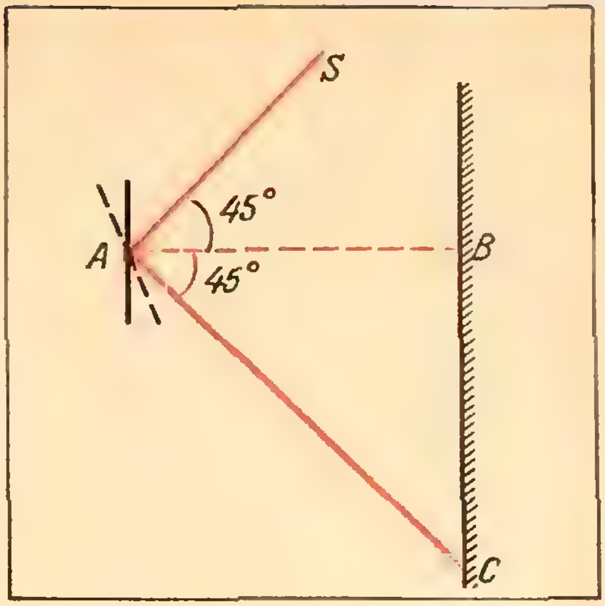


Рис. 11.

Ф205. *Осколком стекла A неправильной формы на вертикальную стенку пускают солнечный зайчик один раз в точку B, другой раз в точку C (рис. 11). Зайчик в точке B оказывается круглым, а освещенность его в центре втрое больше, чем на участках, освещенных только рассеянным светом. Какова освещенность в центре зайчика в точке C?*

Лучи SA, AB и AC лежат в одной вертикальной плоскости, луч AB горизонтален, ∠SAB = ∠BAC = 45°.

Вы, наверное, не раз замечали, что если стенка, на которую вы пускаете солнечный зайчик, находится далеко от вас, то зайчик оказывается круглым, а если стенка находится близко, то солнечный зайчик имеет ту же форму, что и зеркало. Почему это происходит?

Лучи света, идущие от любой точки Солнца, отражаются от зеркала и, попадая затем на экран, дают пятно, имеющее форму зеркала (рис. 12). Так как Солнце находится

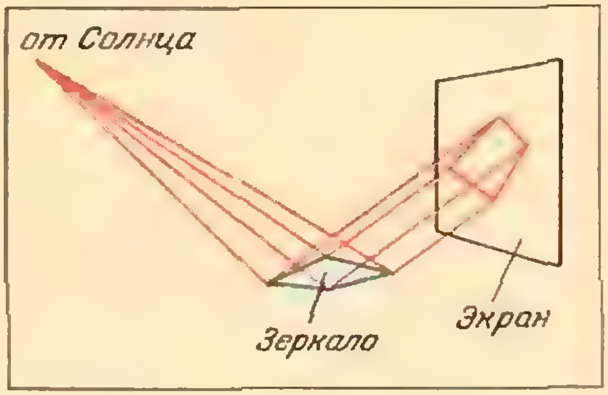


Рис. 12.

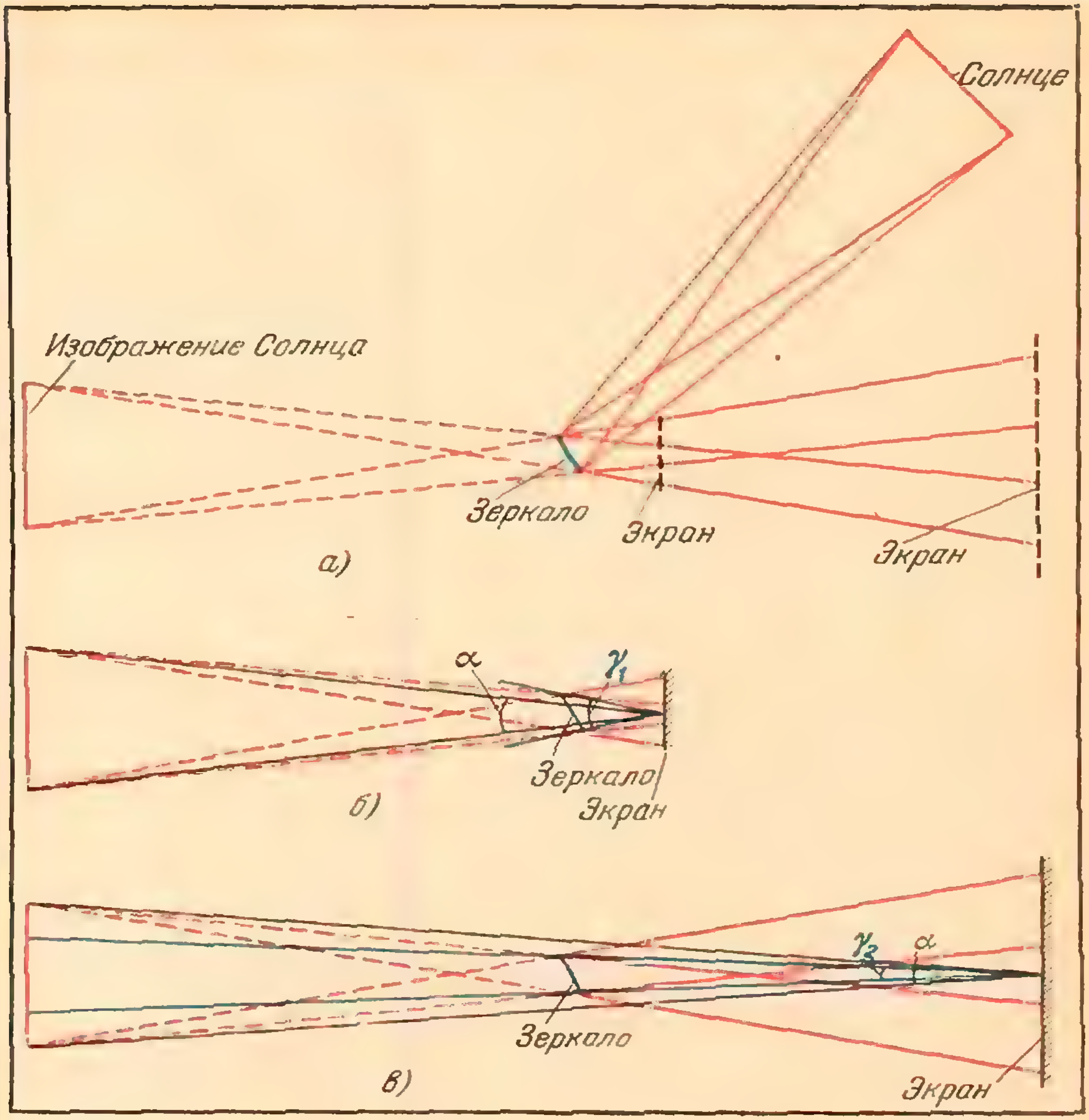


Рис. 13.

очень далеко и лучи, идущие от точки Солнца и отраженные затем от зеркала, можно считать параллельными друг другу, то размер пятна совпадает с размером зеркала. Такое пятно дает каждая точка Солнца. На экране пятна накладываются друг на друга. Если экран находится близко к зеркалу, так что размер каждого из пятен больше расстояния между пятнами, которые получаются при отражении от зеркала лучей, идущих от диаметрально противоположных точек Солнца, то зайчик на экране будет иметь форму зеркала, хотя и несколько размытую (размеры зайчика будут мало отличаться от размеров зеркала). Если же экран находится далеко от зеркала, так что размеры каждого пятна малы по сравнению с большим «суммарным» пятном, то это большое пятно будет круглым или эллиптическим, в зависимости от угла между плоскостями зеркала и экрана.

Выше мы говорили о большом или малом расстоянии между зеркалом и экраном. Но какие расстояния можно считать большими, а какие малыми? Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим лучи, идущие из диаметрально противоположных точек Солнца (или, что то же, от точек мнимого изображения Солнца в зеркале) (см. рис. 13, *а*). Ясно, что пятно на экране имеет форму зеркала, если угловой размер зеркала, то есть угол γ_1, под которым видно зеркало из точки экрана, больше углового размера Солнца α (рис. 13, *б*). Если же угловой размер Солнца больше углового размера зеркала γ_2 (рис. 13, *в*), то зайчик на экране имеет форму круга (или эллипса).

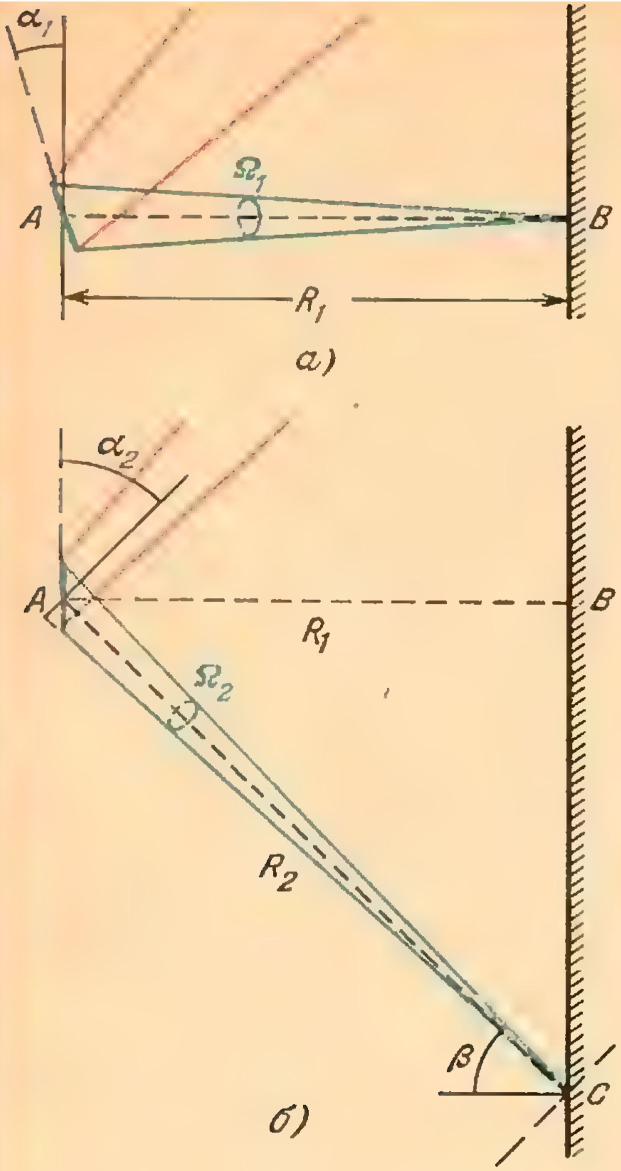


Рис. 14.

В нашем случае зайчик от осколка стекла оказался в точке B круглым. Круглым он будет и в точке C, которая находится от стекла еще дальше, чем точка B. Это означает, что угловой размер Солнца в нашем случае больше углового размера стекла. Но в этом случае, как видно из рисунка 13, *в*, в каждую точку экрана попадают лучи, идущие не из всех точек Солнца или его мнимого изображения, а только из тех, которые видны из точки экрана в том же телесном угле Ω, что и стекло. Следовательно, освещенность пятна на экране за счет тех лучей, которые отражаются от стекла, пропорциональна телесному углу Ω, в котором видно стекло из точки экрана. Для точки B этот угол равен $\Omega_1 = \dfrac{S\cos\alpha_1}{R_1^2}$, где S — площадь поверхности стекла (рис. 14, *а*). Поэтому добавка к освещенности рассеянным светом в точке B экрана равна $k\dfrac{S\cos\alpha_1}{R_1^2}$, где k — коэффициент пропорциональности.

Пусть E_0 — освещенность тех участков экрана, на которые попадает только рассеянный свет. Тогда в точке B добавка к освещенности рассеянным светом составляет

$$\Delta E_B = 3E_0 - E_0 = 2E_0 = \frac{kS\cos\alpha_1}{R_1^2}. \quad (1)$$

В точке C телесный угол, в котором видно зеркало (рис. 14, *б*), равен

$$\Omega_2 = \frac{S\cos\alpha_2}{R_2^2}.$$

Это означает, что если бы экран в точке C был перпендикулярен солнечным лучам, то его освещенность в точке C была бы равна

$$E_C = E_0 + k\Omega_2 = E_0 + k\frac{S\cos\alpha_2}{R_2^2}.$$

Так как отраженные солнечные лучи в точке C составляют угол β с нормалью к поверхности экрана, то

$$E_C = E_0 + k\frac{S\cos\alpha_2}{R_2^2}\cos\beta. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), найдем, что

$$E_C = E_0\left[1 + 2\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\cos\beta\right].$$

Так как $R_2 = R_1/\cos\beta$, $\alpha_1 = 22{,}5°$, $\alpha_2 = 45°$ и $\beta = 45°$, то

$$E_C = E_0\left[1 + 2\frac{\cos^4 45°}{\cos 22{,}5°}\right] = 1{,}52\ E_0.$$

Ф206. *Оцените, до какой максимальной температуры может нагреться из-за трения о воздух поверхность самолета, который летит со скоростью, близкой к скорости звука. Для оценки считать, что воздух состоит из двухатомных молекул азота, энергия которых равна 5/2 kT, где k — постоянная Больцмана и T — абсолютная температура. Температуру окружающего воздуха считать равной — 10° С.*

При столкновении молекулы азота с поверхностью самолета она не может получить энергию большую, чем $\dfrac{5}{2}kT_1 + \dfrac{mv^2}{2}$, где v — скорость самолета (или, в системе координат, связанной с самолетом, средняя скорость упорядоченного движения налетающих на нос самолета молекул азота), m — масса молекулы азота, T_1 — температура окружающего воздуха.

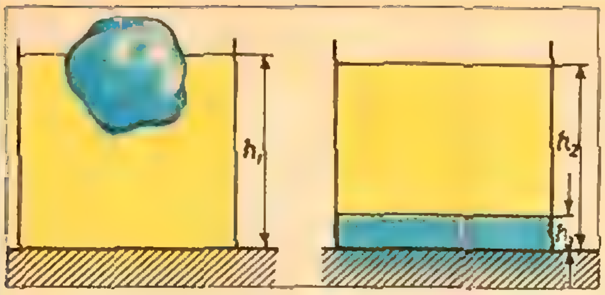


Рис. 15.

Так как молекулы азота после столкновения с самолетом должны иметь энергию $\frac{5}{2}kT_2$, соответствующую температуре T_2 поверхности самолета, то

$$\frac{5}{2}kT_2 < \frac{5}{2}kT_1 + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$T_{2\max} = T_1 + \frac{1}{5}\frac{mv^2}{k} \approx 373\ ^\circ\mathrm{K}.$$

Ф207. *На поверхности масла, налитого в цилиндрический сосуд, плавает кусочек водяного льда. Температура всей системы равна 0° С. Как изменится уровень масла и давление на дно сосуда, когда лед растает, и образовавшаяся вода опустится на дно сосуда?*

Давление на дно сосуда не изменится. Действительно, сила давления на дно F равна весу содержимого сосуда, и вес не меняется. Следовательно, не меняется и само давление, равное $\frac{F}{S}$, где S — площадь дна сосуда.

А как меняется уровень масла? Пусть высота уровня воды в сосуде равна h_3, высота уровня масла равна h_2, а высота уровня масла до таяния льда h_1 (рис. 15). Так как лед плавает и не касается дна сосуда, то давление на дно в первом случае равно

$$p_1 = \rho_м g h_1.$$

Во втором случае оно равно

$$p_2 = \rho_м g (h_2 - h_1) + \rho_в g h_3$$

($\rho_м$ — плотность масла, $\rho_в$ — плотность воды).

Из равенства давлений следует, что

$$\rho_м h_1 = \rho_м (h_2 - h_1) + \rho_в h_3$$

и

$$h_2 = h_1 - \left(\frac{\rho_в}{\rho_м} - 1\right) h_3.$$

Так как $\frac{\rho_в}{\rho_м} > 1$, *то* $h_2 < h_1$.

Следовательно, уровень масла при таянии льда понизится.

И. Ш. Слободецкий

Мы получили более 250 решений задачи **M182** и более 200 решений задачи **M186**. Правильные решения задач **M180**, **M181**, **M183—M185**, **M187—M189** прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *А. Абдурахманов* (Баку) **4**; *С. Абрамов* (Москва) **1**; *П. Агаронов* (Баку) **1**; *С. Агеев* (Воронеж) **3**, **7**, **9**; *Н. Ажищев* (п. Литовка Львовской обл.) **4**; *С. Актеричев* (Магнитогорск) **3**, **7**; *Ю. Акутин* (Москва) **1**, **3**, **7**; *В. Алекин* (Москва) **3**, **4**; *Г. Амвросов* (Каспи ГССР) **3**; *Б. Ашавский* (Москва) **1**, **3**; *Р. Аюпова* (д. Бизяки ТАССР) **3**; *С. Бадиков* (Хмельницкий) **3**; *П. Баньковский* (Уральск) **3**, **4**; *А. Бараов* (с. Старый Урух КБАССР) **8**; *М. Баум* (Москва) **1**, **3—5**; *Е. Башкиров* (Минск) **3**, **7**; *С. Белолипецкий* (Киржач Владимирской обл.) **1**; *Н. Березовский* (Черновцы) **3**, **4**; *А. Берлин* (Бобруйск) **1**, **3**, **8**; *Л. Блаженова* (Москва) **3**; *А. Блох* (Харьков) 06), **1**, **3—5**, **7—9**; *А. Борзяк* (Москва) **1**; *С. Бородецкий* (Пушкин) **7**; *М. Бренерман* (Казань) **1**; *Е. Быстров* (Унеча Брянской обл.) **3**; *А. Вайнсвский* (Баку) **3**, **7**; *А. Вальков* (Ташкент) **1**, **3**, **4**, **8**, **9**; *К. Вартанян* (Кафан) **3**; *С. Василенков* (Донецк) **1**; *А. Векслер* (Ташкент) **8**; *С. Вилкомир* (Москва) **3**, **5**; *Ю. Вороновский* (Днепропетровск) **3**, **4**, **7**; *А. Восканян* (Ереван) **3**; *Г. Высоцкая* (Красноярск) **1**, **3**; *О. Гапоненко* (Кировоград) **3**; *С. Гизунов* (Ленинград) **3**; *А. Гизунтерман* (Черновцы) **1**; *А. Глазков* (Киев) **1**, **8**, **9**; *О. Глущенко* (Киев) **3**; *Б. Гомбосурэнгийн* (МНР) **4**; *А. Гордиенко* (Москва) **1**, **5**; *И. Готман* (Арзамас) **3**; *Л. Готман* (Арзамас) **3**; *М. Грабельковский* (Воронеж) **8**; *А. Григорян* (Баку) **1**, **3**, **4**, **7—9**; *А. Гуденко* (Нарофоминск Московской обл.) **3**; *А. Гуревич* (Минск) **3**; *Е. Гусев* (Павлоград Днепропетровской обл.) **1**; *Я. Гусейнов* (Сиазань АзССР) **4**; *К. Данильченко* (Волгоград) **4**; *В. Дворецкий* (Отрадный Куйбышевской обл.) **7**; *М. Денисов* (Ростов-на-Дону) **3**; *М. Дербинян* (Тбилиси) **3**; *Ю. Довгодько* (Киев) **1**, **3**; *В. Драчев* (Новосибирск) **3**; *М. Драчинский* (Тбилиси) **3**; *И. Дылевский* (Москва) **3**, **5**, **7**; *А. Еременко* (Харьков) **7**, **9**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **3**; *А. Журавлев* (Москва) **3**, **8**; *В. Запорожская* (п. Сосница Черниговской обл.) **3**, **7**; *Г. Заргарян* (Тбилиси) **3**; *А. Заславский* (Калинин) **1**, **3**, **4**; *В. Згонник* (ст. Подгородная Николаевской обл.) **3**; *С. Зинович* (Ташкент) **3**, **8**; *М. Златоустовский* (с. Правая Хава Воронежской обл.) **3**; *Е. Зубкова* (Москва) **1**; *Ж. Идирисов* (с. Саты Алма-Атинской обл.) **4**; *С. Иоанниди* (Тбилиси) **3**; *Л. Иозефавичус* (Калининград) **3**; *С. Калантарян* (Степанакерт АзССР) **3**; *В. Карасев* (Ярославль) **3**; *В. Карачик* (Ташкент) **3**; *Д. Карпов* (Павлоград) **3**; *А. Кац* (Баку) **1**; *В. Квасницын* (Коркино Челябинской обл.) **1**; *П. Кирей* (Николаев) **3**; *Ю. Кириленко* (Черкассы) **1**, **7**; *С. Кириллов* (Куйбышев) **1**, **3**; *И. Кирови* (Болгария) **1**, **3**, **4**; *А. Клейн* (Одесса) **7**; *Ю. Князихин* (Таллин) **7**; *М. Кобозев* (Киев)

1, 3, 4, 8; *О. Кожушняк* (Москва) **3**; *К. Козел* (Польша) **1, 4**; *Б. Коломенский* (Киев) **3**; *В. Комлев* (Красноярск) **3**; *С. Конягин* (Саратов) **0, 1, 3—5, 7, 8**; *С. Корнеев* (Новокузнецк) **3**; *С. Кузнецов* (Чебоксары) **1, 3**; *А. Кукуш* (Киев) **3, 7, 9**; *Е. Куланин* (Рязань) **3**; *В. Кульбака* (с. Держановка Черниговской обл.) **3**; *В. Куранов* (Тетюши ТАССР) **3**; *А. Курбатов* (Москва) **3**; *А. Куряндчик* (Ленинград) **1, 3—5, 8, 9**; *Л. Лалаян* (Баку) **3**; *А. Легостев* (Москва) **3**; *Г. Либеров* (Москва) **1**; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) **1, 3, 4**; *М. Лифшиц* (Ленинград) **0** 6); *Ю. Лебач* (Евпатория) **1, 7, 8**; *Т. Локотош* (Одесса) **3**; *И. Лучинкин* (Днепропетровск) **1, 3, 4**; *А. Львов* (Саратов) **3**; *М. Любич* (Харьков) **8**; *Е. Мазур* (Дербент) **1**; *А. Макаричев* (Львов) **1, 4, 5**; *Г. Малашонок* (Львов) **1, 3, 4, 7, 8**; *В. Маркин* (Толочин Витебской обл.) **1, 4**; *Г. Матвеев* (Ленинград) **3, 4, 7**; *В. Мацукатов* (п. Цалка ГССР) **3**; *И. Меджибовский* (Москва) **3**; *С. Мельник* (Харьков) **1, 3**; *С. Мерзляков* (Уфа) **3, 4**; *Ю. Меренков* (Бердигестях ЯАССР) **3, 4**; *К. Миннахметов* (Бугульма ТАССР) **1, 3**; *А. Молотков* (Кубинка Московской обл.) **7**; *В. Мондрус* (Тбилиси) **3**; *Ж. Мукажанов* (ст. Жарма Семипалатинской обл.) **7**; *Г. Муминов* (Хаджиабадский р-н УзССР) **4**; *Г. Мустафаев* (Сиазань АзССР) **1, 3, 4**; *К. Мхитарян* (Ереван) **1**; *А. Мягков* (Калининград) **3**; *В. Нападов* (Харьков) **7**; *С. Насыров* (Казань) **3**; *В. Наумов* (п. Коммунар Ленинградской обл.) **4**; *Л. Нахмансон* (Орск) **3**; *А. Николаев* (Москва) **1, 3, 5, 7**; *Т. Никонова* (Москва) **3**; *Р. Норвайша* (Каунас) **3**; *С. Нужный* (Куйбышев) **1, 3, 7**; *С. Овчинников* (Ленинград) **3, 4**; *С. Оганесян* (Армавир) **3**; *В. Олейник* (Днепропетровск) **1, 4**; *В. Орлов* (Астрахань) **3**; *Д. Панженский* (Усть-Каменогорск) **4**; *В. Паньков* (Минск) **1, 3**; *О. Паракина* (Москва) **3**; *П. Парамонов* (Москва) **1, 3**; *Э. Парилис* (Ташкент) **1, 3, 8**; *А. Парлов* (ст. Узловая Тульской обл.) **1**; *А. Пастухов* (Свердловск) **1**; *Н. Петров* (Болгария) **4**; *А. Печковский* (Москва) **1, 3, 4**; *А. Пидман* (Одесса) **1, 3, 4**; *В. Писарский* (Москва) **1**; *С. Пищиков* (Москва) **3**; *Л. Пищикова* (п/о Плисса Минской обл.) **3**; *С. Пожидаев* (Куйбышев) **1, 3, 7**; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **1**; *В. Поркшеян* (Ростов-на-Дону) **1**; *А. Пригорницкий* (Славянск Донецкой обл.) **3**; *В. Прунис* (Москва) **8**; *С. Путинцев* (Кемерово) **1, 3**; *Г. Пятецкий* (Москва) **3**; *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) **8**; *А. Райнин* (Москва) **1, 3—5**; *А. Рашковский* (Харьков) **1, 3—5**; *А. Резников* (Киев) **3**; *Г. Резников* (Саратов) **3, 4**; *С. Родионов* (Саратов) **1, 3—5**; *Р. Рожков* (Рязань) **1, 3, 4**; *Е. Рудерман* (Черновцы) **3**; *Н. Рундквист* (Свердловск) **1**; *М. Садыков* (Казань) **3**; *М. Сапир* (Свердловск) **1, 3, 4**; *С. Сатановский* (Харьков) **1, 3—5, 7**; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) **4**; *А. Сегаль* (Ленинград) **8**; *Т. Сельбирак* (Польша) **1, 3**; *В. Семенов* (Миасс Челябинской обл.) **1**; *С. Семенов* (Воронеж) **3**; *И. Сивицкий* (Ленинград) **7**; *И. Сидоров* (Москва) **3, 4**; *И. Симакин* (Воронеж) **3**; *П. Симонович* (Москва) **1, 3, 4, 7**; *М. Синяков* (Саратов) **1**; *Р. Сирота* (Харьков) **3—5**; *Г. Скляр* (Харьков) **1, 3—5**; *В. Слепой* (Фрунзе) **3, 7**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **1, 3, 7—9**; *А. Слинкин* (Москва) **1, 3, 4, 7, 8**; *А. Сокохов* (Новосибирск) **3**; *В. Солодушкин* (Степногорск) **1**; *Б. Соломяк* (Ленинград) **1, 3**; *Т. Сопа* (с. Каменское Запорожской обл.) **3**; *П. Сухов* (Саратов) **1, 3**; *С. Стелькина* (Могилев) **3**; *С. Табачников* (Москва) **1, 3, 4, 7—9**; *А. Тарнопольский* (Коростень Житомирской обл.) **4, 7**; *И. Темный* (Первомайск Николаевской обл.) **1**; *А. Ткач* (Каменец-Подольский) **1**; *В. Ткаченко* (Киев) **3**; *О. Трунов* (Джалал-Абад КиргССР) **3**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **1, 3, 4, 7, 9**; *С. Фомин* (Ленинград) **1, 3—5, 7, 9**; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) **3**; *В. Хонин* (Первоуральск) **4**; *С. Церковный* (Ленинград) **1, 3, 4, 9**; *И. Цукерман* (Ленинград) **1**; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) **3, 7**; *В. Цыркелевич* (Бельцы) **1**; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) **3**; *С. Черемшанцев* (Ленинград) **3, 4**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **1, 3, 4**; *А. Черебатов* (Омск) **8**; *Ю. Чернявский* (Киев) **1, 3**; *З. Чертков* (Киев) **1, 3**; *М. Шаймухамбетов* (Алма-Ата) **3**; *А. Шерстюк* (Николаев) **1, 3, 4**; *Е. Шестаков* (Москва) **1, 3, 4**; *В. Ширман* (Харьков) **1, 3—5**; *Д. Шляпников* (Новосибирск) **3**; *Ю. Шмелев* (Ярославль) **1, 3**; *Ю. Шпилев* (Гурьев) **7**; *И. Шугалев* (Москва) **1, 3, 4**; *И. Щербаков* (Первомайск Николаевской обл.) **1, 3, 4**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **1, 3—5, 7, 9**; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **1, 3, 4**; *И. Юнус* (Харьков) **1, 3—5, 7**; *А. Яковлев* (п. Самохваловичи Минской обл.) **1, 3**; *А. Ярославцев* (Щелково Московской обл.) **4**.

Ю. П. Лысов

Редакция получила свыше 500 писем с решениями задач **Ф193—Ф202**. Правильные решения этих задач прислали (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера задачи): *Н. Ажищев* (с. Липовка Львовской обл.) **9, 0**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **9**; *С. Алехин* (Липецк) **1**; *А. Амиров* (Оренбург) **9**; Ш. *Атакулов* (Фергана) **9**; *Н. Атищев* (п. Липовка Львовской обл.) **9**; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) **0, 2**; *С. Благодер* (Бокситогорск) **9**; *А. Блехман* (Алма-Ата) **9**; *С. Бобков* (Курган) **2**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **8, 9, 0, 1, 4, 5**; *А. Браславец* (Новосибирск) **7**; *И. Братовская* (Усолье-Сибирсксе) **7**; *М. Бунеев* (п. Кечевка Кечевского р-на) **9**; *П. Бухаринов* (Березняки) **9**; *М. Васнецов* (Киев) **0**; *Ю. Визгин* (Ленинград) **4**; *И. Волков* (Москва) **9, 0**; *А. Восканян* (Ереван) **4, 5**; *Б. Герасимов* (Сарапул УдАССР) **6**; *А. Герман* (Воронеж) **0, 4, 6, 7**; *С. Герц* (Хуст) **1**; *Н. Голоэко* (Прохладный) **6**; *В. Голутва* (Высокополье) **9**; *В. Горбулин* (с. Красногвардейское Ставропольского края) 9; *А. Григорян* (Баку) 5; *Г. Грико* (Солигорск) 9; *Е. Гугемо* (Днепропетровск) 0; *Е. Гусев* (Павлоград) 4, 6, 7; *Ф. Довлетова* (п. Первомайский БАССР) 1; *В. Дяченко* (Гадяч Полтавской обл.) 9, 0; *С. Жаров* (Ефремов Тульской обл.) 6; *В. Жгуч* (Тасеево) 9; *В. Жук* (Грозный) 0; *Ю. Заец* (Каспи) 9; *П. Зиновец* (Конотоп) 0; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) 8; *Т. Ибрагимов* (Москва) 0; *В. Игнатьев* (Волгоград) 4, 5, 6, 7, 9, 0, 1, 2; *Р. Иорданян* (Тбилиси) 9; *Е. Калягина* (Грозный) 7; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) 8, 9, 2; *В. Карасев* (Ярославль) 0, 1; *С. Карпенко* (Киев) 9;*Е. Карпов*(Москва) 7; *Д. Карпов* (Павлоград) 3, 8, 9; *П. Кирей* (Николаев) 9; *О. Киселева* (с. Задонск) 9; *Н. Кирсти* (п. Зеленодольск Днепропетровской обл) 3; *Я. Коган* (Глазов) 8, 9, 1; *А. Колесников* (Москва) 8, 9; *В. Кошарнер* (Вольногорск) 2; *Л. Кофман* (Таллин) 9,0; *А. Кравченко* (Запорожье) 2, 4, 7; *В. Кравченко* (Днепропетровск) 4, 6, 7; *Н. Кудрик* (Коломна) 7; *В. Кузнецов* (Грозный) 7; *С. Кузнецов* (Загорск) 9; *В. Кузьмин* (Грозный) 2; *А. Кукун* (Киев) 1; *П. Кулябин* (Жердевка Тамбовской обл.) 4, 3, 6, 9, 1; *Ю. Лурье* (Грозный) 5, 6; *И.Люзин* (Минск) 4; *А. Мальков* (Миасс) 8, 9; *А. Мамян* (п. Носмберян АрмССР) 4, 5, 7; *С. Мельник* (Харьков) 8, 9, 0, 1; *С. Молотков* (Златоуст) 6, 1; *А. Морсев* (Москва) 8, 9, 0, 1; *А. Мягков* (Калининград) 4, 7; *А. Николаев* (Москва) 6, 7, 9, 0; *С. Новиков* (Свердловск) 0; *Е. Новикова* (Ленинград) 7; *С. Нужный* (Куйбышев) 5, 7, 9, 1, 2; *Ю. Оробинский* (Воронеж) 8, 9, 0, 2; *А. Павлов* (Сочи) 5; *А. Панжинский* (Усть-Каменогорск) 7; *Ю. Перфильев* (Саратов) 4; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) 6, 7, 9; *С. Пожидаев* (Куйбышев) 7; *Н. Попов* (Ленинград) 7; *О. Резник* (Лунинец Брестской обл.) 4; *М. Ригмант* (Магнитогорск) 3, 8, 9, 0; *Е. Рудерман* (Черновцы) 3; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) 7; *В. Силкин* (Калинин) 4; *Я. Симкин* (Москва) 4, 6, 9, 0, 2; *А. Смагин* (Москва) 6, 7; *Ю. Смирнов* (Ленинград) 0, 1, 2; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 4, 5, 7, 9, 1; *Е. Соколов* (Тула) 0; *В. Спиридонов* (ст. Мартыновка Николаевской обл.) 9, 0, 1; *В. Суслепаров* (Кунгур) 9, 0; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 7, 8, 9, 2; *Ю. Филимонов* (Химки Московской обл.) 9, 2; *С. Фофанов* (Москва) 3, 4; *Д. Фушман* (Черновцы) 6; *В. Хажуев* (п. Новомихайловский Туапсинского р-на) 7; *С. Хоменко* (Подольск) 6, 7; *И. Ципенюк* (Солнцево) 4, 6; *Л. Циферблат* (Львов) 9, 1; *В. Цукерук* (Киев) 9, 0; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) 7; *В. Чертков* (Киев) 4, 6, 8, 0; *С. Четкин* (Осторожск) 4, 8, 9, 0, 1, 2; *Е. Шафирович* (Ногинск) 9, 0, 1; *Е. Шахнович* (Калинин) 9, 1; *К. Шварцман* (Кишинев) 7; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 4, 6, 7, 9, 0, 1, 2; *В. Шнейман* (Харьков) 9, 0, 2; *А. Шумаков* (Тула) 0, 2; *С. Щукин* (Днепропетровск) 4,1, 2; *А. Юдин* (Сызрань) 8; *А. Ян* (Ереван) 9.

С. Г. Семенчинский

Календарная задача

Не всегда легко определить день юбилея. Возьмем, например, день рождения великого астронома Николвя Коперника.

В XV веке пользовались Юлианским календарем. По этому календарю (как теперь говорят, по старому стилю) Коперник родился 19 февраля 1473 года. Сейчас пользуются Грегорианским календарем. По этому календарю (по новому стилю) днем рождения Коперника надо считать 28 февраля 1473 года. Разница между одними и теми же датами по этим календарям в XV веке составляла 9 суток. Так что 500-летие со дня рождения Коперника по новому стилю надо праздновать 28 февраля 1973 года. Но можно рассуждать и иначе. По старому стилю надо отмечать этот день 19 февраля. Поэтому 19 февраля 1973 года по старому стилю истекло 500 лет со дня рождения Коперника. Но в XX веке разница между календарями стала уже 13 дней, и день рождения поэтому приходится на 4 марта 1473 года.

Какой же день вычислен правильно? Почему вообще возникла разница?

Я. С.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Числовые данные в геометрических задачах

С. В. Овчинников, И. Ф. Шарыгин

В большинстве стандартных школьных задач числовые данные вообще не играют никакой роли. Как правило, такие задачи можно решить в общем виде, используя «буквенные» обозначения, а затем подставить в полученный ответ данные числа. Однако часто использование «специфики» числовых данных позволяет получить более простое решение. В этой заметке мы на примерах покажем, как по-разному влияют числовые данные на решение задачи.

Начнем с задачи, предлагавшейся на вступительных экзаменах на химический факультет МГУ в 1970 году.

Задача 1. *Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, и точка D лежит на хорде AB.* При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. *Найти площадь треугольника ABC.*

Заметим, что $\angle ODC = 90°$. Действительно, продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью (рис. 1). Так как $AD \cdot BD = CD \times \times DE$, то $DE = CD = \sqrt{2}$ и $OD \perp CE$. Из $\triangle AOF$ мы находим радиус окружности. Он равен $\sqrt{3}$, поэтому из треугольника OFD получаем, что $\angle FDO = 60°$. Отсюда

$$\angle CDA = 30°, \quad \angle CDB = 150°.$$

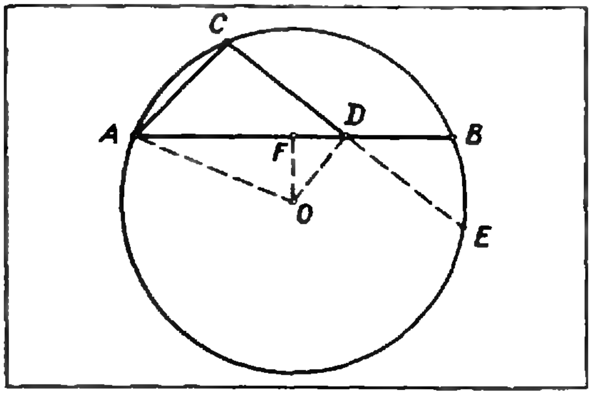


Рис. 1.

Воспользовавшись формулой для определения площади треугольника по двум сторонам и углу между ними, получим, что $S_{\triangle ADC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_{\triangle CDB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Отсюда $S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Анализируя приведенное решение, мы видим, что числовые данные в задаче подобраны «весьма удачно». Если мы попытаемся решить эту задачу в общем виде, то есть возьмем в качестве исходных данных произвольные числа, то очень быстро убедимся, что решение оказывается непомерно громоздким. (Попытайтесь все-таки решить эту задачу в общем виде. Это будет полезным упражнением.) А вот типичная задача, в которой числовые данные не играют никакой роли. Они используются лишь на последнем этапе при подстановке в общий ответ и носят иллюстративный характер.

Задача 2 (геофак МГУ, 1968). *В треугольнике ABC проведены биссектриса AD угла BAC и биссектриса CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC, точка F — на стороне AB). Найти отношение площадей тре-*

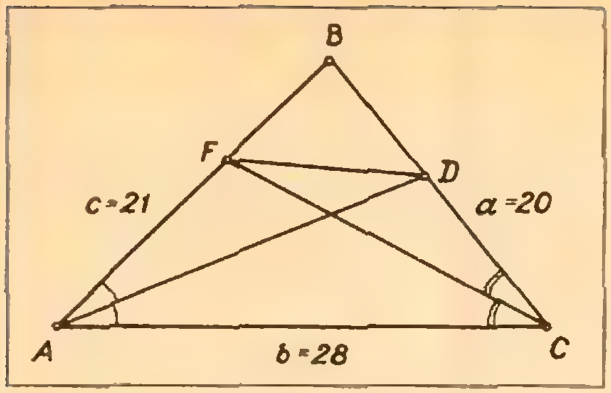


Рис. 2.

угольников ABC и AFD, если известно, что $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

Обозначим стороны треугольника AB, BC и CA соответственно через c, a и b (рис. 2). Используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, находим, что

$$AF = \frac{bc}{a+b}, \qquad BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Отсюда

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c},$$

$$\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{AF}{AB} = \frac{b}{(a+b)},$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{(a+b)(b+c)}{bc}$$

Подставляя вместо a, b и c их численные значения, находим $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFD}} = 4$, а потому искомое отношение равно 4.

Следующая задача может быть решена в общем виде, но решение существенно упрощается, если вовремя воспользоваться численными значениями.

Задача 3 (мехмат МГУ, 1969). *Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найти периметр треугольника ABC, если известно, что* $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Обозначим плоскости, на которые спроектирован треугольник ABC, через P и Q (рис. 3). Очевидно, можно считать, что одна из вершин треугольника, например A, лежит на общем ребре R плоскостей P и Q. Так как проекции сторон AB и AC на плоскости P и Q равны, точки A, B и C лежат в биссекторной плоскости S двугранного угла, образованного плоскостями P и Q. Проекции точек B и C на Q обозначим через D и E. Опустим из точки B перпендикуляр BF на ребро R, $\angle BFD = 45°$.

В дальнейших вычислениях можно было бы не фиксировать длину отрезка AB, а считать ее произвольной величиной a. В этом случае решение тоже можно довести до конца. Но данное конкретное значение $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ позволяет существенно упростить решение.

Действительно, из треугольника ABD находим: $BD = \frac{1}{2}$ ($\angle ADB = 90°$, AB и AD даны). Так как $\angle BFD = 45°$, то $FD = BD = \frac{1}{2}$ и в треугольнике AFD имеем $\angle AFD = 90°$, $\angle FAD = 30°$. Отсюда получаем последовательно, что $AE \perp AF$, $\angle CAE = 45°$, $\angle CEA = 90°$, $AC = \sqrt{2}$. Из прямоугольной трапеции $CBDE$ имеем $(CE - BD)^2 + DE^2 = BC^2$. Отсюда $BC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, и периметр треугольника ABC равен $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Если в рассмотренной задаче числовые данные, существенно умень-

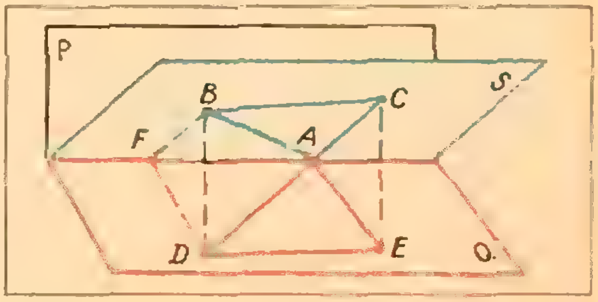


Рис. 3.

шая объем вычислений, помогали нам, то иногда они, наоборот, создают вычислительные трудности и даже затеняют простой геометрический смысл задачи.

Задача 4 (геофак МГУ, 1971). *В треугольнике* ABC *со сторонами* $AB = 3$ *см*, $BC = 4$ *см и* $AC = 5$ *см проведена биссектриса* BD. *В треугольники* ABD *и* BCD *вписаны окружности, которые касаются* BD *в точках* M *и* N *соответственно. Определить длину отрезка* MN.

Числовые данные этой задачи показывают, что треугольник прямоугольный. Это может привести к попытке решить задачу, используя метрические свойства прямоугольного треугольника.

На самом деле задача имеет простое геометрическое решение для произвольного треугольника ABC. Обозначим AB через c, BC через a и AC через b (рис. 4). По свойству биссектрисы $AD = \frac{bc}{a+c}$, $CD = \frac{ab}{a+c}$. Введем неизвестные $x = BM$, $y = MN$ и $z = ND$. Так как касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + \left(\frac{ab}{a+c} - z\right) = a, \\ x + \left(\frac{bc}{a+c} - z - y\right) = c. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$2y + \frac{ab}{a+c} - \frac{bc}{a+c} = a - c,$$

откуда

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{(a-c)(a+c-b)}{a+c}.$$

Подставляя вместо a, b и c их значения, находим, что $MN = \frac{1}{7}$.

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых специально подобранные числовые данные резко упрощают решение задачи.

Задача 5. *В треугольнике* ABC *даны стороны* $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$ *и* $BC = 5$. *На стороне* AB *взята точка* D *такая, что* $AD = 1$. *Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников* DBC *и* ADC.

Если мы догадаемся, что CD является высотой, то решение находится очень быстро: центры окружностей, описанных около треугольников ADC и DBC, лежат на серединах сторон AC и BC, и искомое расстояние равно длине средней линии, параллельной AB, то есть 2 (рис. 5). То, что CD является высотой, следует из равенства

$$BC^2 - AC^2 = BD^2 - DA^2 = 8.$$

Как же догадаться, что CD является высотой? Ведь из решения видно, что эта догадка является основным моментом в решении — все остальные рассуждения тривиальны. Мы не со-

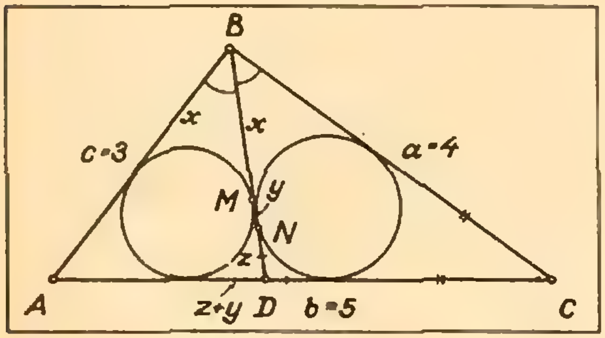


Рис. 4.

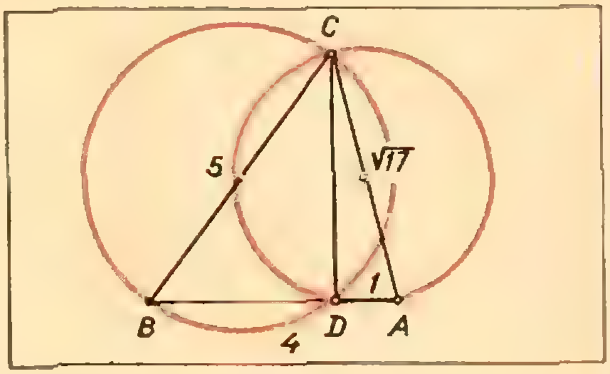


Рис. 5.

бираемся (да и не можем) объяснить, как надо догадываться, но на одно важное обстоятельство укажем. Речь идет о чертеже. Аккуратно и грамотно выполненный чертеж является очень хорошим помощником при решении задачи. Это относится к любой геометрической задаче, как с числовыми, так и с буквенными данными. Если данные — числовые, то на чертеже следует отразить заданные размеры фигуры. Например, если в разобранной задаче сделать чертеж с соблюдением заданных пропорций, то довольно легко увидеть, что CD — высота.

Задача 6 (геофак МГУ, 1970). *В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$ см, $BC = 26$ см и боковые стороны $AB = 5$ см, $CD = 12$ см. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.*

Достроим трапецию до треугольника AED (рис. 6). Из подобия треугольников BEC и AED легко получаем $BE = 10$ *см*, $CE = 24$ *см*. Если чертеж выполнен аккуратно, то можно заметить, что $\angle AED = 90^\circ$. Это легко доказать: $AE^2 + ED^2 = AD^2$. Пусть O — центр окружности, проходящей через A и B и касающейся ED в точке G. Опустим из O перпендикуляр OF на AB, тогда F — середина хорды AB. Очевидно, $OG = EF = 12{,}5$ *см*. Отсюда искомый радиус равен 12,5 *см*.

В следующих задачах числовые данные проявляются весьма своеобразно. При предварительном изучении такой задачи трудно предугадать, как именно повлияют эти данные на решение, но стоит начать решать задачу, и в некоторый момент станет ясно, что только при этих данных можно получить ответ. Как правило, в подобных задачах путь решения очевиден, хотя с самого начала не ясно, приведет ли он к ответу.

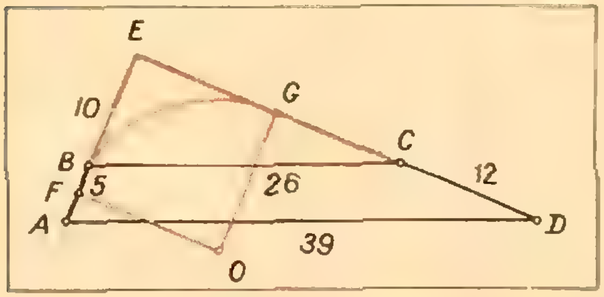


Рис. 6.

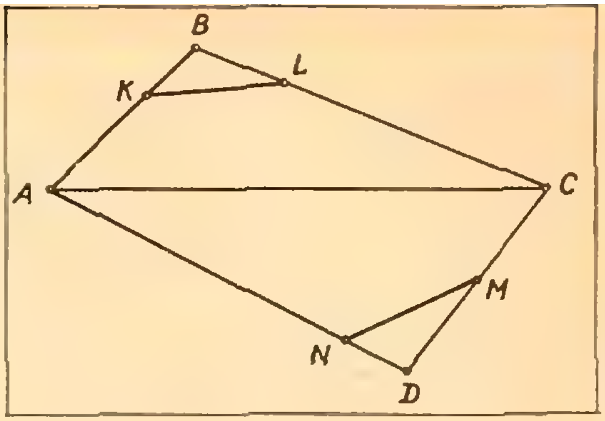


Рис. 7.

Задача 7 (биофак МГУ, 1970). *На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD и N на AD. При этом* $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$, $\frac{CM}{MD} = 1$, $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$. *Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.*

Отношение площадей треугольников KBL и ABC равно $\frac{BK \cdot BL}{AB \cdot BC} = \frac{1}{12}$ (рис. 7). Отношение площадей треугольников MND и ADC равно $\frac{DN \cdot DM}{AD \cdot CD} = \frac{1}{12}$. Таким образом, сумма площадей треугольников KBL и MND равна $\frac{1}{12}$, откуда искомая площадь равна $\frac{11}{12}$.

Ясно, что такая задача в общем виде вообще не имеет однозначного решения.

Задача 8 (мехмат УрГУ, 1968). *Три пункта A, B и C соединены пря-*

молинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$*. К отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги CA примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной CA, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км² больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.*

На первый взгляд данных слишком мало для решения задачи. Однако перейдем к вычислениям. Обозначим стороны треугольника AB, BC и CA через c, a, b соответственно. Тогда из условий задачи имеем: $4b=20+\frac{c^2}{4}+a^2$. Воспользуемся неравенством треугольника $b\leqslant a+c$ и подставим в него b, выраженное через a и c:

$$\frac{1}{4}\left(20+\frac{c^2}{4}+a^2\right)\leqslant a+c.$$

После простых преобразований этого неравенства получаем: $\left(\frac{c}{2}-4\right)^2+(a-2)^2\leqslant 0$, откуда $c=8$ (*км*), $a=2$ (*км*), а $b=a+c=10$ (*км*). Площадь леса равна 40 *км*².

Избранный путь решения является единственно возможным в данной задаче. Но то, что он приводит к ответу, оказалось следствием специально подобранных данных. В результате этого подбора три точки A, B и C оказались лежащими на одной прямой и данных задачи хватило для получения ответа.

Упражнения

1 (мехмат МГУ, 1969). Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 2. Одна из диагоналей четырехугольника равна $\sqrt{14}$. Найти другую диагональ.

2. В остроугольном треугольника ABC дано $AB=15$, $BC=10$ и угол BAC равен $\arccos\frac{7}{9}$. Вокруг треугольника ABC описана окружность и через точку D, лежащую на AC на расстоянии 9 от A, проведена хорда BE. Найти площадь треугольника AEC.

3. Дан треугольник ABC со сторонами 5, 2 и $\sqrt{22}$, причем $AC=\sqrt{22}$. На AC взята точка D такая, что $BD=3$. Найти расстояние между точкой D и центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

4. (физфак МГУ, 1971). В правильную треугольную пирамиду $SABC$, все ребра которой равны a, вписана сфера. На ребре SA взята точка M так, что $AM=MS$, а на ребре BC взята точка N так, что $2CN=NB$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

5 (химфак МГУ, 1971). В треугольнике ABC со сторонами $AB=\sqrt{3}$ *см*, $BC=4$ *см*, $AC=\sqrt{7}$ *см* проведена медиана BD. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются BD в точках M и N соответственно. Определить длину отрезка MN.

6 (геофак МГУ, 1971). Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Определить радиус r, если $AB=12$ *см*, $R=8$ *см*.

7 (биофак МГУ, 1971). Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$ Найти длины хорд BD и CD.

8 (биофак МГУ, 1970). Дан треугольник ABC, площадь которого равна единице. На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R так, что

$$\frac{AP}{PK}=1,\quad \frac{BQ}{QL}=\frac{1}{2},\quad \frac{CR}{RN}=\frac{5}{4}.$$

Найти площадь треугольника PQR.

9 (экономич. ф-т МГУ, 1970). Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен 150 *см*³, площадь полной поверхности равна 280 *см*², периметр основания равен 40 *см*. Найти размеры бруска.

10 (экономич. ф-т МГУ, 1971). В двугранный угол 60° вписан шар радиуса R. Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол 45°

11. Дан треугольник со сторонами $AB=4$, $BC=3$ и $AC=5$. На стороне AB взята точка D так, что $DB=\frac{7}{8}$. Через точки C, D и B проведена окружность, пересекающая AC в точке E. Найти длину отрезка BE.

И. П. Гурский

Кинематика прямолинейного движения материальной точки

Равномерное прямолинейное движение

Равномерным прямолинейным движением называется движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения. Уравнение такого движения в векторной форме записывается так:

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}t,$$

где $\mathbf{S}$ — перемещение, $\mathbf{v}$ — скорость движения, t — время.

Движение материальной точки всегда рассматривается относительно какого-либо тела, которое в данной задаче принимается за неподвижное и называется телом отсчета. С ним связывается система координат; вместе с телом отсчета они образуют систему отсчета. Для прямолинейного движения достаточно выбрать одну ось координат, например OX. Тогда положение точки будет определяться его координатой x. Уравнение равномерного движения в скалярной форме будет выглядеть так:

$$x = x_0 + vt,$$

где x_0 — координата точки в момент времени $t = 0$.

Правильный выбор системы отсчета часто существенно облегчает решение задачи. Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью $v_1 = 72$ км/ч, видит встречный поезд, идущий со скоростью $v_2 = 31{,}4$ км/ч, в течение 10 секунд. Определить длину встречного поезда.*

За тело отсчета примем пассажира, а ось координат направим по направлению скорости встречного поезда. Величины скоростей v_1 и v_2 заданы относительно некоторой неподвижной системы отсчета, например земли. По отношению же к пассажиру, движущемуся со скоростью v_1, встречный поезд имеет так называемую относительную скорость v_2, которая равна

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,$$

или в скалярной форме

$$v_2 = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1.$$

Тогда искомая длина встречного поезда l равна

$$l = v_2 t = (v_1 + v_2)t = 290 \text{ м}.$$

Задача 2. *Рыбак плывет на лодке вверх по реке; проезжая под мостом, он уронил в воду соломенную шляпу. Через полчаса он это обнаружил и, повернув назад, догнал шляпу в 5 км ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?*

Свяжем систему отсчета с водой в реке, то есть со шляпой. Рыбак удаляется от шляпы и приближается к ней с одной и той же скоростью, следовательно, он догонит ее через полчаса после того, как обнаружил потерю, или через час после падения шляпы в воду. За это время шляпа относительно земли проплыла 5 *км*. Значит, скорость течения реки равна 5 *км/ч*.

Равнопеременное прямолинейное движение

Если скорость материальной точки не постоянна, но в любые равные промежутки времени она изменяется на одну и ту же величину, то в этом случае говорят о равнопеременном движении. Движение называют равноускоренным, если скорость увеличивается, и равнозамедленным, если скорость уменьшается.

Для решения задач на эту тему достаточно знать уравнения для скорости и перемещения. В скалярной форме они записываются так:

$$v = v_0 + at,$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь v_0 — начальная скорость точки, x_0 — начальная координата, a — ускорение, v и x — соответственно скорость и координата точки в момент времени t. Величины v_0, a, v и x будем считать положительными, когда их направление совпадает с положительным направлением выбранной оси координат OX, отрицательными — в противном случае.

Начинать решение задачи полезно с краткой записи ее условия, по возможности полностью переводя задачу на язык условных обозначений. При этом надо следить за тем, чтобы единицы измерения всех величин были даны в одной и той же системе единиц. Все расчеты лучше проводить в общем виде, то есть в буквенных обозначениях, а численные значения подставлять в окончательный результат.

Решим следующие задачи.

Задача 3. *Два велосипедиста едут друг другу навстречу: один из них, имея скорость 5,4 км/ч, спускается с горы с ускорением 0,2 м/с²; другой, имея скорость 18 км/ч, поднимается в гору с ускорением — 20 см/с². Через сколько времени они встретятся?*

Пусть начало координат совпадает с начальным положением первого велосипедиста, а положительное направление оси координат — с направлением его начальной скорости. Тогда краткая запись условия задачи будет выглядеть так:

$v_{01} = 5{,}4$ км/ч $= 1{,}5$ м/с
$v_{02} = -18$ км/ч $= -5$ м/с
$a_1 = 0{,}2$ м/с²
$a_2 = 20$ см/с² $= 0{,}20$ м/с²
$x_{02} = 195$ м.
$t = ?$

Запишем уравнения движения для каждого велосипедиста:

$$x_1 = v_{01}t + \frac{a_1t^2}{2}, \qquad (1)$$

$$x_2 = x_{02} + v_{02}t + \frac{a_2t^2}{2}, \qquad (2)$$

причем $a_1 = a_2$ по условию. В момент встречи

$$x_1 = x_2. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), получим

$$t = \frac{x_{02}}{v_{01} - v_{02}} = 30с.$$

На этом можно было бы закончить решение, но в данном случае следует убедиться в том, что полученный ответ имеет физический смысл. Для этого найдем скорость второго велосипедиста через 30 $с$ после начала движения:

$$v_2 = v_{02} + a_2t = -5 \text{ м/с} + 0{,}2 \text{ м/с}^2 \cdot 30 \text{ с} = 1 \text{ м/с}.$$

Оказывается, что второй велосипедист к этому времени будет скатываться с горы, а не подниматься в гору. Очевидно, что данная задача составлена некорректно.

Задача 4. *Аэростат поднимается с земли вертикально вверх с ускорением 2,45 м/с². Через 8 секунд от начала движения из его гондолы выпадает предмет. Через сколько времени и с какой скоростью этот предмет упадет на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Так как сначала предмет движется вместе с аэростатом, то через $t_1 = 8$ $с$ он поднимется на некоторую высоту h_1 и будет иметь скорость v_1, причем

$$h_1 = \frac{at_1^2}{2} \quad \text{и} \quad v_1 = at_1.$$

Дальнейшее движение предмета можно описать по-разному.

Часто задачи такого типа решаются в два этапа. Сначала рассматривается замедленное движение предмета вверх до наибольшей высоты, затем — свободное падение на землю.

Задача, однако, решается проще, если считать, что предмет одновременно участвует в двух независимых друг от друга движениях: он равномерно со скоростью v_1 поднимается вверх и свободно падает. Свяжем систему отсчета с землей, а ось координат направим вверх. Тогда уравнение движения предмета с высоты h_1 до земли запишется так:

$$0 = h_1 + v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$$

(t_2 — время движения предмета). Подставляя в это уравнение выражения для h_1 и v_1, получим

$$\frac{gt_2^2}{2} - at_1t_2 - \frac{at_1^2}{2} = 0,$$

откуда $t_2 \approx 6{,}5$ *с*.

Задача 5. *Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью. Когда оно достигло высшей точки подъема на высоте $H = 100$ м от земли, из того же начального пункта и с той же начальной скоростью брошено второе тело. На какой высоте они встретятся? Какие они будут иметь скорости в момент встречи? С какой начальной скоростью были брошены тела? Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Рассмотрим сначала некоторые особенности движения тела, брошенного вертикально вверх. Это сложное движение является суммой двух простых — равномерного движения и свободного падения. Причем каждое движение происходит независимо от другого и от того, поднимается или опускается тело. Поэтому можно сказать, что время прохождения телом одного и того же участка пути вверх и вниз одно и то же и что скорости тела на некоторой высоте при движении вверх или вниз одинаковы по величине.

Покажем, например, что время подъема тела до максимальной высоты равно времени падения до начального положения и что конечная скорость по величине равна начальной скорости. Пусть начальная скорость тела равна v_0. Запишем уравнения для скорости и координаты (начало координат свяжем с точкой бросания и ось координат направим вверх):

$$v = v_0 - gt,$$

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

В точке максимального подъема $v = 0$, поэтому

$$0 = v_0 - gt,$$

откуда

$$t = \frac{v_0}{g},$$

и

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Теперь тело начинает свободно падать. Обозначим время падения t', а конечную скорость v' и запишем уравнения для свободного падения

$$v' = gt',$$

$$x_{\max} = \frac{gt'^2}{2}.$$

Отсюда

$$t' = \frac{v_0}{g} = t$$

и

$$v' = v_0.$$

Теперь вернемся к нашей конкретной задаче. Согласно сказанному выше, время подъема второго тела до высоты h (рис. 1), равное времени падения первого тела с высоты $H - h$,

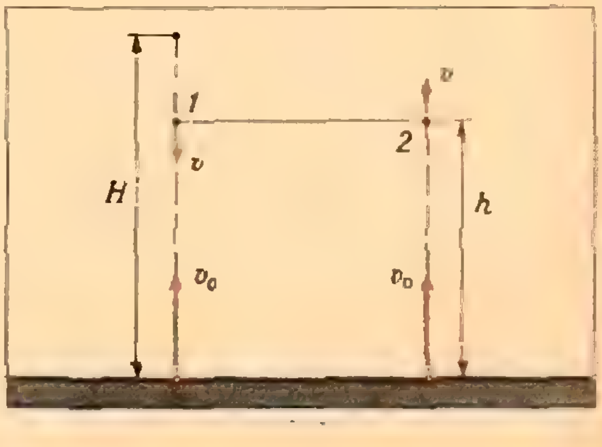


Рис. 1.

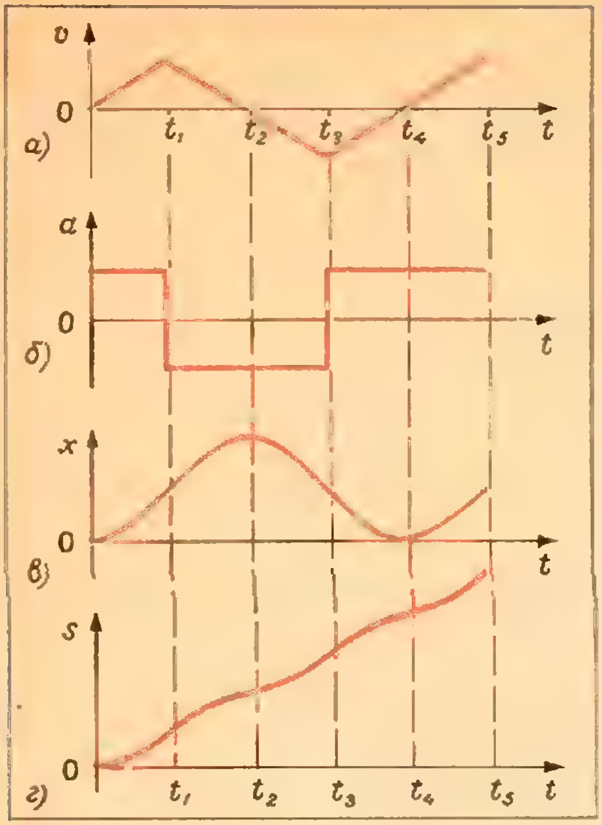


Рис. 2.

составляет половину времени свободного падения первого тела с высоты H до земли, то есть

$$\frac{H-h}{H}=\frac{gt^2}{g(2t)^2}=\frac{1}{4},$$

откуда

$$h=\frac{3}{4}H=75\ м.$$

Скорости тел в момент встречи одинаковы по величине и равны

$$v=\sqrt{2g(H-h)}\approx 22{,}5\ м/с.$$

Начальная скорость $v_0=\sqrt{2gH}\approx$ ≈ 44 м/с.

В заключение рассмотрим задачу на построение графиков.

Задача 6. *Дан график зависимости скорости движения тела от времени (рис. 2, а). Построить графики ускорения, перемещения и пути.*

Прежде всего, посмотрим, как движется тело в различные моменты времени. Из графика скорости видно, что на первом этапе (от 0 до t_1) тело движется равноускоренно; на втором (от t_1 до t_2) — равнозамедленно; на третьем (от t_2 до t_3) — равноускоренно, но в обратном направлении; на четвертом (от t_3 до t_4) — равнозамедленно; на пятом (от t_4 до t_5) — равноускоренно в первоначальном направлении и т. д. Графики зависимости ускорения, перемещения и пути от времени показаны на рисунках 2, *б*, *в* и *г* соответственно.

Упражнения

1. По двум параллельным путям в одном направлении идут два поезда: пассажирский — длиной 200 *м* со скоростью 72 *км/ч* и товарный — длиной 400 *м* со скоростью 45 *км/ч*. Сколько времени пассажирский поезд будет обгонять товарный?

2. Замыкающий колонны войск, растянувшейся на 2,5 *км* и идущей со скоростью 5 *км/ч*, послал мотоциклиста с извещением командиру, находящемуся во главе колонны. Командир принимал извещение и писал ответ, стоя на обочине дороги, в течение трех минут. Определить среднюю скорость мотоциклиста, если он вернулся к замыкающему через 9 *мин* 27 *с*.

3. Два велосипедиста едут навстречу друг другу: один из них, имея скорость 7,2 *км/ч*, спускается с горы с ускорением 0,30 $м/с^2$; другой, имея скорость 36 *км/ч*, поднимается с ускорением $-0{,}20$ $м/с^2$. Каково было расстояние между велосипедистами в начальный момент, если они встретились через 0,5 минуты? При какой наибольшей длине горы задача имеет решение?

4. С некоторой высоты падает тело. Через 2 *с* с той же высоты падает второе тело. Через сколько секунд после начала падения первого тела удвоится расстояние, разделяющее тела до начала падения второго тела? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Вертолет поднимается вверх со скоростью 10 *м/с*. На высоте 100 *м* из него выбрасывается вверх предмет со скоростью 2 *м/с* относительно вертолета. Найти наибольшую высоту, которой достигнет предмет, а также через сколько времени и с какой скоростью предмет упадет на землю.

6. Тело бросают вверх со скоростью 20 *м/с*. Какова высота точки, которую тело проходит дважды с промежутком 3 *с*? Сопротивлением воздуха пренебречь.

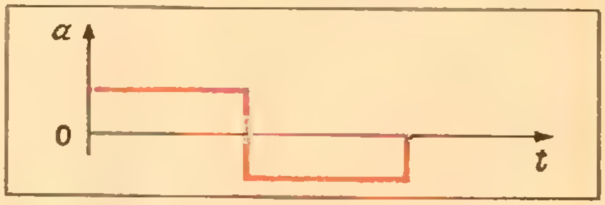


Рис. 3.

7. Дан график зависимости ускорения от времени (рис. 3). Построить график зависимости величины перемещения от скорости.

Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

В «Кванте» № 4 за 1973 год мы уже рассказывали об Университете дружбы народов. Сейчас мы помещаем варианты вступительных экзаменов в этот университет по математике в 1973 году.

Факультет физико-математических и естественных наук

Вариант 1

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+yz+xz=12, \\ xyz=8. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$x^{3+\log_a x} < a^2x^2.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin^{10} x+\cos^{10} x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}$$

4. Двугранные углы при боковых ребрах правильной четырехугольной пирамиды равны α. Найти двугранные углы при ребрах основания пирамиды.

Вариант 2

1. При каких комплексных значениях z оба выражения

$$(3+i)z+1-5i \text{ и } z^2+1-4i$$

одновременно имеют действительные значения?

2. Решить неравенство

$$(2^x+2^{1-x})^{\log_x (x^4+1)\log_{x+1} x-2} > 1.$$

3. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos^4 x+\cos^4 y-\frac{1}{\cos^2 x\cos^2 y}=1.$$

4. Найти двугранные углы при боковом ребре правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол при ребре основания равен α.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2a}+\sqrt{x+2b}<2\sqrt{x+a+b}.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{\lg x}-3^{\lg y}=0, \\ (3x)^{\lg 3}-(5y)^{\lg 5}=0. \end{cases}$$

3. Найти все пары чисел x, y которые удовлетворяют уравнению

$$\sin^2 (x+y)-\cos^2 (x-y)=1.$$

4. Найти полную поверхность усеченного конуса, описанного около полушара радиуса R (так что основание полушара лежит на большем основании усеченного конуса, а боковая поверхность усеченного конуса и его второе основание касаются полусферы), если площади нижнего и верхнего оснований усеченного конуса относятся как 1 : 18.

Инженерный факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$(x^2-4x)^2+2(x-2)^2=43.$$

2. Решить неравенство

$$(0{,}125)^x+2^{2-3x}+(0{,}5)^{3x+4}<40{,}5.$$

3. Решить уравнение

$$1+\sin x-\cos x=\sin 2x-\cos 2x.$$

4. Основание и одна из боковых граней пирамиды суть равносторонние треугольники. Один из плоских углов при вершине пирамиды, не равный 60°, имеет величину α. Найти объем пирамиды, если длина стороны ее основания равна a.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$x^2+\frac{1}{x^2}>\frac{17}{4}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{x-1}(2x^3-6x^2-7x-1)=3.$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x-2\sqrt{2}\sin x=1.$$

4. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды, описанной около шара радиуса R, равны a. Найти полную поверхность пирамиды.

М. В. Драгнев

ТЕЛЕВИДЕНИЕ ГОТОВИТ В ВУЗ

В «Кванте» № 9 за этот год мы поместили информацию о приеме на телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы. Лекции на телекурсах читаются с 1 октября и продолжаются весь учебный год. Каждую неделю зрителям предлагаются следующие передачи: по физике — в понедельник вечером и в пятницу утром; по математике — во вторник и в среду утром. В ту же неделю эти передачи повторяются: по физике — в среду и в воскресенье утром; по математике — в четверг и в субботу вечером.

В основу передач по физике и математике положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Телезанятия помогают закрепить, углубить, расширить и систематизировать школьные знания учащихся.

Регулярно слушателям телекурсов предлагаются домашние задания (они публикуются в еженедельнике «Говорит и показывает Москва»). В нашем журнале будет публиковаться информация о работе телекурсов и задачи для самостоятельного решения на пройденные темы. В этом номере мы рассказываем о занятиях, проведенных в октябре и ноябре месяцах.

Физика

На отделении физики телевизионных подготовительных курсов в октябре и ноябре изучался первый раздел программы «Механика». Предлагаем читателям журнала несколько задач на эту тему.

1. На дне цилиндрического вертикального сосуда, внутренний диаметр которого $D = 10$ *см*, находятся четыре металлических шарика диаметром $d = 3{,}65$ *см*. Определить силу давления шариков на боковую поверхность сосуда, если плотность металла $\rho = 7{,}7$ *г/см*^{3}. Трением пренебречь.

2. Однородная заготовка движется по каткам горизонтального транспортера со скоростью $v = 10$ *м/с* и выскакивает на металлическую платформу, находящуюся на одном уровне с транспортером. Определить, какой максимальной длины может быть заготовка, чтобы целиком оказаться на платформе, если коэффициент трения между заготовкой и платформой $k = 0{,}80$. Сопротивление катков транспортера при движении пренебрежимо мало.

3. На движущейся тележке на нерастяжимой и невесомой нити длины $l = 80$ *см* висит маленький тяжелый шарик. Тележка сначала двигалась с ускорением $a_1 = 2{,}0$ *м/с*^{2}, а затем с ускорением $a_2 = -1{,}0$ *м/с*^{2}. Определить расстояние между равновесными положениями шарика в обоих случаях.

4. На невесомом жестком стержне, который может вращаться вокруг горизонтальной оси O, укреплены два тела с массами $m_1 = 3$ *кг* и $m_2 = 2$ *кг* на расстояниях от точки закрепления $r_1 = 1$ *м* и $r_2 = 2$ *м* (рис. 1). В какую сторону начнет вращаться стержень, если

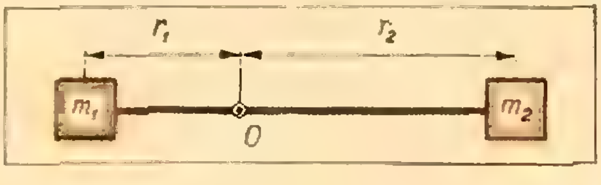


Рис. 1.

его отпустить? Определить скорость того тела, которое окажется в нижней точке в момент, когда стержень займет вертикальное положение.

5. На упругой невесомой нити длины $l_0 = 1$ *м*, отклоненной от вертикали, закреплено тело массы $m = 1,5$ *кг*. Нить отпустили; и в момент прохождения вертикального положения ее натяжение было равно $F = 30$ *н*. Определить, на какой угол была отклонена нить. Упругость нити $k = 100$ *н/м*.

6. Тело начинает двигаться с вершины наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту $\alpha_1 = 30°$, и переходит на горизонтальную поверхность. Расстояние, пройденное телом по горизонтальной поверхности до полной остановки, $l_1 = 20$ *м*. Затем это тело начинает двигаться с такой же высоты по наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту $\alpha_2 = 20°$. Найти высоту, с которой движется тело, и расстояние, пройденное им по горизонтальной поверхности во втором случае, если коэффициенты трения в первом и втором случаях не меняются при переходе с наклонной плоскости на горизонтальную поверхность и равны $k_1 = 0,15$ и $k_2 = 0,25$ соответственно.

Математика

На отделении математики в октябре рассматривались темы: «Тождественные преобразования», «Числовые неравенства».

По пройденным темам читателям предлагается ряд задач для самостоятельного решения.

1. Доказать, что при натуральных $n (n > 1)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n}.$$

2. Доказать, что при всех натуральных n и любых $a > 0$ $b > 0$ справедливо неравенство

$$(a + b)^n < 2^n(a^n + b^n).$$

3. Доказать, что $2^{105} + 3^{105}$ делится на 5, 35, 275, 2315.

4. Найти два натуральных числа, если известно, что сумма их равна 589, а частное от деления их наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель равно 13.

5. Пусть $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$. Доказать, что если $\sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin\beta$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$.

6. Доказать, что при $x \neq 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ справедливы тождества:

а) $$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}};$$

б) $$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

В ноябре на отделении математики рассматривались вопросы планиметрии и тригонометрические преобразования. Предлагаем читателям задачи по этим темам для самостоятельного решения.

7. Упростить выражение $\sin^2(\alpha - \beta) - \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta)$.

8. Доказать, что при всех допустимых значениях x

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

9. Вычислить без таблиц

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

10. Найти третью сторону треугольника, если даны две его стороны a и b и известно, что медианы, соответствующие этим сторонам, пересекаются под прямым углом.

11. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону BC и продолжение стороны CD в точках E, F и K соответственно. Найти величину отрезка EF, если $AE = 2$, $EK = 3$.

12. Дан угол ABC, равный 60°. Точка D лежит внутри угла и удалена от его сторон на расстояния a и b. Найти длину BD.

13. Считая, что $b^2 > a^2 > 0$, упростить выражение

$$\frac{\sin 2x\sqrt{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2 x}}{2a\sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}\sin x\right)^2}}.$$

14. Около трапеции с высотой h описана окружность. Бо́льшее основание трапеции видно из центра окружности под углом α, а меньшее — под углом β. Определить площадь трапеции.

15. Найти площадь трапеции, у которой основания равны a и b $(a > b)$, диагонали взаимно перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α.

16. Из центра окружности проведены два радиуса OA и OB, образующие угол α. В меньший сегмент круга, отсекаемого хордой AB, вписан правильный треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна AB. Найти сторону этого треугольника, если радиус окружности равен R.

А. Н. Борзяк,
В. Н. Давыдов,
П. Т. Дыбов,
И. И. Наслузов

XV МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

XV математическая

И. С. Петраков В. А. Скворцов

Завершилась еще одна Международная математическая олимпиада школьников. На этот раз она проходила в Москве с 5 по 16 июля. В олимпиаде приняли участие команды 16 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, Советского Союза, Финляндии, Франции, Чехословакии, Швеции, Югославии.

Это была самая представительная олимпиада за всю историю международных математических олимпиад.

В команду каждой страны входило 8 участников (за исключением команды Кубы, состоящей из 5 участников) — победителей национальных олимпиад.

В команду СССР вошли 8 учащихся десятых классов — первых и вторых призеров седьмой Всесоюзной олимпиады. Из числа вторых призеров были включены те, которые имели лучшую олимпийскую биографию.

Будаев Виктор — выпускник школы № 7 города Смоленска. В 1970, 1971, 1972, 1973 гг. он получил первые премии на Смоленских

Команда СССР на XV Международной математической олимпиаде школьников: сидят (слева направо) Наум Гольцман, Виктор Будаев, В. А. Скворцов (руководитель команды), Павел Грозман, Георгий Егоров, Сергей Конягин, Константин Юрша, Дмитрий Лещинер; стоят Л. М. Пашкова (зам. руководителя команды), Е. А. Морозова и И. С. Петраков (члены жюри), Евгений Хухро.

городских и областных олимпиадах, в 1971 г. — II премию, в 1972 г. — III и в 1973 г. — I премию на Всесоюзных олимпиадах.

Гольцман Наум — выпускник школы № 179 города Москвы. В 1971 г. получил II премию на Московской городской и I премию на Всесоюзной олимпиадах, в 1972 г. — похвальный отзыв на Московской и II премию на Всесоюзных олимпиадах, в 1973 г. — премию на Московской и I премию на Всесоюзной олимпиадах.

Грозман Павел — выпускник школы-интерната № 18 при Московском университете. В 1972 г. получил I премию на Симферопольской городской и вторые премии на Крымской областной, Украинской республиканской и Всесоюзной олимпиадах, в 1973 г. — премию на Московской городской и II премию на Всесоюзной олимпиадах.

Егоров Георгий — выпускник школы № 2 города Москвы. В 1970 г. получил I премию, в 1971, 1972 гг. — третьи премии и в 1973 г.— премию на Московских городских олимпиадах, в 1972 г. — похвальный отзыв, а в 1973 г. — I премию на Всесоюзных олимпиадах.

Конягин Сергей — выпускник школы № 19 города Саратова. В 1970, 1971, 1972, 1973 гг. получил первые премии на Саратовских городских и областных олимпиадах, в 1971, 1972 гг. — первые премии на Всесоюзных олимпиадах, в 1973 г. — II премию на Всесоюзной олимпиаде, в 1972 г. — I премию на Международной математической олимпиаде.

Лещинер Дмитрий — выпускник школы № 57 города Москвы. В 1971, 1972 гг. получил первые премии, в 1973 г. — премию на Московских городских олимпиадах, в 1971 г. — III премию, в 1972 г. — I премию, в 1973 г. — II премию на Всесоюзных олимпиадах.

Хухро Евгений — выпускник школы-интерната № 165 при Новосибирском университете. В 1969, 1970, 1971, 1972, 1973 гг. получил первые премии на Новосибирских областных олимпиадах, в 1971 г. — II премию на Всесоюзной и Всесибирской олимпиадах, в 1973 г. — II премию на Всесоюзной олимпиаде.

Юрша Константин — выпускник школы-интерната № 45 при Ленинградском университете. В 1971 г. получил II премию на Ленинградской городской и III премию на Всесоюзной олимпиадах, в 1972 г. — III премию на Ленинградской городской олимпиаде, в 1973 г. — III премию на Ленинградской городской и II премию на Всесоюзной олимпиадах.

Наша команда в конце июня собралась на тренировочный сбор в школе памяти В. И. Ленина в Горках Ленинских. Там помимо ежедневных занятий математикой члены команды имели возможность отдохнуть, набраться сил перед ответственными соревнованиями. Темы занятий были самые различные. Здесь были вопросы математической логики и решение различных задач логического характера, теоретико-числовые задачи, комбинаторика, алгебраические и тригонометрические уравнения, неравенства, вопросы геометрических преобразований на плоскости и в пространстве, геометрические задачи, различные олимпиадные задачи. Во время сборов несколько раз проводились тренировочные соревнования.

Эта форма подготовки вполне себя оправдала.

7 июля наша команда переехала в Москву в гостиницу «Университетская», где жили все участники олимпиады.

Для проведения олимпиады был создан оргкомитет (председатель оргкомитета вице-президент АПН профессор *А. И. Маркушевич*) и Международное жюри, в состав которого вошли руководители всех команд (председатель жюри — член-корреспондент АПН профессор *И. Я. Верченко*).

Торжественное открытие XV Международной математической олимпиады школьников. Выступает председатель оргкомитета олимпиады вице-президент АПН СССР профессор А. И. Маркушевич.

Школьники за работой

7 июля на заседании Международного жюри из 14 предварительно отобранных задач, присланных странами-участниками, выделили 6, которые были предложены участникам олимпиады, и утвердили количество очков, присуждавшихся за решение каждой задачи. Соревнования проводились в два дня 9 и 10 июля в школе № 68 Куйбышевского района Москвы, причем в каждый день на решение трех задач отводилось по 4 часа. Затем руководители команд совместно со своими заместителями проверяли работы и давали им предварительную оценку. Единство критериев оценки работ всех участников олимпиады обеспечивалось координаторами, выделенными из числа московских математиков. Каждую задачу курировали 3 координатора, которые проверяли ее решение у всех участников

◄

Обсуждение работ школьников. Слева направо: В. Гутенмахер (координатор), руководитель французской команды профессор М. Глазер, В. Дорофеев (координатор).

и согласовывали оценки с руководителями. Всю работу координаторов возглавляли Н. Васильев и А. Тоом. В состав координаторов вошли: Е. Бургина, В. Гутенмахер, Г. Дорофеев, А. Егоров, А. Кочергин, А. Леонтович, Л. Митюшин, Ж. Раббот и Г. Гуревич.

▲

Закрытие XV Международной математической олимпиады школьников.

▼

Победители олимпиады (слева направо): Дэвид Готто (Великобритания) — диплом I степени и премия журнала «Квант», Георгий Егоров (СССР), Павел Грозман (СССР), Сергей Конягин (СССР) — дипломы I степени, Янош Коллар (Венгрия) — диплом I степени и премия журнала «Квант».

Председатель оргкомитета олимпиады профессор А. И. Маркушевич вручает диплом II степени Паулю Крегеру (ГДР), получившему также премию журнала «Квант».

Лауреат премии журнала «Квант» Луис Састр (Куба).

Зам. Главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский вручает премию журнала Жану-Кристофу Еккоц (Франция).

13 июля Международное жюри подвело итоги соревнований и присудило призы победителям. Было решено дипломы I степени вручить участникам, набравшим от 35 до 40 очков. Их получили:

Конягин Сергей (СССР), Грозман Павел (СССР), Егоров Георгий (СССР), Коллар Янош (Венгрия), Готто Дэвид (Великобритания).

Дипломы II степени было решено вручить участникам, набравшим от 27 до 34 очков. Их получили:

Окнеану Адриан (Румыния), Будаев Виктор (СССР), Ёккоц Жан-Кристоф (Франция), Андрейчак Гжегош (Польша), Штайнер Михаел (Швеция), Вегерт Елиас (ГДР), Верман Пиотр (Польша), Воннет Мишель (Франция), Пальфи Петер Пал (Венгрия), Ферст Пауль (Чехословакия), Кисс Эмиль (Венгрия), Боттхер Альбрехт (ГДР), Лещинер Дмитрий (СССР), Крёгер Пауль (ГДР), Леблонд Денис (Франция).

Дипломы III степени были вручены, набравшим от 17 до 26 очков. Среди получивших дипломы III степени — члены советской команды Гольцман Наум, Юрша Константин и Хухро Евгений.

Таким образом, все советские участники олимпиады стали призерами XV Международной математической олимпиады.

Команда Советского Союза набрала наибольшее число очков — 254.

На закрытии олимпиады (оно состоялось в Московском Дворце пионеров) председатель оргкомитета профессор А. И. Маркушевич от имени оргкомитета вручил призы победителям олимпиады.

Редколлегия журнала «Квант» установила ряд премий для иностранных участников олимпиады. От имени редколлегии журнала премии были вручены заместителем главного редактора журнала М. Л. Смолянским. Первыми лауреатами премии «Кванта» стали:

Дэвид Готто (Великобритания), Янош Коллар (Венгрия), Жан-Кристоф Ёккоц (Франция), Пауль Крёгер (ГДР) и Луис Састр (Куба).

В заключение от имени Международного жюри руководитель делегации ГДР профессор Бауш сердечно поблагодарил оргкомитет XV ММО за проделанную большую работу и передал приглашение странам-участницам приехать на XVI Международную математическую олимпиаду, которая состоится в 1974 году в г. Эрфурде (ГДР).

Приведем теперь задачи XV Международной математической олимпиады и их краткие решения.

Задачи

1 (Чехословакия. Полное решение оценивалось 6-ю очками). *Точка O лежит на прямой l; $\mathbf{OP}_1$, $\mathbf{OP}_2$, ..., $\mathbf{OP}_n$ — единичные векторы такие, что все точки P_1, P_2, ..., P_n лежат в одной плоскости, содержащей l, и все по одну сторону от l. Докажите, что если n — нечетное, то $|\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 + \ldots + \mathbf{OP}_n| \geqslant 1$, где $|\mathbf{OM}|$ обозначает длину вектора $\mathbf{OM}$.*

2 (Польша, 6 очков). *Выяснить, существует ли конечное множество M точек в пространстве, не лежащее в одной плоскости, такое, что для любых двух точек A, B, принадлежащих M, найдутся две другие точки C, D, принадлежащие M, такие, что прямые AB и CD параллельны и не совпадают.*

3 (Швеция, 8 очков). *Найти минимальное значение $a^2 + b^2$, где a и b — действительные числа, для которых уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ имеет по крайней мере один действительный корень.*

4 (Югославия, 6 очков). *Солдат должен проверить отсутствие мин на участке, имеющем форму равностороннего треугольника, включая границу. Радиус действия его детектора равен половине высоты треугольника. Солдат выходит из одной вершины треугольника. Какой путь он должен выбрать, чтобы пройти наименьшее возможное расстояние и выполнить задание?*

5 (Польша, 6 очков). *Непустое множество G не равных постоянной функций действительного аргумента x вида $f(x) = ax + b$, где a, b — действительные числа, удовлетворяет следующим условиям:*

а) *если f, $g \in G$, то $g \cdot f \in G$, где $(g \cdot f)(x) = g(f(x))$, то есть множество G замкнуто относительно суперпозиции;*

б) *если $f \in G$, где $f(x) = ax + b$, то обратная функция $f^{-1} \in G$, где $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$;*

в) *для любой $f \in G$ существует x_f такое, что $f(x_f) = x_f$. Докажите, что существует действительное k такое, что $f(k) = k$ для всех $f \in G$.*

6 (Швеция, 8 очков). *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — данные n положительных чисел и q — данное действительное число, причем $0 < q < 1$. Найти такие n действительных чисел $b_1, \ldots, b_n$, что*

а) $a_k > b_k$ *при всех k от 1 до n;*

б) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ *при всех k от 1 до $n-1$;*

в) $b_1 + \ldots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + \ldots a_n)$.

Решения задач

1. Доказательство можно провести по индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при некотором $n = k$. Осуществим индуктивный переход от $n = k$ к $n = k + 2$. Выберем на прямой l направление, перенумеруем данные векторы в порядке возрастания угла (угол отсчитывается против часовой стрелки), который они образуют с положительным направлением прямой l (рис. 1). Суммой векторов $\mathbf{OP}_1$ и $\mathbf{OP}_{k+2}$ является вектор $\mathbf{OR}$, изображаемый

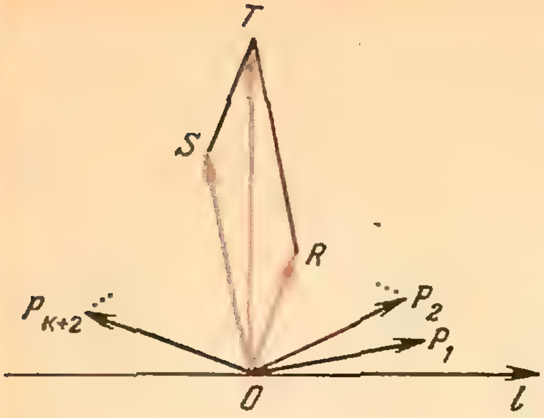


Рис. 1.

диагональю ромба со сторонами $\mathbf{OP}_1$ и $\mathbf{OP}_{k+2}$. Поэтому каждый из углов P_1OR и ROP_{k+2} не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Пусть $\mathbf{OS} = \sum\limits_{i=2}^{k+1}\mathbf{OP}_i$. Из введенной нумерации векторов следует, что вектор $\mathbf{OS}$ заключен либо внутри угла P_1OR, либо внутри угла ROP_{k+2} и, следовательно, угол ROS острый. Сумма $\mathbf{OR} + \mathbf{OS}$ изображается диагональю $\mathbf{OT}$ соответствующего параллелограмма. В треугольнике OST угол OST тупой. Поэтому сторона OT является наибольшей, то есть $|\mathbf{OT}| > |\mathbf{OS}|$. Но $|\mathbf{OS}| \geqslant 1$ по предположению индукции. Значит,

$$\left|\sum_{i=1}^{k+2}\mathbf{OP}_i\right| = |\mathbf{OT}| \geqslant 1.$$

2. Легко проверить, что таким множеством будет, например, множество вершин двух правильных шестиугольников, имеющих общий центр, но лежащих в разных плоскостях.

Нетрудно показать, что число элементов в множестве с требуемыми свойствами может быть сколь угодно велико. Интересно было бы выяснить, каково наименьшее возможное число элементов в таком множестве (в приведенном выше примере их, по крайней мере, 10). Может ли число элементов быть нечетным?

3. Заметив, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, преобразуем его к виду $x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ или

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Нетрудно проверить, что при любом действительном x справедливо неравенство $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$. Для фиксированного x_0 множество пар чисел (a, b) для которых исходное уравнение имеет корень, равный x_0, определяется линейным уравнением $y_0^2 + ay_0 + b - 2 = 0$, где $y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$. Это множество пар изображается прямой на координатной плоскости (a, b). Поскольку в этой плоскости выражение $a^2 + b^2$ можно геометрически истолковать как квадрат расстояния от начала координат до точки (a, b), то из геометрических соображений ясно, что при фиксированном y_0 минимальное значение $a^2 + b^2$ для точек (a, b) на нашей прямой будет равняться квадрату длины перпендикуляра, опущенного из начала координат на рассматриваемую прямую.

Легко подсчитать, что оно равно $\rho = \frac{\left(y_0^2 - 2\right)^2}{1 + y_0^2}$; $\rho \geqslant \frac{4}{5}$ при $y_0^2 = \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 \geqslant 4$. Нетрудно доказать, что $\frac{(t-2)^2}{1+t} \geqslant \frac{4}{5}$ при $t \geqslant 4$, а при $t = 4$ достигается равенство. Таким образом, значение $a^2 + b^2$ для всевозможных действительных корней x_0 не меньше $\frac{4}{5}$. Замечая, что $x_0 = 1$ является корнем исходного уравнения при $a = -\frac{4}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$, получаем, что $\frac{4}{5}$ является наименьшим искомым значением для $a^2 + b^2$.

4. Пусть солдат вышел из вершины A (см. схему на рис. 2). Для проверки точек B и C он должен побывать на дугах радиуса $\frac{h}{2}$ (h — высота треугольника) с центром в этих точках. Пусть сначала он побывал на дуге с центром в B, а затем — с центром в C. Если к этому пути добавить путь до точки C, то дело сведется к нахождению кратчайшего пути от A к C с заходом на первую дугу. Предоставляем читателю доказать, что таким кратчайшим путем будет ломаная ADC где D — середина высоты, исходящая из вершины B. Пусть E — точка пересечения отрезка DC со второй дугой. Тогда путь ADE является кратчайшим, при котором проверяются точки B и C. Легко проверить, что при этом проверяются также и все точки треугольника, то есть путь ADE — искомый.

5. Заметим, что из условия в) следует, что если у функции из G $a = 1$, то $b = 0$. Но у функции $f(x) = x$ имеется общая неподвижная точка с любой функцией из G.

Поэтому можно считать, что в G входят, по крайней мере, две линейные функции, отличные от $f(x) = x$. Иначе задача становится тривиальной. Пусть это — функции

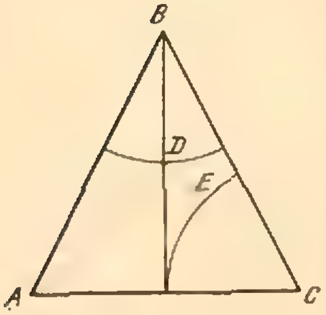


Рис. 2.

$f_1 = a_1x + b_1$ и $f_2 = a_2x + b_2$ $(a_1 \neq 1, a_2 \neq 1)$. Легко видеть, что $x_{f_1} = \frac{b_1}{1 - a_1}$ и $x_{f_2} = \frac{b_2}{1 - a_2}$. Согласно условиям а) и б), $g = f_1 \circ f_2 \in G$, $h = f_2 \circ f_1 \in G$ и $g \circ h^{-1} \in G$. Осуществив все необходимые подстановки, получим, что $g \circ h^{-1} = x + [(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2)]$. Но тогда, как мы уже отмечали, в силу условия в) должно выполняться равенство $(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2) = 0$, откуда $x_{f_1} = x_{f_2}$.

Поскольку это верно для любой пары функций из G, то тем самым все точки x_f совпадают, что и требовалось доказать.

6. Смысл задачи состоит в том, чтобы путем некоторого увеличения каждого числа a_k устранить резкие различия в величине соседних членов. Ясно, что числа b_k не однозначно определяются числами a_k.

Некоторые способы решения состоят в нахождении алгоритма последовательного увеличения чисел a_k так, что в конце концов получаются искомые числа b_k.

Наиболее краткое решение получается, если догадаться, что в качестве искомых чисел b_k можно взять выражения

$$b_k = a_1q^{k-1} + \ldots + a_{k-1}q + a_k + a_{k+1}q + \ldots + a_nq^{n-k}.$$

Условие а) очевидно, а условия б) и в) проверяются непосредственным подсчетом, что мы предоставим читателю.

История международных олимпиад

М. Л. Смолянский

Первая Международная математическая олимпиада (ММО) школьников была проведена в Румынии летом 1959 года. Она была организована Румынским математическим обществом и Министерством просвещения Румынии.

В ней приняли участие команды Болгарии, Венгрии, Германской Демократической Республики, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии.

С тех пор стало традицией каждое лето проводить в одной из социалистических стран Международную математическую олимпиаду.

Команда каждой страны состоит из 8 участников, руководителя команды и его заместителя. Все руководители команды являются членами Международного жюри. Каждая команда состоит, как правило, из учащихся выпускных классов средних школ, являющихся победителями национальных олимпиад.

До начала олимпиады каждая страна присылает в оргкомитет олимпиады свои задачи. Из их числа Международное жюри отбирает 6 задач, идущих на олимпиаду. Трудность каждой задачи оценивается в очках. Жюри устанавливает максимальное число очков, которое может быть присуждено за решение каждой задачи.

Участники олимпиады, набравшие соответствующее число очков (число очков определяет Международное жюри), награждаются дипломами I, II и III степени и почетными грамотами.

Международная математическая олимпиада школьников довольно быстро завоевала большой международный авторитет.

Так, в первых четырех олимпиадах принимали участие только команды большинства европейских социалистических стран, в V ММО принимала участие команда Югославии, в VI — Монголии, VII — Финляндии, с IX — Англии, Франции, Италии и Швеции, в XI — Бельгии и Нидерландов с XII — Австрии и с XIII — Кубы.

На IV ММО был принят Устав Международных математических олимпиад, который практически не изменился и по сей день.

Основные положения Устава:

1. Международная математическая олимпиада проводится ежегодно в одной из стран — участниц олимпиады.

2. Каждая команда состоит из 8 участников: учащихся средних общеобразовательных и специальных школ, не старше 19 лет, руководителя команды и его заместителя.

3. Все руководители команд (по одному от каждой страны) образуют Международное жюри.

4. До олимпиады каждая страна-участница должна прислать в оргкомитет страны-организатора свои задачи.

5. Руководитель команды и его заместитель принимают непосредственное участие в работе жюри по отбору задач и проверке работ.

6. Страна-организатор берет на себя все расходы, связанные с проведением олимпиады. Страны-участницы несут расходы по оплате проезда своих делегаций до места проведения олимпиады и обратно.

Обычно олимпиада продолжается 2 дня. В каждый из этих дней участники решают по 3 задачи, на решение которых отводится по 4 часа.

Несмотря на то, что задачи ММО очень интересны, они по степени трудности уступают задачам, предлагавшимся на Всесоюзных олимпиадах.

Все задачи Международных математических олимпиад (с I по XI включительно) помещены в книге «Международные математические олимпиады» *).

Начиная с XI ММО журнал «Квант» регулярно помещает подробную информацию о ходе олимпиад и разбор предлагавшихся на них задач **).

По своему статусу олимпиада не является командным первенством. Дипломы (I, II и III степени) выдаются индивидуально участникам олимпиады за лучшие решения задач. Но, как правило, публикуется количество очков, которое набрала каждая команда.

В честь ММО выпускаются специальные значки, которыми награждаются все участники ММО (см. 4-ую с. обложки).

Советская команда принимает участие в ММО с момента их организации.

I ММО (1959 г., Румыния). В составе советской команды выступали 4 участника: *Андрей Тоом* (диплом III степени), *Виктор Федорец* (почетная грамота), *Валерий Фролов* (почетная грамота) и *Александр Четаев.*

Во II ММО (1960 г., Румыния) и III ММО (1961 г., Венгрия) советская команда участия не принимала.

IV ММО (1962 г., Чехословакия). В составе советской команды выступали 8 участников: *Иосиф Бернштейн* (диплом I степени), *Лидия Гончарова* (диплом I степени), *Алексей Потепун* (диплом II степени), *Григорий Маргулис* (диплом II степени), *Геннадий Куранов* (диплом III степени), *Данияр Муштари* (диплом III степени), *Евгений Панкратов* и *Александр Шерменев.*

---

*) Е. А. Морозова, И. С. Петраков, Международные математические олимпиады, изд. 3-е, М., «Просвещение», 1971. Подробнее об этой книге см. с. 74.

**) См. «Квант», 1970, № 4, с. 49; 1971, № 2, с. 54, № 12, с. 53; 1972, № 11, с. 58.

На V ММО (1963 г., Польша) советская команда выступала в составе: *Геннадий Малолеткин* (диплом I степени), *Рафаэль Саркисян* (диплом I степени), *Алексей Толпыго* (диплом I степени), *Анатолий Зайцев* (диплом I степени), *Владимир Фишман* (диплом II степени), *Анатолий Звягинцев* (диплом II степени), *Сергей Смирнов* (диплом II степени), *Кирилл Андреев* (диплом III степени).

VI ММО (1964 г., СССР). Советская команда выступала в следующем составе: *Давид Бернштейн* (диплом I степени), *Геннадий Архипов* (диплом I степени, *Юрий Матиясевич* (диплом I степени), *Валерий Алексеев* (диплом II степени), *Александр Виленкин* (диплом III степени), *Борис Ивлев* (диплом III степени), *Александр Флоренсэв* (диплом III степени), *Илья Рипс*.

VII ММО (1965 г., ГДР). В состав советской команды входили: *Павел Блехер* (диплом I степени), *Сергей Валландер* (диплом I степени), *Андрей Зубков* (диплом I степени), *Анатолий Пересецкий* (диплом I степени), *Николай Широков* (диплом I степени), *Александр Карзанов* (диплом II степени), *Василий Стояновский* (диплом II степени), *Юрий Муравьев*.

VII ММО (1966 г., Болгария). В состав советской команды вошли: *Юрий Богданский* (диплом I степени), *Сабир Гусейн-заде* (диплом I степени), *Андрей Марченко* (диплом I степени), *Григорий Розенблюм* (диплом I степени), *Михаил Фокин* (диплом I степени), *Борис Матикайнен* (диплом II степени), *Александр Заимских* (диплом III степени), *Сергей Либер*.

IX ММО (1967 г., Югославия). В состав советской команды вошли: *Александр Лившиц* (диплом I степени), *Виктор Турчанинов* (диплом I степени), *Андрей Суслин* (диплом I степени), *Михаил Бошерницан* (диплом II степени), *Юрий Жаринов* (диплом II степени), *Игорь Кричевер* (диплом II степени), *Сергей Соболев* (диплом III степени), *Вячеслав Харламов* (диплом III степени).

X ММО (1968 г., СССР). В составе советской команды выступали: *Михаил Блюдзе* (диплом I степени), *Павел Курчанов* (диплом I степени), *Владимир Пономаренко* (диплом I степени), *Сергей Соболев* (диплом I степени), *Валерий Федотов* (диплом I степени), *Виктор Кумарин* (диплом II степени), *Владимир Макарычев* (диплом III степени), *Геннадий Белый* (диплом III степени).

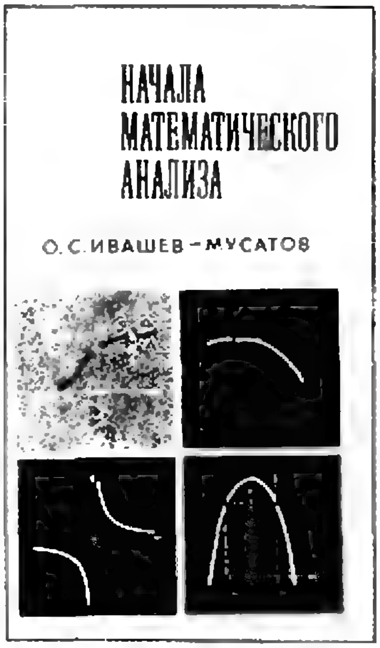
XI ММО (1969 г., Румыния). В составе советской команды выступали: *Владимир Дринфельд* (диплом I степени), *Андрей Прасолов* (диплом II степени), *Андрей Зелевинский* (диплом II степени), *Андрей Ходулев* (диплом II степени), *Елена Неклюдова* (диплом III степени), *Валерий Соловьев* (диплом III степени), *Аркадий Климов* (диплом III степени), *Павел Суворов*.

XII ММО (1970 г., Венгрия). В состав советской команды вошли: *Андрей Ходулев* (диплом I степени), *Аркадий Климов* (диплом I степени), *Алексей Александров* (диплом II степени), *Сергей Семеньков* (диплом III степени), *Велло Альтлейс* (диплом III степени), *Александр Корлюков* (диплом III степени), *Павел Копылов*, *Александр Линецкий*.

XIII ММО (1971 г., Чехословакия). В состав советской команды вошли: *Сергей Гашков* (диплом I степени), *Дмитрий Логачев* (диплом II степени), *Олег Ляшко* (диплом II степени), *Василий Ерохин* (диплом II степени), *Алексей Александров* (диплом II степени), *Михаил Цфасман* (диплом II степени), *Александр Чистов* (диплом III степени), *Евгений Саллинен* (диплом III степени).

XIV ММО (1972 г., Польша). В состав советской команды вошли: *Владимир Бурков* (диплом I степени), *Сергей Конягин* (диплом I степени), *Сергей Белкин* (диплом II степени), *Александр Меркурьев* (диплом II степени), *Андрей Гольберг* (диплом II степени), *Владимир Шварц* (диплом II степени), *Юрий Колмаков* (диплом III степени), *Александр Шаповалов* диплом III степени).

Полезная книга



Книга «Начала математического анализа» *) возникла из лекций, читавшихся на вечернем отделении геологического факультета МГУ, где на весь курс высшей математики (лекции и упражнения) отводилось около ста часов. Автор поставил перед собой задачу познакомить читателей с началами анализа в размере, достаточном для того, чтобы понимать основные пути их применения в естествознании. В соответствии с такой задачей занимающая 24 страницы четвертая глава посвящена введению в теорию дифференциальных уравнений, что редко делается в курсах математического анализа столь малого объема (вся книжка содержит 158 страниц).

С другой стороны, автор не счел возможным пожертвовать принятой у математиков логической отчетливостью изложения, которой иногда пренебрегают в книгах, ориентированных специально на будущих физиков и техников. Некоторые более трудные вопросы выделены в приложение. Например, в основном тексте на с. 55 приводится без доказательства теорема Лагранжа, играющая основную роль при исследовании поведения функций с помощью производных, но ее доказательство приведено на с. 154 в приложении. В приложении даны аккуратные доказательства теорем о существовании у непустого ограниченного числового множества точной верхней грани и о существовании у ограниченной монотонной функции предела. Здесь же доказаны основные теоремы об общих свойствах функций, непрерывных на отрезке (теоремы 3—6), которые обычно доказывают только в больших курсах анализа.

Уместить все это в небольшой книжке автору удалось за счет удачного построения курса и некоторых методических новинок. Книжка может быть хорошим пособием для специализированных математических школ и классов и факультативных занятий в общеобразовательной школе. Ее можно рекомендовать и для самостоятельного изучения школьникам, имеющим серьезное намерение познакомиться с началами математического анализа. Но надо иметь в виду, что изложение ведется строго деловым образом без всяких элементов развлекательности. В книжке нет задач, но их легко найти в различных изданиях *).

Отмечу один логический пробел, на который автор по меньшей мере должен был бы обратить внимание читателей: на с. 79 определенный интеграл определяется как предел при $\lambda \to 0$ (формула (5)). Здесь предел понимается не в том смысле, который был подробно разъяснен в § 3 первой главы. Необходимое здесь определение предела дано в неявном виде на с. 157: *число J называется пределом интегральных сумм*

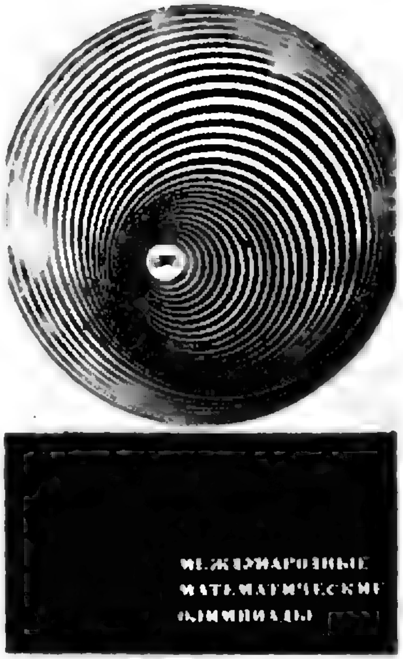
$$\sigma = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}),$$

если для любого чила $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех интегральных сумм σ с $\lambda < \delta$ будет

$$|J - \sigma| < \varepsilon.$$

А. Н. Колмогоров

Книга о международных математических олимпиадах



Два года назад вышла третьим изданием книга Е. А. Морозовой и И. С. Петракова *«Международные математические олимпиады»* *). Книга содержит задачи всех Международных математических олимпиад по одиннадцатую включительно; в ней собраны наиболее интересные задачи из материалов Международного жюри олимпиад, не попавшие на соревнование только из-за обилия предложенных задач; представлены задачи национальных олимпиад ряда стран — участниц Международных математических олимпиад.

---

*) О. С. Ивашев-Мусатов, Начала математического анализа, М., «Наука», 1973.

*) Например: В. П. Минорский, Сборник задач по высшей математике. М., «Наука», 1971.

*) Е. А. Морозова, И. С. Петраков, Международные математические олимпиады, изд. 3-е, исправленное и дополненное, М., «Просвещение», 1971.

Кто в состоянии справиться с задачами Международной олимпиады? По статусу Международных олимпиад от участника требуется подготовка по математике в объеме полной средней школы. Но для решения этих задач зачастую достаточно уметь и хотеть грамотно рассуждать, и поэтому некоторые из задач вполне по силам ученикам 7—8 классов. Ценность книги в том и состоит, что она учит мыслить на элементарном математическом материале.

Кто читает эту книгу, кто черпает из нее материал для проверки своих сил и возможностей в математике? Все победители Всесоюзных и Международных олимпиад (кроме, разумеется, самых первых, которые такой возможности не имели) активно пользовались ею при подготовке к соревнованиям. Но не только они. Книга очень полезна и тем школьникам, которые готовятся к областным математическим олимпиадам. Она интересна всем, кто любит элементарную математику, кто хочет научиться самостоятельно решать олимпиадные задачи, математически грамотно рассуждать, *обосновывать свои мысли, кому хочется испытать, что такое «озарение», с помощью которого решаются задачи с «изюминкой».*

Книга «Международные математические олимпиады» не только предлагает читателям задачи, имеющие отношение к олимпиадам. В ней приводятся решения всех задач, данные авторами пособия или участниками олимпиад. Авторские решения тщательно продуманы и хорошо отредактированы. Об этом, в частности, свидетельствует такой факт: если по первому и второму изданиям этой книги авторы получали письма, в которых отмечались отдельные недочеты и указывалось на опечатки, то после выхода в свет третьего издания авторы получают только новые варианты решений (иногда более изящные) задач, найденные читателями.

К сожалению, из третьего издания книги исключен почти полностью весь иллюстративный материал; в том числе по непонятным причинам исчезли фотографии первых призеров олимпиад. Думается, что в последующих изданиях этот недостаток будет устранен.

А потребность в новом издании имеется настоятельная. После одиннадцатой олимпиады прошли еще четыре Международные математические олимпиады. Нет никаких сомнений, что у авторов накопился богатый и интересный материал, который с нетерпением ожидается любителями математики. К тому же, первые три издания вышли небольшими тиражами, найти книгу практически невозможно, и многие теперешние старшеклассники знают о ней, главным образом, по рассказам старших товарищей.

Было бы хорошо, если бы авторы в последующих изданиях рассказали о судьбах победителей олимпиад. Многие из них стали видными педагогами и известными учеными. Очевидно, участие в олимпиадах сыграло в их судьбе немалую роль.

В заключение приведем несколько задач из этого сборника.

75. Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 *г*. Как возможно быстрее отвесить покупателю 1 *кг* сахару? (Указать схему уравновешиваний.)

112. Два зеркала образуют двугранный угол с раствором a. Внутри угла стоят свеча и наблюдатель. Сколько изображений свечи видит наблюдатель?

154. Длинный коридор единичной ширины имеет форму буквы «Г». Жесткая длинная труба (шириной которой можно пренебречь) положена и всюду касается пола. Длиной труб (труба может быть искривлена) называется прямолинейное расстояние между ее концами. Найти максимальную длину трубы, чтобы трубу можно было протащить вдоль обоих колен коридора и повернуть в углу, не отрывая от пола.

167. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

а) среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;

б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда утверждение:

в) не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

В. Н. Березин,
Н. М. Доронина

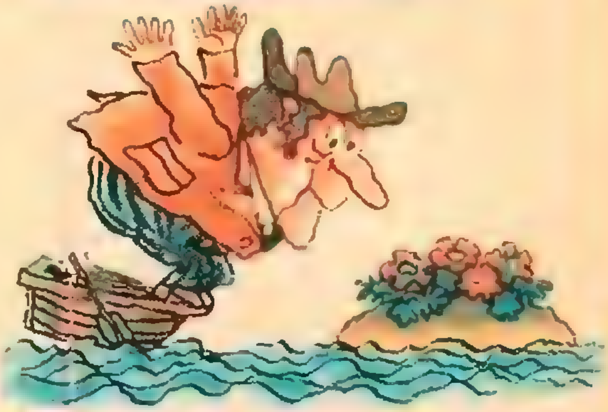
«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Фигуристка, вращаясь при парном катании вокруг своей оси, 20 раз повернулась лицом к своему партнеру, который за это же время, равное 10 секундам, сделал два оборота вокруг фигуристки.

Сколько оборотов в секунду выполняла фигуристка?

2. Почему трудно прыгнуть на берег с легкой лодки?



3. В следующем примере цифры зашифрованы буквами. Расшифруйте пример:

$$\begin{array}{ccccc} \text{ива} & : & \text{да} & = & \text{да} \\ - & & \times & & + \\ \text{ау} & + & \text{а} & = & \text{лв} \\ \hline \text{дол} & - & \text{уа} & = & \text{уд} \end{array}$$

4. Чтобы снег на тротуарах скорее таял, его посыпают солью. С другой стороны, для получения низких температур снег смешивают с солью в отношении две весовые части к одной весовой части. Таким образом, соль в первом случае как бы способствует нагреванию, а во втором — охлаждению. Нет ли здесь противоречия?

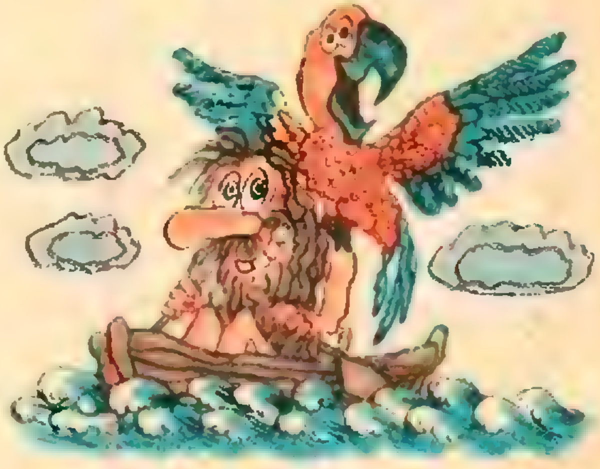
5. От необитаемого острова отошла лодка, на создание которой у Робинзона ушло 20 лет. На плече у Робинзона сидел любимец-попугай. Вот что он иногда произносил:

— Хватайся за меня! Мы выплывем на берег. Слушай меня, ведь я втрое старше тебя.

— Еще ни один корабль не подошел к нам. Надо самим строить лодку. Море-то я хорошо знаю, ведь прожил две твои жизни.

— Крепим весло! Мы еще погуляем по большой земле, хоть мне лет вполовину больше, чем тебе.

Сколько лет попугаю? Сколько лет провел Робинзон на острове?



Художник Э. Назаров

Почему подушка мягкая?

Почему подушка мягкая? Почему удобно лежать на перине или на надувном матрасе? Почему лежать на досках или твердой земле неудобно?

Если вы просто скажете, что пух и воздух мягкие, а доски и земля твердые, то будете не совсем правы. Дело вовсе не в свойстве материала — и доски и твердая глина могут быть «мягкими». И из твердого материала можно сделать удобное «ложе», если придать ему форму человеческого тела.

Представьте себе, что вы легли на мягкую глину и оставили в ней углубление, соответствующее форме вашего тела. Высохнув, глина станет твердой, как камень. Если теперь вы ляжете в получившееся углубление, то вам будет очень удобно, несмотря на то, что ваше «ложе» никак не назовешь мягким (правда, при высыхании размер несколько изменится, но мы это учитывать не будем).

Так в чем же дело? Оказывается, впечатление мягкости или твердости зависит не от свойства материала, а от величины давления на поверхность тела. Проведем небольшой расчет.

Будем считать, что масса взрослого человека — около 60 *кг*, поверхность тела — примерно 2 $м^2$. Если человек лежит в постели, которая прогибается и как бы «охватывает» тело, с ней соприкасается примерно четверть всей поверхности его тела.

Нетрудно подсчитать, что в этом случае на один квадратный сантиметр поверхности тела приходится всего 12 *Г*. А если этот же человек ляжет на твердую, неупругую поверхность, площадь соприкосновения составит только около ста квадратных сантиметров. Тогда на один квадратный сантиметр придется уже 600 *Г*, то есть давление возрастет в 50 раз!

Н. М.

К статье «Поверхностное натяжение чертит гиперболу»

Жидкость, поднявшаяся между пластинками, растянута. Чем выше выделенный столбик (см. рис. 4 в статье), тем меньше давление этого столбика на данном уровне. Отсюда и появляется горизонтальная сила, уравновешивающая горизонтальную составляющую силы поверхностного натяжения

К статье «Механика помогает геометрии»

1. По формулам (2), (4), (6) имеем $(a+b)\,CC_1^2 = J_C - J_{C_1}$, $J_C = a^2b + b^2a$,

$$J_{C_1} = \frac{abc^2}{a+b}$$

2. Поместим в вершинах A, B, C массы a, b, c. Тогда по формулам (2) и (9) имеем $J_Z = a\cdot ZA^2 + b\cdot ZB^2 + c\cdot ZC^2$, $J_Z = abc$, откуда следует требуемое тождество.

3. Поместим в вершинах квадрата $A_1A_2A_3A_4$ равные массы (по 1 грамму). Центром тяжести возникшей системы из 4 материальных точек является центр Z квадрата.

Пусть P — какая-либо точка плоскости. Тогда по формулам (2) и (3) имеем $J_P - J_Z = 4ZP^2$, $J_Z = ZA_1^2 + ZA_2^2 + ZA_3^2 + ZA_4^2 = 2a^2$, $J_P = PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_4^2$. Из этих трех равенств видно, что последняя сумма тогда и только тогда равна c^2, когда $4ZP^2 = c^2 - 2a^2$. Поэтому искомая фигура — окружность с центром Z радиуса

$$\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - 2a^2}.$$

4. Сначала вычислите расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения медиан. Для этого воспользуйтесь формулами (2) и (3) и решением задачи 2 (в статье).

К статье «Числовые данные в геометрических задачах»

1. $\sqrt{10}$.

2. $\dfrac{225\sqrt{2}}{8}$.

3. $\dfrac{7}{6}\sqrt{\dfrac{22}{39}}$. Указание. BD — медиана.

4. $\dfrac{4a}{\sqrt{114}}$.

5. $2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *см*.

6. 24 *см*.

7. $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$. Указание. Пусть D лежит на дуге AC, тогда $AD = CD$.

8. 1/12. Указание. Площади трех треугольников, образованных отрезками медиан (от вершин до точки пересечения медиан) и сторонами исходного треугольника, равны.

9. $$\left[10\left(1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{10}}\right)\right]\times\left[10\left(1-\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{10}}\right)\right]\times\left[\frac{7+\sqrt{19}}{2}\right].$$

10. $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}R$, $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}R$.

11. 5/2. Указание. $\triangle ABC$ прямоугольный, CD — диаметр проведенной окружности, $\sin\angle C$ легко находится.

К статье «Кинематика прямолинейного движения материальной точки»

1. $t = 80$ *с*.
2. $v_{\text{ср}} = 12{,}5$ *м/с*.
3. $l_0 = 405$ *м*; $l_{\max} = 725$ *м*.
4. $t = 3$ *с*.
5. $H_{\max} = 107{,}2$ *м*; $t \approx 5{,}8$ *с*; $v \approx 46$ *м/с*.
6. $h \approx 8{,}8$ *м*.
7. См. рисунок 1.

К статье «Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Факультет физико-математических и естественных наук

Вариант I

1. $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

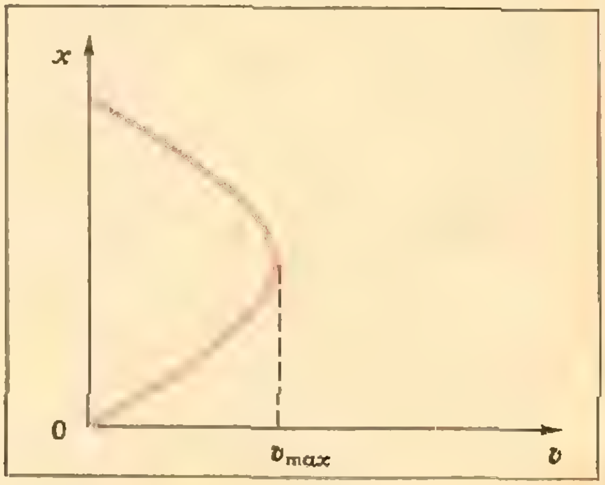


Рис. 1.

2. Если $a > 1$, то $a^{-2} < x < a$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < a$ и $x > a^{-2}$.

3. $x = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Указание. Проверить, что правая часть уравнения равна $\frac{1}{4}$. Далее доказать, что уравнение $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1$ удовлетворяется, лишь если $\sin^2 x = 1$ (и $\cos x = 0$) или если $\cos^2 x = 1$ (и $\sin x = 0$).

4. $\arcsin\left(\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Вариант 2

1. $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 3 + \frac{2}{3} i$.

2. $x > 2$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$y = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\frac{1}{3} + \cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$

Вариант 3

1. Если $a > b$, то $x \geqslant -2b$; если $a < b$ то $x \geqslant -2a$; если $a = b$, то решений нет.

2. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{5}$.

3. $x = \frac{(k + l + 1)\pi}{2}$, $y = \frac{(k - l)\pi}{2}$,

где k и l — любые целые числа.

4. $\frac{37 + 3\sqrt{2}}{6\sqrt{2} - 1}\pi R^2$. Указание. Постарайтесь возможно яснее представить себе полушар, вписанный в усеченный конус; обратите внимание на то, что у данного усеченного конуса большим является верхнее основание.

Инженерный факультет

Вариант 1

1. $x_1 = -1$; $x_2 = 5$. Указание. Сделать замену $x - 2 = y$.

2. $x > -1$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $\frac{1}{3} a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$.

Вариант 2

1. $x < -2$, $-\frac{1}{2} < x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > 2$.

2. $x = 5$.

3. $x_1 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $\frac{2a^4}{a^2 - 4R^2}$.

К статье «Телевидение готовит в вуз»

Физика

1. Три шарика лежат на дне сосуда, четвертый сверху опирается на них. Соединив центры шариков, получим правильную треугольную пирамиду.

Рассмотрим взаимодействие верхнего и одного из нижних шариков (см. рис. 2).

Сила давления нижнего шарика на стенку сосуда равна

$$F_x = F_3\cos\alpha,$$

где F_3 — сила действия верхнего шарика на нижний.

На верхний шарик действуют силы: mg, $F_1 = F_3$ и F_2 — сила действия остальных двух нижних шариков на верхний. Из условия равновесия верхнего шарика

$$F_1 = \frac{mg}{2}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Из треугольника ABC $\cos\alpha = \frac{D - d}{2d}$

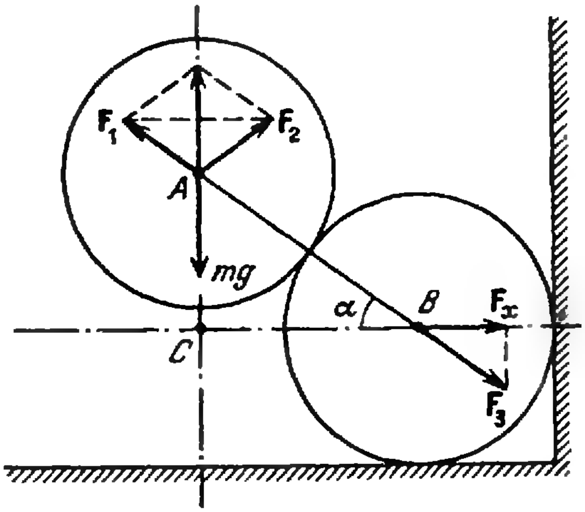


Рис. 2.

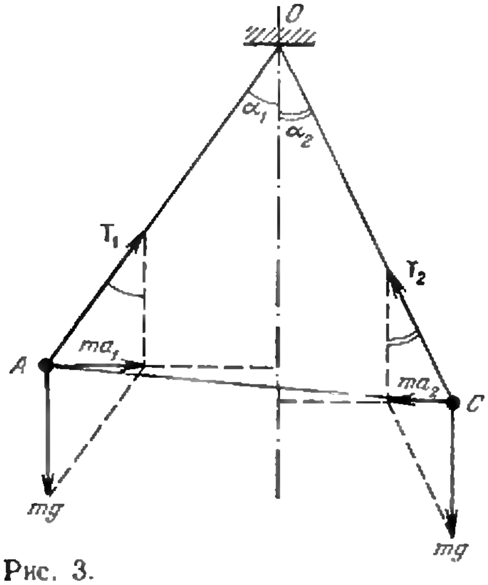


Рис. 3.

тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{3d^2 - D^2 + 2dD}{4d^2}}$$

Масса шарика $m = \rho\pi\frac{d^3}{6}$

Окончательно получим

$$F_x = \frac{\pi d^3}{12}\rho g\frac{D-d}{\sqrt{3d^2 - D^2 + 2dD}} = 1{,}7\ н.$$

2. $l = \frac{v^2}{kg} = 12{,}8\ м.$

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии.

3. На рисунке 3 изображены два равновесных положения шарика: A и C. Из треугольника AOC по теореме косинусов

$$AC = l\sqrt{2(1-\cos\alpha)},$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a_1}{g}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a_2}{g}$.

Таким образом,

$$AC = l\sqrt{2}\times$$

$$\times\sqrt{1-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a_1}{g} + \operatorname{arctg}\frac{a_2}{g}\right)} \approx$$

$$\approx 0{,}24\ м.$$

Математика

1. Так как $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $k < n$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

2. Пусть, для определенности, $0 < a \leqslant b$. Запишем доказываемое неравенство в виде

$$b^n(1+x)^n < 2^n(1+x^n)\,b^n,$$

где $x = \frac{a}{b}$. Поскольку $0 < a \leqslant b$, то $0 < x \leqslant 1$, а тогда

$(1+x)^n \leqslant (1+1)^n = 2^n < 2^n + 2^n x^n =$
$= 2^n(1+x^n)$.

3. Доказательство. Поскольку $2^{105} + 3^{105} = (2^3)^{35} + (3^3)^{35} = 8^{35} + 27^{35} = (8+27)(8^{34} - 8^{33}\cdot 27 + \ldots + 27^{34})$, то $2^{105} + 3^{105}$ делится на 35. Аналогично доказываются другие утверждения.

4. 95, 494. Указание. Представить 589 в виде $1\cdot 19\cdot 31$; искомые числа имеют вид $19n$, $19m$, или $31n$, $31m$, где m, n — натуральные числа.

5. Приведем одно из возможных решений. Так как

$\sin\beta = \sin[(\alpha+\beta)-\alpha] =$
$= \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$

то равенство $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta$ можно записать в виде

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha.$$

Поделив обе части последнего равенства на $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, получим

$$2\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Окончание смотрите в № 12.

К задачам «Квант» для младших школьников

(см. «Квант», 1973, № 10)

1. $338 \times 275 = 92\,950$.

2. Сначала нужно включить задний тормоз, а затем передний. Если сделать наоборот, велосипед может перевернуться.

3. 8 и 10 марок.

4. Спираль электронагревателя расплавится, так как воздух гораздо хуже проводит тепло, чем вода.

5. $1 - \pi/6$.

6. Ток равен нулю.

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 6/VIII-73 г.
Подписано к печать 20/IX-73 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,50 Уч.-изд. л. 7,06
Тираж 349290 экз. Т 14477 Цена 30 коп. Заказ 1568

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

XV
IMO
1973

XV МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Школьники 16 стран решают задачи второго дня.

Руководитель шведской команды А. Самуэльсон обсуждает с координаторами работы школьников.

НОМЕР
12

Основан в 1970 году

Квант

1973
12

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
И. Б. Мамулова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ

2 *Л. А. Калужнин.* К 100-летию теории множеств Георга Кантора
9 *Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс.* Рациональные приближения и трансцендентность
12 *Ю. И. Соколовский.* Тепловые машины
21 *О. А. Жаутыков.* О границах корней кубического уравнения
24 *В. Н. Березин.* Что видит внимательный глаз

Математический кружок

26 *Ю. П. Лысов.* Каких чисел больше?

Задачник «Кванта»

29 Задачи М236—М240; Ф248—Ф252
31 Решения задач М179, М196—М199; Ф208—Ф210

Практикум абитуриента

39 *Я. И. Груденов.* Поиск решения задачи
45 *А. Н. Борзяк, В. И. Давыдов, П. Т. Дыбов, И. И. Наслузов.* Телевидение готовит в вуз

Информация

46 *Л. Новикова, В. Стрельцов.* Полигон логических структур
49 *И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин.* IV математическая олимпиада МЭСИ
50 *В. В. Александров.* Преподавание математики на подготовительных отделениях вузов
52 *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский.* Наша почта

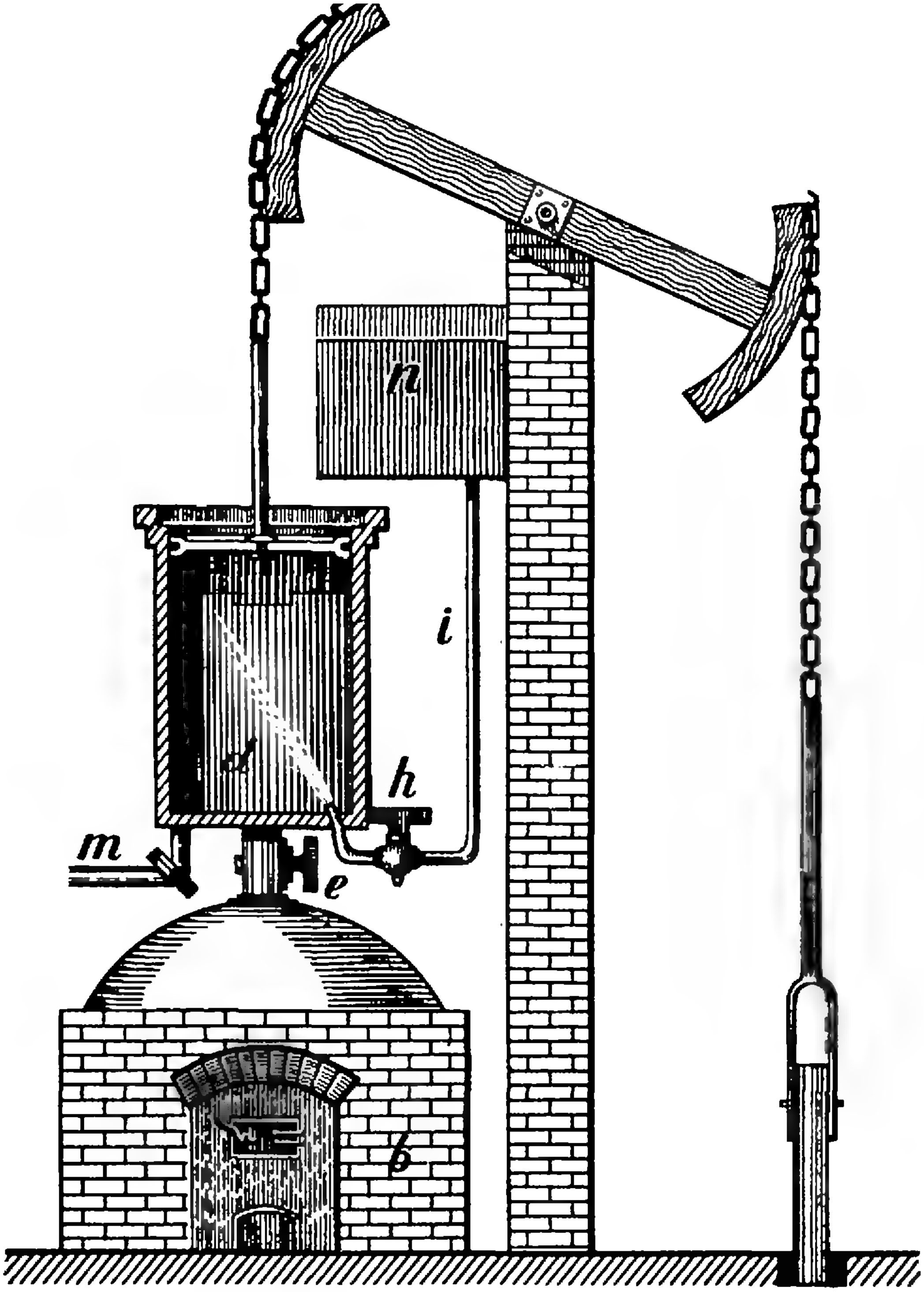
«Квант» для младших школьников

54 Задачи
55 *В. М. Розентуллер.* Часы-календарь
56 **Ответы, указания, решения**
59 Напечатано в 1973 году
63 Анкета

Уголок коллекционера

(3-ая с. обложки)
В. А. Лешковцев. Первая ракета к Марсу
Смесь *(с. 8, 20, 23, 28, 38)*

© «Квант», 1973 г.



«В начале XVIII столетия англичане Северн и Ньюкомен построили машину для выкачивания воды из каменноугольных копей. Она представлена на чертеже. В котле *b* образуется пар, который через трубку *e* переходит в цилиндр *d* и поднимает поршень; когда поршень доходит до верха, запирают кран *e*, открывают *h* и через трубку *i* вбрызгивают в цилиндр из резервуара *n* струю холодной воды, которая сгущает пары; внутри цилиндра делается пустота — поршень опускается от давления атмосферы; вода, образующаяся от сгущения пара и вбрызнутая из резервуара *n*, выпускается посредством трубки *m*. Таким образом, открывая и закрывая краны *e*, *h*, *m*, можно заставить поршень двигаться вверх и вниз. Поршень имеет стержень, который с помощью цепи соединен с коромыслом, имеющим точку опоры в средине. На другом конце коромысла тоже висит цепь, и к ней прикреплен стержень насоса, который выкачивает воду из каменноугольных копей.

Это описание одной из первых паровых машин приводилось в книге «Руководство физики», составленной А. Малининым и К. Бурениным. Седьмое издание этой книги для гимназий и реальных училищ вышло в свет в 1883 году.

О принципе действия тепловых машин рассказывается в этом номере нашего журнала в статье Ю. И. Соколовского (см. с. 12).

Георг Кантор (1845—1918)

Л. А. Калужнин

К 100-летию теории множеств Георга Кантора

> *Если вы захотите, чтобы дерево приносило больше плодов, чем обычно, вам нечего делать с его ветвями, а нужно взрыхлить землю и подложить новую почву под корни.*
>
> Френсис Бэкон

В конце XIX века для математического анализа — центральной области чистой и прикладной математики — стало необходимым уточнить смысл таких основных понятий, как функция, непрерывность, сходимость. Для этого нужно было строго определить, что такое действительное число и, более того, что такое натуральное число.

Этот комплекс вопросов был успешно решен, в первую очередь, немецкими математиками К. Вейерштрассом (1815—1897), Г. Кантором (1845—1918) и Р. Дедекиндом (1831—1916). Их труды заложили основы современного анализа.

Надо заметить, что общая обстановка, сложившаяся к тому времени, благоприятствовала развитию новых, плодотворных идей в науке.

В конце XIX — начале XX столетий происходит пересмотр старых представлений буквально во всех областях знания. При этом в недрах старых учений рождались новые представления.

Сейчас мы — свидетели научно-технической революции — уже не поражаемся таким проявлениям человеческого гения, как космонавтика, атомная энергетика или ЭВМ. Это кажется нам обыденным. И очень немногие представляют себе, какой огромный вклад внесли ученые прошлого в сокровищницу мировой науки.

Чтобы проследить путь развития современной науки и техники и иметь возможность предвидеть их дальнейшее развитие, нужно вернуться к истокам.

Крупнейшие фундаментальные достижения науки — такие, как открытие теории относительности или появление кибернетики, стали возможными не только благодаря увеличению объема научных знаний, но и в силу критического переосмысления самых основных и привычных понятий.

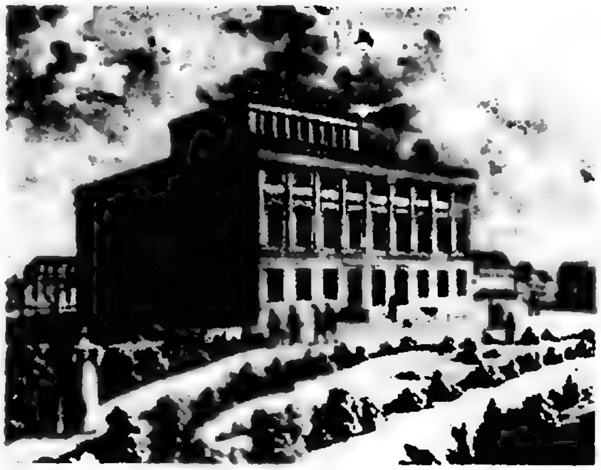
В математическом анализе основные определения также подверглись чрезвычайному обобщению, «... исследовались функции с самыми необыкновенными свойствами и аллюром... Это дало возможность говорить видным математикам о превращении или вырождении математического анализа в «клинику и патологию функций», ибо правильное течение функций стало редчайшим исключением» (Н. Н. Лузин). Под грозными ударами критики основ математического анализа началась перестройка всей математической науки.

В результате дальнейшего приведения в порядок основ анализа в конце XIX века возникла новая фундаментальная область математики — теория множеств. Ее становление проходило в обстановке резкой критики, особенно со стороны Л. Кронекера*). Критика была вызвана смелыми воззрениями Кантора, которые шли вразрез с многовековой традицией. Но это не могло помещать плодотворным применениям новой теории к многочисленным разделам математики. С начала XX века теория множеств стала базой всех математических дисциплин, а теперь ее методы и понятия постепенно проникают и в школьную математику. Исходные положения этой науки не более трудны, чем положения арифметики или элементарной алгебры и геометрии. Если они тем не менее не так широко известны, то это связано с тем, что теория множеств возникла сравнительно недавно — всего сто лет назад. Ее родоначальником был один из величайших математиков — Георг Кантор. Мы можем даже точно назвать «день рождения» этой науки — 7 декабря 1873 года. В этот день Кантору удалось доказать первое нетривиальное утверждение о бесконечных множествах — *«теорему о несчетности множества действительных чисел»*. Тем самым был открыт путь к построению новой большой математической дисциплины — учения о бесконечных множествах. О том, как это произошло, мы знаем из переписки Кантора с Дедекиндом. Нам кажется, что рассказ об этом с выдержками из писем Кантора представляет несомненный интерес для наших читателей.

---

*) Г. Кантор родился в Санкт-Петербурге в 1845 г. В Германии — с одиннадцати лет. В 1867 г. окончил Берлинский университет. Основной вклад Г. Кантора в науку состоит в создании теории множеств. Умер в 1918 г.

В начале 70-х годов прошлого столетия молодой профессор старинного немецкого университета в Галле Георг Кантор задумался о сущности натуральных чисел, которыми мы пользуемся для счета предметов в каком-нибудь конечном множестве, и о том, нельзя ли и бесконечным множествам, например множеству всех точек плоскости или множеству всех целых чисел, приписывать некоторые «числа» неизвестной пока природы. Интерес к подобным вопросам возник у Кантора под влиянием его учителя, профессора Вейерштрасса. Мы уже говорили о том, что внимание крупнейших математиков было приковано к действительным числам. Это объясняется тем, что, в конечном счете, именно с недостаточно точным определением того, что такое действительное число, и были связаны трудности, возникавшие в анализе. Постепенно математики этой эпохи переходили ко все более простым понятиям: от действительных чисел к рациональным, целым и, наконец, к натуральным.



Университет в Галле, в котором преподавал Кантор.

Можно считать, что натуральные числа не следует сводить к более простым понятиям. Такого мнения придерживаются некоторые математики и сейчас. Но многое говорит о том, что понятие натурального числа не является простейшим: есть более простые, более начальные понятия. Ребенок осваивает это понятие не сразу, а обучается ему постепенно. Из анализа языка хорошо известно, что обычные натуральные числа появились довольно поздно. Их «изобретение» сравнимо по своему значению только с изобретением письменности. В доисторические времена (аналогичные явления можно наблюдать у некоторых племен и сегодня) люди знали лишь числа «1», «2», иногда еще «3», а дальше шло «много», «тьма». И все-таки, не умея считать, люди могли ответить на вопрос, в каком из двух множеств больше элементов. Разумеется, в этом случае сравнивались множества конкретных элементов: поголовье скота, размеры войск и другие. Сейчас этот метод сравнения множеств называется установлением взаимно однозначного соответствия. Вот в чем он заключается.

---

*) Л. Кронекер (1823—1891) крупный немецкий ученый XIX века. Кронекер стремился всю математику получить из теории чисел. «Целые числа сотворил господь бог, а все прочее — дело людских рук»,— заявил он в 1886 г. на съезде в Берлине.

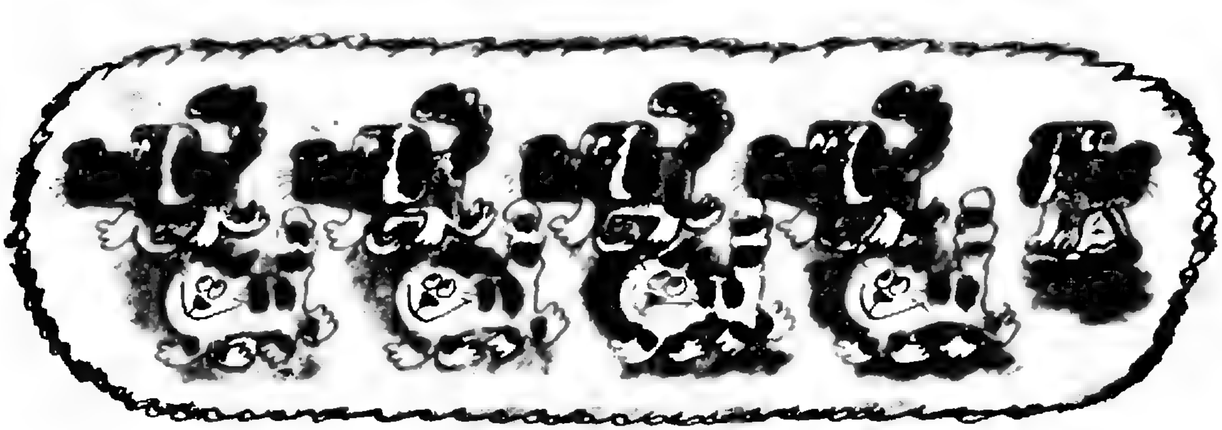
Пусть мы имеем два конечных множества M_1 и M_2. Элементы первого множества обозначим условно собачками, а второго — кошками. Для сравнения этих множеств поступают так: извлекают по одному элементу из каждого множества и сопоставляют их друг с другом, образуя пары (см. рисунок).

Если собачки и кошки кончаются одновременно, то говорят, что между множествами M_1 и M_2 установлено взаимно однозначное соответствие и что эти множества содержат одинаковое число элементов (что они равночисленны или эквивалентны). Легко представить себе другую ситуацию: некоторые элементы множества M_1 остались без напарника. Тогда следует считать, что множество M_1 содержит больше элементов, чем множество M_2. Очевидно, что описанная процедура сравнения конечных множеств не нуждается в понятии «натуральное число». Наоборот, понятие взаимно однозначного соответствия, по-видимому, является более простым, и можно определить понятие «натуральное число» исходя из него.

Математики и логики прошлого столетия (Г. Фреге, Б. Рассел и другие) предлагали делать это на основе, примерно, следующих рассуждений.

Разобьем все конечные множества на классы таким образом, что в каждый класс входят те и только те множества, которые эквивалентны между собой, вне зависимости от природы элементов образующих данное множество. Тогда то общее свойство, которое характеризует все конечные множества из какого-либо класса, и определяется как число элементов в множествах этого класса. Так, например, 5 — это то общее свойство, которым обладают все конечные множества, эквивалентные множеству пальцев моей правой руки. Из вышеизложенного ясно, как сравнивать определенные таким образом числа «по величине». Пусть m_1 и m_2 — два натуральных числа, а M_1 и M_2 — два множества, характеристиками которых являются эти числа. Если M_1 и M_2 неэквивалентны и имеется взаимно однозначное соответствие между M_1 и некоторой частью множества M_2, то $m_1 < m_2$. Таким образом мы определили понятие «натуральное число» и свойства этих чисел ($n_1 = n_2$; $n_1 < n_2$; $n_1 > n_2$).

Но ведь при таком способе сравнения совсем не обязательно предполагать, что множества M_1 и M_2 конечные. Поэтому у Кантора возникла



мысль, что таким же образом можно разбить на классы и все бесконечные множества.

Все множества, входящие в один класс, то есть имеющие одну и ту же мощность, называются равномощными.

Тогда всем множествам, входящим в один класс, соответствует определенное число, которое называется кардинальным числом или мощностью.

Отсюда ясно, что мощность — это обобщение понятия натурального числа.

Простейшим примером бесконечного множества является множество N всех натуральных чисел. Поэтому Кантор стал сравнивать различные бесконечные множества с множеством N. Очень скоро выяснилось, что для многих бесконечных множеств довольно просто устанавливается взаимно однозначное соответствие с этим множеством. Рассмотрим, например, N_2 — множество всех положительных четных чисел. Несмотря на то, что N_2 является частью N, между N_2 и N можно установить взаимно однозначное соответствие: числу $2n$, входящему в множество N_2, сопоставим число n, входящее в множество N_1. Ясно, что такое соответствие будет взаимно однозначным. На первых порах казалось парадоксальной возможность установить взаимно однозначное соответствие между множеством и его частью: ведь для конечных множеств такая ситуация невозможна. Но споры по этому поводу прекратились довольно скоро — было установлено, что для бесконечного множества A всегда можно указать такое его подмножество B, что между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. Дедекинд даже предложил считать это определением бесконечного множества.

Еще большее удивление вызывает то, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех положительных рациональных чисел и множеством N. Тем не менее указать такое соответствие не так уж трудно. Постарайтесь сделать это самостоятельно *).

Естественно возникает вопрос: существуют ли бесконечные множества, для которых взаимно однозначное соответствие с N невозможно?

Если бы таких множеств не оказалось, то тем самым все бесконечные множества были ли бы равномощными, и понятие кардинального числа (для бесконечных множеств) потеряло бы всякий смысл—оно было бы одним и тем же для всех бесконечных множеств.

В начале 70-х годов прошлого века Кантор заподозрил, что бесконечным множеством, не равномощным множеству N натуральных чисел, является множество R всех действительных чисел (или даже множество всех действительных чисел какого-либо отрезка — скажем, множество всех чисел отрезка $[0, 1]$). Но как это можно доказать? Ведь во всех рассмотренных выше случаях доказательство состояло в нахождении некоторого вполне определенного взаимно однозначного отображения. В данном же случае требуется установить, что построение подобного отображения невозможно. Утверждения такого рода называются «теоремами невозможности», и их доказательство обычно требует совершенно новых оригинальных идей (пример этому — доказательство невозможности квадратуры круга и трисекции угла, или доказательство невозможности решения алгебраических уравнений степени больше чем четыре с помощью операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней разных степеней). О работе Кантора над доказательством неравномощности множества действительных чисел и множества N натуральных чисел довольно подробно известно из его переписки с Дедекиндом. Вот некоторые выдержки из этой переписки:

---

*) Если вам это не удастся, прочтите статью «Каких чисел больше?» (с. 26). Приведенные в ней указания помогут вам справиться с этой задачей.

«Галле, 29 ноября 1873 г.

... Разрешите обратиться к Вам с вопросом, представляющим для меня некоторый теоретический интерес, но на который я не могу найти ответа. Может быть, Вы это можете и будете так любезны мне об этом написать. Речь идет о следующем.

Рассмотрим совокупность всех положительных целочисленных объектов и обозначим ее через (n). Кроме того, рассмотрим, скажем, совокупность всех положительных действительных числовых величин и обозначим ее через (x). Вопрос состоит просто в том, возможно ли так поставить в соответствие (n) и (x), что каждому индивидууму одной совокупности будет отвечать один и только один индивидуум другой.

С первого взгляда кажется, что нет — это невозможно, так как (n) состоит из дискретных частей, а (x) образует континуум. Но таким аргументом ничего не выигрывается, и как бы я ни склонялся к мнению, что (n) и (x) не допускают однозначного соответствия, причину этого я найти не могу, а именно это мне и нужно. Возможно, что причина совсем простая.

Разве на первый взгляд не склоняешься к мнению, что (n) не допускает однозначного соответствия с совокупностью (p/q) всех положительных рациональных чисел и тем не менее совсем не трудно показать...» (что это так. — *Л. К.*).

29 ноября 1873 г. в дневнике Дедекинда, где он отмечал содержание полученных им писем на научные темы и свои мысли по их поводу, появляется следующая запись: «... Я ему незамедлительно ответил, что я не могу решить его первый вопрос, но одновременно высказал и полностью доказал теорему, что даже совокупность всех алгебраических чисел может быть указанным образом сопоставлена совокупности (n) натуральных чисел...».

А вот письмо от 2 декабря.

«... Я был очень рад получить сегодня Ваш ответ на мое последнее послание. Мой вопрос я Вам поставил по той причине, что уже годы, как я в сомнении, являются ли возникшие передо мной трудности трудностями чисто субъективного характера или же они связаны с существом дела. Так как Вы мне пишете, что и Вы не в состоянии на него ответить, то я могу считать, что верно последнее...».

И, наконец, письмо от 7 декабря 1873 г.

«... В последние дни у меня было время более интенсивно продумать высказанную мною гипотезу; только сегодня, как мне кажется, я смог довести дело до конца. Если я ошибаюсь, то, несомненно, я не встречу более снисходительного критика, чем Вы. Я осмеливаюсь предложить Вашему приговору то, что я успел записать на бумаге со всеми несовершенствами первой мысли...».

Затем следует доказательство несчетности множества действительных чисел из интервала $[0, 1]$. Оно длинно и сложно — редко самые первые доказательства какого-либо утверждения оказываются самыми простыми. Мы не будем его здесь приводить. Уже 9 декабря Кантор предлагает более простое доказательство, а Дедекинд в свою очередь находит дальнейшие упрощения.

Вскоре возникло доказательство, известное как «диагональный метод Кантора», которым пользуются и в настоящее время. Приведем это доказательство.

Заметим, что каждое действительное число ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, можно записать как бесконечную десятичную дробь вида $0, a_1, a_2 \ldots$, где a_i, $i = 1, 2, \ldots$, — какие-либо цифры — знаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Представление всех чисел в подобном виде однозначно, исключение здесь представляет лишь тот случай, когда в записи числа, начиная с некоторого k, все a_i равны 0. Такие числа могут быть записаны также и по-другому: нужно заменить все a_i, начиная с того же разряда k, цифрами 9 и уменьшить предшествующую им цифру на 1 — так, например, число 0,3500... можно записать и в виде 0,34999... Других возможностей разного представления числа в виде бесконечных десятичных дробей нет. Условимся (для определенности), что, если возможны две записи числа, мы будем выбирать ту из них, которая оканчивается девятками.

Предположим теперь, что удалось установить взаимно однозначное соответствие между всеми действительными числами, лежащими между 0 и 1 и всеми натуральными числами, так что мы можем выписать все эти действительные числа в бесконечную последовательность

$$\begin{aligned} &1 \leftrightarrow 0,\ a_1^1\ a_2^1\ a_3^1\ldots\\ &2 \leftrightarrow 0,\ a_1^2\ a_2^2\ a_3^2\ldots\\ &\ldots\\ &p \leftrightarrow 0,\ a_1^p\ a_2^p\ a_3^p\ldots \end{aligned}$$

Покажем, что такая последовательность не может содержать всех действительных чисел. Для этого построим такое число $b = 0,\ b_1,\ b_2\ldots$, что $b_i \neq a_i^i$ для всех i. Мы определим это число так:

$$\begin{aligned} b_i &= 5, \text{ если } a_i^i \neq 5,\\ b_i &= 9, \text{ если } a_i^i = 5. \end{aligned}$$

Число b не может встретиться в выписанной выше последовательности. Ведь в противном случае оно должно было бы занимать некоторое (скажем, n-е) место. Но от n-го числа число b отличается по построению в n-м разряде. Итак, предполагаемый пересчет всех действительных чисел невозможен, и, следовательно, множество N и множество действительных чисел R неравномощны.

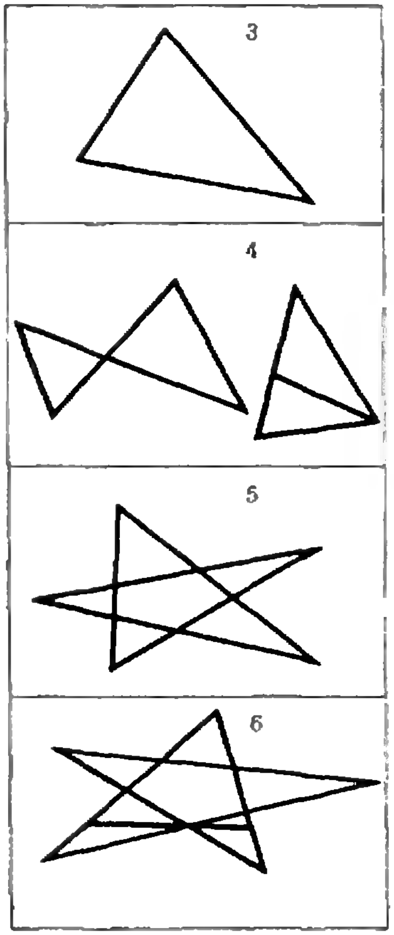
Так впервые было доказано, что и среди бесконечных множеств имеются неравномощные.

Вскоре Кантором было установлено, что можно указать сколь угодно много попарно неэквивалентных бесконечных множеств, так что сама совокупность бесконечных кардинальных чисел оказывается неограниченной, и в 70—80-х годах прошлого столетия — в основном Кантором — была построена новая математическая наука — теория множеств.

Сколько треугольников?

Вот задача, которая легко формулируется, но общее решение которой до сих пор не найдено

Требуется определить, *какое максимальное число непересекающихся треугольников можно получить в результате пересечения n прямых линий.*



Для $n = 3$, 4, 5 и 6 можно, перебирая все возможные варианты, получить соответственно 1, 2, 5 и 7 треугольников (см. рисунок). Попробуйте найти максимальное число треугольников для $n = 7$ и 8. Это будет посложнее. А может, вам посчастливится найти формулу количества таких треугольников для общего случая пересечения n прямых линий?

Д. Б. Фукс
М. Б. Фукс

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ

Мы начнем статью с определений. *Алгебраическими* называют числа, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами. Числа, не являющиеся алгебраическими, называют *трансцендентными*.

Далеко не все числа являются алгебраическими. Обычно этот факт доказывают так. Множество алгебраических чисел *счетно*, потому что счетно множество многочленов с целыми коэффициентами и каждый такой многочлен имеет конечное число корней; множество же всех действительных чисел *несчетно* *).

Это доказательство интересно тем, что оно не просто устанавливает существование трансцендентных чисел, но и показывает, что их в определенном смысле больше, чем алгебраических. Но оно обладает и важным дефектом: оно неэффективно, то есть не содержит построения какого-либо заведомо не алгебраического числа. Правда, примеры трансцендентных чисел всем известны: π и e. Но доказать трансцендентность этих чисел совсем не просто. И, вообще, доказательство трансцендентности конкретного числа часто оказывается очень сложным. Например, в одной из знаменитых проблем Гильберта предлагалось доказать трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$. Эта проблема долго не поддавалась усилиям ученых и была спустя много лет решена советским математиком А. О. Гельфондом.

В этой статье мы укажем один из способов построения трансцендентных чисел (с доказательством их трансцендентности). Основным инструментом нам послужит теория рациональных приближений. В наших статьях о рациональных приближениях («Квант», №№ 6 и 11 за 1971 год; сразу оговоримся, что знать содержание упомянутых статей для чтения этой не обязательно) было показано, что хуже всего приближаются рациональными числами такие «благополучные» алгебраические числа, как $\sqrt{2}$, $(\sqrt{5}+1)/2$ и т. п. Мы дадим аккуратное определение «хорошо приближаемого» иррационального числа и докажем, что все иррациональные числа, хорошо приближаемые рациональными, трансцендентны. Это позволит нам построить сколько угодно примеров трансцендентных чисел.

Определение. Иррациональное число α называется *хорошо приближаемым*, если для любых положительных N, n найдется такая дробь p/q, что $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Nq^n}$.

Легко построить сколько угодно хорошо приближаемых чисел. Пусть, например,

$$\alpha = 0,\underbrace{10\ldots0}_{m_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_3-1}10\ldots,$$

---

*) О том, какие множества называются *счетными*, а какие *несчетными*, рассказано в статье: Ю. П. Лысов, Каких чисел больше?, с. 26. Доказательство несчетности множества действительных чисел приведено на с. 8.

где $m_1, m_2, m_3, \dots$ — некоторая возрастающая последовательность, составленная из целых чисел, больших 1. Положим

$$\alpha_k = \\ =0,\underbrace{10\dots0}_{m_1-1}\underbrace{10\dots0}_{m_2-1}1\ \dots\ \underbrace{10\dots0}_{m_k-1}1.$$

Очевидно, α_k — рациональное число со знаменателем

$$q_k = 10^{m_1+\dots+m_k+1}$$

и что

$$|\alpha - \alpha_k| = \alpha - \alpha_k = \\ =0,\underbrace{0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 0}_{m_1+\dots+m_k+m_{k+1}}\ 10\dots < 2\times \\ \times\cdot 10^{-m_1-\dots-m_k-m_{k+1}} < 10^{-m_{k+1}}.$$

Предположим теперь, что последовательность $m_1, m_2, m_3 \dots$ настолько быстро возрастает, что $m_{k+1} \geqslant \geqslant k(m_1+\dots+m_k+2)$ при любом k. (Такова, например, последовательность $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \dots$ — докажите!) Тогда при любом k

$$\frac{1}{kq_k^k} = \frac{10^{-k(m_1+\dots+m_k+1)}}{k} > \\ > 10^{-k}10^{-k(m_1+\dots+m_k+1)} = \\ = 10^{-k(m_1+\dots+m_k+2)} \geqslant 10^{-m_{k+1}} > \\ > |\alpha - \alpha_k|,$$

и потому если n, N — любые положительные числа и $k > n$, $k > N$, то

$$|\alpha - \alpha_k| < \frac{1}{kq_k^k} < \frac{1}{Nq_k^n}.$$

Таким образом, α — хорошо приближаемое число.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема *). *Хорошо приближаемое иррациональное число не может быть алгебраическим.*

Доказательство. Возьмем иррациональное алгебраическое число α и покажем, что оно не является хорошо приближаемым. Поскольку α алгебраично, существует многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с целыми коэффициентами такой, что $P(\alpha) = 0$.

Будем считать, что $P(x)$ не имеет рациональных корней. Действительно, если $P(x)$ имеет рациональный корень, скажем, a, то $P(x)$ делится без остатка на $(x - a)$. Частное, очевидно, имеет рациональные коэффициенты, так что, умножая его на надлежащее целое число, мы получим многочлен с целыми коэффициентами, для которого α по-прежнему является корнем и у которого степень на единицу меньше, чем у исходного многочлена. Повторяя эту операцию, мы получим многочлен с целыми коэффициентами и с корнем α, уже не имеющий рациональных корней.

Обозначим через A наибольшее из чисел $|a_0|, |a_1| \dots |a_n|$ и положим $B = |\alpha| + 1$, $N = n^2AB^{n-1}$.

Покажем теперь, что, какова бы ни была дробь p/q, имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Nq^n}, \qquad (*)$$

из чего и будет следовать, что число α не является хорошо приближаемым.

Пусть p/q — любая дробь. Если $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$, то неравенство (*), очевидно, выполнено, так что мы можем ограничиться случаем, когда $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant 1$. В частности (и это очень важно), $\left|\frac{p}{q}\right| \leqslant |\alpha| + 1 = B$.

Из сказанного выше следует, что

$$P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0.$$

Так как

$$q^n\left[a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + \\ + a_n\right]$$

---

*) Эту теорему доказал известный французский математик Жозеф Лиувилль (1809—1882).

есть целое число, отличное от нуля, то

$$\left|q^n\left[a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_n\right]\right|\geqslant 1$$

и, значит,

$$\left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_n\right|\geqslant\frac{1}{q^n}.$$

С другой стороны, принимая во внимание, что

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

мы получаем, что

$$\left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_n\right|=$$
$$=\left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_n-(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n)\right|\leqslant|a_0|\left|\left(\frac{p}{q}\right)^n-\alpha^n\right|+$$
$$+|a_1|\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}-\alpha^{n-1}\right|+\ldots+|a_{n-1}|\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\leqslant A\left|\left(\frac{p}{q}\right)^n-\alpha^n\right|+$$
$$+A\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}-\alpha^{n-1}\right|+\ldots+A\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|=A\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\times$$
$$\times\left\{\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}\alpha+\ldots+\frac{p}{q}\alpha^{n-2}+\alpha^{n-1}\right|+\right.$$
$$+\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\left(\frac{p}{q}\right)^{n-3}\alpha+\ldots+\frac{p}{q}\alpha^{n-3}+\alpha^{n-2}\right|+\ldots+$$
$$\left.+\left|\frac{p}{q}+\alpha\right|+1\right\}\leqslant A\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\left\{nB^{n-1}+(n-1)B^{n-2}+\ldots+2B+1\right\}\leqslant A\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|n\cdot nB^{n-1}=$$
$$=n^2AB^{n-1}\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|=N\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|.$$

(Мы воспользовались тем, что и $|\alpha|$, и $\left|\frac{p}{q}\right|$ меньше B).

Значит, $N\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\geqslant\frac{1}{q^n}$, то есть $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{Nq^n}$. Теорема доказана.

Таким образом, все хорошо приближаемые числа (включая и указанное ранее число α) являются трансцендентными.

В заключение заметим, что доказанная теорема далеко не полностью отражает связь между алгебраичностью чисел и качеством их рациональных приближений. Дальнейшее развитие этих методов позволяет доказывать трансцендентность самых разных чисел (кстати, и трансцендентность числа e обычно доказывается в этом же круге идей). Следует сказать, что исследовательская работа в этом направлении ведется и поныне. Один из наиболее ярких результатов последних лет в этой области — работа английского математика Рота, удостоенная медали на международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 году.

Теорема, доказанная Ротом, утверждает, что *если α — алгебраическое число, то существует лишь конечное число таких дробей p/q, что $\left|\alpha-\frac{p}{p}\right|<\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$, где $\varepsilon>0$ — любое наперед заданное число.* Поэтому наша теорема о хорошо приближаемых числах осталась бы верной, если бы в определении хорошо приближаемого числа мы потребовали бы существование дроби $\frac{p}{q}$ с $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Nq^n}$ не для любых положительных n и N, а только для одного какого-нибудь n, строго большего двух.

Кстати, отбросить ε в теореме Рота нельзя. Это следует из теоремы Гурвица — Бореля, доказанной в нашей статье «О наилучших приближениях» (см. «Квант» № 11 за 1971 год).

Ю.И.Соколовский

ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

Современная жизнь и современное производство немыслимы без машин. А чтобы приводить в движение машины, нужны двигатели, задача которых — поставлять необходимую машинам энергию.

Земная кора и вода океанов обладают огромными запасами внутренней энергии. Но эту энергию нельзя непосредственно использовать для приведения машин в движение,— она переходит к другим телам лишь способом теплопередачи.

Понятно поэтому, что нужно устройство, которое, получая энергию в процессе теплопередачи, передавало бы ее другим телам (в частности, машинам), совершая работу. Чтобы это устройство могло действовать неограниченно долго (а не до исчерпания каких-то своих внутренних ресурсов), оно должно работать циклически, периодически возвращаясь к одному и тому же состоянию. Такое устройство существует и называется тепловым двигателем. Короче говоря, тепловой двигатель преобразует подводимую к нему теплоту в работу. *Схематически это можно представить* так, как на рисунке 1.

Заметим, что противоположная задача — отдавать в форме теплоты энергию, получаемую в процессе механической работы,— решается совсем просто. Годится своего рода «мельница», работающая вхолостую (рис. 2): за рукоятку *P* вращают жернов *A*, который трется о другой, неподвижный, жернов *Б*, так что оба они греются. Вначале за счет совершаемой внешними силами работы прогревается сама мельница — растет ее внутренняя энергия, а с ней и температура. Этот этап длится до тех пор, пока энергия, передаваемая мельницей окружающим телам в виде тепла, не сравняется с затрачиваемой механической энергией. После этого наступает динамическое равновесие, процесс становится стационарным (стационарный процесс можно считать циклическим). Таким образом, мельница становится «механической печкой», то есть прямой противоположностью тепловому двигателю.

Такого рода устройство было известно нашим далеким предкам, которые умели добывать огонь трением. Придумать тепловой двигатель было

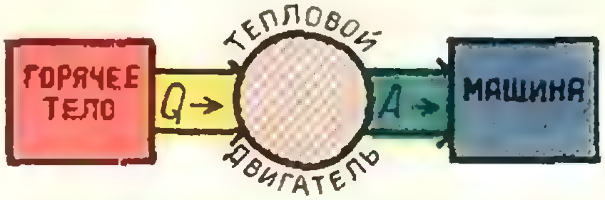


Рис. 1.

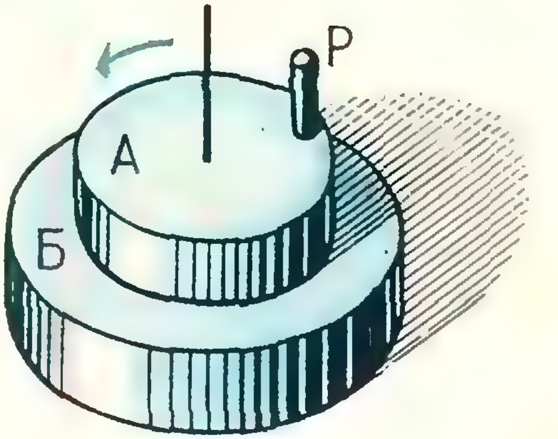


Рис. 2.

значительно труднее. В основу его можно положить различные принципы. Но чаще всего используется то обстоятельство, что внутренняя энергия идеального газа (то есть, в сущности, кинетическая энергия хаотического движения его молекул) при определенных условиях внешне проявляет себя как потенциальная энергия упругой деформации: газ, сжатый в цилиндре поршнем, вполне аналогичен сжатой пружине, он может совершить работу (когда шла речь о невозможности *непосредственного* получения работы за счет внутренней энергии, имелись в виду только твердые и жидкие тела).

Попробуем мысленно сконструировать простейший тепловой двигатель, рабочим телом которого является идеальный газ. Пусть сжатый газ находится в цилиндре под поршнем (рис. 3). Если поршень имеет возможность двигаться, газ расширяется и совершает работу.

Когда газ теплоизолирован (то есть окружен теплонепроницаемой оболочкой), он при адиабатическом расширении остывает, и за счет его внутренней энергии совершается работа ($A = -\Delta U$). Но если стенки цилиндра достаточно хорошо проводят теплоту, а сам цилиндр находится в термостате, то температура, а значит и внутренняя энергия газа, поддерживается постоянной — работа совершается за счет подводимой теплоты ($A_1 = q_1$). Здесь уже налицо превращение теплоты в работу, но это еще не тепловой двигатель, так как в его работе нет цикличности.

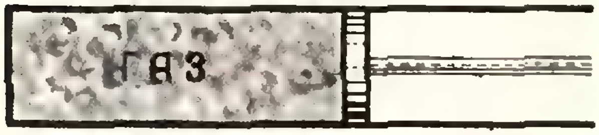


Рис. 3.

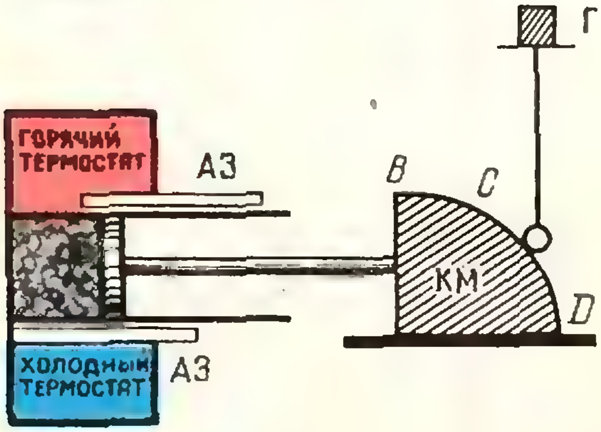


Рис. 4.

Чтобы возвратить газ в начальное состояние, его необходимо сжать. Но это потребует затраты как раз такой же работы A_1, какая была получена при расширении, и приведет к возвращению в термостат полученной ранее от него теплоты q_1. Чтобы этого избежать, газ следует перед сжатием охладить. При одном и том же объеме давление холодного газа ниже; так что процесс сжатия потребует меньшей работы ($A_2 < A_1$) и в термостат вернется меньшее количество теплоты $q_2 = A_2$. Для охлаждения газа устанавливается тепловой контакт между цилиндром и вторым термостатом с более низкой температурой. Сжав газ до исходного объема, снова восстанавливают контакт цилиндра с первым термостатом.

Один из простейших тепловых двигателей

Одна из возможных схем двигателя представлена на рисунке 4.

АЗ — адиабатические (теплонепроницаемые) заслонки, передвигая которые прерывают или устанавливают тепловой контакт между термостатами и цилиндром. *КМ* — кулачковый механизм, при помощи которого горизонтальное перемещение поршня преобразуется в подъем груза *Г*. Профиль кулачка (линия *BCD*) выбирается таким, чтобы при любом положении поршня действующие на кулачок с обеих сторон силы были почти уравновешены (используется эффект наклонной плоскости). Благодаря этому процесс расширения газа будет квазистатическим, то есть представляющим собой последовательность почти равновесных состоя-

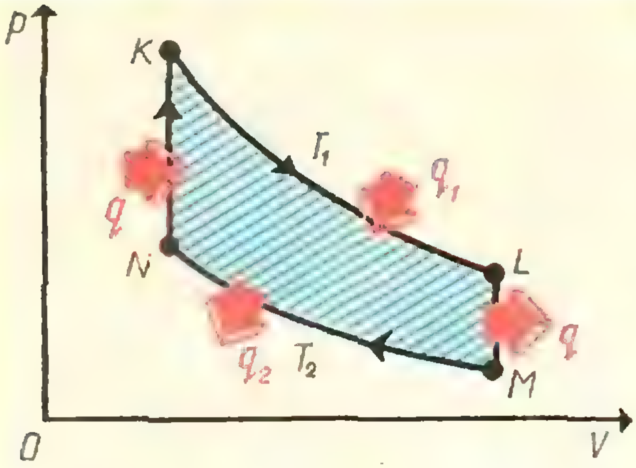


Рис. 5.

ний. Только в равновесном состоянии газ подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона. В верхней точке подъема часть груза снимается, что опять обеспечивает приблизительное равновесие поршня в процессе сжатия при более низкой температуре (а значит, и меньшем давлении).

Происходящие в двигателе процессы графически изображены на диаграмме в координатах p, V (рис. 5). Точка K — исходное состояние газа. Изотерма KL — расширение газа при постоянной (сравнительно высокой) температуре T_1 в контакте с «горячим» термостатом. Изохора LM — постепенное остывание газа в контакте с «холодным» термостатом до температуры T_2 (постепенность, а значит, квазистационарность процесса в газе обеспечивается плохой теплопроводностью цилиндра). Изотерма MN — сжатие газа при сравнительно низкой температуре T_2. Изохора NK — нагревание газа от температуры T_2 до T_1 при тепловом контакте с горячим термостатом.

Работа совершается только на участках KL (A_1) и MN (A_2). Величина работы, совершаемой за весь цикл $A = A_1 - A_2$, численно равна площади, ограниченной контуром цикла. Теплота подводится к газу от «горячего» термостата во время расширения на участке KL (q_1) и при нагревании на участке NK (q). Теплота отдается газом холодному термостату при охлаждении на участке LM (количество этой теплоты равно q и соответствует *разности внутренних энергий газа* при температурах T_1 и T_2) и при сжатии на участке MN (q_2). Всего за цикл горячий термостат отдает теплоту $Q_1 = q_1 + q$, а холодный термостат получает теплоту $Q_2 = q_2 + q$.

В термодинамике горячий термостат называют нагревателем, а холодный — охладителем. Как мы видели, для циклического функционирования теплового двигателя охладитель *столь же необходим, как и* нагреватель: сжимая неохлажденный газ, мы свели бы к нулю весь эффект, полученный при расширении. В то же время, в полезную работу превращается лишь часть энергии, получаемой от нагревателя; *остальная энергия* передается охладителю.

Крайне желательно, чтобы охладителю отдавалось как можно меньше энергии (так как двигатель строится для совершения работы, а вовсе не для *нагревания охладителя*). Чем больше берется теплоты от нагревателя, тем больше нужно материальных затрат на поддержание его температуры (приходится, например, сжигать больше топлива). Передача некоторого количества теплоты холодному термостату требует дополнительных забот по его охлаждению (ведь в случае повышения температуры охладителя до T_1 двигатель остановится).

Техническое совершенство теплового двигателя характеризуется его «термическим к. п. д.», который, как известно, определяется отношением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Ведь в соответствии с первым законом термодинамики работа двигателя за цикл $A = Q_1 - Q_2$, так как после каждого цикла восстанавливается исходное состояние газа, а значит, и первоначальное значение его внутренней энергии. (Работа совершается исключительно за счет теплоты.)

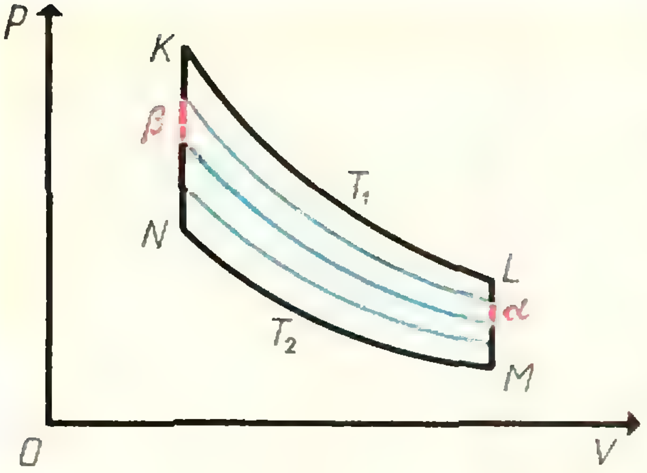


Рис. 6.

Усовершенствование теплового двигателя

Для повышения к. п. д. двигателя желательно уменьшить количество теплоты, не превращаемой в работу, а только «протекающей» через двигатель от нагревателя к охладителю. С этой точки зрения прежде всего привлекают к себе внимание изохорические процессы *LM* и *NK*, не связанные с совершением работы. Изохорически охлаждаясь (*LM*), газ отдает вовне столько же теплоты *q*, сколько потом приходится к нему подвести при изохорическом нагревании (*NK*).

Разобьем обе изохоры промежуточными (синими) изотермами на очень маленькие участки (рис. 6). Тогда можно считать, что в процессе охлаждения на любом участке — скажем, на участке α — теплота отдается в том же количестве, в каком подводится на участке нагрева (участок β) между теми же изотермами, при одной и той же температуре.

Целесообразно ли при этих условиях «сбрасывать» соответствующую энергию в охладитель, а потом заново брать столько же от нагревателя? Не лучше ли сохранить ее в каком-нибудь аккумуляторе энергии (или регенераторе) при двигателе, а затем вновь использовать?

Таким регенератором мог бы служить специальный термостат, разделенный на множество секций адиабатическими перегородками (рис. 7). Каждая секция имеет свою температуру (приблизительно соответствующую одной паре участков изохор *LM* и *NK*), так что последовательность всех секций в целом обеспечивает более или менее плавный переход от T_1 к T_2. В частности, при $T_1 = 450°$ K и $T_2 = 300°$ K секции могут иметь, например, температуры 440°, 430°, . . ., 320°, 310° K (чем больше секций, тем ближе реальный процесс к теоретическому).

Охлаждение по изохоре *LM* осуществляют, изолировав цилиндр от горячего термостата и последовательно устанавливая тепловой контакт со все более и более холодными секциями регенератора — например, передвигая его снизу вверх (см. рис. 7; ТС — теплопроводный стержень).

Аналогично при нагревании по изохоре *NK* к цилиндру поочередно «подключают» все более и более горячие секции регенератора. В итоге по завершении цикла все секции будут снова иметь первоначальный запас энергии, так что регенератор не нуждается ни в каком энергетическом взаимодействии с внешним миром.

При той же величине работы *A* за цикл использование регенератора снижает (на величину *q*) потребность двигателя как в притоке теплоты от нагревателя, так и в передаче ее

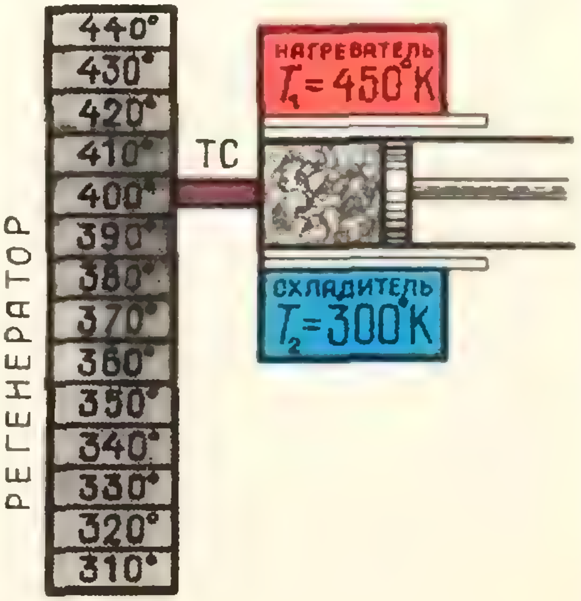


Рис. 7.

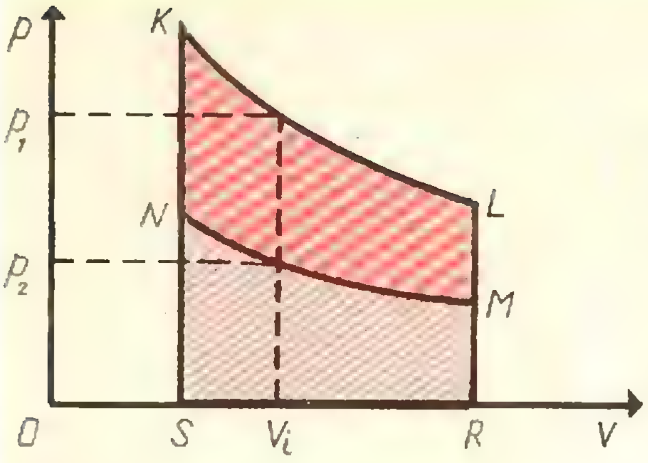


Рис. 8.

охладителю, так что $Q_1 = q_1 = A_1$, $Q_2 = q_2 = A_2$, где A_1 и A_2 — работы, совершаемые на изотермических участках KL и MN соответственно (см. рис. 8). Численно эти величины равны площадям криволинейных трапеций $KLRS$ и $NMRS$. Сравним эти площади.

При любом V_i давлении p_2 и p_1 (ординаты обеих изотерм) пропорциональны абсолютным температурам (закон Шарля):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

В таком же соотношении находятся, очевидно, и интересующие нас площади, а следовательно, и соответствующие количества теплоты Q_2 и Q_1:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Поэтому к. п. д. теплового двигателя с регенератором

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

К. п. д. двигателя с регенератором выше, чем к. п. д. двигателя без регенератора, поскольку разность $Q_1 - Q_2$ в обоих случаях одинакова, а теплота Q_1, отданная горячим термостатом, уменьшается на величину q.

Из-за технической сложности (ведь для идеального регенератора нужно разбивать интервал ΔT на бесконечно малые участки) такой регенератор практически неприменим.

Как мы увидим дальше, применимость последней формулы гораздо шире, чем для рассмотренного частного случая двигателя с регенератором. Так определяется к. п. д. любой тепловой машины, работающей по обратному циклу.

Обращение теплового двигателя

Тепловой двигатель с регенератором — это обратимая машина. Значит, он может функционировать и «вспять» по тому же самому циклу, проходя через все те же самые состояния, но только в обратной последовательности $KN \to NM \to ML \to LK$. При этом и все переходы энергии (работы и теплопередачи) меняют свое направление. Изохорическое охлаждение (KN) сопровождается передачей теплоты от газа к регенератору; изотермически расширяясь (NM), газ получает от холодного термостата теплоту q_2 и совершает работу A_2; изохорическое нагревание (ML) идет за счет теплопередачи от регенератора (возвращающегося при этом в начальное состояние); изотермическое сжатие (LK) при более высокой температуре $T_1 > T_2$ требует совершения внешними силами работы $A_1 > A_2$ с одновременной передачей теплоты $Q_1 = A_1$ горячему термостату.

Это уже не двигатель! Ведь совершаемая им за цикл работа

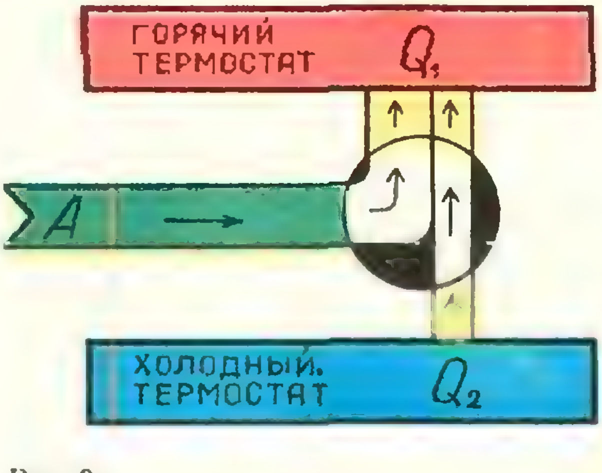


Рис. 9.

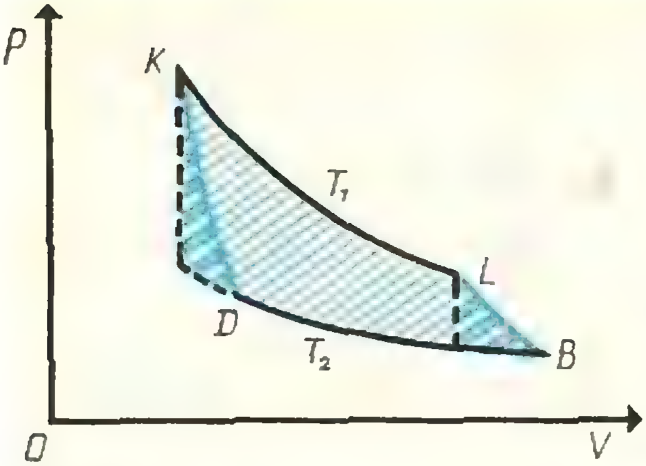


Рис. 10.

$A_2 - A_1$ отрицательна — его самого приходится приводить в движение каким-нибудь посторонним двигателем. Зато он отбирает от более холодного термостата теплоту Q_2 и передает ее горячему термостату, да еще с некоторой добавкой за счет работы постороннего двигателя (рис. 9), то есть как бы «накачивает» теплоту. Такой «тепловой насос» может использоваться как холодильник и для «динамического отопления» за счет тепла, отбираемого, скажем, от льда и снега на улице.

Итак, машина с регенератором обратима: совершив один цикл как двигатель и подняв груз, она может потом за счет его потенциальной энергии совершить еще один цикл уже в качестве теплового «насоса». В результате машина и все окружающие тела вернутся в исходное состояние.

Как мы увидим дальше, различие между обратимыми и необратимыми машинами играет в термодинамике очень большую роль.

Цикл Карно

Регенератор повышает к. п. д., избавляя двигатель от внешних теплопередач при понижении и повышении температуры газа. Но их можно избежать и без такого громоздкого устройства. Ведь совсем не обязательно отводить теплоту, чтобы охладить газ. Вместо этого можно заставить газ совершать работу, дав ему возможность расширяться адиабатически (то есть без подвода или отвода тепла).

Когда при изотермическом расширении газ достигнет состояния L (рис. 10), закрываются адиабатические заслонки и газу дается возможность расширяться, совершая работу за счет внутренней энергии (для этого надо, конечно, постепенно разгружать поршень, что может быть заранее обеспечено надлежащим выбором профиля кулачкового механизма). В процессе адиабатического расширения меняются и температура, и объем, и давление газа. На диаграмме p, V этот процесс изображается кривой, называемой адиабатой (на рисунке 10 адиабата — LB).

Когда температура газа в процессе расширения понизится до T_2 (точка B), открывается нижняя заслонка и устанавливается тепловой контакт с охладителем. После этого газ изотермически сжимают (изотерма BD)*).

Теперь надо нагреть газ до температуры T_1; это опять-таки делается без теплопередачи, адиабатическим сжатием (адиабата DK). За ним снова следует изотермическое расширение (KL), процесс повторяется (для обратного хода поршня на кулачке передаточного механизма предусматривается вторая дорожка).

Работы на адиабатических участках LB и DK равны по величине и противоположны по знаку (ведь ими энергетически заменены теплопередачи q).

Двигатель, работающий по рассмотренному нами циклу, был впервые описан в книге Сади Карно «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу» (1834 г.), его называют машиной Карно, а цикл — циклом Карно. Цикл Карно обратимый.

---

*) Если из начального состояния K производить адиабатическое расширение газа, то в момент, когда его температура станет равной T_2, остальные параметры будут иметь определенные значения p_2, V_2. Именно до такого состояния (p_2, V_2, T_2), которому соответствует точка D, и производится изотермическое сжатие (изотерма BD).

Рассчитать коэффициент полезного действия двигателя Карно сложнее, чем двигателя с регенератором. Но в этом нет надобности, так как для всех обратимых тепловых двигателей справедлива следующая теорема.

Теорема Карно. При заданных температурах нагревателя и охладителя все обратимые тепловые двигатели имеют одинаковые к. п. д. (при этом предполагается, что двигатели не вступают в тепловой контакт ни с какими телами, кроме нагревателя и охладителя).

Доказательство теоремы Карно основывается на втором законе термодинамики.

Второй закон термодинамики

Первый закон термодинамики, выражающий закон сохранения энергии, не накладывает ограничений на направление процессов (ведь если при переходе из состояния A в состояние B энергия остается неизменной, то она сохраняется также и при обратном переходе из B в A). Если, например, погрузить теплый камень в холодную воду, то с законом сохранения энергии одинаково совместимы как нагревание воды за счет охлаждения камня, так и дальнейший разогрев камня за счет остывания воды — лишь бы изменения энергии обоих тел были равны по величине и противоположны по знаку.

Однако никто не наблюдал, чтобы теплый камень сам собой раскалился за счет замерзания воды, в которую он брошен! Весь опыт человечества утверждает, что при тепловом контакте теплота всегда переходит от более горячего тела к более холодному, так что температуры обоих тел постепенно выравниваются. Именно с этим свойством и связано определение понятия «температура».

Но сколь ни убедительны эти факты, они касаются лишь теплообмена при простом тепловом контакте. Мы ведь знаем уже, что «тепловым насосом» можно отнять энергию от холодного тела и передать горячему. Но чтобы «насос» действовал, внешние тела должны совершать работу, так что по завершении цикла не всё возвращается в исходное состояние.

Второй закон термодинамики утверждает, что даже и косвенным путем невозможен некомпенсированный переход теплоты от более холодного тела к более горячему. «Некомпенсированный» — значит не оставляющий после себя никаких следов (то есть никаких изменений в каких бы то ни было телах, кроме разогрева горячего тела и остывания холодного). Нельзя так усовершенствовать тепловой насос, чтобы он путем теплопередачи отнимал энергию от холодного тела и отдавал горячему с возвращением всех прочих тел (включая и сам насос) в начальное состояние.

Понятно, что никаким опытом (или даже серией опытов) доказать такого рода отрицательное утверждение нельзя (как нельзя доказать экспериментально невозможность вечного двигателя). Как и многие другие законы, второй закон термодинамики принимается в физике как аксиома, из которой выводятся многочисленные и далеко идущие следствия. Неизменное согласие всех следствий с опытами и практикой и успешное предсказание на их основе новых фактов вселяет обоснованную уверенность в истинности закона.

Исходя из второго закона термодинамики можно показать, что нельзя некомпенсированно превратить теплоту в работу. Точнее, что невозможно циклически действующее устройство, которое получало бы энергию путем теплопередачи и совершало за ее счет работу, не оставляя никаких других изменений в окружающем мире.

Такое фантастическое устройство настолько заманчиво, что оно получило название «perpetuum mobile

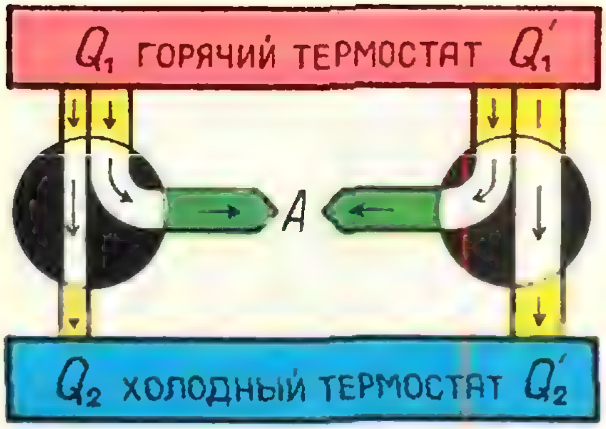

Q_1 ГОРЯЧИЙ ТЕРМОСТАТ Q_1'
A
Q_2 ХОЛОДНЫЙ ТЕРМОСТАТ Q_2'

Рис. 11

второго рода». Практическая выгода от него была бы не многим меньше, чем от пресловутого «perpetuum mobile», (то есть вечного двигателя) первого рода, способного совершать работу вообще без затраты энергии. Действительно, «perpetuum mobile второго рода» мог бы совершать работу за счет незначительного охлаждения огромных масс земной коры или воды океанов.

Доказательство теоремы Карно

Применим теперь второй закон термодинамики для доказательства теоремы Карно.

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что есть два обратимых двигателя с различными к. п. д. Совершая одинаковую работу, они получают от нагревателя и отдают охладителю различные количества теплоты (рис. 11).

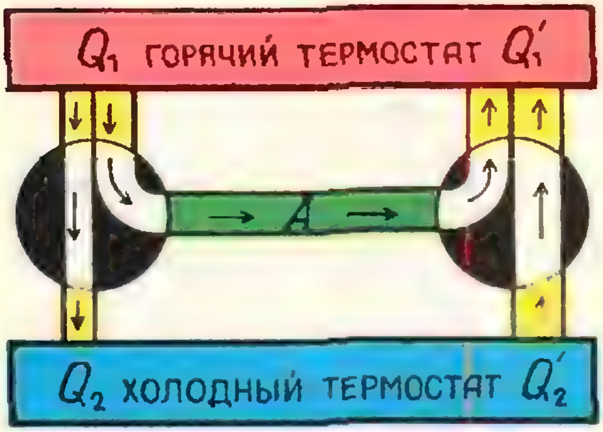

Q_1 ГОРЯЧИЙ ТЕРМОСТАТ Q_1'
A
Q_2 ХОЛОДНЫЙ ТЕРМОСТАТ Q_2'

Рис. 12

Используя обратимость, превратим худший из двигателей (на нашем рисунке — правый) в тепловой «насос» с механическим приводом от другого двигателя (рис. 12). Полученный сложный агрегат не производит никаких внешних эффектов, кроме передачи теплоты от холодного термостата к горячему (а сам он периодически возвращается в исходное состояние). Противоречие со вторым законом термодинамики доказывает недопустимость сделанного предположения, а следовательно, доказывает и теорему Карно.

Для пары необратимых двигателей такое доказательство не проходит — они могут иметь и разные к. п. д.

А что, если один двигатель обратим, а другой — нет? Как видно из рисунка 12, к абсурду ведет предположение о худшем к. п. д. у обратимого двигателя (превращаемого в насос). Следовательно, необратимый тепловой двигатель не может иметь бóльший к. п. д., чем обратимый.

В соответствии с теоремой Карно ранее выведенная формула для к. п. д. обратимого теплового двигателя с регенератором

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

автоматически распространяется на все обратимые тепловые двигатели.

Следовательно, для всех обратимых тепловых двигателей выполняется условие

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

или

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}.$$

Отношение количества теплоты к температуре рассматриваемого тела, участвующего в теплопередаче, в термодинамике называют приведенным теплом. Как видим, обратимый двигатель отдает охладителю столько же приведенного тепла, сколько получает от нагревателя (тогда как просто теплоты он отдает меньше, чем получает).

Последняя формула, разумеется, не зависит от направления работы обратимой тепловой машины, то есть остается справедливой и для теплового насоса (хотя о к. п. д. в этом случае говорить уже неуместно).

Для необратимых двигателей $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ является верхним пределом, то есть

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

откуда следует, что в необратимых двигателях $\frac{Q_2}{T_2} > \frac{Q_1}{T_1}$.

Упражнения

1. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы с помощью обращенного теплового двигателя с регенератором отнять 600 *дж* теплоты от тела с температурой 250° К и передать ее телу, имеющему температуру 300° К? Теплоемкости тел очень велики.

2. Электрическая плитка мощностью 1 *квт* поддерживает в комнате температуру $t_1 = 17°$ С при температуре наружного воздуха $t_2 = -12°$ С. Какая минимальная мощность потребовалась бы для этого при динамическом отоплении с помощью теплового насоса?

3. В качестве гипотезы рассмотрим человеческий организм как тепловой двигатель, для которого охладителем является атмосферный воздух, имеющий температуру 14° С. Какая минимальная температура «нагревателя» (расположенного внутри организма!) обеспечила бы экспериментально наблюдающийся к. п. д. 30%? Что можно на этом основании сказать о правдоподобии гипотезы? Теорему Карно считать доказанной.

4. На основе второго закона термодинамики докажите (от противного), что невозможен некомпенсированный переход теплоты в работу.

5. Как провести доказательство теоремы Карно в том случае, когда рассматриваемые тепловые двигатели совершают за цикл неодинаковые по величине работы? Когда продолжительность их циклов различна?

6. Исходя из неосуществимости «perpetuum mobile второго рода» как из аксиомы, выражающей второй закон термодинамики, докажите невозможность некомпенсированного перехода теплоты от более холодного тела к более горячему.

7. Приняв теорему Карно за аксиому, выражающую второй закон термодинамики, докажите невозможность некомпенсированного перехода теплоты от более холодного тела к более горячему, а также некомпенсированного преобразования теплоты в работу.

Из старого словаря

В 1842—1843 гг. вышли в свет четыре тома «Словаря церковно-славянского и русского языка», составленного Академией наук*). Интересно и поучительно посмотреть, как в те годы объясняли физические термины; ведь физика за 100 лет очень сильно изменила свой облик, так что многое сейчас может показаться курьезным. Но не надо забывать, что физика в первой половине прошлого века быстро развивалась и объяснения, о которых мы поговорим, доживали последние годы.

Итак посмотрим, что такое теплота. В словаре написано: «... То же, что теплород, теплотвор». Смотрим: «Теплород — вещественная причина жара, тепла и холода; непостижимо тонкая жидкость, изливающаяся из Солнца и проникающая весь физический мир, невидимая, невесомая и только осязанием ощущаемая».

Еще Ломоносов объяснял теплоту движением, об этом говорили и философы древности и средних веков; но когда стали пытаться приписывать теплоте количественную меру, говорить о переходе теплоты от одного тела к другому, то к середине XVIII века пришли к теории флогистона-теплорода: представлению о теплоте как о жидкости, описанной выше. Только после того, как было выяснено, что теплота может переходить в другие виды энергии (слова «энергия» в словаре еще нет!) и что тела состоят из движущихся атомов и молекул, физики отказались от теплорода.

(Продолжение см. с.23)

---

*) В 1868—1869 гг. вышло второе издание (не измененное) Словаря.

О. А. Жаутыков

О границах корней кубического уравнения

Как известно, формулы, позволяющие точно выразить корни кубического уравнения через его коэффициенты, весьма громоздки. Поэтому часто бывает важно приближенно оценить корни кубического уравнения.

В этой статье оцениваются границы, в которых могут лежать действительные корни кубического уравнения.*)

Рассмотрим кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad (1)$$

коэффициенты a, b, c, d — действительные числа, $a \neq 0$. Первое слагаемое ax^3 в левой части уравнения (1) называется его *старшим членом*, последнее слагаемое d — *свободным членом*.

Как известно**), уравнение (1) имеет три корня, один из которых — действительный, а два других — либо действительные, либо комплексно-сопряженные. Нас будут интересовать только *действительные* корни уравнения (1). Наша цель такова: *не вычисляя самих корней, получить некоторые границы* (оценки) *для них*, то есть указать на действительной оси интервалы, в которых лежат эти корни.

Для этого вместе с уравнением (1) рассмотрим многочлен третьей степени

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \qquad (2)$$

Что можно сказать о поведении этой функции при больших по абсолютной величине значениях x? Если аргумент x принимает возрастающие по абсолютной величине значения, то абсолютная величина каждого члена правой части равенства (2) будет возрастать, причем тем быстрее, чем выше степень этого члена.

Ясно, что быстрее всего будет возрастать абсолютная величина старшего члена ax^3. Поэтому можно ожидать, что если выбрать значение $|x|$ достаточно большим, то абсолютная величина старшего члена ax^3 будет больше абсолютной величины суммы всех остальных членов, то есть

$$|ax^3| > |bx^2 + cx + d|. \qquad (3)$$

Докажем, что это неравенство справедливо для всех x, достаточно больших по абсолютной величине.

Поскольку абсолютная величина суммы не превышает суммы абсолютных величин слагаемых, то

$$|bx^2 + cx + d| \leqslant |b|\, x^2 + |c|\,|x| + |d|.$$

Положив, $|x| = v$, перепишем это неравенство:

$$|bx^2 + cx + d| \leqslant |b| \cdot v^2 + |c|\, v + |d|. \qquad (4)$$

Коэффициенты $|b|$, $|c|$ и $|d|$, стоящие в правой части неравенства (4),— неотрицательные действительные числа; обозначим наибольшее из них через M:

$$M = \max(|b|, |c|, |d|). \qquad (5)$$

Если в правой части неравенства (4) вместо каждого из коэффициентов $|b|$, $|c|$, $|d|$ подставить число M, то неравенство (4) от этого только усилится. Следовательно, справедливо неравенство

---

*) Эта статья—продолжение цикла материалов, посвященных кубическим уравнениям (см. «Квант», 1971, №11, 1972, №6).

**) См. «Квант», 1971, № 11, с. 20—21.

$$|bx^2+cx+d| \leqslant M(v^2+v+1),$$

которое, если воспользоваться известным тождеством,

$$v^2+v+1=\frac{v^3-1}{v-1},\quad v\neq 1,$$

можно записать в виде

$$|bx^2+cx+d| \leqslant M\frac{v^3-1}{v-1}. \qquad (6)$$

Так как нас интересуют большие значения $|x| = v$, то будем считать, что $v > 1$. Но тогда

$$\frac{M(v^3-1)}{v-1} < \frac{Mv^3}{v-1},$$

и потому неравенство (6) примет вид

$$|bx^2+cx+d| < \frac{Mv^3}{v-1},\quad |x| = v > 1. \qquad (7)$$

Если нам удастся показать, что абсолютная величина старшего члена ax^3 для всех достаточно больших по абсолютной величине значений x (таких, что выполнено и условие $v > 1$) больше выражения $\frac{Mv^3}{v-1}$, стоящего в правой части неравенства (7), то неравенство (3) будет доказано. Посмотрим, как надо выбрать $|x| = v$, чтобы выполнялось неравенство $|ax^3| > \frac{Mv^3}{v-1}$, то есть

$$|a|v^3 > \frac{Mv^3}{v-1}.$$

Решая полученное неравенство относительно v, находим, что оно заведомо выполнено для всех

$$v > \frac{M+|a|}{|a|}. \qquad (8)$$

Так как $\frac{M+|a|}{|a|} \geqslant 1$ (ибо $M \geqslant 0$), то при условии (8) всегда выполнено и неравенство $v > 1$. Тем самым установлено, что *неравенство* (3) *справедливо для*

$$|x| \geqslant \frac{M+|a|}{|a|}. \qquad (9)$$

Отсюда следует, что для значений x, удовлетворяющих условию (9), функция (2) не может обратиться в нуль. Другими словами, *все действительные корни уравнения* (1) *удовлетворяют неравенству*

$$|x| \leqslant \frac{M+|a|}{|a|}. \qquad (10)$$

Положительное число $A = \frac{M+|a|}{|a|}$ называется *верхней границей* действительных корней кубического уравнения (1).

Оказывается, что можно найти и *нижнюю границу* действительных корней кубического уравнения (1), то есть такое неотрицательное число B, что все действительные корни уравнения (1) удовлетворяют неравенству $|x| \geqslant B$.

Для этого сделаем в уравнении (1) замену

$$x = \frac{1}{z}. \qquad (11)$$

Тогда после очевидных преобразований получим уравнение

$$dz^3 + cz^2 + bz + a = 0. \qquad (12)$$

Будем считать, что в уравнении (1) свободный член $d \neq 0$, ибо случай $d = 0$ интереса не представляет (уравнение (1) в этом случае имеет корень $x = 0$, а остальные его корни определяются из квадратного уравнения).

Так как $|x| = \frac{1}{|z|}$ (см. (11)), то ясно, что из неравенства $|z| < K$, где $K > 0$, следует неравенство $|x| > \frac{1}{K}$. Поэтому если в качестве K взять верхнюю границу действительных корней уравнения (12), то число $\frac{1}{K}$ будет нижней границей действительных корней уравнения (1). Но верхнюю границу K действительных корней уравнения (12) находить мы уже умеем (см. (5), (10)):

$$K = \frac{N+|d|}{|d|},\quad \text{где}$$

$$N = \max(|c|, |b|, |a|). \qquad (13)$$

Поэтому нижняя граница действительных корней кубического уравнения (1) такова:

$$B = \frac{|d|}{N + |d|}. \qquad (14)$$

Остается заметить, что эта формула годится и в случае $d = 0$, тогда нижняя граница, очевидно, равна нулю (ибо имеется нулевой корень), и именно этот же результат получается по формуле (14) (при этом, конечно, $N \neq 0$, ибо в уравнении (1) по предположению $a \neq 0$).

Подведем итог: *все действительные корни кубического уравнения* (1) *удовлетворяют неравенству*

$$B \leqslant |x| \leqslant A,$$

где числа A и B определяются через коэффициенты уравнения по формулам (10), (5) и (14), (13). Другими словами, действительные корни кубического уравнения (1) могут лежать только на отрезках $[-A, -B]$ и $[B, A]$ действительной оси; вне этих отрезков действительных корней уравнение (1) заведомо не имеет.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Здесь $M = 5$, $|a| = 2$, а потому $A = \frac{7}{2}$. Таким образом, верхняя граница действительных корней рассматриваемого уравнения равна $\frac{7}{2}$. Далее, $N = 5$, $|d| = 3$, а потому $B = \frac{3}{8}$. Следовательно, нижняя граница действительных корней рассматриваемого уравнения равна $\frac{3}{8}$. Другими словами, вещественные корни рассматриваемого уравнения лежат на отрезках $(-{}^7/_2, -{}^3/_8)$ и $({}^3/_8, {}^7/_2)$.

Из старого словаря

(Продолжение Начало см. с. 20)

Посмотрим на слово электричество. Читаем: «... Вещество, тончайшее из всех известных жидких тел, сообщающееся почти со всеми телами, в большей или меньшей мере, и движущееся с необыкновенной скоростью».

К этому описанию можно добавить, что в начале XIX века считалось, что существуют две электрические жидкости, отвечающие двум зарядам — положительному и отрицательному. К этим жидкостям добавлялись еще две магнитные (северный и южный магнетизм), жидкость, связанная с силой тяжести, и теплород.

Интересно, что в Словаре различаются «тяжесть — естественная сила, побуждающая всякое тело стремиться к низу или к центру Земли», и «всеобщее тяготение — взаимное привлечение всех небесных тел».

Можно понять, почему с теплотой и электричеством связывали существование специфических жидкостей. Физики заметили, что в природе есть нечто, что сохраняется. Простейшим и самым понятным законом был закон сохранения вещества — в частности, жидкости. Этим законом широко пользовались в гидродинамике. Поэтому и с другими сохраняющимися величинами долго пытались связать специальные жидкости. То, что эти жидкости должны были необычайно легко проникать во все тела, на первых порах мало кого смущало: тела представлялись простыми, а жидкости «тонкими».

(Окончание см. с. 28)

Что видит внимательный глаз

На обложке нарисован правильный 24-угольник. Внимательно рассматривая его, можно обнаружить несколько правильных многоугольников, получившихся в пересечении диагоналей, отрезков диагоналей и сторон.

Видны, например, равносторонние треугольники и квадраты, причем их центры могут быть отличными от центра данного 24-угольника. Заметили ли вы их, глядя на рисунок? Если нет — не беда. Некоторые из квадратов выделены на рисунке 1, некоторые правильные треугольники — на рисунке 2.

Впрочем, нужно еще убедиться в том, что эти многоугольники действительно правильные; чертеж сам по себе, как бы тщательно он ни был выполнен, таких гарантий не дает.

Для доказательства представим себе мысленно, что 24-угольник вписан в окружность, и рассмотрим углы, образованные ее хордами, а также заметим, какие отрезки на чертеже равны и почему (само доказательство проведите самостоятельно). Рисунки 1 и 2, соответственно иллюстрирующие характерные случаи образования квадратов и правильных треугольников, помогают справиться и с более сложной задачей: выяснить, сколько на обложке нарисовано правильных треугольников и квадратов.

Обратимся вновь к обложке. Отчетливо видно, как, пересекаясь, диагонали 24-угольника, ближайшие к его центру, образуют фигуру, которую глаз решительно отказывается отличить от окружности (в действительности это, конечно, правильный 24-угольник). В некотором удалении от центра данного 24-угольника видим концентрические вторую и третью и не столь явно выраженные четвертую и пятую «окружности». Другие «окружности» диаметром побольше не видны, не заметны. Сколько их? Ответ на этот вопрос может подсказать рисунок 3.

На рисунке 4 изображен правильный звездчатый 24-угольник. Можно проверить непосредственно, пройдя глазом по каждому из звеньев ломаной, действительно ли это многоугольник, то есть является ли начертанная ломаная замкнутой, не распадается ли фигура на несколько замкнутых ломаных.

При этом остается, однако, невыясненным вопрос: возможны ли другие правильные звездчатые 24-угольники? Если смотреть только на рисунок, то проверить это трудно. При помощи визуальных наблюдений можно проверить, что если вершины 24-угольника соединяются через одну, то ломаная замкнется в 12-угольник, если через две, то в 8-угольник... Почему это произошло? Не связано ли это с тем, что деление числа сторон данного 24-угольника на два приводит к числу 12, а на 3 дает 8? Теперь вы, наверное, можете установить число правильных звездчатых 24-угольников, и не прибегая к рисунку (как?).

Красивое решение имеет следующая задача: «В скольких точках пересекаются диагонали n-угольника ($n \geqslant 4$), если известно, что никакие три из его диагоналей не пересекаются в одной точке (не считая вершин)?».

Действительно, если взять произвольно четыре вершины этого n-угольника, то они определяют четырехугольник, причем одна из искомых точек лежит в пересечении его диагоналей. Учитывая, что, по условию задачи, никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, получаем, что точек пересечения диагоналей ровно столько, сколькими способами можно выбрать 4 из n, то есть C_n^4.

В случае 24-угольника, у которого никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, точек пересечения диагоналей было бы C_{24}^4. Но раз данный 24-угольник —

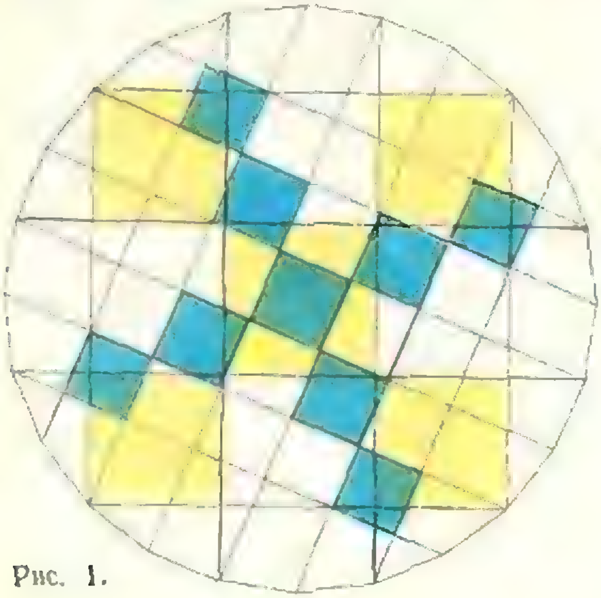


Рис. 1.

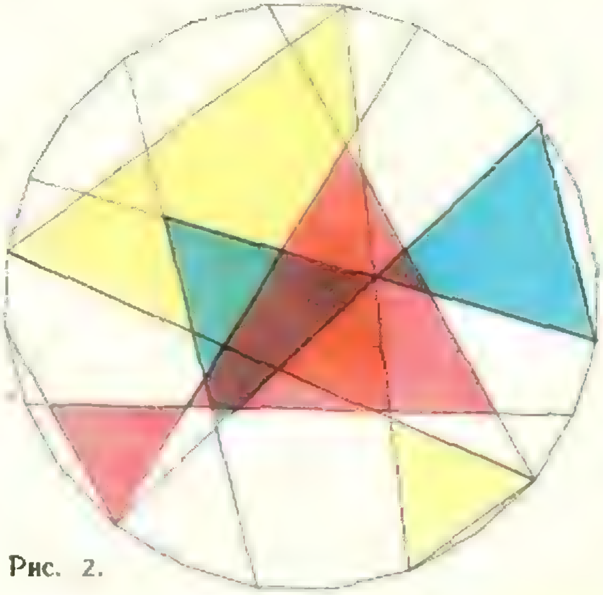


Рис. 2.

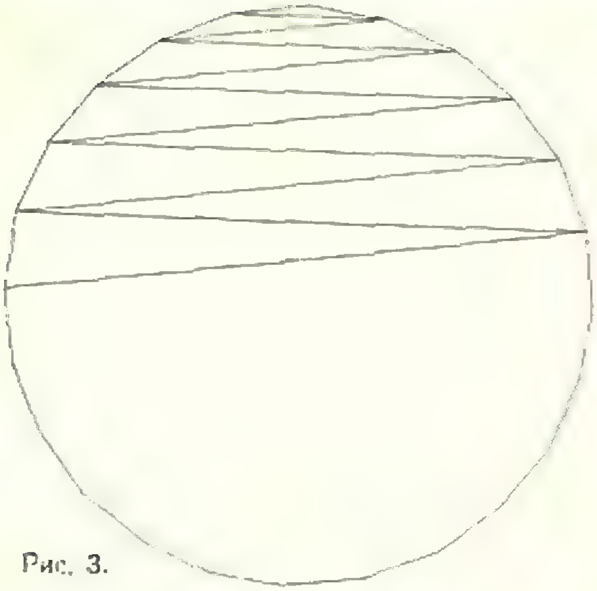


Рис. 3.

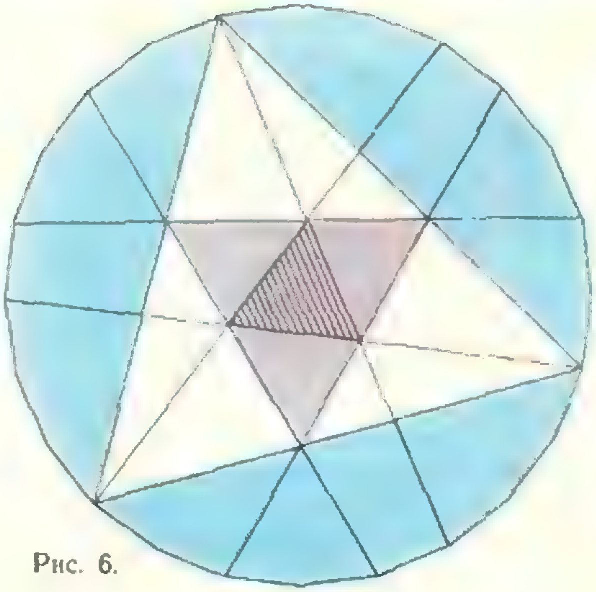


Рис. 6.

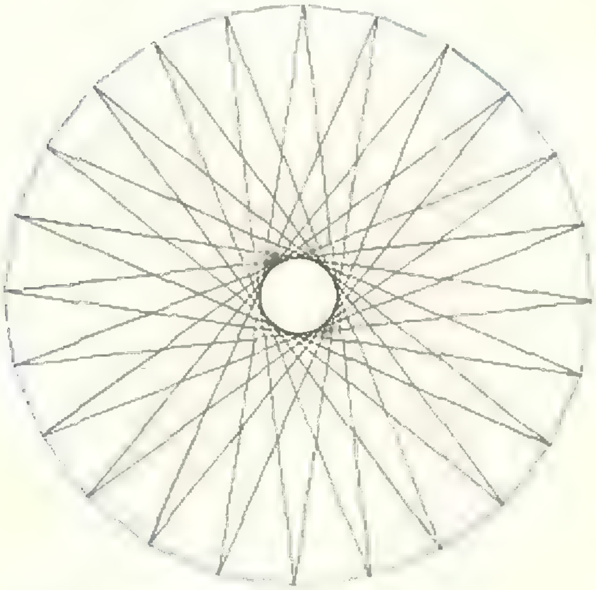


Рис. 4.

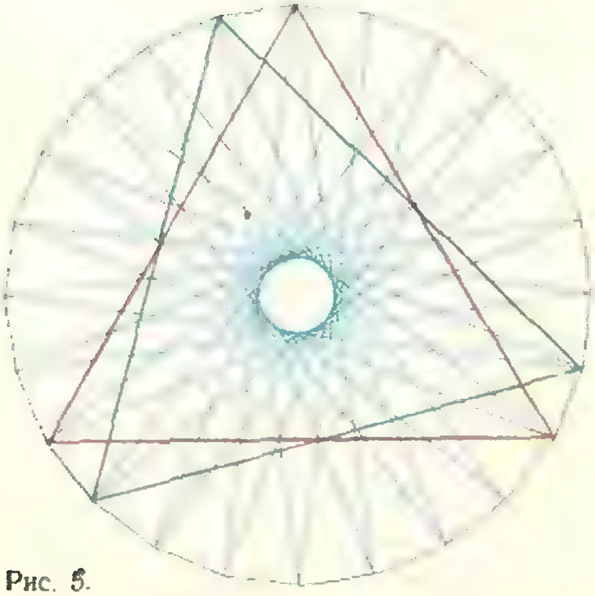


Рис. 5.

правильный, то таких точек меньше. C_{24}^{4} дает оценку сверху. На рисунке (см. обложку) видно, что в некоторых точках пересекаются по три и более диагоналей. Но, может быть, зрение нас обманывает и в действительности на чертеже приводится не одна точка пересечения трех прямых, а две очень близкие, а потому и неразличимые на глаз точки пересечения пар диагоналей?

В некоторых случаях несложные рассуждения подтверждают правильность увиденного. Например, почти очевидно, что более чем двухкратными являются точки пересечения диагоналей, принадлежащие диагоналям правильного 24-угольника, которые являются осями его симметрии. Установите наличие (или отсутствие) более чем двукратных точек пересечения диагоналей на рисунках 5, 6.

Можно показать, что в вершинах выделенных на рисунке 6 правильных треугольников пересекаются более двух диагоналей данного правильного 24-угольника. Попробуйте это сделать.

Попробуйте уточнить оценку числа пересечений диагоналей правильного 24-угольника.

Попробуйте получить правильный 24-угольник, пользуясь только перегибанием листа бумаги.

В. Н. Березин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

КАКИХ ЧИСЕЛ БОЛЬШЕ?

Ю.П. Лысов

Каких чисел больше — натуральных или четных? Где больше точек — на отрезке или прямой? Можно ли найти множество, у которого больше элементов, чем у данного множества? Выясняя эти естественные вопросы, Георг Кантор ввел в математику идеи и рассуждения, из которых выросла теория множеств — фундамент основных разделов современной математики *).

Попробуем на этом и одном из следующих занятий математического кружка ответить на вопросы, которые ставил перед собой Кантор.

Что мы делаем, если желаем ответить на вопрос: *кого в классе больше — девочек или мальчиков*? Обычно мы поступаем так: пересчитываем девочек, мальчиков, а затем сравниваем полученные два числа. Этот способ дает возможность сравнивать различные конечные множества. Но всегда ли мы им пользуемся?

Представьте себе, что вы входите в зрительный зал кинотеатра после третьего звонка и пытаетесь выяснить, чего больше — зрителей или кресел. Посмотрев в зал, вы замечаете, что все зрители сидят, и в то же время несколько кресел остались свободными. Ответ на вопрос ясен — кресел больше.

Вы установили соответствие между зрителями и частью кресел. Этот принцип взаимного соответствия поможет нам в сравнении бесконечных множеств. (Впрочем, в неявном виде соответствие было установлено и в первом примере с девочками и мальчиками.)

Определение 1. *Взаимно однозначным соответствием множеств A и B называется правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие один определенный элемент множества B, так что при этом каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A.*

Задача 1. *Установите взаимно однозначное соответствие между множеством A натуральных чисел и множеством B целых чисел, меньших 0.*

Натуральному числу k, принадлежащему множеству A, ставим в соответствие число $-k$, принадлежащее множеству B. Легко заметить, что это соответствие является взаимно однозначным.

Построенное соответствие показывает, что в множестве A столько же элементов, сколько в B. Полученный результат хорошо согласуется с нашими наглядными представлениями.

Задача 2. *Установите взаимно однозначное соответствие между множеством A натуральных чисел и множеством B четных натуральных чисел.*

Натуральному числу n поставим в соответствие четное число $2n$.

Получаем, что натуральных чисел (A) столько же, сколько и четных натуральных (B). Но множество B целиком содержится в множестве A. Нет ли здесь ошибки? Ошибки нет.

---

*) Подробнее об этом рассказано в статье Л. А. Калужнина. К 100-летию теории множеств Георга Кантора, с. 2.

Все верно, и в этом легко убедиться, если на одной числовой прямой отметить натуральные числа, а на другой — четные и расположить эти прямые одну под другой (см. рисунок; на прямых разный масштаб).

Здесь проявляется важное отличие конечных множеств от бесконечных: часть бесконечного множества может быть в определенном смысле равной всему множеству. Такое равенство называют *эквивалентностью*.

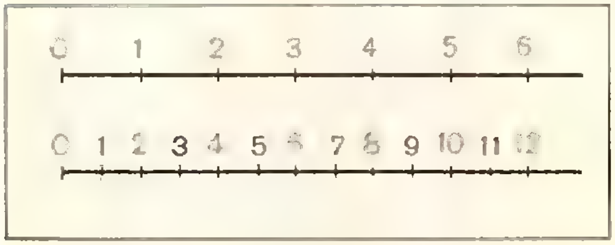
Определение 2. *Два множества A и B называются эквивалентными (количественно эквивалентными, равномощными), если между ними существует взаимно однозначное соответствие.*

Задача 3. *Докажите, что множество всех целых чисел эквивалентно множеству всех натуральных чисел.*

Мы видим, что целые числа расположены на прямой не так, как натуральные, но все-таки эти множества эквивалентны. Множества, эквивалентные натуральному ряду, для упрощения формулировок, называют счетными множествами.

Определение. 3. *Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел, то есть элементы этого множества можно выписать в строчку в соответствии с присвоенными им номерами.*

В множестве целых чисел у каждого элемента имеются два «соседних». Может быть, в множестве, в котором не для каждого элемента можно указать «соседа», будет больше элементов, чем в счетном? Рассмотрим, например, множество правильных дробей. Для любых двух дробей a и b ($a < b$) найдется правильная дробь c такая, что $a < c < b$, то есть «соседа» нет. И тем не менее это множество тоже счетно.



Задача 4. *Докажите, что множество правильных дробей счетно.*

Указание. Воспользуйтесь тем, что число правильных дробей со знаменателем, равным N, конечно.

Задача 5. *Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.*

Решение задачи 5 можно получить, используя в качестве леммы задачу 4.

Возникает гипотеза, что все бесконечные множества эквивалентны множеству натуральных чисел. Однако это не так. Величайшим достижением Кантора было решение следующей задачи.

Задача 6. *Докажите, что нельзя установить взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством бесконечных последовательностей из 0 и 1.*

Решение этой задачи приведено на с. 8, но если вы еще его не читали, попробуйте решить задачу самостоятельно. (Автор статьи знаком с большим количеством школьников, решивших ее.)

Итак, мы убедились в существовании несчетных множеств, но это тема одного из следующих занятий кружка, а сейчас познакомимся еще с несколькими счетными множествами.

Задача 7. *Множество всевозможных русских слов счетно* (мы, разумеется, считаем, что каждое слово состоит из конечного числа букв).

Задача 8. *Множество всевозможных конечных наборов целых чисел счетно.*

Если учесть, что любое уравнение степени n имеет не более n корней, то легко получается решение следующей задачи.

Задача 9. *Множество чисел, каждое из которых является решением какого-то уравнения с целыми коэффициентами, счетно.*

Множество чисел из задачи 9 называется множеством алгебраических чисел. Докажите, что все рациональные числа и всевозможные комбинации радикалов и рациональных чисел являются алгебраическими числами. Алгебраическими являются и некоторые числа, которые нельзя записать в радикалах (существование таких чисел в 1824 году доказал норвежский математик Нильс Хенрик Абель). Из задач 6 и 9 следует существование неалгебраических чисел. Такие числа называются трансцендентными.

В заключение предлагаем вашему вниманию более трудные задачи.

Задача 10. *Множество M состоит из восьмерок, лежащих на плоскости и не пересекающих друг друга (восьмерка — пара касающихся окружностей, каждая из которых может быть любого размера). Докажите, что M конечно или счетно.*

Нетрудно заметить, что, располагая на плоскости непересекающиеся буквы «Г» или «О», можно получить несчетное множество. Существует ли ещё какая-нибудь буква, обладающая тем же свойством, что и восьмерка?

Задача 11. *Множество M состоит из букв «Т», лежащих на плоскости и не пересекающих друг друга. Докажите, что M конечно или счетно.*

Решив предыдущую задачу, вы без особого труда сможете сказать про каждую букву русского алфавита, может ли эта буква находиться на плоскости в несчетном количестве, или при любом расположении она образует не более чем счетное множество.

Задача 12. *Число x_0 называется максимумом функции $f(x)$, если существует положительное число δ такое, что $f(x)$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ больше всякого другого значения функции в этом интервале. Докажите, что множество максимумов любой функции конечно или счетно.*

Из старого словаря

(Окончание. Начало см. с. с. 20, 23)

Такая картина была отвергнута лишь к концу века, когда был открыт электрон.

Еще одно слово: «**Эфир** — материя жидкая, как воздух, но несравненно его тоньше...»

Общепринято было считать, что всю Вселенную заполняет эфир, который проникает во все тела и служит средой, передающей свет, подобно тому, как воздух есть среда, передающая звук. Весь XIX век (особенно его конец) был посвящен попыткам построить теорию эфира. Лишь в начале XX века Эйнштейн показал, что существование эфира является лишней гипотезой, которая без всякого вреда может быть отброшена. Так и было сделано. Ложная уверенность в необходимости среды для передачи света была столь сильна, что гипотеза эфира была использована Максвеллом в его теории электромагнитного поля, которая, как мы сейчас знаем, совсем не нуждается в эфире.

Итак, мы привели три определения, от которых уже давно не осталось и следа. Но строки в Словаре, как раскопанные курганы, помогают нам осознать, сколь стремительно развивается наука.

Я. С.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 31 января 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М236, М237» или «... Ф248».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).

Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М236—М240; Ф248—Ф252

М236. а) Имеется 51 двузначное число. Докажите, что из этих чисел можно выбрать по крайней мере 6 чисел так, чтобы никакие два из выбранных чисел ни в одном разряде не имели одинаковой цифры.

б) Даны натуральные числа k и n, $1 < k < n$. Для какого наименьшего m верно следующее утверждение: при любой расстановке m ладей на доске размером $n \times n$ можно выбрать k ладей из этих m так, чтобы никакие две из выбранных людей не били друг друга?

А. Ю. Сойфер и *С. Г. Слободник*

М237. Углы остроугольного треугольника равны α, β и γ. Какие массы нужно поместить в его вершинах, чтобы центр тяжести этих трех масс попал

а) в точку пересечения высот?

б) в центр описанной окружности?

Стороны треугольника равны a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центр тяжести попал

в) в точку пересечения отрезков, соединяющих вершины и точки касания противоположных им сторон со вписанной окружностью?

г) в центр вписанной окружности?

Б. Д. Гинзбург

М238* Докажите, что сумма $C_n^1 + C_n^3 \cdot 1973 + C_n^5 \cdot (1973)^2 + C_n^7 (1973)^3 + \ldots$ делится на 2^{n-1}. (Здесь C_n^k — коэффициенты многочлена

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.\Bigg)$$

Ф. Г. Шлейфер

М239. На плоскости заданы две точки A и B. Пусть C — некоторая точка, одинаково удаленная от A и B. Построим последовательность точек $C_1 = C, C_2, C_3, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots$ где C_{n+1} — центр окружности, описанной около треугольника AC_nB. При каком положении точки C

а) точка C_n попадет в середину отрезка AB (при этом C_{n+1} и дальнейшие члены последовательности не определены)?

б) точка C_n совпадает с C?

Н. Чернов,
ученик 10 класса (Кривой Рог)

М240. По заданному x значение x^8 можно найти за три арифметических действия: $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$, $x^8 = x^4 \cdot x^4$, а x^{15} — за пять действий: первые три — те же самые, затем $x^8 \cdot x^8 = x^{16}$ и $x^{16} : x = x^{15}$. Докажите, что

а) x^{1000} можно найти за 12 действий (умножений и делений);

б)* для любого натурального n значение x^n можно найти более чем за $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$ действий.

Э. Г. Белага

Ф248. Тонкий тяжелый обруч радиуса R с очень легкими спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. К обручу прикрепили маленький шарик, масса которого равна массе обруча. Найти период малых колебаний обруча с шариком. Для этого можно попытаться найти аналогию в движении обруча с шариком и математического маятника.

Ф249. Невесомый стержень, на концах которого закреплены шарики массами m и M, опирается серединой на жесткую подставку, вокруг которой он может свободно вращаться в вертикальной плоскости.

В начальный момент стержень расположен горизонтально, а скорость его равна нулю. С какой силой давит он в этот момент на подставку?

Ф250. Одинаковые заряды q находятся на расстояниях a и b от заземленной сферы малого радиуса r (рис. 1). Расстояние до поверхности земли и других заземленных предметов много больше a и b. Найти силу, с которой заряды действуют на сферу.

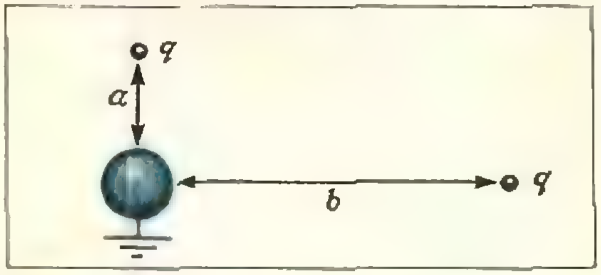


Рис. 1.

Ф251. На фотографии летящей пули (рис. 2) видны звуковые волны, которые возбуждаются при движении пули. (Такую фотографию удалось получить благодаря тому, что области, в которых плотность воздуха различна, по-разному преломляют световые лучи.) Воспользовавшись линейкой, определите примерную величину скорости пули. Скорость звука в воздухе равна 340 *м/с*.

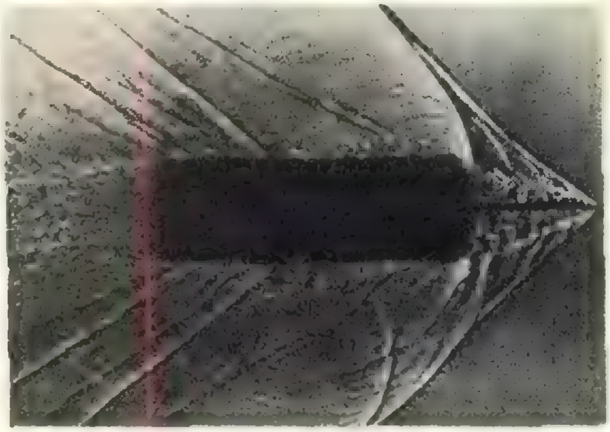


Рис. 2.

Ф252. На цилиндрический столб намотан канат. За один из концов каната тянут с силой F. Для того чтобы канат не скользил по столбу, когда на столб намотан только один виток каната, второй конец каната нужно удерживать с силой f. С какой силой нужно удерживать этот конец каната, если на столб намотано n его витков? Как изменится сила f, если взять столб вдвое большего радиуса? (Сила f не зависит от толщины каната.)

Решения задач

M179; M196—M199; Ф208, Ф209

M179. В «Кванте» № 8 за 1973 год было опубликовано решение задачи M179. При этом мы предложили читателям самостоятельно закончить решение задачи. Мы надеемся, что вы это сделали и можете сравнить свое решение с нашим.

Напомним формулировку задачи.

Для каждого треугольника T строится последовательность треугольников

$$T_0 = T,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ \ldots,$$

где T_n — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_{n-1}. Требуется выяснить, сколько существует попарно неподобных друг другу треугольников T таких, для которых T_n подобен T (при каждом фиксированном n).

Обозначим через (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, …, $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ углы треугольника T и соответствующих ему треугольников $T_1, \ldots, T_n$. Требуется узнать, сколько существует троек (α, β, γ) таких, для которых тройка $(\alpha_n; \beta_n, \gamma_n)$ совпадает с (α, β, γ) или получается из нее перестановкой, причем $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

Тройки (α, β, γ) и их преобразования

$$(\alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{h} (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{h^n} (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$$

удобно представлять себе геометрически следующим образом. Нарисуем треугольник Y, у которого длина каждой высоты равна π, и будем изображать тройку неотрицательных чисел (α, β, γ), для которой $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, точкой y внутри этого треугольника, расстояния от которой до сторон равны соответственно α, β и γ (рис. 1). Такое соответствие

$$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow y$$

между тройками (α, β, γ) и точками $y \in Y$ будет взаимно однозначным. Перестановкам чисел в тройке (α, β, γ) соответствуют перемещения треугольника, совмещающие его с самим собой (повороты и симметрии относительно высот). Напомним, что преобразование h геометрически описывается так. На средних линиях треугольника Y (точкам y средних линий соответствуют прямоугольные треугольники T) h не определено, а каждый из четырех треугольников, на которые средние линии разбивают треугольник Y, h отображает на весь Y, причем это отображение — преобразование подобия с коэффициентом 2, переводящее каждый отрезок в параллельный ему отрезок. Отсюда индукцией по n получаем, что преобразование h^n устроено аналогично: на прямых, параллельных сторонам и разбивающих высоты на 2^n равных частей, h^n не определено; в каждом из 2^{2n} треугольничков, на которые эти прямые разбивают Y, h^n — преобразование подобия с коэффициентом 2^n, отображающее этот треугольничек на весь Y. (На рисунке 2 изображено h^2.)

Условия $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ выделяют один из шести треугольников, на которые разбивают треугольник Y его высоты. Этот прямо-

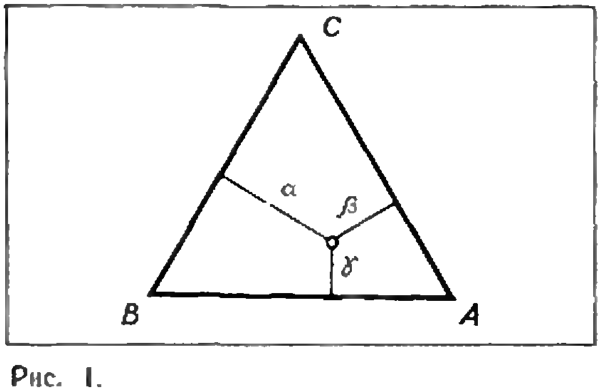


Рис. 1.

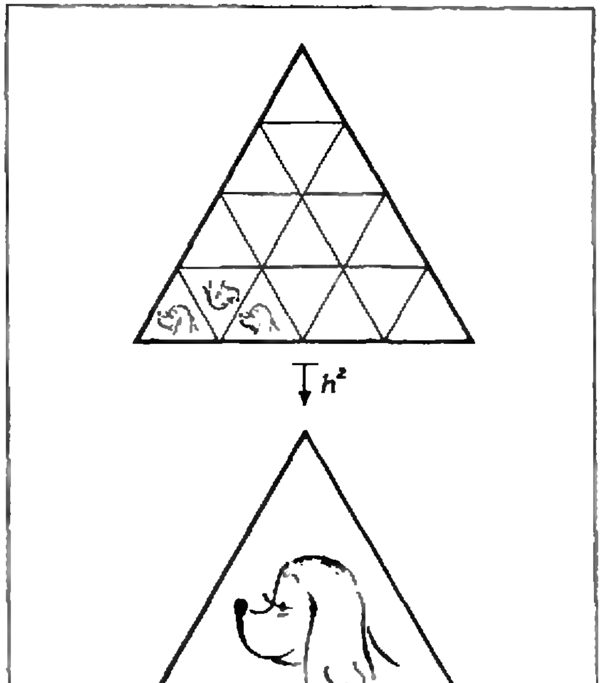


Рис. 2.

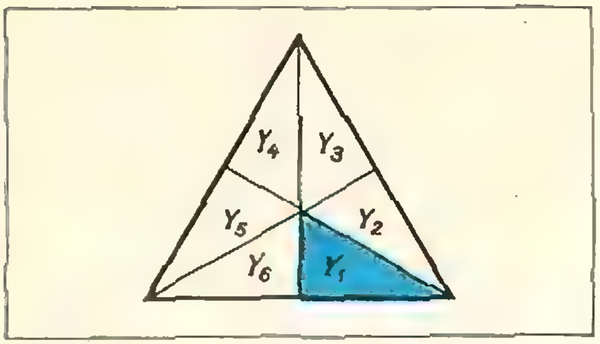


Рис. 3.

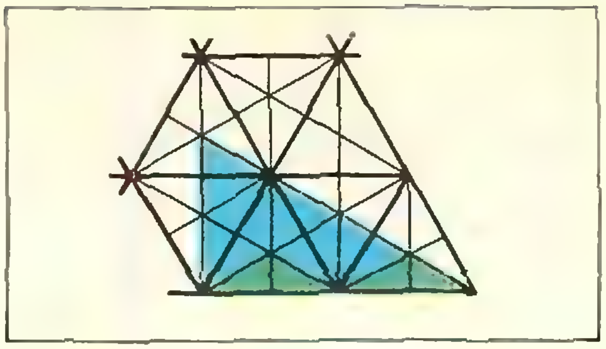


Рис. 4.

угольный треугольник обозначим Y_1, остальные — как показано на рисунке 3 — обозначим соответственно $Y_2, \ldots, Y_6$. Пусть f_j: $Y - Y$ — перемещение Y такое, что $f_j(Y_j) = Y_1$. Если каждый из 2^{2n} маленьких треугольничков, которые отображаются преобразованием h^n на весь треугольник Y, разбить высотами на шесть треугольников, то Y_1 будет разбит на 2^{2n} подобных ему (с коэффициентом 2^n) треугольничков, которые мы обозначим через X_j, $1 \leqslant j \leqslant 2^{2n}$ (рис. 4). После отображения h^n каждый X_i перейдет в некоторый Y_j, и если затем переставить числа в тройке $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ в порядке убывания — применить f_j, то произведение двух преобразований $f_j \cdot h^n$ отображает X_i на Y_1 (преобразование подобия с коэффициентом 2^n).

Мы утверждаем, что в каждом из 2^{2n} треугольников $X_i \subset Y_1$ существует ровно одна «неподвижная точка» y_i такая, что $y_i \in X_i$ и $f_j(h^n(y_i)) = y_i$. Из ответа нужно еще исключить неподвижные точки тех треугольников X_i, у которых бóльшие катеты лежат на бóльшем катете треугольника Y_1 (их существует именно столько, каков коэффициент подобия), поскольку для этих (и, как нетрудно видеть, только для этих) треугольников «неподвижная точка» попадает на границу, где отображение h^n не определено. Отсюда сразу следует, что ответ в нашей задаче: $2^{2n} - 2^n$. (На рисунке 4 в каждом из 12 голубых треугольничков лежит по одной точке (α, β, γ), для которой $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ после перестановки в порядке убывания совпадает с (α, β, γ).)

Осталось только доказать наше утверждение. Для этого мы применим к треугольнику Y_1 и отображению p этого треугольника на $X_i \subset Y_1$, обратному к $f_j \circ h^n$, следующую теорему.

Теорема. *Пусть Z — некоторая фигура на плоскости (причем все граничные точки Z считаются принадлежащими Z), p: $Z \to Z$ — преобразование подобия с коэффициентом $k < 1$. Тогда существует ровно одна «неподвижная точка» преобразования p, принадлежащая Z, то есть только одна $z_0 \in Z$, для которой $p(z_0) = z_0$.*

Доказательство теоремы для ограниченной фигуры Z (а именно этот случай нам нужен) проще всего провести так. Пусть $Z_n = p^n(Z)$ (результат n-кратного применения p к Z). Тогда $Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \ldots$ и пересечение всех Z_n состоит из одной точки z_0 (рис. 5). Эта точка и будет неподвижной точкой преобразования p.

Другое доказательство, позволяющее явно указать неподвижную точку и пригодное для неограниченных фигур Z, можно получить с помощью комплексных чисел. Любое преобразование подобия плоскости можно записать как результат последовательного выполнения поворота, растяжения в k раз, параллельного переноса: $z \overset{p}{\mapsto} az + b$ и, быть может, еще предварительной симметрии относительно прямой: $z \overset{p}{\mapsto} a\bar{z} + b$ (здесь a и b — комплексные числа, $|a| = k$, $\bar{z} = x - iy$ — сопряженное к $z = x + iy$; см. статью «Мнимые числа и геометрические задачи», «Квант» №3, 1973, с. 22). В первом случае неподвижная точка находится как решение уравнения

$$z_0 = az_0 + b => z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{b + \bar{a}b}{1-k^2},$$

во втором — как решение системы уравнений

$$\begin{cases} z_0 = a\bar{z}_0 + b \\ \bar{z}_0 = \bar{a}z_0 + \bar{b} \end{cases} => z_0 = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}} = \frac{b + a\bar{b}}{1-k^2}.$$

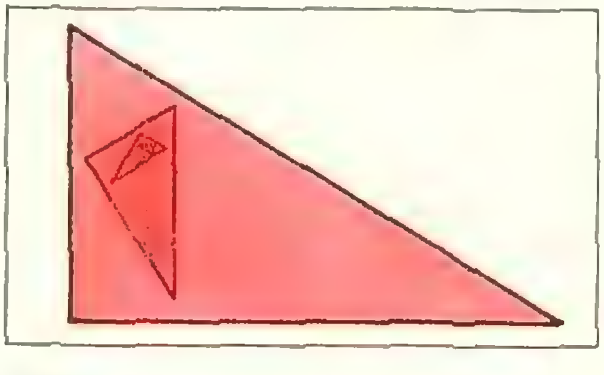


Рис. 5.

Нетрудно проверить, что найденная точка z_0 плоскости неподвижна при преобразовании p. В обоих случаях ясно, что z_0 не может оказаться вне фигуры Z: если расстояние ρ от z_0 до ближайшей к ней точки $z_1 \in Z$ было бы положительным, то расстояние от z_0 до $p(z_1)$ было бы равно $k\rho < \rho$, и $p(z_1)$ не могла бы принадлежать Z_1, хотя по условию $p(Z) \subset Z$.

Конечно, теорему о существовании неподвижной точки у преобразования подобия (с коэффициентом $k < 1$) можно доказать и чисто геометрически — без использования предельных переходов и комплексных чисел. Предоставляем сделать это читателям (см., например, книгу «Геометрические преобразования», ч. I, серия «Библиотека математического кружка», Гостехиздат, 1955).

И. Б. Васильев

М196. *В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk.*

Предложим, что сумма длин проведенных хорд не меньше πk. Тогда сумма малых дуг окружности, стягиваемых этими хордами, больше πk. Добавим к этим дугам дуги, симметричные им относительно центра окружности. Сумма всех дуг больше $2\pi k$. Поэтому найдется точка окружности, покрытая хотя бы $k+1$ дугой (длина окружности равна 2π). Если провести диаметр через эту точку, то она пересечет по крайней мере $k+1$ хорду.

А. Т. Колотов

М197. *В прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов записаны mn произвольных положительных чисел. Найдем произведение чисел в каждом столбце и затем сумму S всех n таких произведений. Докажите, что если переставить числа в каждой строке в порядке возрастания, то сумма S для новой таблицы будет не меньше, чем в первоначальной. (На рисунке 6 приведен один пример ситуации, описанной в задаче; здесь $m = 3$, $n = 4$.)*

Решите эту задачу:

а) для $m = n = 2$ (для таблицы 2×2);

1	5	6	2
4	3	7	2
1	2	1	2
4	30	42	8

S = 84

1	2	5	6
2	3	4	7
1	1	2	2
2	6	40	84

S = 132

Рис. 6.

−1	−2
−2	−1
−1	2
−2	4

S = 2

−2	−1
−2	−1
−1	2
−4	2

S = −2

Рис. 7.

б) для $m = 2$ и произвольного n (для таблицы из двух строк);

в) для любых натуральных m и n.*

Рассмотрим сразу общий случай — таблицу с m строками и n столбцами. Докажем, что при упорядочении строк сумма произведений не уменьшится. Доказательство будем вести индукцией по числу столбцов таблицы. Если в таблице один столбец, то утверждение задачи очевидно. Пусть для таблиц с $n-1$ столбцом утверждение задачи верно. Докажем его для таблицы из n столбцов.

Обозначим через Π_i произведение чисел в i-м столбце. Переставим теперь столбцы так (это не изменит сумму произведений), чтобы произведение Π_1 стало минимальным. Обозначим через x_{ij} число, стоящее в i-й строке и j-м столбце. Предположим, что x_{i1} — не минимальное число в i-й строке и что минимальным является x_{ik}. Поменяем местами x_{i1} и x_{ik} и проверим, что сумма произведений при этом возрастет. Обозначим через $\hat{\Pi}_1$ произведение всех чисел в первом столбце, кроме x_{i1}, через $\hat{\Pi}_k$ — произведение всех чисел в k-м столбце, кроме x_{ik}. Разность новой и старой сумм равна

$$x_{i1}\hat{\Pi}_k + x_{ik}\hat{\Pi}_1 - x_{i1}\hat{\Pi}_1 - x_{ik}\hat{\Pi}_k = (x_{i1} - x_{ik})\cdot(\hat{\Pi}_k - \hat{\Pi}_1).$$

Но эта величина положительна, так как $x_{i1} > x_{ik}$ и $\hat{\Pi}_k > \hat{\Pi}_1$, поскольку $x_{ik}\hat{\Pi}_k \geqslant x_{i1}\hat{\Pi}_1$. Значит, после перестановки сумма увеличилась. Кроме того, очевидно, что произведение Π_1 новых чисел в первом столбце по-прежнему минимально. Поэтому если какое-то число x_{i1} не минимально в своей строке, мы можем поменять его местами с минимальным и при этом сумма увеличится. Таким образом, мы можем переставить все числа, минимальные в строках, в первый столбец, и сумма произведений увеличится.

Воспользуемся теперь индуктивным предположением. Очевидно, если упорядочить строки в таблице, образованной столбцами со 2-го по n-й, то мы получим исходную таблицу с упорядоченными строками. По предположению индукции при этом упорядочении сумма произведений $\Pi_2 + \ldots + \Pi_n$ не уменьшится. Следовательно, сумма $\Pi_1 + \ldots + \Pi_n$ в первоначальной таблице не больше, чем аналогичная сумма в таблице с упорядоченными строками. Решение задачи закончено.

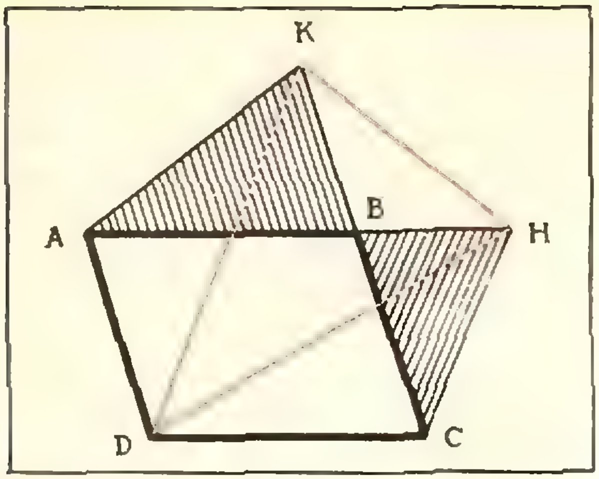


Рис. 8.

Примечания 1. Заметим, что при перемене мест чисел, которую мы производим, сумма произведений строго увеличивается. Отсюда следует, что сумма произведений равна максимальной в том и только в том случае, когда таблица получается из таблицы с упорядоченными строками путем перестановки столбцов.

2. Если не предполагать, что в таблице стоят положительные числа, то утверждение неверно. Простейшим примером может служить таблица 2 × 3 (рис. 7).

Б. М. Макаревич

М198. *Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых AB и BC выбраны точки соответственно H и K так, что треугольники KAB и HCB равнобедренные ($KA = AB$ и $HC = CB$ (рис. 8)). Докажите, что треугольник KDH — тоже равнобедренный.*

Это совсем простая задача. Рассмотрим треугольники AKD и CDH. Они равны, поскольку $AD = CH$, $AK = DC$ и $\angle DAK = \angle DCH$ (см. рис. 9, *а*, *б*, *в*). Поэтому длины отрезков KD и DH одинаковы. Легко убедиться и в том, что треугольники KDH, AKB и BHC подобны (сделайте это).

В. Л. Гутенмахер

М199. *а) Докажите, что сумма*

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \cdots + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \cdots,$$

(сумма берется по всем целым i, $0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$) равна $\frac{n+1}{2^n}$.

б) Докажите, что если p и q — различные числа и $p + q = 1$, то сумма*

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2q^2 - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \ldots,$$

аналогичная предыдущей, равна

$$\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

при произвольном n.

Здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты, то есть $C_n^0 = 1$ и $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$. (О числах C_n^k рассказывалось в «Кванте» № 2 за этот год.)

Задача а) является частным случаем задачи б). Действительно, если заменить $\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$ на $p^n + p^{n-1}q + \ldots + pq^{n-1} + q^n$, а потом подставить $p = q = \frac{1}{2}$, то мы получим $\frac{n+1}{2^n}$.

Поэтому решим сразу задачу б).

Пусть $C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + \ldots = S_n$. Тогда

$$S_{n+1} - S_n =$$

$$= \Sigma(-1)^i \left(C_{n+1-i}^i - C_{n-i}^i\right) p^i q^i =$$

$$= \Sigma(-1)^i C_{n-i}^{i-1} p^i a^i =$$

$$= -pq\,\Sigma(-1)^{i-1} C_{n-1-(i-1)}^{i-1} p^{i-1} \times q^{i-1} = -pqS_{n-1}.$$

Итак, $S_{n+1} = S_n - pqS_{n-1}$.

Воспользуемся теперь математической индукцией. Предположим, что формула $S_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$ доказана для всех $n \leqslant k$.

Тогда

$$S_{k+1} = S_k - pqS_{k-1} =$$

$$= \frac{p^{k+1} - q^{k+1} - pq(p^k - q^k)}{p - q} =$$

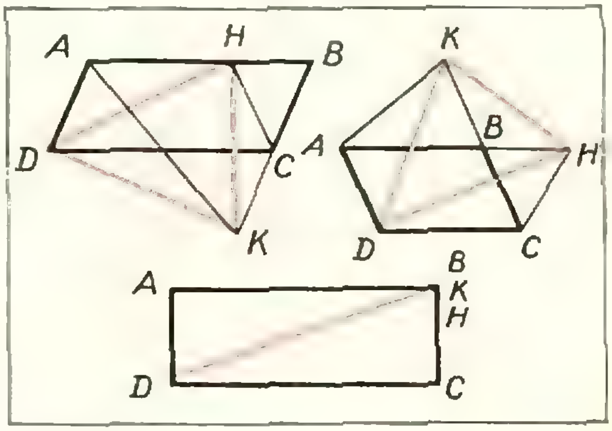


Рис. 9

$$= \frac{p^{k+1}(1-q) - q^{k+1}(1-p)}{p-q} =$$

$$= \frac{p^{k+2} - q^{k+2}}{p-q}$$

(напомним, что $p + q = 1$).

Остается проверить базу индукции. При $n = 0$ $S_n = 1$ и $\frac{p-q}{p-q} = 1$ — формула верна.

При $n = 1$ $S_n = 1$, а $\frac{p^2-q^2}{p-q} = p + q = 1$ — формула снова верна.

Таким образом, и индуктивный шаг и база индукции проверены. Следовательно, формула справедлива при всех n.

Замечание. В нашем решении мы пользовались тем, что $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ Выведите это соотношение самостоятельно из формулы для C_n^k, приведенной в условии задачи.

Л. Г. Лиманов

Почти все читатели, приславшие решения задач **М190—М199**, успешно справились с задачами **М191**, **М198**. Мы получили более 150 правильных решений задачи **М196**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи): *С. Абрамов* (Москва) **7**; *С. Агеев* (Воронеж) **2**; *Д. Азов* (Челябинск) **2**; *Ю. Акутин* (Москва) **5**; *П. Баньковский* (Уральск) **7**; *А. Бараов* (Старый Урух КБАССР) **7**; *Е. Башкиров* (Минск) **2, 7**; *А. Берлин* (Бобруйск) **2, 7**; *А. Блох* (Харьков) **2, 4, 7, 9**; *А. Бузанов* (Днепропетровск) **2**; *А. Вайновский* (Баку) **2**; *А. Вальков* (Ташкент) **2, 7, 9**; *А. Васищев* (Ставрополь) **7**; *Р. Вассерман* (Одесса) **9**; *С. Вилкомир* (Москва) **2**; *А. Волков* (Челябинск) **3**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **2, 7**; *А. Гончаров* (Никополь) **2**; *А. Григорян* (Баку) **0, 2, 4, 7, 9**; *С. Грищенко* (ст. Ленинградская Краснодарского края) **7**; *С. Гродский* (Корсунь—Шевченковский) **7**; *Е. Гусев* (Павлоград) **2, 7, 9**; *Г. Гутин* (Клинцы Брянской обл.) **2, 4, 7, 9**; *А. Дадиомов* (Ленинград) **2, 4**; *К. Данильченко* (Волгоград) **2, 9**; *П. Дедик* (Москва) **7**; *В. Дупцов* (Душанбе) **7**; *А. Еременко* (Харьков) **2, 9**; *К. Ефимов* (Челябинск) **2**; *А. Жданов* (Славянск—на—Кубани) **2**; *А. Журавлев* (Москва) **2, 7**; *М. Закс* (Пермь) **2**; *А. Заславский* (Калинин) **7, 9**; *В. Карапетян* (Севан) **2, 9**; *Д. Карпов* (Павлоград) **7, 9**; *М. Кац* (Кишинев) **7**; *И. Кирова* (Болгария) **2**; *Л. Клименок* (Москва) **7**; *Ю. Князикин* (Таллин) **7**; *М. Кобозев* (Киев) **9**; *К. Козел* (Польша) **0**; *С. Конягин* (Саратов) **0**; *В. Кошарный* (Волоногорск Днепропетровской обл.) **4, 7**; *А. Кукуш* (Киев) **4**; *Р. Купиец* (Польша) **0**; *А. Курляндчик* (Ленинград) **2, 4**; *Г. Левант* (Фрунзе) **2**; *Д. Лифшиц* (Кутаиси) **7**; *М. Любич* (Харьков) **0, 7**; *А. Макаричев* (Львов) **2—4, 7, 9**; *Г. Малашонок* (Львов) **2, 7**; *Д. Мамедов* (Дивичи Азерб. ССР) **9**; *С. Мельник* (Харьков) **2**; *Д. Мостовой* (Грозный) **3**; *Г. Мустафаев* (Сиазань) **9**; *В. Нападов* (Харьков) **2, 4**; *А. Николаев* (Москва) **0**; *С. Нужный* (Куйбышев) **2, 4**; *М. Осипов* (Москва) **7**; *И. Панин* (Апатиты) **2**; *В. Паньков* (Минск) **0, 3, 5, 7**; *П. Парамонов* (Москва) **5, 7**; *Е. Парилис* (Ташкент) **7, 9**; *Е. Пасик* (Харьков) **2, 3, 4, 7, 9**; *В. Перевалов* (Комсомольск—на—Амуре) **2**; *В. Прунис* (Москва) **2**; *А. Разгуляев* (Клин) **7**; *А. Райнин* (Москва) **0**; *А. Резников* (Киев) **2, 4**; *С. Родионов* (Саратов) **9**; *Р. Рожков* (Рязань) **2, 7**; *Ф. Рожков* (Рязань) **2, 7**; *Б. Розенштейн* (Каменец—Подольский) **7**; *А. Рязанов* (Н.-Кузнецк Кемеровской обл.) **7**; *Г. Самородницкий* (Нежин) **2**; *В. Сац* (Киев) **2**; *А. Сахаров* (Ярославль) **7**; *Г. Скляр* (Харьков) **7, 9**; *В. Слепой* (Фрунзе) **3**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **7**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **2, 4**; *А. Слинкин* (Москва) **0, 2, 4, 7, 9**; *И. Слуцкий* (Минск) **2**; *Я. Сойбельман* (Киев) **2**; *К. Стемиак* (Польша) **2, 3**; *С. Табачников* (Москва) **0, 2—5, 7, 9**; *В. Ткаченко* (Киев) **7**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **0, 2—4, 7, 9**; *С. Фомин* (Ленинград); **2, 3**; *С. Церковный* (Ленинград) **7**; *Н. Чекрыжов* (Набережные Челны) **3**; *А. Черебатов* (Омск) **2, 3, 7**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **2, 3, 7, 9**; *А. Шерстюк* (Николаев) **0, 7, 9**; *В. Шляков* (Харьков)**2, 3**; *Ю. Шмелев* (Ярославль) **2,3,4,7**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **0,2—4, 7, 9**; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **9**; *Р. Юлмухаметов* (д. Иткулово Башк. АССР) **7**; *И. Юнус* (Харьков)**2, 7, 9**.

Ю. П. Лысов

Ф208. *У автомобиля, участвующего в гонке, лопается шина. Оценить, с какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы шина не сминалась.*

Будем считать, что автомобиль движется равномерно и без проскальзывания, и рассмотрим, какие силы действуют на участок шины одного колеса, который соприкасается с дорогой. В инерциальной системе координат, связанной с центром колеса, этот участок шины движется по окружности радиуса R (радиус колеса) с линейной скоростью, равной по величине скорости автомобиля v. Центростремительное ускорение этого участка равно

$$a_{ц} = \frac{v^2}{R}.$$

Какие силы действуют на такой участок шины (назовем его «ведущим»)? Если пренебречь деформацией шины и связанными с нею силами, то на ведущий участок действует только одна сила — сила реакции дороги N.

(Сила тяжести mg, действующая на этот участок, много меньше N, и ею можно пренебречь).

Так как у обычных автомобилей 4 колеса,

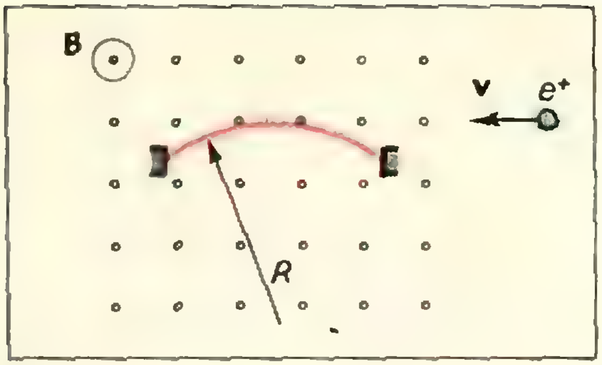


Рис. 10.

то эта сила (в среднем) равна $N = \frac{1}{4} Mg$,

где M — масса автомобиля. Ускорение, сообщаемое ведущему участку шины массы m силой N, и есть центростремительное ускорение, то есть

$$\frac{1}{4} Mg = m\frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Так как левая часть равенства (1) постоянна (для данного автомобиля), то условия $R = \mathrm{const}$ (условие несминаемости шины) и, как следствие, $m = \mathrm{const}$ однозначно определяют необходимую скорость:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m} gR}. \qquad (2)$$

Для получения количественной оценки подставим в эту формулу следующие значения: $g = 10$ *м/с*^{2}, $R = 0{,}5$ *м*, $M = 2\cdot10^3$ *кг*. Величину m нужно оценить. Масса шины порядка 30 *кг*, а с дорогой соприкасается ее небольшой участок. Будем считать, что его длина $l = 10$ *см*. Тогда

$$m = m_ш\cdot\frac{l}{2\pi R} \approx 30\cdot\frac{10}{2\cdot3{,}14\cdot0{,}5} \approx 1\ (кг)$$

(мы считаем, что радиус сечения шины мал по сравнению с радиусом колеса).

Подставив теперь все эти величины в формулу (2), получим

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2000}{1}\cdot10\cdot0{,}5} = 50\ м/с = 180\ км/ч.$$

Для гоночного автомобиля эта скорость совсем невелика.

Ф209. *Смоделировать траекторию заряженной частицы в магнитном поле можно, поместив в однородное магнитное поле закрепленный на концах гибкий проводник, по которому пропускается ток. Каким будет натяжение такого провода при токе 1 а, если он имитирует траекторию движения протона с энергией 1 Мэв, влетающего в магнитное поле перпендикулярно магнитным силовым линиям?*

Траектория движения протона, влетающего в магнитное поле перпендикулярно магнитным силовым линиям, — окружность. Следовательно, провод, концы которого закреплены, располагается по окружности (или по дуге окружности; рис. 10).

Выделим маленький элемент провода длины Δl (такой, что его можно считать прямолинейным) и посмотрим, какие силы на него действуют. Со стороны поля действует сила

$$F = IB\Delta l,$$

перпендикулярная элементу Δl (рис. 11). Со стороны прилегающих участков действуют силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ натяжения проволоки ($|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| = T$). Так как рассматриваемый элемент проволоки находится в равновесии, то равнодействующая сил $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ должна быть по абсолютной величине равна силе F, то есть

$$2T\sin\frac{\alpha}{2} = IB\Delta l;$$

отсюда

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{IB\Delta l}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Но $\Delta l = \alpha R$, где R — радиус окружности, которую представляет проволока. Кроме того, так как элемент проволоки мы взяли малым (по сравнению с R), то угол α мал и

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{IBR\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = IBR.$$

Итак, для того чтобы найти T, нужно определить R.

Протон в магнитном поле движется по окружности под действием силы Лоренца

$$F = evB$$

(v — скорость протона, e — его заряд). Эта сила сообщает протону центростремительное

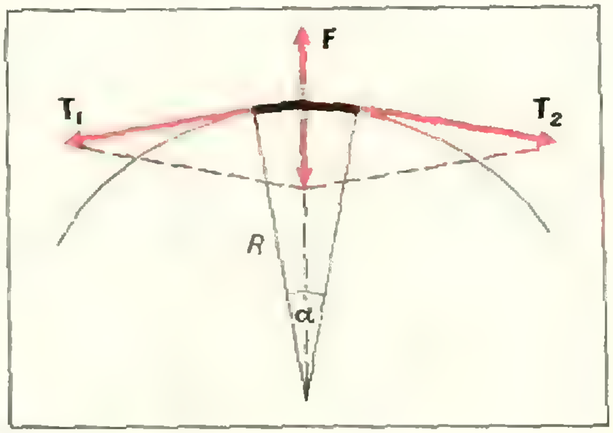


Рис. 11.

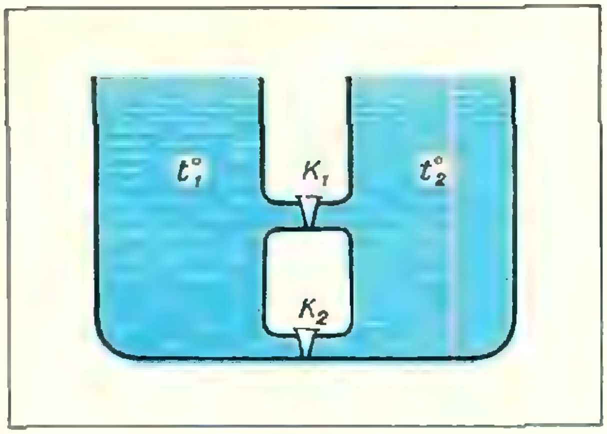


Рис. 12.

ускорение

$$a = \frac{v^2}{R},$$

то есть

$$evB = m\frac{v^2}{R},$$

или

$$BR = \frac{mv}{e} = \frac{1}{e}\sqrt{2\frac{m^2v^2}{2}} = \frac{1}{e}\sqrt{2m\frac{mv^2}{2}}.$$

Так как $\frac{mv^2}{2} = W$ — кинетическая энергия протона, то $BR = \frac{1}{e}\sqrt{2mW}$.

Таким образом, $T = \frac{I}{e}\sqrt{2mW}$.

Подставляя в эту формулу $I = 1a$, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ *к*, $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ *кг*, $W = 1$ *Мэв* $= 1{,}6\cdot10^{-13}$ *дж*, найдем

$$T = \frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}}\sqrt{2\cdot1{,}67\cdot10^{-27}\cdot1{,}6\cdot10^{-13}} \approx$$

$$\approx 14\ (\textit{н}).$$

Ф210. *Два одинаковых открытых сосуда соединены двумя одинаковыми трубками и доверху заполнены водой. Трубки закрыты кранами K_1 и K_2 (рис. 12). Температура воды в сосудах поддерживается постоянной, причем $t_1^\circ > t_2^\circ > 4^\circ$ С. Что будет происходить с водой в сосудах, если сначала открыть кран K_2, а затем (при открытом кране K_2) открыть кран K_1?*

После открывания крана K_2 сосуды станут сообщающимися. Поэтому в них установятся такие уровни воды, при которых давления в нижних точках сосудов будут одинаковыми (иначе жидкость перетекала бы из одного сосуда в другой):

$$\rho_1gh_1 = \rho_2gh_2$$

(ρ_1, ρ_2 — плотности воды в сосудах с температурами соответственно t_1° и t_2°, h_1 и h_2 — соответствующие уровни воды).

Так как $t_1^\circ > t_2^\circ > 4^\circ$ С, то $\rho_1 < \rho_2$. Это означает, что $h_1 > h_2$, то есть вода перетечет из правого сосуда в левый и часть ее выльется.

Что будет происходить с водой при открывании крана K_1, зависит от соотношения между давлениями воды в сосудах на уровне трубки. А так как давление линейно связано с высотой уровня и $h_1 > h_2$, то на любом уровне $0 < h < h_1$ давление в левом сосуде больше, чем в правом (рис. 13). Следовательно, $p_1(h_0) > p_2(h_0)$. Поэтому, когда мы откроем кран K_1, вода начнет перетекать по верхней трубке из левого сосуда в правый. При этом давление внизу в правом сосуде будет увеличиваться, а в левом — уменьшаться. Благодаря этому в нижней трубке появится поток воды из правого сосуда в левый.

Эта задача имеет прямое отношение к технике. Батареи водяного отопления подсоединяют к одной трубе, и тем не менее вода циркулирует по такой батарее, а не просто течет по трубе, не заходя в батарею.

И. Ш. Слободецкий

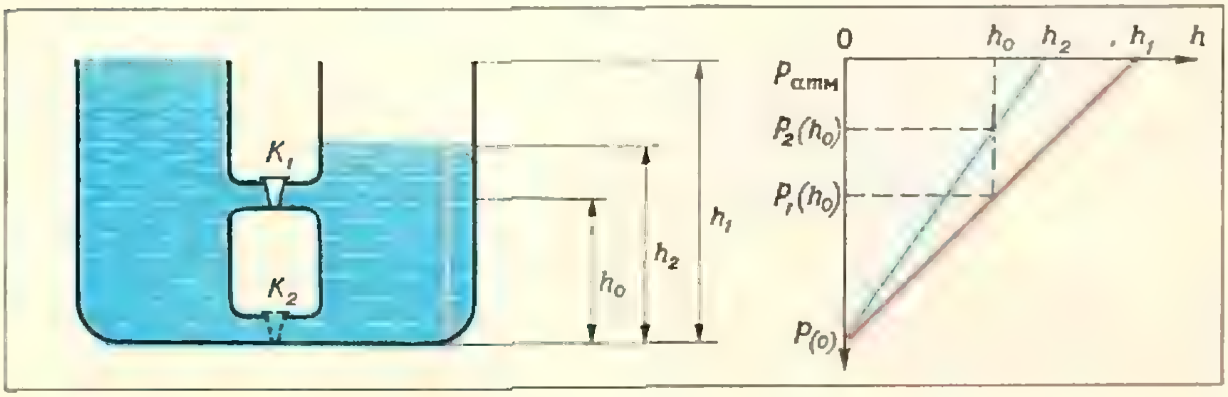


Рис. 13.

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф203—Ф210**, успешно справились с задачами **Ф203**, **Ф204**, **Ф207**, **Ф210**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *С. Актершев* (Магнитогорск) **8**; *Д. Алексеев* (Москва) **6**; *С. Алехин* (Липецк) **9**; *П. Анциферов* (Фатеж Курской обл.) **9**; *Р. Басыров* (Н. Каракитяны ТАССР) **9**; *В. Бенхан* (Калинин) **7**; *М. Берман* (Капустин Яр Астраханской обл.) **3**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **5**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **8**; *П. Бухаринов* (Березники Пермской обл.) **8**; *М. Валюнин* (Баку) **8, 9**; *О. Василенко* (Изюм Харьковской обл.) **5**; *М. Васнецов* (Киев) **9**; *Ю. Визгин* (Ленинград) **9**; *А. Герман* (Воронеж) **9**; *С. Гончаров* (Никополь Днепропетровской обл.) **8**; *А. Гуревич* (Минск) **9**; *В. Дунцов* (Душанбе) **9**; *В. Дяченко* (Гадяч Полтавской обл.) **5**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **5**; *А. Калошин* (Москва) **9**; *М. Кангиев* (Самарканд) **6**; *С. Карпенко* (Киев) **8, 9**; *Д. Карпов* (Павлоград) **8**; *М. Качановский* (д. Вишевичи Брестской обл.) **6, 9**; *Л. Коган* (Черновцы) **8**; *С. Корнилов* (Грозный) **8, 9**; *В. Корошков* (Калининград Московской обл.) **8**; *Л. Кофман* (Таллин) **9**; *Г. Коява* (Цхинвали) **7**; *А. Креницкий* (Энгельс) **8**; *А. Куцман* (Черновцы) **8**; *И. Куцык* (Ярославль) **6, 9**; *А. Лодман* (Ташкент) **6**; *В. Лысенко* (Сосновки Львовской обл.) **6**; *А. Малаков* (Нижний Тагил) **9**; *А. Мальцев* (Свердловск) **9**; *В. Малюский* (Краматорск Донецкой обл.) **6**; *Г. Мамедов* (Баку) **8**; *В. Маранов* (Раменское Московской обл.) **6**; *О. Марьин* (Пермь) **9**; *Н. Миронов* (Выксы Горьковской обл.) **9**; *А. Муринец* (Магнитогорск) **8**; *А. Николаев* (Москва) **5, 8**; *Р. Оспанов* (Байрат-Али Туркм. ССР) **8**; *С. Пак* (Ташкент) **8**; *А. Паровичников* (Обнинск) **8**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **5**; *А. Поблагуев* (Винница) **6**; *А. Полянский* (Челябинск) **8**; *Н. Попов* (Ленинград) **9**; *В. Пшеничников* (с. Ключевка Оренбургской обл.) **9**; *А. Ремеев* (Ташкент) **6**; *В. Решетняк* (Киев) **8**; *Л. Рудицер* (Харьков) **5**; *М. Румянский* (Магнитогорск) **9**; *Е. Сандер* (Тармакла Омской обл.) **9**; *А. Саттаров* (В. Чукаено ТАССР) **8**; *А. Сергеев* (Подольск Московской обл.) **9**; *Я. Симкин* (Москва) **8**; *А. Синьсовский* (Душанбе) **9**; *Р. Сирота* (Харьков) **8**; *В. Скрипкин* (Мантурово Костромской обл.) **5**; *Ю. Смоленцов* (Ессентуки) **9**; *В. Спиридонов* (ст. Маршиновка Николаевской обл.) **8**; *В. Суслопаров* (Кунгур Пермской обл.) **6**; *Ч. Тарисердиев* (Сиазан Аз. ССР) **6**; *Н. Федин* (Омск), **5, 8**; *Е. Федоров* (Магнитогорск) **8**; *Н. Филимонов* (Лида Гродненской обл.) **8**; *Д. Фушман* (Черновцы) **9**; *В. Хацыловский* (Красноярск) **6**; *М. Хорошин* (Чернигов) **8**; *В. Чернышов* (Пензенская обл.) **9**; *В. Чернобай* (Долинск Сахалинской обл.) **9**; *С. Шевчук* (Староконстантинов Хмельницкой обл.) **9**; *Е. Шафирович* (Ногинск Московской обл.) **8**; *А. Яблонский* (Волгоград) **8, 9**.

Р. Г. Минц

Раскраска плоскости

Есть задачи, которые легко формулируются, но оказываются настолько трудными, что их решение становится в математике событием. И не только из-за сложности этих задач, а скорее из-за их огромного значения для развития целых отраслей математики. К задачам такого типа относятся несколько проблем, связанных с раскрашиванием плоскости. Вот одна из таких задач.

Раскрасить плоскость минимальным количеством различных красок так, чтобы концы любого отрезка длины 1 были окрашены в разные цвета.

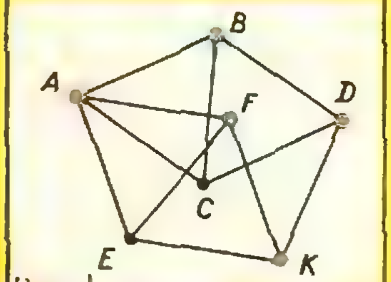


Рис. 1.

Эта задача была впервые поставлена более 20 лет назад, но до сих пор еще полностью не решена. За это время удалось доказать, что для решения задачи трех различных цветов не хватит. Это легко увидеть из рисунка 1. Каждый отрезок на нем имеет длину 1. Теперь представьте себе, что этот чертеж помещен на плоскости, раскрашенной необходимым образом только тремя цветами. Если точка A окрашена, скажем, в красный цвет, то точки B и C должны быть окрашены в другие цвета, и тогда D снова должна быть красной. Точно так же F и E должны быть окрашены в разные цвета, отличные от красного, и K — обязательно красная.

(Окончание см. с. 45)

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ПОИСК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Я.И.Груденов

Для отыскания решения многих задач применяют метод попеременного движения с двух сторон — от данных задачи к искомому и обратно. Сначала стараются получить ряд следствий из данных, а затем — такие утверждения, из которых следовало бы искомое, далее опять возвращаются к данным и так далее.

Вообще говоря, из данных задачи можно получить много следствий, не имеющих никакого отношения к ее решению. Однако чаще всего мы подсознательно останавливаемся именно на тех из них, которые можно связать с искомым, так как наше внимание только что фиксировалось на нем или на утверждениях, из которых оно следует. То же самое происходит при движении от искомого к данным.

Попеременное движение с двух сторон целесообразно осуществлять до тех пор, пока не возникнет идея решения (одна или несколько). Иногда кажется, что она появляется неожиданно. На самом деле она является результатом кропотливой работы по сближению искомого с данными. Это наглядно можно проследить по схеме (рис. 1), на которой путь решения проходит через утверждения 1, 2, 3 и 4.

Рассмотрим пример.

Задача 1. *Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.*

Изучаем условие. Выполняем чертеж (рис. 2), некоторые углы обозначаем цифрами. Выделяем данные ($\angle ABC = 90^\circ$, $BO \perp AC$, $AM = MC$, $\angle ABK = \angle KBC$) и искомое (доказать, что $\angle 2 = \angle 3$). Заодно проверяем, что расположение элементов на рисунке 2 — единственно возможное (биссектриса лежит между медианой и высотой); это легко доказывается с использованием середины дуги AC описанной около ΔABC окружности.

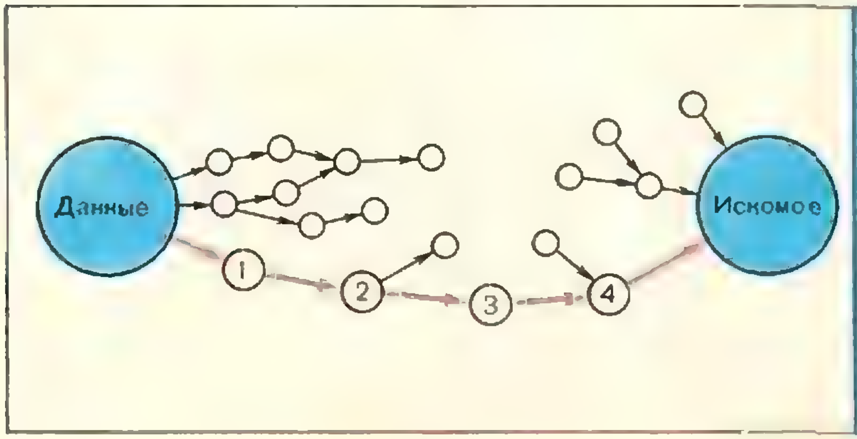


Рис. 1.

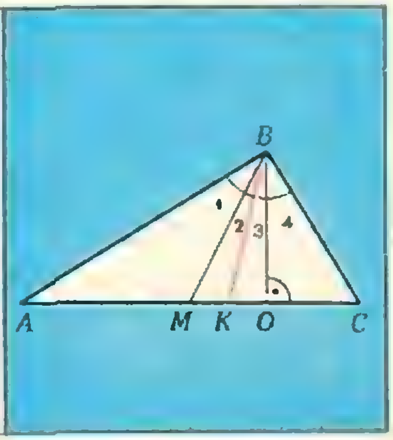


Рис. 2.

Отправляемся от искомого. Так как $\measuredangle ABK = \measuredangle KBC$, то для доказательства равенства $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$ достаточно доказать, что $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$. Для этого можно сравнить по величине $\measuredangle 1$ и $\measuredangle 4$ с другими углами. Посмотрим, не равны ли $\measuredangle A$ и $\measuredangle 1$. Это возможно, если $AM = MB$.

Получаем следствия из данных. Так как MB — медиана, проведенная к гипотенузе в прямоугольном треугольнике ABC, то $MB = {}^1/_2 AC$, то есть $MB = AM$, а значит $\measuredangle A = \measuredangle 1$.

Возвращаемся к доказываемому соотношению. Так как $\measuredangle A = \measuredangle 1$, то можно доказывать равенство $\angle A = \angle 4$.

Возвращаемся к данным. Так как $BO \perp AC$ и $BC \perp AB$, то $\measuredangle A = \measuredangle 4$, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Отсюда $\measuredangle 1 = \measuredangle 4$, а значит, $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$.

Если решить задачу попеременным движением с двух сторон не удается, можно обратиться к другим методам. Например, решить задачу в частном случае. Вспомнить, не встречалась ли аналогичная задача, нельзя ли данную задачу свести к уже известной, к более простой задаче, не облегчается ли поиск решения, если учитывать только часть данных.

Задача 2. *Вычислить*

$$M = \sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{200} - \underbrace{88\ldots8}_{100}}.$$

Изучаем условие. а) Надо извлечь корень квадратный из разности двух чисел; б) каждое из чисел содержит одинаковые цифры; в) уменьшаемое состоит из четверок, вычитаемое — из восьмерок; г) уменьшаемое содержит 200 цифр, вычитаемое — 100; д) в уменьшаемом цифр вдвое больше.

Вычислить эту разность не представляется возможным. Попробуем разложить ее на множители. Для этого рассмотрим сначала частный пример, составив его так, чтобы выполнялась только часть данных: (а), (б), (в), (д) (кроме (г)).

1) $4444 - 88 = 4 \cdot 1111 - 8 \cdot 11 = 4 \cdot (1111 - 2 \cdot 11) = 4 \cdot (1100 + 11 - 11 - 11) = 4\,(11 \cdot 100 - 11) = 4 \cdot 11 \cdot (100-1) = 4 \cdot 11 \cdot 99 = 4 \cdot (11)^2 \cdot 9.$

2) $4444 - 88 = (4400 + 44) - (44 + 44) = 44 \cdot 100 - 44 = 44\,(100 - 1) = 44 \cdot 99 = 4 \cdot (11)^2 \cdot 9.$

Любой из этих способов можно применить к решению данной задачи; выбираем второй:

$$M = \sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{100}\cdot 10^{100} - \underbrace{44\ldots4}_{100}} = \sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{100}\cdot(10^{100}-1)} = \sqrt{4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{100}\cdot 9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{100}} = \underbrace{66\ldots6}_{100}.$$

При решении планиметрических задач полезно иногда выполнить чертеж не от руки, а более точно, с помощью инструментов. Рассматривая его, можно избавиться от некоторых заблуждений, найти истинные соотношения между элементами фигуры. Разумеется, полученные таким путем выводы обязательно обосновываются.

Задача 3 (софизм, то есть рассуждение, в котором преднамеренно допускают ошибку, которую надо найти). *Пусть в четырехугольнике $ABCK$ (рис. 3) $\measuredangle K = 90^\circ$, $\measuredangle C > 90^\circ$ и $BC = AK$. Через середины сторон AB и CK проведем перпендикуляры к ним. Точку их пересечения O соединим со всеми вершинами четырехугольника. Из попарно равных прямоугольных треугольников KOM и MOC, AOP и BOP имеем:*

$$OK = OC,\ OA = OB;$$
$$\measuredangle OKM = \measuredangle OCM. \quad (1)$$

Так как $AK = BC$, $OA = OB$ и $OK = OC$, то $\Delta AOK = \Delta OBC$. Отсюда

$$\measuredangle AKO = \measuredangle BCO. \quad (2)$$

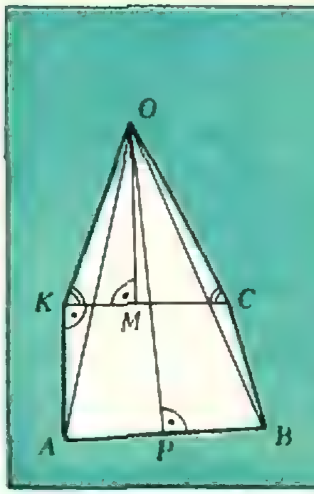


Рис. 3.

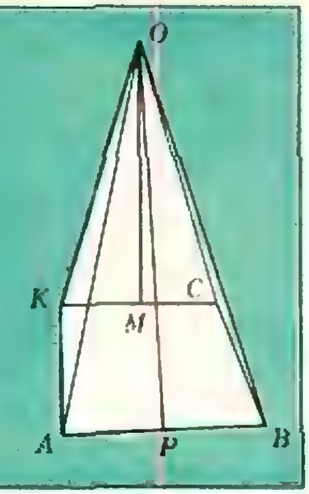


Рис. 4.

Вычитая почленно из равенства (2) *равенство* (1), *получаем* $\measuredangle AKM = \measuredangle BCM$, *то есть прямой угол равен тупому.*

Здесь сразу бросается в глаза, что в рассуждении используется чертеж: считается, что точка O находится вне четырехугольника. Но она может находиться и на стороне KC или внутри четырехугольника. Проверяем эти случаи и приходим к тому же абсурдному выводу.

Выполняем тогда чертеж с помощью инструментов возможно точнее (рис. 4). Из чертежа видно, что точки O и K расположены по разные стороны от прямой BC. Убедитесь, что в этом случае рассуждения не приводят к нелепости, и методом от противного докажите, что это — единственно возможное расположение элементов, соответствующих данным задачи.

При поиске решения обычно сначала обнаруживается далеко не самый короткий путь. Поэтому полезно проверить, нельзя ли сократить рассуждение, упростить или совсем опустить отдельные промежуточные преобразования.

Закончив всю эту работу, целесообразно отметить те моменты, которые больше всего затрудняли поиск решения, постараться запомнить установленные в процессе решения и ранее неизвестные или забытые теоремы. Такая работа сказывается при решении следующих задач, когда эти теоремы возникают в сознании именно в нужный момент.

Рассмотренные рекомендации собраны ниже в таблицу. Указания, помещенные в ней, не надо заучивать. Достаточно в процессе решения нескольких задач выборочно их читать и выполнять.

Применим этот метод к решению следующих задач.

Задача 4. *В квадрате $ABCT$ из точки T, как из центра, радиусом, равным стороне, проведена дуга окружности AC. На AT, как на диаметре, внутри квадрата построена полуокружность. P — точка дуги AC; прямая PT пересекает полуокружность AT в точке K. Доказать, что длина отрезка PK равна расстоянию от точки P до стороны AB.*

Указание 1. Выполняем чертеж в соответствии с условием задачи и проводим $PE \perp AB$ (рис. 5). Надо доказать, что $PE = PK$.

Указание 2 а. Проведем отрезки AP и AK. Надо доказать, что $\triangle APE = \triangle APK$.

Указание 2 б. Вписанный $\measuredangle AKT$ опирается на диаметр и $PE \perp AB$, поэтому треугольники APE и APK — прямоугольные с общей гипотенузой AP.

Указание 2 а. Остается доказать, например, равенство $\alpha = \beta$.

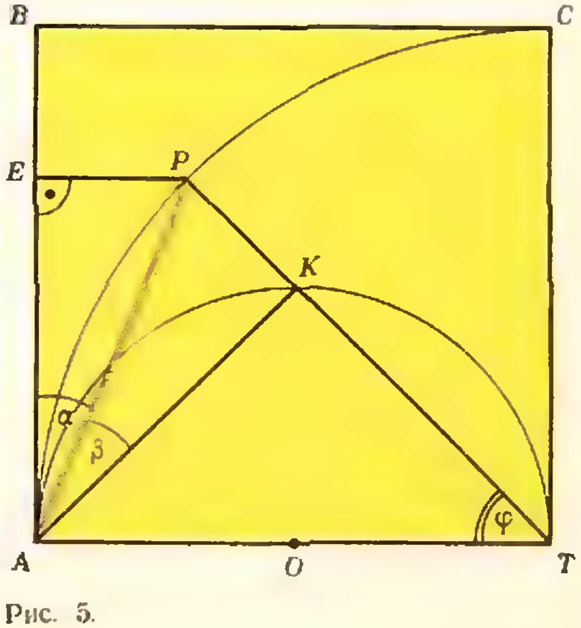


Рис. 5.

Таблица

Указания	Дополнительные указания
1. Ознакомиться с задачей.	а) Выполнить чертеж, рисунок. Проанализировать все возможные расположения фигур. б) Выделить данные и искомое. в) Вспомнить признаки и свойства понятий.
2. Попеременно двигаясь от искомого к данным и от данных к искомому, искать связь между ними.	а) Искомое заменить такими утверждениями, из которых оно следует. б) Получать следствия из данных. в) Использовать все данные.
3. В случае затруднений обращаться к дополнительным указаниям: 3а, 3б, 3в и т. д.	а) Вспомнить задачу, аналогичную данной. Воспользоваться способом ее решения. б) Изменить условие задачи (временно учитывать только часть данных, заменить искомое и т. д.). в) Решить задачу в частном случае. г) Выполнить с помощью инструментов более точный чертеж, составить модель. Наблюдением выявить свойства фигур. Обосновать полученные выводы.
4. Изложить найденное решение, обосновывая каждый его шаг. Завершить работу над задачей.	а) Попытаться сократить рассуждения или найти другой, более простой способ решения. б) Сделать проверку. в) Запомнить те использованные при решении теоремы, которые были ранее неизвестны или забыты.

Рассмотрим для этого $\measuredangle ATK = \varphi$.

Указание 2б. $AB \perp AT$ и центры обоих окружностей лежат на AT, поэтому AB — касательная к обоим окружностям в точке A. $\measuredangle EAP = \alpha$ образован касательной AB и хордой AP, на дугу AP опирается центральный угол φ, следовательно, $2\alpha = \varphi$.

Для полуокружности AKT: $\measuredangle ATK = \varphi$ и $\angle EAK = \alpha + \beta$. Они также измеряются (каждый) $\frac{1}{2} \smile AK$ (объясните почему). Поэтому $\alpha + \beta = \varphi$, откуда $\alpha + \beta = 2\alpha$, то есть $\beta = \alpha$. Отсюда $\Delta APE = \Delta APK$ и $PE = PK$.

Задача 5. *Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.*

Указание 1. Пусть ABC — данный треугольник, AE, BM и CK — его медианы, S — площадь (рис. 6). Построим треугольник KPC, одной из сторон которого будет медиана KC, а две другие — равны медианам BM и AE. Надо найти, следовательно, площадь треугольника KPC (и выяснить, когда такой треугольник существует).

Указание 1а. Из чертежа замечаем, что $KP \parallel BM$, $CP \parallel AE$, EP проходит через точку M и $EP \parallel AB$. Если это так, то решение должно упроститься.

Указание 2б. Проводим прямую EM и откладываем $MP = EM$, тогда $EM = BK$ и $EM \parallel BK$, поэтому $BK = MP$ и $BK \parallel MP$, $BKPM$ — параллелограмм! Аналогично рассматривается CP. Половина дела сделана — ΔKCP построен.

Указание 2а. $S_{\Delta KPC}$ можно найти, если знать площадь меньшего, но подобного ему треугольника, скажем $\triangle KOT$. Во сколько раз он меньше $\triangle KPC$?

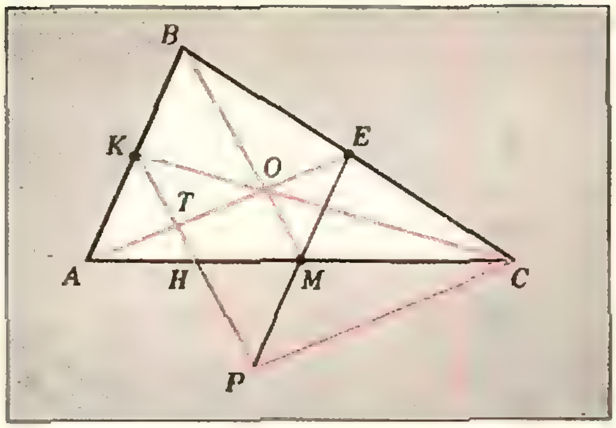


Рис. 6.

Указание 2б. $KO=\frac{1}{3}KC$, поэтому $S_{\Delta KPC}=9S_{\Delta KOT}$.

Указание 2а. $OT=TA=OE$, поэтому $S_{\Delta KOT}=\frac{1}{2}S_{\Delta AKO}$, $S_{\Delta AKO}=\frac{1}{2}S_{\Delta AOB}$, $CK=3\cdot OK$, поэтому $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{3}S$. Окончательно,

$$S_{\Delta KCP}=9S_{\Delta KOT}=\frac{9}{2}S_{\Delta AKO}=$$

$$=\frac{9}{4}S_{\Delta AOB}=\frac{3}{4}S.$$

Задача 6. *Доказать, что* $\frac{R}{r}\geqslant\sqrt{2}+1$, *где* R *— радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды,* r *— радиус шара, вписанного в эту пирамиду.*

Указание 1. Пусть $PABCD$ — правильная пирамида, PO — ее высота (рис. 7). Тогда центр T вписанного в пирамиду шара лежит на ее высоте, а центр M описанного около нее шара — на высоте или на ее продолжении.

Указание 2а. Чтобы при доказательстве неравенства $\frac{R}{r}\geqslant\sqrt{2}+1$ использовать данные задачи, выразим R и r через элементы пирамиды. Это проще сделать, если один элемент будет линейный, второй — угол. Пусть $BC=a$, $\measuredangle PKO=\alpha$, где K — середина CB, $\measuredangle PCO=\beta$. Замечаем, что R и r легче выразить через a и α, чем через a и β.

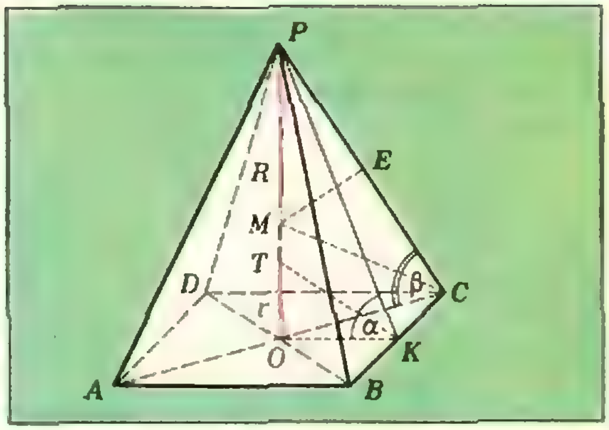


Рис. 7.

Указание 2б. T — центр шара, вписанного в правильную пирамиду, а $\measuredangle PKO$ — линейный угол двугранного угла BC, поэтому TK — биссектриса угла OKP и

$$r=OT=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Указание 2а. Чтобы найти $R=MP=MC=MB=\ldots$, можно провести $ME\perp PC$ и рассмотреть подобные треугольники PME и POC. А для этого надо найти PC, OP и

$$PE=\frac{1}{2}CP.$$

Указание 2б. $OC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OP=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому из ΔOPC получим $PC=\frac{a}{2}\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Тогда

$$PE=\frac{a}{4}\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Из подобия треугольников OPC и MPE имеем: $\frac{PM}{PE}=\frac{PC}{OP}$, $PM=\frac{PE\cdot PC}{PO}$. Подставляя значения PE, PC и PO, получаем

$$R=PM=\frac{(2+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot a}{4\operatorname{tg}\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{R}{r}=\frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Указание 2а. Исходное неравенство содержало два параметра: R и r. Использовав данные задачи, мы заменили его неравенством

$$\frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\geqslant\sqrt{2}+1,$$

в котором можно перейти к $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, то есть к одному только параметру, а значит, его легче будет доказать.

Указание 2б. Преобразовав левую часть последнего неравенства, получаем

$$\frac{1+\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}\geqslant\sqrt{2}+1.$$

Обозначаем $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=x$, доказываемое неравенство принимает вид

$$\frac{1+x^2}{2x(1-x)}\geqslant\sqrt{2}+1.$$

Указание 2а. Для доказательства неравенства достаточно показать, что

$$A=\frac{1+x^2}{2x(1-x)}-(\sqrt{2}+1)\geqslant 0.$$

Указание 2б.

$$A=\frac{1+x^2-2x\sqrt{2}-2x+2\sqrt{2}x^2+2x^2}{2(1-x)x}=$$

$$=\frac{(3+2\sqrt{2})x^2-2(1+\sqrt{2})x+1}{2x(1-x)}.$$

Дискриминант квадратного трехчлена в числителе равен нулю (проверьте) и $3+2\sqrt{2}>0$. Следовательно, трехчлен неотрицателен.

Указание 2а. Если удастся показать, что знаменатель дроби $2x\times(1-x)$ положителен, то задача будет решена.

Указание 2б. $x=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, но $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$, откуда $0<\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}<1$, то есть $0<x<1$, $1-x>0$. Значит, $A\geqslant 0$ и неравенство $\frac{R}{r}\geqslant\sqrt{2}+1$ доказано.

Упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина AD, $BC=2AB$, E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на AB. Доказать, что $\angle EMD=3\angle AEM$.

2. Около треугольника ABC описана окружность. Доказать, что угол между диаметром этой окружности CM и высотой треугольника CK равен $|\angle A-\angle B|$.

3. Доказать, что $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ является целым числом при любом четном n.

4. Стороны параллелограмма равны a и b. Вычислить диагонали четырехугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов этого параллелограмма.

5. Построить треугольник ABC по стороне b, радиусу R описанной окружности и медиане m_c.

6. Две грани треугольной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB. Двугранный угол при AB равен α. Найти двугранный угол, у которого ребро есть катет.

7. Найти объем пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной a, если двугранные углы между плоскостью основания и боковыми гранями равны α, β, γ.

8. Найти все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$, делящиеся на 36.

9. Доказать, что $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{243}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $3a^2-2b^2=1$.

Телевидение готовит в вуз

Физика

На телезанятиях отделения физики в декабре рассматриваются темы: «Жидкости и газы» и «Газовые законы». Читателям журнала предлагается несколько задач по этим темам.

1. В цилиндрическом сосуде диаметра $d = 30$ *см*, заполненном водой, плавает кусок льда со свинцовой пластинкой массы $m = 3$ *кг*. Определить, насколько изменится уровень воды в сосуде после таяния льда.

2. В сообщающиеся сосуды с внутренними диаметрами $d_1 = 4$ *см* и $d_2 = 6$ *см* налита вода до высоты $H = 30$ *см*. Определить давление на высоте $h = 5$ *см* после того, как в сосуд с меньшим диаметром долили $V = 130$ *см*^{3} масла, плотность которого $\rho = 800$ *кг/м*^{3}.

3. В баллоне объемом $V_1 = 400$ *см*^{3} под давлением $p_1 = 380$ *мм рт. ст.* находится водород. В другом баллоне объемом $V_2 = 500$ *см*^{3} находится кислород под давлением $p_2 = 800$ *мм рт. ст.* Температура в обоих баллонах 22° С. Баллоны соединили. После того, как газ перемешали и образовавшаяся гремучая смесь была взорвана с помощью электрической искры, в баллонах установилась первоначальная температура. Каково давление в баллонах?

Математика

На отделении математики в декабре изучается планиметрия. Для самостоятельного решения читателям предлагаются следующие задачи.

1. Длины сторон параллелограмма равны a и $3a$; острый угол между диагоналями равен β. Найти площадь параллелограмма.

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 30°$, $AB = 4$ *см*, $BC = 6$ *см*. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

3. В треугольнике ABC $AB = BC$, O — точка пересечения высот. Найти угол при вершине B, если $OB = AC$.

4. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно a, угол при основании равен α. Найти длину отрезка прямой, проходящей через вершину A и центр O описанной окружности, заключенного между точкой A и прямой, проходящей через точки B и C.

А. Н. Борзяк,
В. И. Давыдов,
П. Т. Дыбов,
И. И. Наслузов

Раскраска плоскости

(Окончание. Начало см. с. 38)

В таком случае точки D и K, расстояние между которыми равно 1, обе окрашены в красный цвет. Таким образом, данный чертеж доказывает, что раскрашивать плоскость нужно, по крайней мере, четырьмя различными цветами. Но как это сделать? Вот семью красками плоскость можно раскрасить так, чтобы наше условие выполнялось. Доказательство приведено на рисунке 2. Посмотрите на него внимательно. Вы видите часть плоскости, заполненную правильными шестиугольниками.

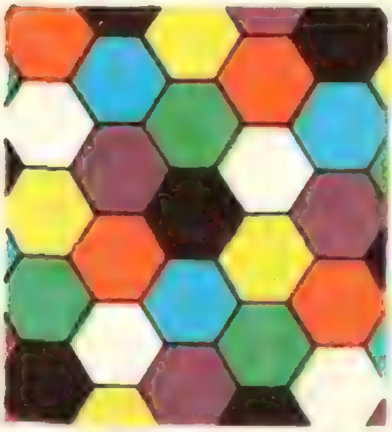


Рис. 2

Каждый из них окрашен определенным цветом, а расстояние между противоположными вершинами шестиугольника чуть меньше 1. Подобным образом (повторяя цвета) легко раскрасить всю плоскость. Вы сами можете убедиться, что на такой плоскости любые две точки, расстояние между которыми равно 1, будут находиться в разноцветных шестиугольниках, расположенных рядом. Ну, а раскрасить подобным образом плоскость четырьмя, пятью или шестью цветами или доказать, что этого сделать нельзя, пока никто не умеет.

Может быть, вы попробуете?

ПОЛИГОН ЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Л. Новикова В. Стрельцов

В мае 1973 года состоялась юбилейная сессия Малой Академии Наук школьников Крыма («Искатель»), которой в этом году исполнилось 10 лет.

МАН — первое в нашей стране крупное объединение учащихся, увлекающихся наукой и техникой, учащихся, стремящихся углубить знания, получаемые в школе. В МАН работают не только секции математики, физики, химии, астрономии и биологии, соответствующие школьным учебным дисциплинам, но и археологическая, инженерно-техническая секция, секции журналистики, кибернетики и другие. Занятия в них проводят сотрудники шефствующих над МАН научно-исследовательских институтов АН УССР и различных вузов.

Наиболее активные участники астрономических и археологических экспедиций, победители олимпиад по математике, физике, химии, биологии, географии и кибернетике (в МАН уже проведены четыре областные олимпиады по кибернетике) избираются кандидатами и действительными членами МАН. Почетные звания следует систематически поддерживать творческими взносами — ими обычно являются результаты наблюдений над животными, рефераты по истории, новое, самостоятельно сконструированное устройство или успех на олимпиаде.

Мысль, дерзание, творчество и труд — тебе, любимая родина; эти слова являются девизом МАН, под этим девизом она получила аттестат зрелости и продолжает свою жизнь.

Чтобы подробнее ознакомиться с МАН, лучше всего изучить Устав «Искателя», который каждый может получить, написав письмо по адресу: *Симферополь, п/я 52, МАН «Искатель».*

Наиболее интересные работы юных исследователей из «Искателя» нередко публикуются в различных журналах. Так, в прошлом году на страницах «Кванта» была помещена статья «Машина Поста», написанная школьницами из Бахчисарая, членами секции кибернетики МАН («Квант», 1972, № 5).

Читателям предлагается описание еще одного оригинального учебного пособия, разработанного членами МАН.

Во многих наших школах учащиеся знакомятся с элементами математической логики. Чаще всего применение математической логики для школьников иллюстрируется использованием ее для решения логических задач. О том, как это делается, подробно рассказывалось в статье Л. Л. Цинмана «Логические задачи и алгебра высказываний» («Квант», 1971, № 4).

Однако не менее интересно применять математическую логику при конструировании простейших логических устройств.

В нашей школе юных кибернетиков мы уже много лет пользуемся для этого специальным наглядным пособием — «Полигоном логических структур». О том, как устроен этот полигон и что с его помощью можно собрать, рассказывается в этой статье.

Полигон состоит из логических элементов типа «И», «ИЛИ» и «НЕ», изготовленных на базе электромагнитных реле.

Условные обозначения этих элементов приведены на рисунке 1. Элемент «И» служит для получения значений *логического произведения*. На входы элемента (они обозначены буквами A и B) подаются значения истинности каждого из двух сомножителей, а на выходе получается результат логического умножения.

Элемент «ИЛИ» служит для *логического суммирования* значений A и B. Элемент «НЕ» на своем выходе дает *отрицание* истинности значения A.

Полная характеристика работы этих элементов задается таблицами, которые совпадают с таблицами истинности логических операций «И», «ИЛИ» и «НЕ»

Электрические схемы элементов приведены на рисунке 2.

Нажатие любой из кнопок в любом из элементов вызывает подачу тока в обмотку

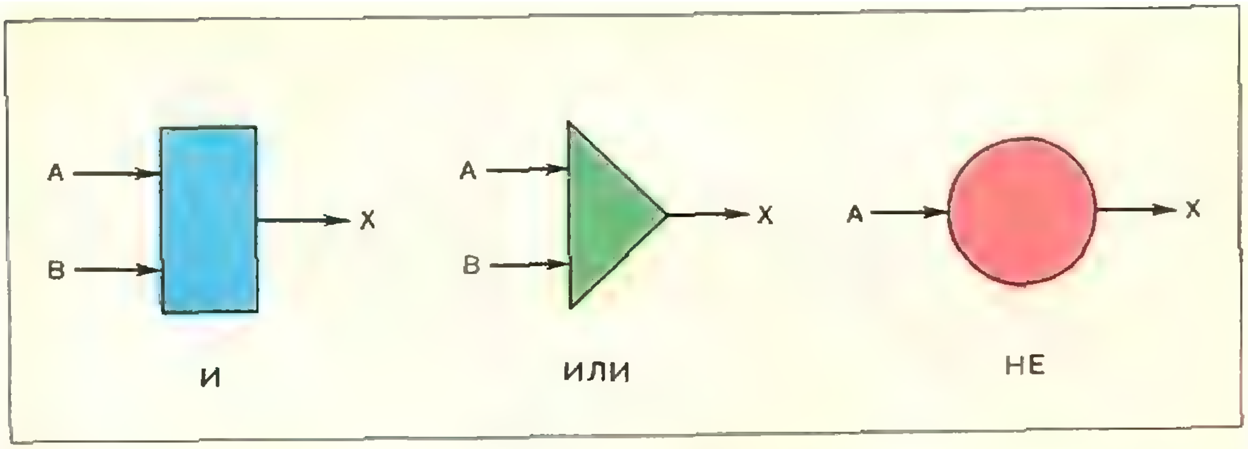


Рис. 1.

«И»

A	B	$X = AB$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

«ИЛИ»

A	B	$X = A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

«НЕ»

A	$X = \overline{A}$
1	0
0	1

реле, и соответствующие контакты замыкаются (в элементе «НЕ» контакты в этом случае размыкаются).

Если вы нажмете кнопку, то на вход будет подан сигнал «1» (положительный потенциал), и до тех пор, пока кнопка остается нажатой, этот сигнал на входе элемента удерживается. Если кнопка не нажата, то это означает, что на вход элемента подан сигнал «0». Появление положительного потенциала от источника тока на выходе любого из элементов означает, что на выходе имеется сигнал «1», в противном случае — сигнал «0».

Важное замечание. Выход любого из элементов можно соединять со входом любого другого, образуя цепочки или структуры элементов. Такие структуры часто называются *комбинационными схемами*.

Примером может служить комбинационная схема, изображенная на рисунке 3.

Читатель может убедиться в том, что значения сигналов, обнаруживаемые на выходе X, соответствуют значениям следующего высказывания X:

$$X = A\,(B + C).$$

В нашем полигоне соединение элементов друг с другом осуществлять очень легко, так

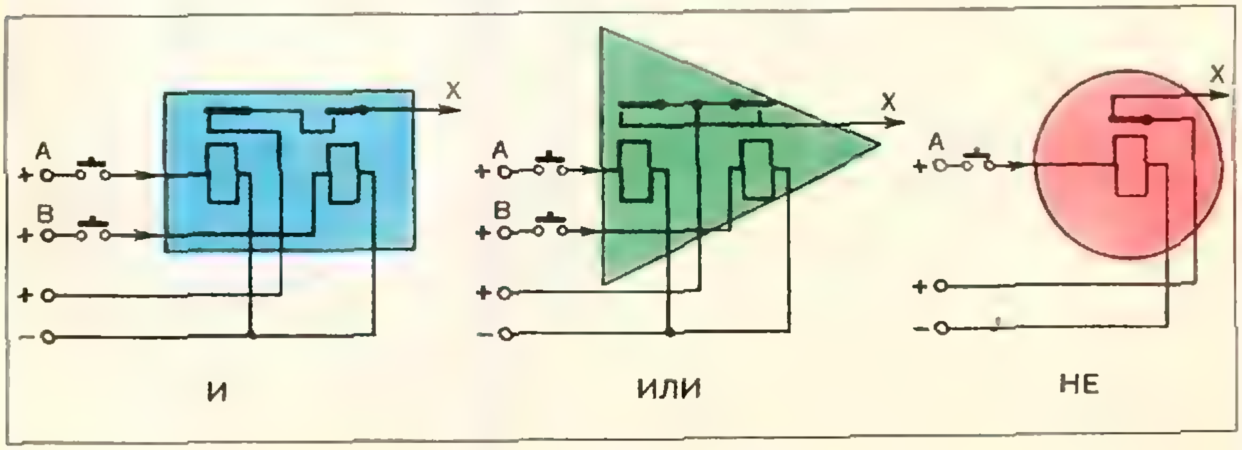


Рис. 2.

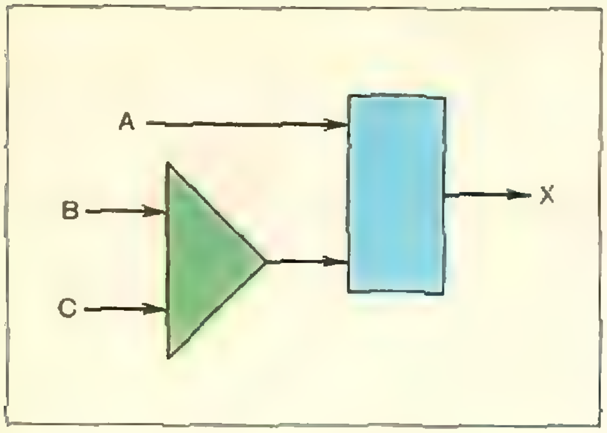


Рис. 3.

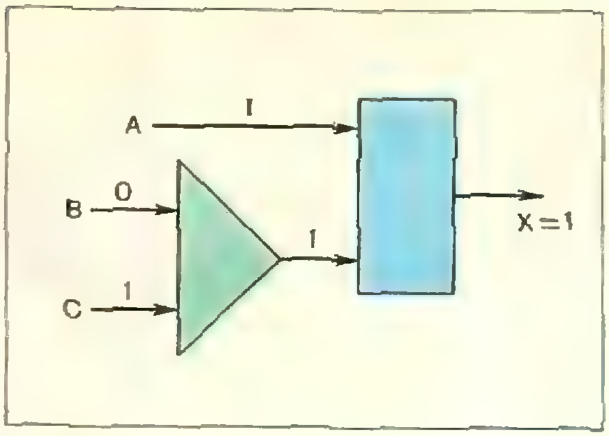


Рис. 4.

как входы и выходы каждого элемента выведены на лицевую панель в виде гнезд.

Соединение их друг с другом осуществляется с помощью шнуров с наконечниками.

Вот пример небольшой задачи, которую можно решить, используя полигон.

Задача. *Для проведения состязаний по поднятию тяжестей было задумано изготовить транспарант с текстом «ВЕС ВЗЯТ ПРАВИЛЬНО». Эта надпись должна подсвечиваться, если трое спортивных судей А (он является старшим судьей), В и С придут к выводу, что вес взят правильно. Свое решение они сообщают, нажав на кнопку (этим самым они посылают сигнал «1» в автомат, управляющий освещением транспаранта). Транспарант должен загораться еще в двух случаях, а именно, если двое судей (один из них обязательно старший) считают, что вес взят правильно. Всякое другое распределение мнений судей не должно вызывать подсвечивания транспаранта.*

Ясно, что автомат должен иметь три входа, на которые будут поступать сигналы от судей, и один выход, на котором будет вырабатываться сигнал на включение транспаранта.

Легко получить структурную формулу автомата:

$$X = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C}. \qquad (1)$$

Действительно, транспарант должен быть включен, если все трое судей или двое из них (и обязательно один из двоих — старший) пошлют сигнал «1».

Воспользуемся сведениями из уже упоминавшейся нами статьи Л. Л. Цинмана и преобразуем формулу (1):

$$X = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C} = AB + AC = A(B + C).$$

По этой формуле следует строить функциональную схему автомата. Получится схема, приведенная на рисунке 3.

Убедитесь в этом, рассмотрев все варианты решений судей. Один из вариантов показан на рисунке 4.

Приведем несколько задач на конструирование схем на «Полигоне логических структур».

1. Как изменится схема автомата «Спортивный судья», сконструированного выше, если транспарант «вес взят правильно» должен подсвечиваться при согласии любых двух из трех работающих судей?

2. Вычертите функциональную схему из описанных логических элементов «И», «ИЛИ», «НЕ» автомата, который сумеет сложить два любых одноразрядных двоичных числа (такой автомат называют полусумматором).

3. Вычертите функциональную схему умножителя двух двухразрядных двоичных чисел.

4. Вычертите функциональную схему, с помощью которой можно проследить за справедливостью знаменитых в математической логике формул А. де Моргана:

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B},$$
$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}.$$

Наш читатель ученик восьмого класса Юра Соркин прислал нам изящное решение задачи **М167** (см. «Квант» № 6, 1973)

Легко видеть, что бесконечное множество чисел

$$a(1 + d)^m \qquad (*)$$

при $m = 1, 2, 3, \ldots$ имеет одни и те же простые множители в разложении каждого из них, и ясно также (воспользуйтесь биномом Ньютона), что все числа (*) являются членами заданной арифметической прогрессии с первым членом *a* и *разностью* *d*.

IV математическая олимпиада МЭСИ

Московский экономико-статистический институт в настоящее время занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов по машинной обработке информации и по применению математических методов в экономике. Вот почему математика играет для поступающих в МЭСИ особо важную роль. Последние три года вступительные экзамены по математике и физике принимает электронно-вычислительная машина «Минск-32». В этом году МЭСИ 4-й раз проводит математическую олимпиаду для школьников.

Олимпиада проводится в 2 тура: I тур — заочный и II — очный.

К участию во II очном туре, который будет проводится в МЭСИ, будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 25 января 1974 года (по штемпелю почты). Каждый участник олимпиады, допущенный ко II туру, будет извещен об этом. Чтобы ускорить получение ответа из института, приложите к письму конверт с написанным на нем своим адресом. Успехи в олимпиаде будут учтены при поступлении в наш институт.

Адрес МЭСИ: 119435, *Москва, Б. Саввинский пер.*, 14, *«Олимпиада-74»*.

Решения задач выполняйте на русском языке в ученической тетради. Проверка всех работ, представленных на олимпиаду, будет производиться ЭВМ. Поэтому просим в конце тетради поместить ответы к задачам, заполнив следующую таблицу

Номера задач	1	2	3	4	5
Ответы					

Задачи I тура

1. Найти остаток от деления числа $1973^5 - 1973$ на 1680.
2. Вычислить без таблиц

$$3\,\mathrm{ctg}^6 80 - 27\,\mathrm{ctg}^4 80^\circ + 33\,\mathrm{ctg}^2 80$$

3. Найти сумму действительных корней уравнения

$$x^4 - 8x^2 - 3200x = 159984.$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ проведена окружность с центром в середине стороны AD и касающаяся трех других сторон. Найти сторону AD, если $AB = 12$ *см*, $CD = 75$ *см*.
5. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 4,2 *см* и перпендикуляр на боковую грань, равный 3 *см*. Найти объем пирамиды.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

Математика на подготовительных отделениях вузов

С 1969 года при высших учебных заведениях в соответствии с Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР открыты подготовительные отделения для рабочей и сельской молодежи. Перед этими отделениями поставлена ответственная задача — обеспечить повышение уровня общеобразовательной подготовки молодых рабочих, колхозников, лиц, демобилизованных из рядов Советской Армии, создать у них прочный фундамент знаний для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Сегодня мы публикуем статью старшего преподавателя математики подготовительного отделения Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова В. В. Александрова.

Математика является одной из основных дисциплин, которые изучают слушатели почти всех подготовительных отделений. Ведь без прочного знания курса математики невозможно успешно учиться на естественных факультетах университетов, в технических вузах, в институтах экономического профиля.

Изучение математики на подготовительных отделениях существенно отличается от изучения математики в средней школе или на подготовительных курсах. Отличие это состоит прежде всего в том, что на подготовительном отделении происходит *очное* обучение лиц с *законченным* средним образованием, имеющих *перерыв* (и иногда — значительный) в учебе, в весьма *сжатые сроки*.

Поэтому обучение математике на подготовительных отделениях заключается в комплексном повторении школьного курса, в воспитании активных знаний и творческого усвоения навыков оперирования с математическими объектами. Основной упор делается на те вопросы, глубокое и полное понимание которых является особенно важным при изучении высшей математики.

Едва ли требуется доказывать, что слушателям подготовительного отделения необходим *специальный* учебник. Он должен содержать четко и компактно написанный (с учетом всех особенностей подготовительного отделения) теоретический курс элементарной математики, богато иллюстрированный решениями типичных и поучительных задач, а также достаточное число разнообразных упражнений.

Слушателей подготовительных отделений можно условно разделить на две категории: а) физико-математическая (подготовительные группы механико-математических, физических факультетов и факультетов вычислительной математики университетов, факультетов прикладной математики технических вузов и некоторые другие); б) техническая (подготовительные группы других естественных факультетов университетов, технических и экономических вузов и другие). Естественно, что для каждой из этих категорий подготовительных групп нужен свой учебник математики.

К сожалению, специальных учебников для подготовительных отделений все еще нет. Слушателям приходится пользоваться школьными учебниками по математике и некоторыми пособиями для поступающих в вузы.

Уместно назвать здесь те пособия по элементарной математике, которые наилучшим образом зарекомендовали себя и нашли широкое применение в практике преподавания на подготовительных отделениях:

а) для физико-математического профиля

— В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1971;

— Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. Избранные вопросы элементарной математики. М., «Наука», 1972;

б) для технического профиля

— В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, М. И. Сканави. Элементарная математика (повторительный курс). М., «Наука» (готовится издание 1974 года);

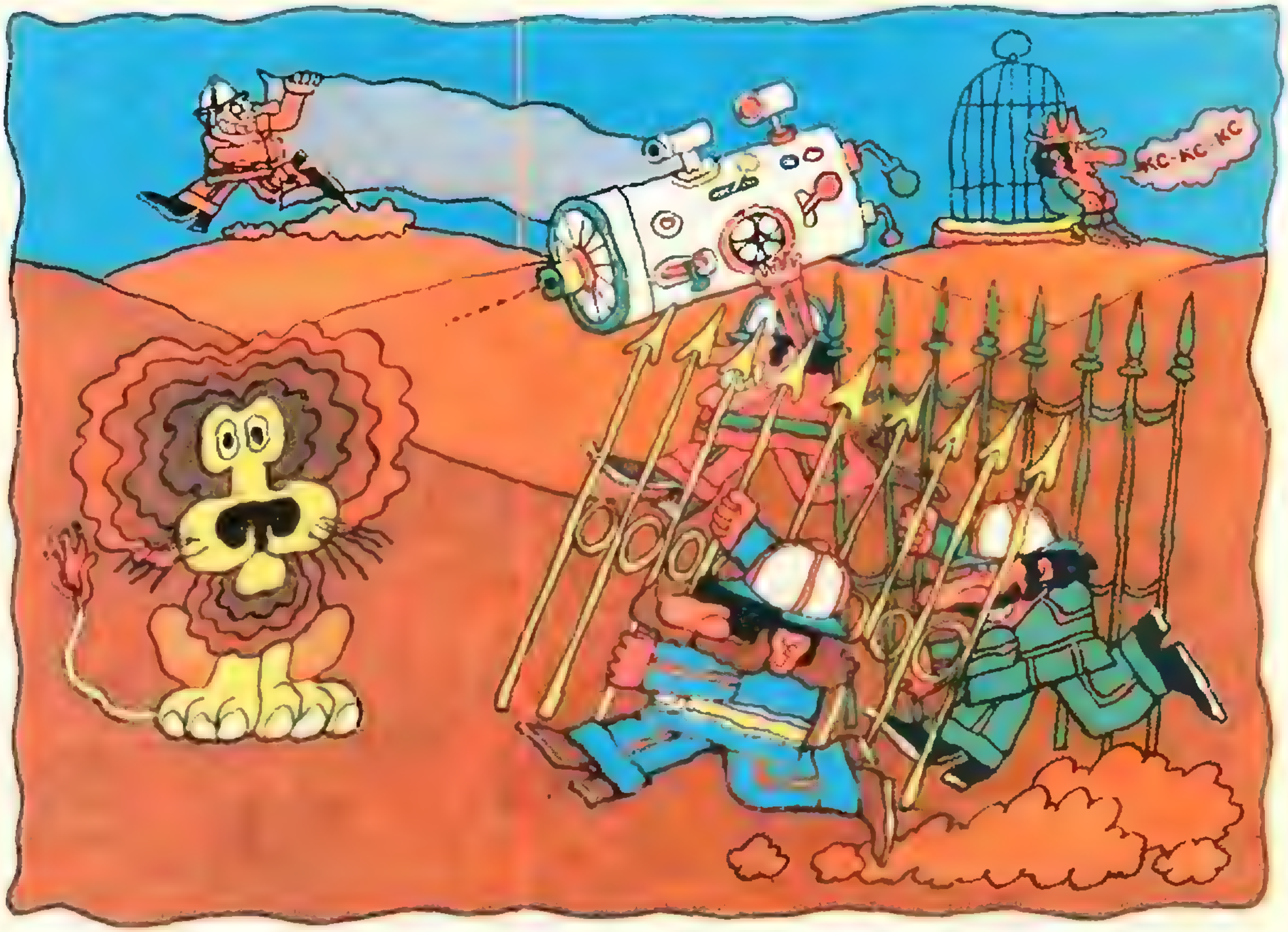
— М. И. Сканави и др. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы. М., «Высшая школа», 1972.

Использование этих книг как *учебных пособий* для слушателей подготовительных отделений оказывается очень полезным. Однако следует иметь в виду, что ни одна из названных книг не писалась специально как учебник для подготовительных отделений.

В настоящее время различными издательствами издано большое число пособий по элементарной математике и сборников конкурсных задач, адресованных поступающим в вузы, учащимся подготовительных отделений. Уже само по себе такое изобилие пособий едва ли необходимо, тем более, что многие из этих пособий не имеют «собственного лица», лишены оригинальности, повторяют без каких-либо новинок уже известное. Нередко пособия содержат материал, явно не соответствующий действующей «Программе вступительных экзаменов по математике».

Совершенно недопустимым является то, что некоторые из пособий грешат явными методическими промахами и большим количеством грубых ошибок по существу. Журнал «Квант» уже обращал внимание на подобные факты (см. № 11 за 1970 год, № 10 за 1971 год, № 6 за 1972 год).

В. В. Александров



К теории охоты

(Как поймать льва в пустыне)

1. Рассекаем пустыню линией, проходящей с севера на юг. Лев находится либо в восточной части пустыни, либо в западной. Предположим для определенности, что он находится в западной части. Рассекаем ее линией, идущей с запада на восток. Лев находится либо в северной части, либо в южной. Предположим для определенности, что он находится в южной части, рассекаем ее линией, идущей с севера на юг. Продолжаем этот процесс до бесконечности, воздвигая после каждого шага крепкую решетку вдоль разграничительной линии. Площадь последовательно получаемых областей стремится к нулю, так что лев в конце концов оказывается окруженным решеткой произвольно малого периметра.

2. Отмечаем, что дикие львы в пустыне Сахара являются величинами ненаблюдаемыми. Следовательно, все наблюдаемые львы в пустыне Сахара — ручные. Поимку ручного льва предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

3. В любом случае существует положительная, отличная от нуля вероятность, что лев сам окажется в клетке. Сидите и ждите.

4. Через пустыню натянем полупроницаемую мембрану, которая пропускает через себя все, кроме льва.

5. Облучим пустыню медленными нейтронами. Внутри льва будет наведена радиоактивность, и он начнет распадаться. Если подождать достаточно долго, лев не сможет оказать никакого сопротивления.

Наша почта

В нынешнем, 1973 году почта «Кванта» продолжала расти. Так, за первые 5 месяцев нынешнего года к нам пришло в 1,7 раза больше писем (4 тысячи), чем за такой же промежуток времени прошлого года.

Приятно отметить, что растет число писем, полученных от сельских школьников. Их общее число в три раза превышает количество писем, поступающих от московских школьников.

По-прежнему львиная доля писем (более 75% всей корреспонденции) приходится на «Задачник «Кванта». Почти все авторы поступающих к нам решений задач этого раздела — школьники (хотя есть и рабочие, желающие продолжить свое образование или просто узнать побольше о математике и физике; есть и студенты, которые увлеклись решением задач из «Задачника «Кванта», еще будучи школьниками, и остались преданными ему, инженеры и другие любители математики и физики), так что можно считать: задачи находят именно тех читателей, кому они адресованы. Уже своим активным и регулярным участием в работе журнала эти читатели нас информируют: задачи их привлекают, они могут использовать и используют «Квант» в качестве своеобразного самоучителя. Подтверждение тому мы находим и в письмах некоторых читателей и в ответах на анкету. Например, десятиклассник Михаил Ожигов со станции Поныри Курской области пишет нам, что регулярно решает задачи из «Задачника «Кванта», хотя решений и не присылает. Десятиклассник Андрей Софрин из Ленинграда пишет: «Задачи решаю почти систематически. Просматриваю по крайней мере все. Сопоставляю свое решение с приведенным». С ним солидаризуется десятиклассник Сергей Белолипецкий из г. Киржач Владимирской области.

Не все, конечно, сразу подбирают ключи к достаточно трудным и иногда сложным задачам из «Задачника «Кванта». Не сразу приходит уверенность в своих силах. Так, девятиклассники Андрей Погуляй из г. Уфы и Елена Калягина из г. Грозного пишут, что систематически решать задачи из этого раздела стали только в минувшем году. Не всем хватает времени, опыта или увлеченности, чтобы вникать в условия задач. Некоторые школьники «доросли» до них только к моменту, когда приходится отдавать все силы для успешного окончания средней школы и подготовке к поступлению в высшее учебное заведение. Но и среди тех читателей, кому задачи из «Задачника «Кванта» и сейчас кажутся слишком крепкими орешками, многие извлекают из них пользу, знакомясь с приводимыми в журнале решениями (об этом написал, например, десятиклассник Александр Буланович из поселка Косино Московской области). Некоторые читатели, главным образом, из числа тех, кто уже окончил среднюю школу, отдают явное предпочтение задачам по физике, как москвич Андрей Неволин, другие, как его земляк Михаил Жуков, — задачам по математике.

Помогает «Задачник «Кванта» и учителям в работе со школьниками. Об этом пишет, например, учительница математики Л. С. Котикова из г. Нелидово Калининской области. Учительница математики Н. А. Вохмянина из г. Котельнича Кировской области и учитель физики О. Т. Орловский из г. Красноярска пишут, что используют материалы «Задачника «Кванта» на факультативных занятиях.

Что привлекает читателей к задачам из «Задачника «Кванта»? Конечно, для школьника важную роль играет и перспектива участия в областной олимпиаде, на которое он получает право в случае успеха в конкурсе «Задачника «Кванта». Но главное в самих задачах и их особенностях. В «Задачнике «Кванта» помещаются, как правило, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах или задачи «олимпиадного типа». Процедура решения такой задачи требует обычно от школьника активного и изобретательного применения минимальных знаний об условии задачи. Чтобы найти решение, оказывающееся после того, как оно найдено, неожиданно простым, требуется иногда затратить значительное усилие. При этом читатели «Кванта» оказываются в значительно более выгодном положении, чем участники олимпиады, которым нужно справиться с заданием в предельно сжатые сроки. Читатель располагает бо́льшим временем на решение задач.

Задачи из «Задачника «Кванта» составляются в расчете на то, чтобы помочь читателям журнала воспитать в себе качества, которые необходимы для активной научной работы. К таким качествам принадлежат изобретательность, то есть сочетание дерзости в догадках и скромности в выводах, любовь к научным изысканиям и умение самостоятельно работать. Задачи обычно ставятся так, что они допускают несколько подходов к решению, что помогает проявиться индивидуальности школьника и способствует развитию у него определенных задатков вкуса и стиля в методике работы. Наконец, неожиданность, свежесть полученных решений и романтика преодоления трудностей в сочетании с естественностью результатов доставляет читателю эстетическое удовлетворение от проделанной работы. Ведь многие школьники за годы обучения по старым учебникам и программам привыкли к тому, что задача, пусть даже повышенной трудности, является лишь упражнением для усвоения или укрепления в памяти теоретических положений. Между тем, решая олимпиадную задачу, школьники нередко сами строят и развивают небольшую теорию.

Очень многие из наших читателей благодарят «Квант» за статьи и задачи из раздела «Практикум абитуриента». Среди них десятиклассник Виктор Крыгин из г. Семипалатинска Казахской ССР, учителя математики М. Кулмуратов из совхоза «Минбулак» Тамдынского района Бухарской области Узбекской ССР и С. В. Жаворонкова из г. Кизыл-Арвата Туркменской ССР.

Из писем читателей нам известно, что многие считают научный уровень помещаемых в журнале материалов настолько высоким, что до него нелегко дотянуться. Хорошо ли это? Вот как ответил для себя на этот вопрос девятиклассник Василий Васильев из г. Воронежа: «Я считаю, что уровень помещаемого материала соответствует назначению журнала. К статье, которая недоступна сейчас, можно возвратиться через некоторое время». Десятиклассник Сергей Принцев из Кемерово, который мечтает стать математиком, уже констатирует определенный успех: «Вначале статьи были трудноваты, но потом я окреп. Сейчас все материалы доступны для меня». Студент-физик Воронежского государственного университета Анатолий Герман, который работал над «Квантом», будучи школьником, и продолжает с ним дружить, придерживается мнения: «Уровень изложения «Кванта» вполне доступен для тех, кто желает разобраться в интересующем их материале». Как бы в расчете на это восьмиклассник москвич Леонид Агапов пишет: «Я считаю, что мне еще расти и расти до уровня вашего журнала. Я постараюсь!»

Активность читателей можно усмотреть и в том, что все чаще они присылают на рассмотрение редакции собственные задачи и небольшие исследования. По математике, например, за первые пять месяцев нынешнего года таких писем около 240.

В этом году многие читатели сообщили нам свое мнение об оформлении «Кванта». Подавляющее большинство в ответе на вопрос анкеты — каковы ваши замечания и предложения относительно оформления журнала? — высказало удовлетворение. Доцент В. Е. Штепан из Красноярского политехнического института пишет: «Журнал имеет свой облик, отличающий его от других научно-популярных журналов. По-моему, примерно в таком виде его следует оформлять и в дальнейшем». Студент МГУ Валерий Гробовский считает: «Журнал оформляется со вкусом (не превращается ни в серый отчет, ни в разукрашенные картинки) и с некоторым, можно сказать, юмором и фантазией». А вот мнение двух школьников. Девятиклассник Владимир Хасаншин пишет: «Журнал оформлен оригинально. Хорошо, если бы были «смешинки», но занимали не слишком много места». Девятиклассница Лидия Башкатова из Воронежа считает: «Относительно оформления журнала можно сказать только положительное. Все иллюстрации четки и понятные. Большую роль, вероятно, играет в этом многоцветность». Мнение учительницы математики Н. Я. Бушминой из с. Бастан Михайловского района Алтайского края: «Оформление яркое и красочное. Пусть таким и останется». Не столь категоричен восьмиклассник Игорь Апальков из г. Саранска Мордовской АССР: «По-моему, журнал оформляется достаточно хорошо, хотя и несколько однообразно. Рисункам следует добавить романтики». Противоположной точки зрения придерживается десятиклассник Григорий Бейгельдруд из г. Артемовска Донецкой области УССР: «Не нравится чрезмерное обилие цветов. Хочется видеть больше чертежей с четкими, желательно разноцветными, в соответствии со смыслом, линиями. Предпочтительно, чтобы статья выглядела как научная, а не как популярная». Десятиклассник Анатолий Кутырев из Ступинского района Московской области считает: «Журнал в целом оформлен очень хорошо и красочно. Но хотелось, чтобы в нем было больше чертежей к наиболее трудным задачам».

Из более чем четырехсот вернувшихся с ответами читателей анкет, всего в двух содержится неудовлетворенность оформлением. Так, учитель физики В. А. Ганюшкин считает: «Мало выдумки в оформлении. Неяркие, непривлекательные заголовки. Мало хороших портретов ученых, очерк о которых помещен в данном журнале».

В письмах и ответах на вопросы анкеты содержится много пожеланий, которые редакция постарается учесть и за которые очень благодарна читателям.

К сожалению, очень немногие из школьников, участвующих в конкурсе «Задачника «Кванта», прислали нам ответы на анкету. Просим вас, дорогие участники конкурса, непременно на этот раз ответить на вопросы анкеты.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Гриша пошел с папой в тир. Уговор был такой: Гриша делает пять выстрелов и за каждое попадание в цель получает право сделать еще два выстрела. Всего Гриша сделал 17 выстрелов. Сколько раз Гриша попал в цель?

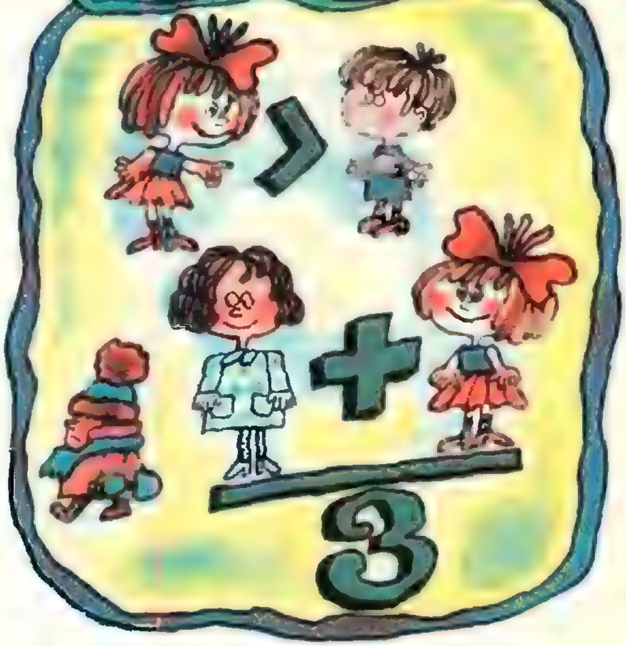
2. Почему грязный, покрытый копотью снег тает быстрее, чем чистый?

3. Сашина комната обладает таким свойством: если ее «поставить на бок» (на любую из боковых стен), то ее площадь не уменьшится. Высота потолка в комнате равна 3 метрам. Какова наибольшая возможная площадь такой комнаты?

4 Металлический лист с дырочкой нагревают. Как меняется при этом размер дырочки?

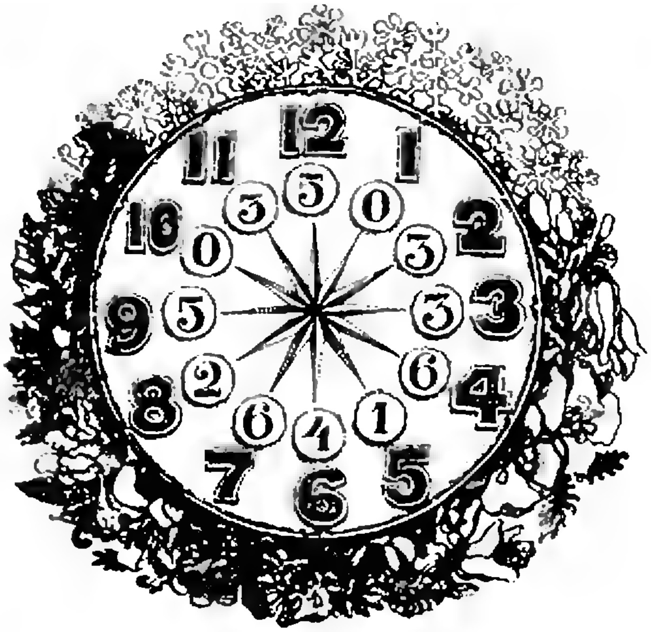
5. В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?

6. Судно массы m переместилось вверх по течению реки, поднявшись при этом на высоту H. Нужно ли при вычислении работы, совершенной двигателем учитывать величину mgH?



Рисунки Э. Назарова.

Часы-календарь



Сделать эти часы очень просто. Нарисуйте на бумаге круг и впишите в него числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12; рядом с каждым числом (ближе к центру) поставьте цифры в кружочках. На рисунке вы видите, как нужно располагать цифры. Вот календарь и готов. Как же им пользоваться?

Будем считать, что каждое число на циферблате — порядковый номер месяца:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь

а порядковые номера—дней недели

1	2	3	4	5	6	7 (0)
понедельник	вторник	среда	четверг	пятница	суббота	воскресенье

Что же можно узнать с помощью этого календаря?

Задача 1. *Требуется узнать, какой день будет 5 декабря 1973 года.*

Декабрь — 12-й месяц. Против числа 12 на циферблате стоит цифра 5. Прибавьте к дате (5) число в кружочке (5): 5 + 5 = 10. Полученную сумму делим на 7; в остатке вы получите 3; он и есть порядковый номер дня недели. Итак, 5 декабря — среда.

Задача 2. *Нужно узнать, в какой день недели Коля будет праздновать день своего рождения, если он родился 18 ноября.*

Ноябрь — 11-й месяц. Против числа 11 на циферблате стоит цифра 3. Прибавьте к дате (18) число в кружочке (3): 18 + 3 = 21. Полученную сумму делим на 7. В остатке получается 0; он и показывает порядковый номер дня недели.

Значит, день рождения Коли — воскресенье.

Задача 3. *Какие числа соответствуют четвергам августа?*

К числам 0, 7, 14, 21 и 28 прибавляем порядковый номер дня недели (4), а затем вычитаем число, стоящее в кружочке против месяца (август — 2): 0 + 4—2 = 2, 7 + 4 — — 2 = 9, 14 + 4 — 2 = 16, 21 + 4— — 2 = 23, 28 + 4 — 2 = 30.

Следовательно, четверги приходятся на 2, 9, 16, 23, 30 августа.

Задача 4. *Занятия математического кружка в декабре назначены на понедельники. Определить числа, в которые будут происходить занятия.*

Порядковый номер дня недели — 1. В кружке против декабря стоит число 5. 0 + 1 — 5 = —4 (не подходит); 7 + 1 — 5 = 3; 14 + 1 — 5 = 10; 21 + 1 — 5 = 17; 28 + 1 — 5 = 24.

Занятия математического кружка состоятся 3, 10, 17 и 24 декабря.

А теперь составьте себе календарь на 1974 год. Кстати, нельзя ли получить его из календаря на 1973 год?

В. М. Розентуллер

К статье «Тепловые машины»

1. 120 *дж*.
2. 100 *вт*.

К статье «Поиск решения задачи»

1. Опустите перпендикуляры из M на CE и из C на AD.

4. $|a-b|$.

5. Указание. Использовать теорему: «Геометрическое место середин хорд, исходящих из одной точки A окружности с центром O, есть окружность, построенная на AO, как на диаметре».

6. Указание. Если за основание пирамиды принять прямоугольный треугольник, то следует рассмотреть два случая ($\alpha \leqslant 90°$ и $\alpha > 90°$), если за основание принять остроугольный треугольник, то один случай. Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

7. Указание. Рассмотреть случаи, когда основание высоты пирамиды расположено на стороне равностороннего треугольника, внутри или вне его. Ответ:

$$V_1=\frac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)},$$

$$V_2=\frac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma)},$$

$$V_3=\frac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)},$$

$$V_4=\frac{a^3}{8(-\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}.$$

8. 34956, 34056, 34452.

9. Указание. Числа такого вида получаются при нечетных показателях степени.

К статье «Телевидение готовит в вуз»

(см. «Квант» № 11, 1973)

Физика

4. $v_2=r_2\sqrt{2g\,\dfrac{m_2r_2-m_1r_1}{m_1r_1^2+m_2r_2^2}}\approx 2{,}7$ *м/с*.

5. $$\cos\alpha=\frac{lk(3mg-F)+F(3mg-2F)}{2lkmg}=0{,}35.$$

6. $h=\dfrac{k_1l_1}{1-k\operatorname{ctg}\alpha_1}\approx 4$ *м*,

$$l_2=\frac{h}{k_2}-h\operatorname{ctg}\alpha_2\approx 4{,}8 \text{ м}.$$

Математика

7. $$\sin^2(\alpha-\beta)-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\,\mathrm{ccs}(\alpha-\beta)=\frac{1-\cos(2\alpha-2\beta)}{2}-\frac{1+\cos 2\beta}{2}+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=-\cos\alpha\cos(\alpha-2\beta)+\cos\alpha[\cos\alpha+\cos(\alpha-2\beta)]=\cos^2\alpha.$$

8. $$\operatorname{tg}3x=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}=\frac{\operatorname{tg}x+\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}}=\operatorname{tg}x\,\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}\,\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$$

9. $$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}}=\frac{\sin\dfrac{8\pi}{7}}{8\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}.$$

10. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{5}}$. Решение. Пусть AD, BF — медианы, $OD=x$, $OF=y$ (рис. 1). Используя свойства медиан, из треугольников AOB, BOD, AOF находим

$$4x^2+4y^2=c^2,\quad x^2+4y^2=\frac{a^2}{4},$$

$$4x^2+y^2=\frac{b^2}{4}.$$

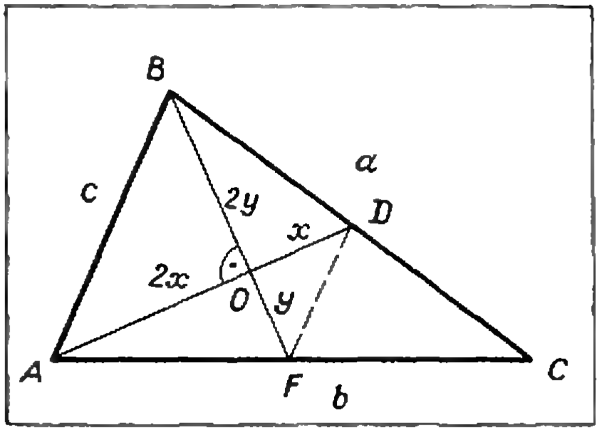


Рис. 1.

Исключая x и y, получаем $c^2=\frac{a^2+b^2}{5}$.

11. $\frac{4}{3}$. Указание. При решении полезно учесть, что $\triangle ABE \backsim \triangle KDE$, $\triangle AED \backsim \triangle BEF$.

12. $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

13. $\sin x$, если $a\cos x>0$; $-\sin x$, если $a\cos x<0$.

14. $h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{4}$, если основания трапеции расположены по одну сторону от центра описанной окружности: $h^2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}$, если основания трапеции расположены по разные стороны от центра описанной окружности.

15. $\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{a-b}\,ab\operatorname{tg}\alpha$. Решение. Построим отрезок CK (рис. 2), параллельный стороне AD. Тогда $\angle BCK=\alpha$. Пусть S — площадь трапеции, S_1 — площадь $\triangle BCK$, h — высота трапеции. Тогда

$$S=\frac{1}{2}(a+b)\,h=\frac{a+b}{a-b}\,S_1,$$

$$S_1=\frac{CK\cdot BC}{2}\sin\alpha.$$

По теореме косинусов:

$$BK^2=CK^2+BC^2-2CK\cdot BC\cos\alpha.$$

Учитывая, что $CK=AD$ и что треугольники AOD и BOC прямоугольные, получим

$$CK\cdot BC=\frac{AD^2+BC^2-BK^2}{2\cos\alpha}=$$

$$=\frac{AO^2+OD^2+OC^2+BO^2-BK^2}{2\cos\alpha}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2\cos\alpha}=\frac{ab}{\cos\alpha},$$

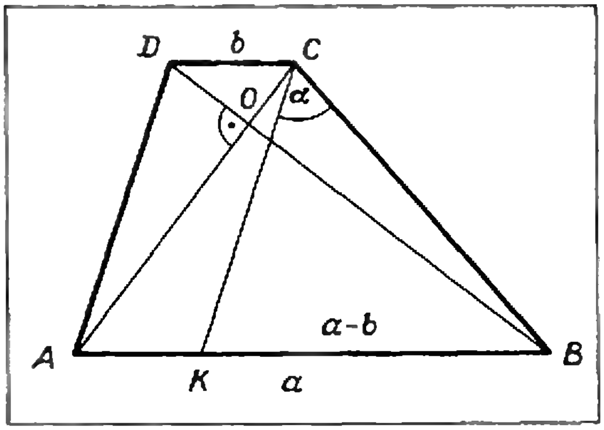


Рис. 2.

$$S_1=\frac{1}{2}\,ab\operatorname{tg}\alpha,$$

отсюда $S=\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{a-b}\,ab\operatorname{tg}\alpha$.

16. $R\left(\sqrt{1-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Указание. Пусть CDE — правильный треугольник, $OF\perp AB$ (рис. 3). Рассмотреть $\triangle OCE$ и учесть, что $\angle OCF=\angle ACM=\frac{\pi}{3}$.

(см. «Квант» № 12, 1973)

Физика

1. $\Delta h=\frac{4m}{\pi d^2}\left(\frac{1}{\rho_в}-\frac{1}{\rho_{св}}\right)\approx 3{,}8$ *см*.

2. $p_h=\rho_в g\,(H-h)+$
$+\rho_м g\,\frac{4V}{\pi\left(d_1^2+d_2^2\right)}\approx 2{,}7\cdot 10^3$ *н/м²*.

3. $p=\frac{p_2V_2-0{,}5p_1V_1}{V_1+V_2}+$
$+\,p_{нп}\approx 380$ *мм рт. ст.*

где $p_{нп}=20$ *мм рт. ст.* — давление насыщенного пара.

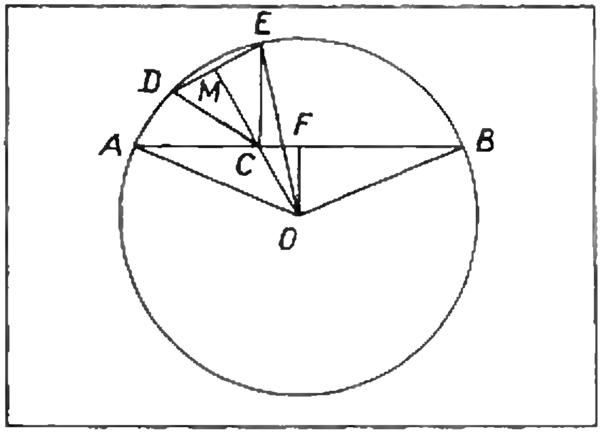


Рис. 3

Математика

1. Обозначим длины диагоналей параллелограмма через $2d_1$ и $2d_2$. Тогда площадь параллелограмма $S = 2d_1d_2 \sin \beta$. По теореме косинусов:

$$(3a)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \cos \beta,$$

$$a^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \beta,$$

откуда $2a^2 = d_1d_2 \cos \beta$. Следовательно,

$$S = 2 \frac{2a^2}{\cos \beta} \sin \beta = 4a^2 \operatorname{tg} \beta.$$

2. Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin 15^\circ + \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin 15^\circ.$$

Отсюда $BD = \frac{6}{5 \sin 15^\circ}$. Площадь треугольника ABD равна

$$\frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin 15^\circ = \frac{12}{5} \text{ см}^2.$$

3. $\frac{\pi}{4}$. Указание. Пусть CD — высота. Тогда $\Delta CDA = \Delta OBD$, откуда $BD = CD$.

4. $\frac{a \sin \alpha}{\cos 3\alpha}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$;

$$-\frac{a \sin \alpha}{\cos 3\alpha} \text{ при } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Указание. Прямая AO образует угол $\pm\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ с прямой BC.

К статье «Полигон логических структур»

1. См. рис. 4.

2. Схема автомата показана на рисунке 5. Здесь $A + B = S$ — числа, 2^0, 2^1 — разряды числа S.

3. См. рисунок 6. Здесь на входы A, B подаются по два сигнала (две двоичные цифры чисел), на выходе $S = A \times B$ получается четыре сигнала. Прямоугольники со знаком Σ — это сумматоры, схема которых приведена на рисунке 5.

4. См. рисунки 7, 8.

К задаче «Сколько треугольников?»

При $n = 7$ количество треугольников 11, при $n = 8$ количество треугольников 15.

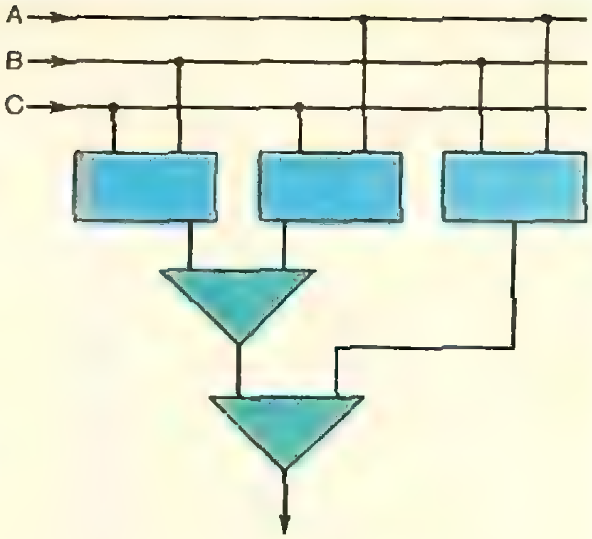


Рис. 4.

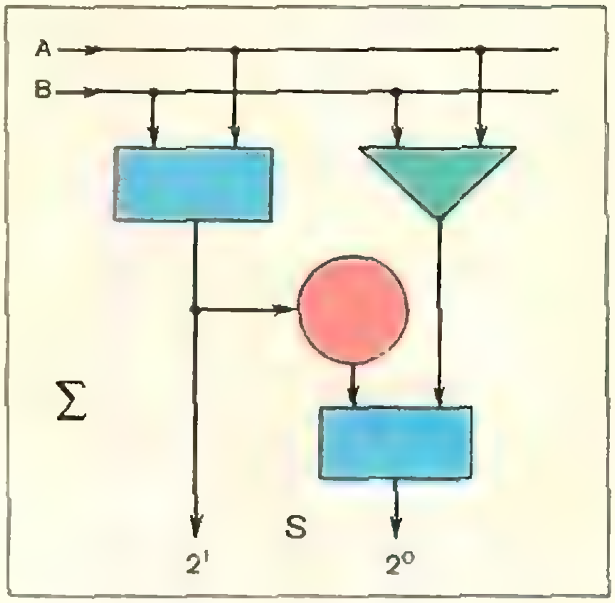


Рис. 5.

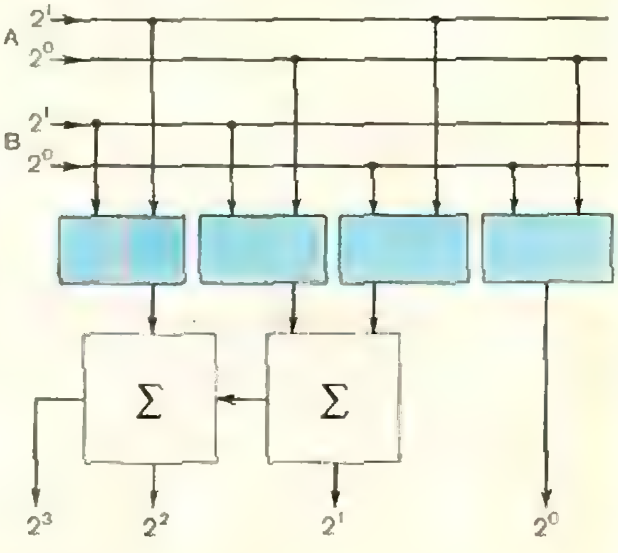


Рис. 6

BeatriceGloria_personal library

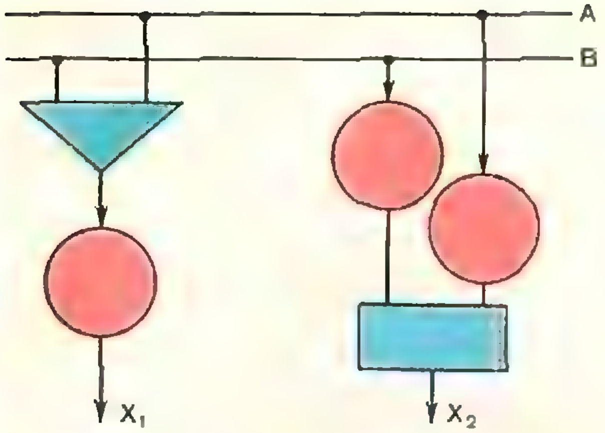


Рис. 7.

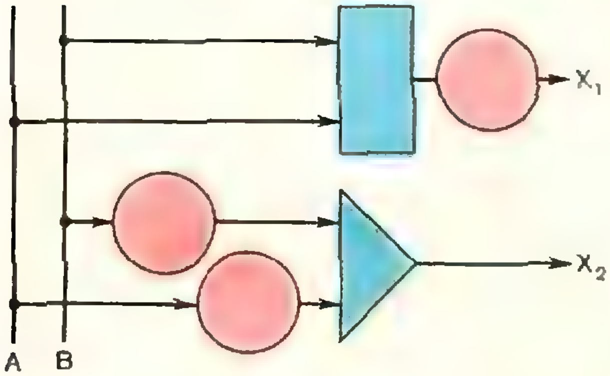


Рис. 8.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 11, 1973*)

1. Если направления вращения фигуристов совпадают, то 2,2 оборота в секунду; если не совпадают, то 1,8 оборота в секунду.

2. Чем меньше масса лодки, тем быстрее она «уходит из-под ног» прыгающего человека.

3. $а = 6$, $б = 5$, $д = 1$, $и = 2$, $л = 7$, $о = 8$, $у = 9$.

4. Противоречия никакого нет. Все дело в том, что соляной раствор имеет температуру замерзания ниже, чем чистая вода.

5. 40 лет, 30 лет.

(*см. «Квант»* № 12, 1973)

1. Шесть раз.

2. Темные тела поглощают большее количество тепловой энергии, чем светлые.

3. $9\ м^2$.

4. Размер дырочки увеличивается. (Лист расширяется так же, как если бы он был сплошным, без дырочки.)

5. Вере 5 лет, Боре — 8, Ане — 13, Гале — 15.

6. Нет. Сила mg уравновешена выталкивающей силой.

Напечатано в 1973 году

Александрова В. А. Томас Юнг (к 200-летию со дня рождения)	9	9
Виленкин Н. Я., Лишевский В. П. Эварист Галуа	10	2
Гиндикин С. Г. Блез Паскаль (к 350-летию со дня рождения)	8	4
Колмогоров А. Н. О профессии математика	4	12
Смолянский М. Л. Андрей Николаевич Колмогоров (к семидесятилетию со дня рождения)	4	8
Смородинский Я. А. Николай Коперник	2	2
Хренов Л. С. Абу Райхан Беруни (к 1000-летию со дня рождения)	9	2
Статьи по математике		
Бендукидзе А. Д. Золотое сечение	8	22
Болтянский В. Г. О вращении отрезка	4	24
Болтянский В. Г. Доказательства теорем Гюльдена	6	9
Вагутен В. Н. Числа C_n^k, многочлены, последовательности	2	27
Васильев Н. Б., Гальперин Г. А. Упаковка квадратов	4	35
Васильев Н. Б. Последовательность прыжков	11	25
Гервер М. Л. Собака бежит наперерез	3	15
Гервер М. Л. О наполнении и закупоривании бутылок	6	20
Гиндикин С. Г. Золотая теорема	1	2
Гиндикин С. Г. Сколько существует операций над множествами?	7	2
Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Машина управляет	11	11
Демидович Н. Б. Вычисления, ошибки, контроль	2	11
Жаутыков О. А. О границах корней кубического уравнения	12	21
Калужнин Л. А. К 100-летию теории множеств Георга Кантора	12	2
Колмогоров А. Н. Полулогарифмическая и логарифмическая сетки	3	2
Колотов А. Т. Об одном разбиении прямоугольника	1	14
Крейн М. Г., Нудельман А. А. О некоторых пространственных изопериметрических задачах	2	22

Милг М. Л. Что сказал проводник?	8	38
Садовский Л. Е., Садовский А. Л. Как измеряют площадь	10	22
Силкин Б. И. С корнем квадратным — сквозь историю	6	28
Фукс Д. Б., Фукс М. Б. Рациональные приближения и трансцендентность	12	9
Хренов Л. С. Задача Потенота	4	30
Хургин Я. И. Кибернетик ищет подземные кладовые	5	7
Шарыгин И. Ф. Об одном геометрическом месте точек	8	47
Шевелев Л. Я. Объем тел вращения	8	35
Эппель Б. С. Задачи о телах вращения и теоремы Гюльдена	6	4
Яглом И. М. Оценки углов	10	30

Статьи по физике

Андреев А. Ф. Сверхтекучесть жидкого гелия	10	14
Асламазов А. Г. Поверхностное натяжение	7	11
Бородин Д. Гравитационная масса	2	17
Бялко А. В. Коэффициент полезного действия ракеты	2	35
Каганов М. И., Любарский Г. Я. Электрон движется с трением	6	14
Карпухин О. Н. Физика химического взаимодействия	8	28
Коваленко К. Р., Крейн М. Г. Баллистическая задача в космосе	5	2
Коткин Г. Л. Столкновение шариков	3	19
Кресин В. З. Природа сверхпроводимости	11	2
Кузнецов В. И. Часы на миллиарды лет	4	19
Куперман Г. Б., Щукин Е. Д. Механические свойства кристаллов	10	37
Лифшиц М. С. Эхолокация	3	8
Николая Коперника малый комментарий относительно установленных им гипотез о небесных движениях	2	9
Нетужилин А. Г. К. Э. Циолковский в фотографиях	4	2
Паскаль Блез. Трактат о равновесии жидкостей	8	19
Соколовский Ю. И. Тепловые машины	12	12
Смирнов Б. М. Тепловой баланс Земли	1	10
Тейлор Б., Лангенберг Д., Паркер У. Фундаментальные физические постоянные	5	15
Юнг Т. Экспериментальная демонстрация интерференции света	9	12

Математический кружок

Абрамович В. С. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел	5	22
Балк Г. Д., Балк М. Б. Мнимые числа и геометрические задачи	3	22
Балк М. Б., Григорьев Н. А. Механика помогает геометрии	11	34
Березин В. Н. Правильные многогранники	5	26
Березина Л. Ю. О графах с цветными ребрами	8	49
Гервер М. Л. Про лису и собаку	2	39
Егоров А. А. Площадь под гиперболой, логарифм и экспонента	6	30
Ионин Ю. И., Курляндчик Л. Д. Окрестность фигуры	10	43
Кордемский Б. А. Этому виду задач более 1600 лет	4	38
Кордемский Б. А. Красочная комбинаторика	9	18
Лоповок Л. М. Вписанный шестиугольник	1	18
Лысов Ю. П. Каких чисел больше?	12	26
Тоом А. Л. Решения задач вступительной контрольной работы ВЗМШ 1973 года	7	21

Лаборатория «Кванта»

Алейников Б. И. Как определить полюса магнита?	10	42
Варламов А. А., Казаковцев Д. В. Выращивание кристаллов	6	40
Воробьев И. И. Поверхностное натяжение чертит гиперболу	11	32
Майер В. В. Борный люминофор	3	34
Майер В. В., Шафир Р.-Э. Е. С какой скоростью движутся ионы?	4	42
Майер В. В. Опыты с инфракрасным излучением	5	21
Рачлис Х. Загадка водяной капли	1	17

Практикум абитуриента

Атавин А. А., Беляев С. Т., Цецохо В. А Новосибирский государственный университет	5	47
Баканина Л. П., Козел С. М. Принцип суперпозиции в электростатике	3	50
Белонучкин В. Е., Козел С. М. Закон сохранения энергии	7	30
Боровинский Л. А. Задачи на максимум и минимум	5	43
Веретенникова Е. В., Крупич В. И. Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина	7	53

Вступительные экзамены в вузы	7	44
Голубов Э. А. Уральский государственный университет имени А. М. Горького	7	51
Гольдберг В. В., Дымбицкая Л. Г. Московский институт стали и сплавов	7	48
Груденов Я. И. Поиск решения задачи	12	39
Гурский И. П. Кинематика прямолинейного движения материальной точки	11	57
Давыдов В. И., Дьяконов И. А., Дыбов П. Т., Наслузов И. И. Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы	7	42
Дьяконов И. А., Мордкович А. Г., Наслузов И. И. Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы	2	67
Дьяконов И. А., Мордкович А. Г., Наслузов И. И. Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы	3	57
Ефимов А. В. Московский институт электронной техники	6	60
Зайцев И. А. Уравнение газового состояния. Работа и теплоемкость газа	1	43
Камшилина В. М. Московский энергетический институт	7	44
Клюшин В. Л. Университет дружбы народов имени П. Лумумбы	4	64
Лебедев В. П. Некоторые задачи на прогрессии	4	57
Лоповок Л. М. Против шаблона	3	44
Малахов В. И. Московский институт инженеров железнодорожного транспорта	7	49
Молодежникова Р. Н., Семенов И. И. Московский авиационный институт	6	59
Московский инженерно-физический институт	1	40
Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова	2	64
Московский государственный университет (экономический факультет)	3	56
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова	4	60
Овчинников С. В., Шарыгин И. Ф. Числовые данные в геометрических задачах	11	52
Пекарскас В. В. Геометрия комплексных чисел	6	54
Рублев А. Н., Тонян В. А. Московский институт электронного машиностроения	7	45
Рывкин А. А. Формализация условий задач	1	35
Рывкин А. А. Периодические функции	5	38
Саульев В. К. О новой квалификации «инженер-математик»	6	58
Столяров И. А. Переход от одной системы единиц к другой	4	52
Столяров И. А. Движение заряженных частиц в электрическом поле	7	35
Технические вузы с повышенной математической подготовкой	6	58
Телевидение готовит в вуз	11	62
Телевидение готовит в вуз	12	45
Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы	11	61
Чопенко О. П. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики	6	61
Шабунин М. И., Черемных С. В. Тригонометрические уравнения	2	58

Задачник «Кванта»

Задачи

M181 — M185; Ф193 — Ф197	1	25
M186 — M190; Ф198 — Ф202	2	45
M191 — M195; Ф203 — Ф207	3	35
M196 — M200; Ф208 — Ф212	4	43
M201 — M205; Ф213 — Ф217	5	28
M206 — M210; Ф218 — Ф222	6	42
M211 — M215; Ф223 — Ф227	7	24
M216 — M220; Ф228 — Ф232	8	60
M221 — M225; Ф233 — Ф237	9	25
M226 — M230; Ф238 — Ф242	10	46
M231 — M235; Ф243 — Ф247	11	40
M236 — M240; Ф248 — Ф252	12	29
Победители конкурса «Кванта»	3	32
Победители конкурса «Кванта»	9	24

Решения задач

M141 — M145; Ф159 — Ф163	1	26
M146 — M150; Ф164 — Ф169	2	47
M151 — M154; Ф170 — Ф175	3	37
M156 — M159; Ф176 — Ф177	4	46
M160 — M164; Ф178 — Ф182	5	30
M165 — M169; Ф183 — Ф187	6	44
M170 — M173; Ф188 — Ф192	7	26
M174 — M178	8	62
M179 — M183; Ф193 — M197	9	27
M184 — M189; Ф198 — Ф202	10	48
M191 — M194; Ф203 — Ф207	11	42
M179, M196 — M199; Ф208 — Ф210	12	31

Рецензии, библиография

Березин В. Н., Смолянский М. Л. «Математические досуги» Мартина Гарднера	6	62
Березин В. Н., Доронина Н. М. Книги о международных олимпиадах	11	75
Евгеньев И. Е. Книга о Вселенной	10	64
Зорич И. Симметрия в природе	4	65
Кашин К. И. Что такое «центроид?»	10	66
Кедров Ф. Брошюры по физике	6	68
Колмогоров А. Н. Полезная книга	11	74
Кузнецова Л. Г. Для поступающих в институты и техникумы	3	59

Макуха А. В издательстве «Вища школа» 4 66
Олерский Е. И. История числа л 3 58
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги 10 68
Серпов П. А. Отпугивающая реклама 2 72
Смолянский М. Л. Новые книги 2 74
Смолянский М. Л. Новые книги 5 50
Смолянский М. Л. Новые книги 6 66

Информация

Березин В. Н., Смолянский М. Л. Наша почта 12 52
Виленкин А. Н. VII городская научная конференция школьников Киева 8 69
Всесоюзная ЗФМШ при МГУ 1 48
Дьяконов И. А., Мордкович А. Г., Наслузов И. И. Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы 1 54
Иванов В. В., Фонотов А. Г. Экономико-математическая школа при экономическом факультете МГУ 2 70
Каганов А. В., Наслузов И. И. Телевидение готовит в вуз 9 74
Карасев М. Д., Тарасюк Г. С. VI Международная олимпиада по физике 6 72
Кованцова Л. В. Киевская заочная физико-математическая школа 6 70
Лешковцев В. А. Государственные премии 1972 года 4 67
Новикова Л., Стрельцов В. Полигон логических структур 12 46
Орлов А. И. ВМШ при Московском математическом обществе 9 72
Раббот Ж. М. Новый прием в ВЗМШ 1 50
Халамайзер А. Я. Экзамены по математике в школах ГДР 5 52
Чугунова Т. А. Заочная физико-математическая школа 1 51

Всесоюзные и Международные олимпиады школьников по математике и физике

Бернштейн И. Н. Матбой 9 50
Лиманов Л. Г. Задачи по математике 9 47
Пашкова Л. М. Олимпиада у математиков 9 41
Петраков И. С., Скворцов В. А. XV Международная математическая олимпиада 11 64
Петрова Т. С., Тихомирова В. А. Физическая олимпиада 9 52
Смолянский М. Л. Всесоюзные олимпиады 9 38
Смолянский М. Л. История международных олимпиад 11 71
Яглом И. М. Сборники «олимпиадных» задач 9 60

«Квант» для младших школьников

Азия А. П., Вольпер И. М. Квадрат Пирсона 3 61
Бендукидзе А. Д. О простых числах 4 71
Бендукидзе А. Д. О распределении простых чисел 5 56
Варпаховский А. С. Пальцы — счетная машина 6 75
Варпаховский А. С. Тайны совершенных чисел и дружественных пар 10 71
Виленкин А. Н. Картезианский водолаз 2 69
Минц Н. А. Почему подушка мягкая? 11 77
Петрова Т. С. Огонь в решете 7 57
Розентуллер В. М. Часы-календарь 12 55
Сойфер А. Ю. Наш зоопарк 1 64
Сойфер А. Ю. Новоселы зоопарка «Кванта» 9 77
Фладе Л. Маленькие слова с большим значением 8 71

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 7/IX 1973 г
Подписано в печать 19/X 1973 г. Заказ 1762
Бумага $70\times100^1/_{16}$ Физ. печ. л. 1 Усл печ. л. 5,2
Уч.-изд. л. 5,98 Т-17609 Цена 30 коп.
Первый завод 340 000 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Уважаемый читатель!

Мы очень Вам благодарны, если Вы прислали ответы на вопросы нашей анкеты в прошлом году. Ваше участие в работе нашего журнала принесло редакции большую пользу. Однако, к сожалению, мы получили мало ответов на нашу анкету. Просим Вас, уважаемый читатель, найти время и ответить на вопросы редакции о работе журнала в 1973 году.

С тем, чтобы облегчить Вашу работу и упростить учет, отвечать предлагается кратко, заполняя пропуски или подчеркивая тот из предлагаемых ответов, который ближе других к Вашему мнению.

Мы будем очень Вам признательны, если Вы дополнительно к ответам на вопросы анкеты на отдельном листке письменно и развернуто выскажите свое мнение о журнале, а также Ваши пожелания редакции на 1974 год. Наш адрес: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект 15, «Квант», «Анкета».

1. Фамилия, имя, отчество

....

2. Возраст

....

3. Школа, класс или профессия

....

4. Место жительства

5. Нравится ли Вам «Квант»: а) в целом б) с оговорками

в) не нравится

6. Какой из двух разделов журнала Вам больше нравится:

а) математика б) физика
в) одинаково — математика и физика

7. Понятны ли Вам условия и решения задач из раздела «Задачник «Кванта»:

Математика	**Физика**
а) да;	**а) да;**
б) нет	**б) нет**

8. Удается ли Вам справиться самостоятельно с задачами из раздела «Задачник «Кванта»:

Математика	**Физика**
а) да; б) иногда; в) нет	**а) да; б) иногда; в) нет**

9. Посильны ли для Вас статьи по математике, помещенные в «Кванте»:

а) да (какие)

....

б) отчасти (какие)

....

в) нет (какие)

....

10. Интересны ли Вам статьи по математике, помещенные в «Кванте»:
а) да (какие)

....

б) нет (какие)

....

11. Посильны ли для Вас статьи по физике, помещаемые в «Кванте»
а) да (какие)

....

б) отчасти (какие)

....

в) нет (какие)

....

12. Интересны ли Вам статьи по физике, помещенные в «Кванте»
а) да (какие)

....

б) нет (какие)

....

13. Помог ли Вам «Квант» получить более глубокое представление о математике или физике
а) да; б) нет

14. Считаете ли Вы полезными материалы раздела «Практикум абитуриента»
а) да (какие)

....

в) нет (какие)

....

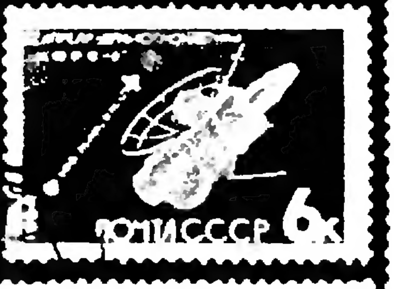
15. Нужно ли расширять раздел журнала «Квант» для младших школьников»
а) да; б) нет
16. Довольны ли Вы оформлением журнала
а) да; б) отчасти; в) нет
17. Какие статьи Вы хотели бы видеть в журнале в 1974 году
а) по математике

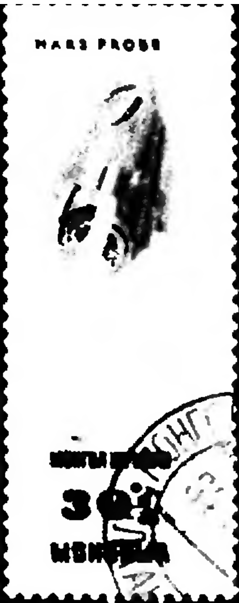
....

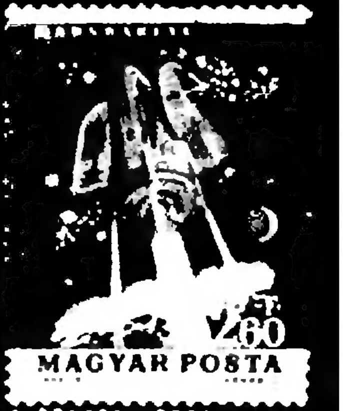
б) по физике

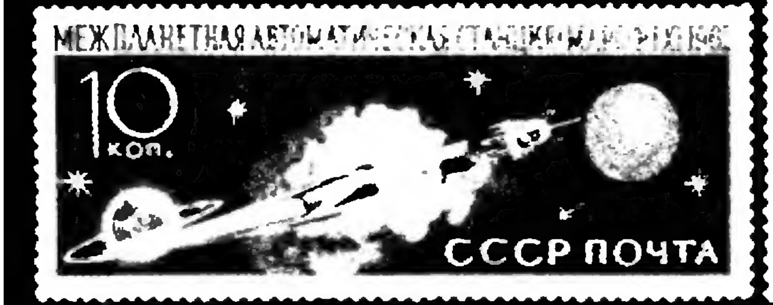
....

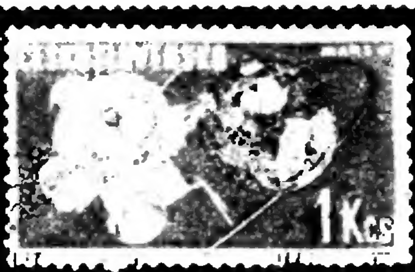
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

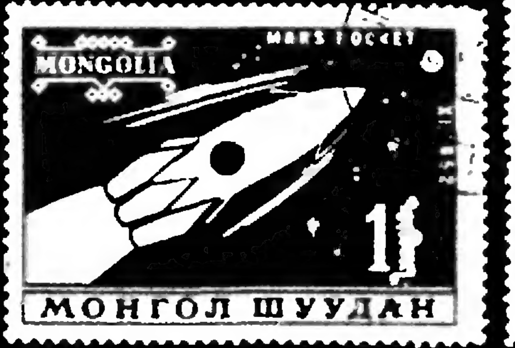


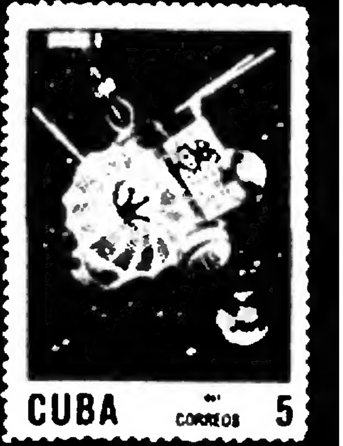


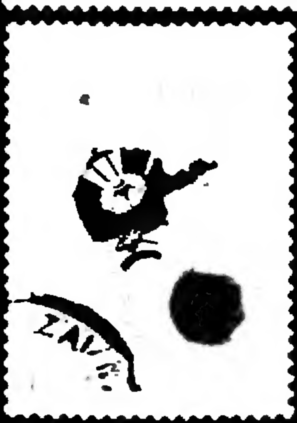


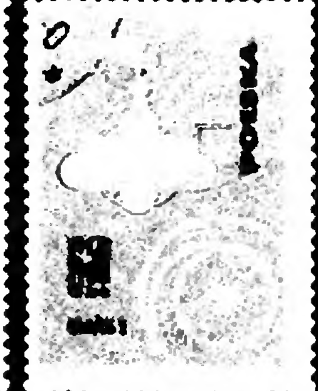












ПЕРВАЯ РАКЕТА К МАРСУ

Марс — одна из наиболее интересных планет Солнечной системы. Именно с ним связывало человечество надежду на близкую встречу с другими разумными существами. Долгое время Марс задавал ученым загадку за загадкой. Тут и марсианские «каналы», которые в 1877 году впервые заметил итальянский астроном Скиапарелли, и гипотеза советского астрофизика И. С. Шкловского о том, что один из спутников Марса (Фобос) искусственный и многое другое. Однако длительные оптические исследования и даже радиоастрономические методы измерений не давали точных ответов на многочисленные вопросы, связанные с природой этой загадочной планеты.

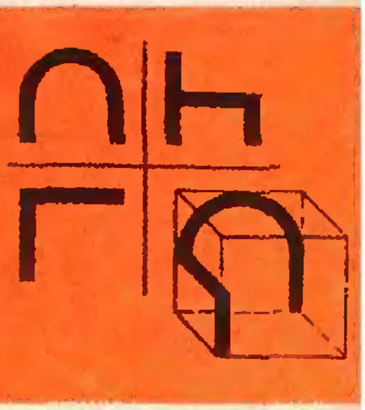
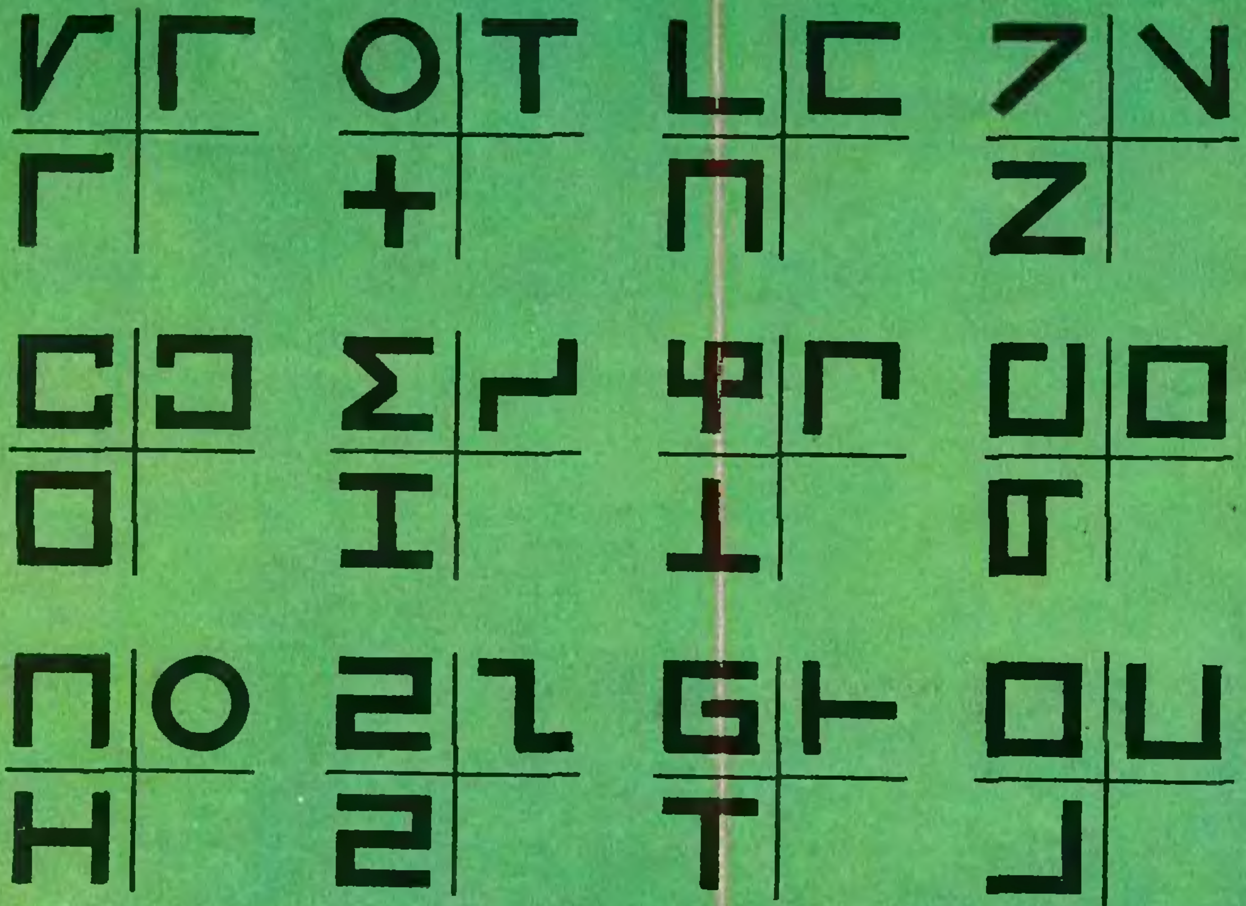
Первый и очень важный шаг к исследованию Марса с помощью космических аппаратов, способных приближаться к нему на сравнительно небольшие расстояния, становиться его спутниками и доставлять на его поверхность научную аппаратуру, а, в будущем, и людей, был осуществлен в Советском Союзе. Одиннадцать лет тому назад, 1 ноября 1962 года, отправилась в длительный путь первая в мире межпланетная автоматическая станция «Марс-1». С тех пор ученые добыли огромное количество ценных научных данных о природе Марса. Прекрасные фотографии ряда участков поверхности Марса были получены американскими автоматическими станциями «Маринер». Советские межпланетные станции «Марс-2» и «Марс-3» превратились в искусственных спутников Марса. Успешно произведена мягкая посадка автоматической марсианской станции на поверхность планеты. Сейчас приближаются к Марсу автоматические станции «Марс-4» — «Марс-7».

В память о запуске первой межпланетной автоматической станции в ряде стран были выпущены специальные почтовые марки. Мы воспроизводим здесь марки СССР, Польши, Венгрии, Чехословакии, Монголии и Кубы, на которых изображена станция «Марс-1».

В. А. Лешковцев

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

12

На нижних рисунках даны три проекции моделей, сделанных из куска толстой проволоки. Эти модели не имеют накладывающихся (двойных) участков и скрепленных узлов. По заданным проекциям постройте наглядные изображения фигур (все эти фигуры вписываются в куб). Для примера на рисунке справа (вверху) построена в аксометрической проекции одна из фигур.